

中華民國第 52 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組 數學科

第三名

040418

天羅地網—雷射光線之反射路徑與正 n 邊形完全圖之關係探討

學校名稱：國立鳳山高級中學

作者：	指導老師：
高二 黃柏竣	顏祥益
高二 魏章庭	連崇馨

關鍵詞：完全圖、完全反射數、鏡面轉動數

天羅地網－雷射光線之反射路徑與正 n 邊形完全圖之關係探討

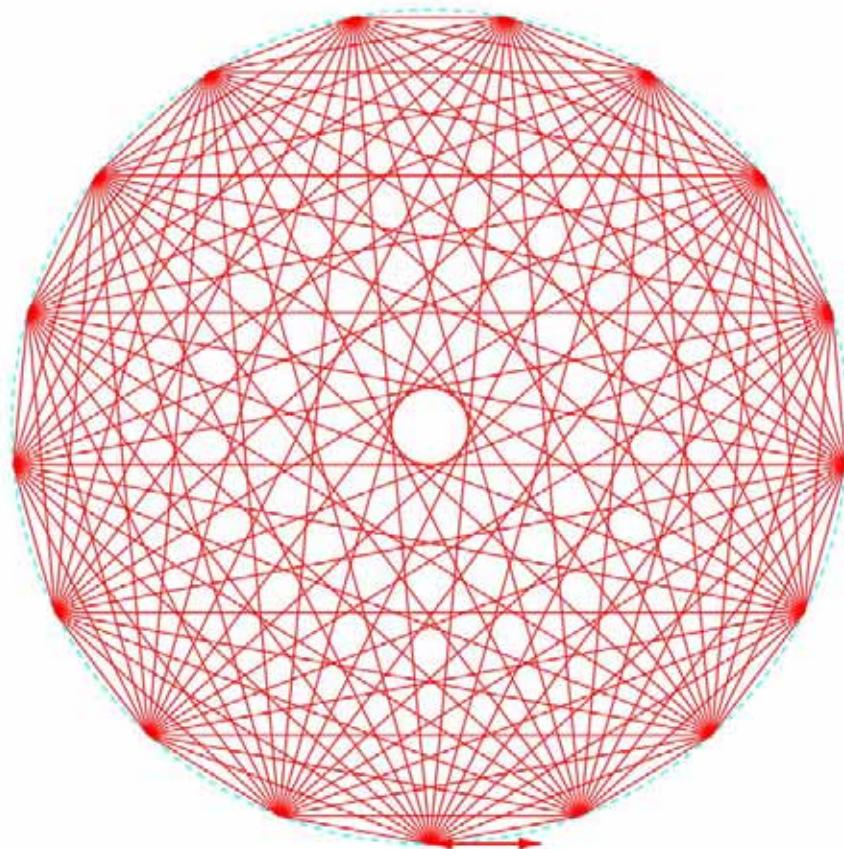
摘要

在正 n 邊形的 n 個頂點各放一面鏡子，並將其中一個鏡面順時針轉動 $\frac{90^\circ}{n}$ ，將雷射光線

沿該點切線方向射向此鏡面，使光線在正 n 邊形各頂點的鏡面間反射，本文主要在探討光線在各鏡面間反射路徑之規律性與其應用，研究分為兩大部分：

一、將雷射光線射向一順時針調整角度 $\theta = \frac{90^\circ}{n}$ 的鏡面且其餘鏡面皆不轉動之情形下，探討雷射光線的反射路徑之規律性及尋找正多邊形邊數與反射數間的關聯性。

二、在正 n 邊形的 n 個鏡面中，每個鏡面可依順時針或逆時針旋轉一個角度 $\theta = \frac{90^\circ}{n}$ 或是不轉動。此部分我們只針對 n 為偶數的情況去探討，我們採用數學上函數的對應方式取代了物理上反射原理的路徑操作，由數學的模式去探討鏡面調整的規則，擬訂出適當的策略調整鏡面的轉動，並找出最大反射數。



光線在正十七邊形之鏡面間的反射情形

壹、研究動機

在數學專題課裡，老師帶領著我們研讀一些文章，其中有一篇文章「*Point Mirror Reflection*」[5]，是關於光線在鏡面間的反射路徑探討，這個物理現象讓我們聯想到一部精彩的電影：Entrapment (中文片名：「將計就計」)，影片中女主角為了盜取在博物館展覽的寶物，必須穿越錯綜複雜雷射光線，以避免觸動警報系統。這引起了我們對這個主題研究的興趣，我們想到是否能經由鏡面位置的安排與適當的轉動角度，佈置出如天羅地網的雷射光線，形成一個十分完善的防盜警報系統，於是我們就開始進行資料的搜尋與查證。

首先，在國內及國際科展所查尋到的資料分數學與物理兩大類：第一類是數學的科展部分，我們發覺之前的有關鏡射或反射的科展作品，較多是探討多邊形周長最小值的問題，如：第三十八屆中小學科展的「鏡射乾坤」，2004 年的國際科展的「正 n 邊形光圈之路徑追蹤」。第二類是物理的科展部分，物理的研究較多是探討光的折射率與我們所探討的數學理論方向不同。

我們也上網搜尋了「*Point Mirror Reflection*」[5]之作者 M. Oskar van Deventer 以了解其對於相關問題是否有更進一步之發展，不過均無所獲。因此在確立了研究主題沒有人做進一步的探討後，我們就開始著手進行研究，以下我們即將佈下一個天羅地網，請拭目以待。

貳、研究目的

一、探討在只將第一個鏡面(引入光線之入射鏡面)順時針轉動 $\frac{90^\circ}{n}$ ，而其餘鏡面不轉動時，

光線在正 n 邊形各頂點的鏡面間之反射情形並計算其反射數。

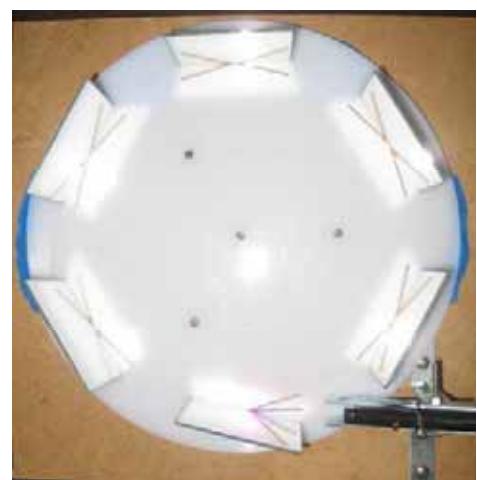
二、進一步討論除第一個鏡面(引入光線之入射鏡面)順時針轉動 $\frac{90^\circ}{n}$ 外，其餘鏡面可以依順時

針或逆時針旋轉一個角度 $\theta = \frac{90^\circ}{n}$ 亦或是不轉動，光線在正 n 邊形(n 為偶數)各頂點的鏡面間反射的情形。

三、找出鏡面調整之規則，藉由調整多個鏡面以增加光線在正 n 邊形各頂點的鏡面間的反射次數並計算其調整後之反射次數。

四、運用鏡面調整之規則擬訂策略找尋反射數的最大值。

五、探討正 n 邊形之邊數 n 的質因數與缺少的反射線數之間聯性。



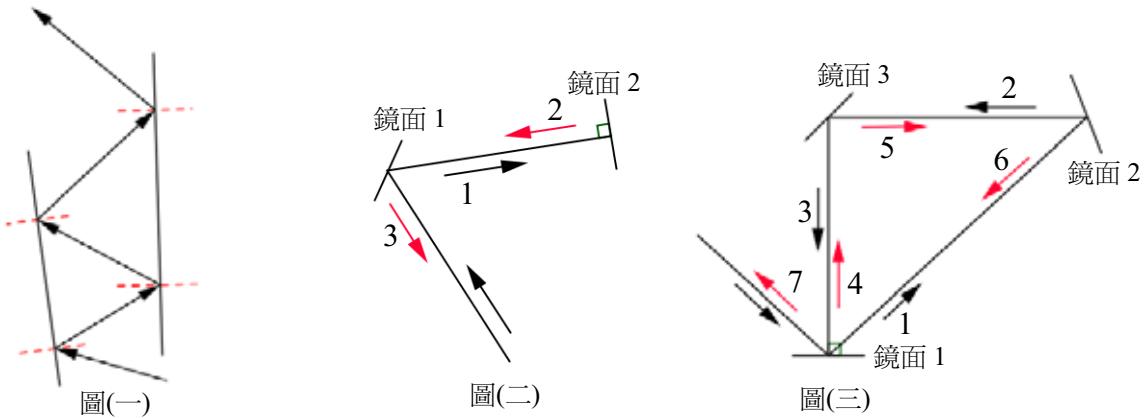
參、研究設備及器材

一、電腦、GeoGebra 軟體、Matlab 軟體

二、自製模型組、4MW 以下之雷射頭、平面鏡

肆、研究過程與方法

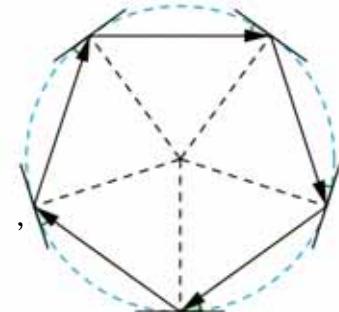
我們都知道雷射光可在兩個鏡面間做許多次的反射，如圖(一)。在圖(二)中，雷射光線經鏡面 1 反射後垂直地打在鏡面 2 上並沿原路徑反射回來，光線在這兩個鏡面間經歷了 3 次反射。在圖(三)中，雷射光線在經鏡面 1、2、3 後反射後垂直地打在鏡面 1 上並沿原路徑反射回來，光線在這三個鏡面間經歷了 7 次反射。



本文我們將鏡面置於正 n 邊形的頂點處，並探討雷射光線在此正 n 邊形的各個鏡面間的反射情形，但只針對雷射光線能夠垂直地打在某個鏡面上，並依原路徑折返回發光源的反射路徑去計算其反射數。

在一個正 n 邊形的 n 個頂點處各放一個鏡子，鏡面之法線為頂點與中心之連線，若由其中一個頂點往相鄰的另一頂點發射一雷射光線，由於入射線與每個鏡面的夾角恰為一個弦切角等於 $\frac{180^\circ}{n}$ ，即光線行經各鏡面之入射角與反射角均相同，因此由反射原理，

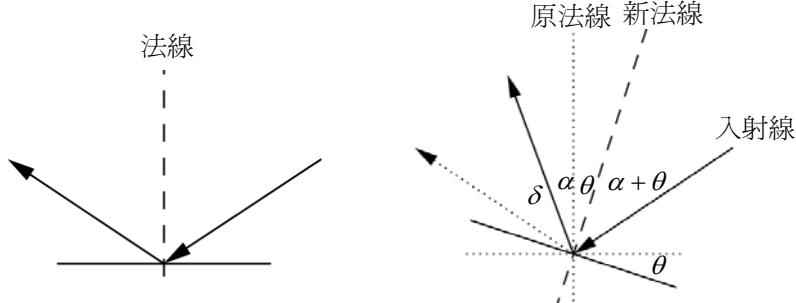
我們知道光線會在這 n 個鏡面間不斷地進行循環的反射作用，如右圖(四)以正五邊形之情形為例說明。



圖(四)，圖中之虛線表法線，入射線與鏡面之夾角恰為一弦切角

$= \frac{180^\circ}{5}$ ，光線會在這 n 個鏡面間不斷地進行循環的反射

首先為了避免這種無限循環的反射，我們利用物理學上的光槓桿原理，將鏡面作一些調整，並在以下的圖(五)~圖(六)對鏡面有無調整做對照說明，以方便本研究過程之進行。



圖(五) 鏡面無調整

圖(六) 鏡面順時針調整 θ

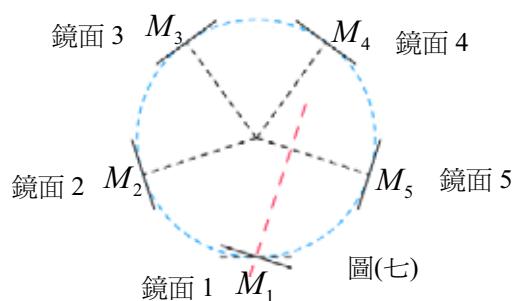
$$\begin{aligned} &\text{由入射角=反射角可知} \\ &\delta + \alpha = \alpha + 2\theta \\ &\Rightarrow \delta = 2\theta \end{aligned}$$

光槓桿原理是光反射的應用之一，固定入射光的方向，當鏡子轉動一角度時，反射線所轉的角度是鏡子的 2 倍，稱之為光槓桿原理，如圖(六)，經由此一調整的作用可避免光線進行無限次循環的反射問題。因此以下我們的討論情形都是將雷射光線沿切線方向射向一順時針調整角度 $\theta = \frac{90^\circ}{n}$ 的鏡面(即內文中之鏡面 1)且其餘鏡面皆不轉動，其中 n 為正 n 邊形之邊數，藉由此一調整的作用將雷射光線引入，而為了方便討論與研究的進行，我們運用了一些符號與定義，在此作說明：

一、定義 1：

(一) 鏡面位置：正 n 邊形的頂點依順時針方向依序擺放 n 個鏡面，並依序稱為鏡面 1、鏡面 2、…、鏡面 n ，以 M_1 、 M_2 、…、 M_n 表示。

如圖(七)所示：



圖(七)

(二) 層：當光線第一次射入鏡面 1 時(即第一次經光槓桿原理之作用)，稱為第一層反射；

⋮

當光線第 L 次射入鏡面 1 時(即第 L 次經光槓桿原理之作用)稱為第 L 層反射。

(三) 反射次數：第一層反射次數總和稱為 R_1 ；

⋮

第 L 層反射次數總和稱為 R_L 。

(四) 跳躍數：在第一層時，光線的路徑依順時針方向連續每一個鏡面均反射 1 次，稱為跳躍數 1，記為 $J_1 = 1$ ；

⋮

在第 L 層時，光線的路徑依順時針方向連續每 L 個鏡面均反射 1 次，稱為跳躍數 L ，記為 $J_L = L$ 。

(五) 圈數：在第一層時，當光線每經過鏡面 1 一次稱為一圈，因此在第一層中，光線所繞的總圈數記為 O_1 ；

⋮

在第 L 層時，當光線每經過鏡面 1 一次稱為一圈，因此在第 L 層中，光線所繞的總圈數記為 O_L 。

以下以正六邊形為例，對上述的符號及定義作說明：

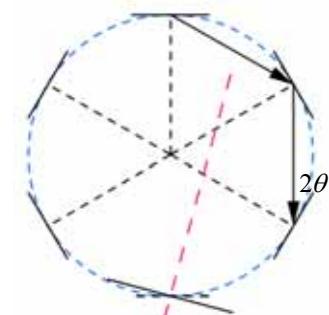
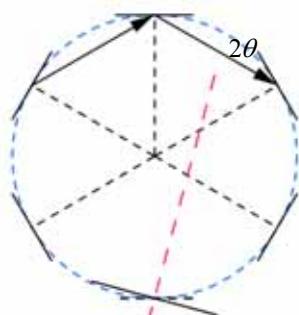
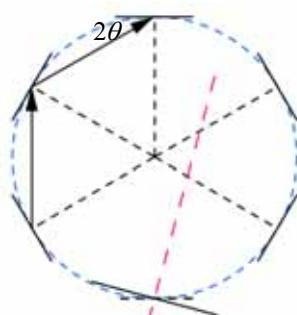
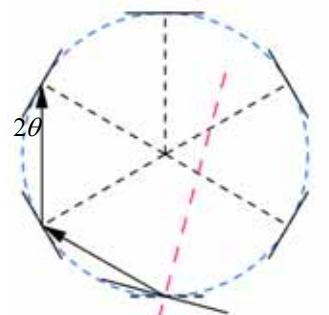
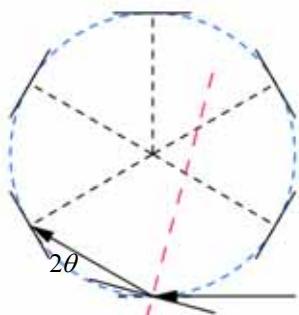
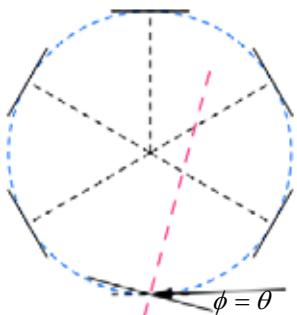
觀察：六邊形：在 $n = 6$ 時，假設入射光線的方向與所反射鏡面順時針方向之夾角為 ϕ ，又令

$$\theta = \frac{90^\circ}{6}，\text{ 觀察 } \phi \text{ 的角度變化。}$$

第一層 $M_1 \quad M_2 \quad M_3 \quad M_4 \quad M_5 \quad M_6$

$$\theta \rightarrow 2\theta \rightarrow 2\theta \rightarrow 2\theta \rightarrow 2\theta \rightarrow 2\theta$$

在第一層裡， $R_1 = 6$ ， $J_1 = 1$ ， $O_1 = 1$ 。

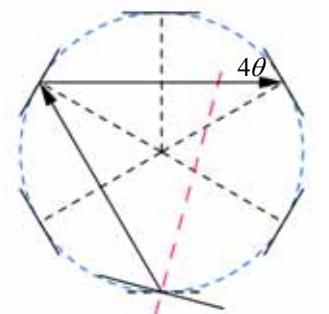
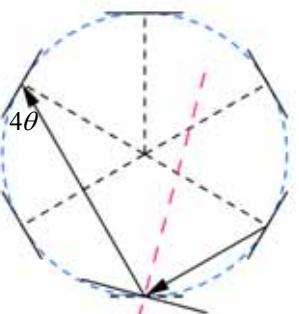
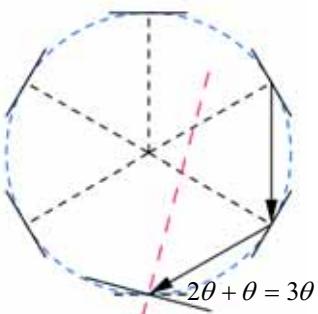


圖(八)

第二層 $M_1 \quad M_3 \quad M_5$

$$3\theta \rightarrow 4\theta \rightarrow 4\theta$$

在第二層裡， $R_2 = 3$ ， $J_2 = 2$ ， $O_2 = 1$ 。



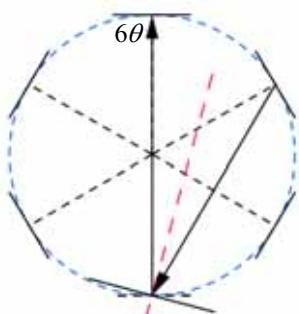
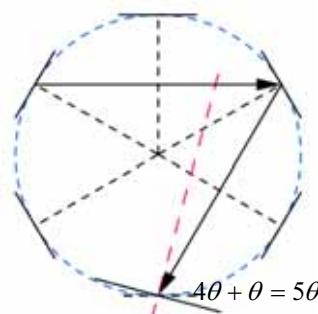
圖(九)

第三層 $M_1 \quad M_4$

$$5\theta \rightarrow 6\theta = 90^\circ$$

開始折返回原入射路徑

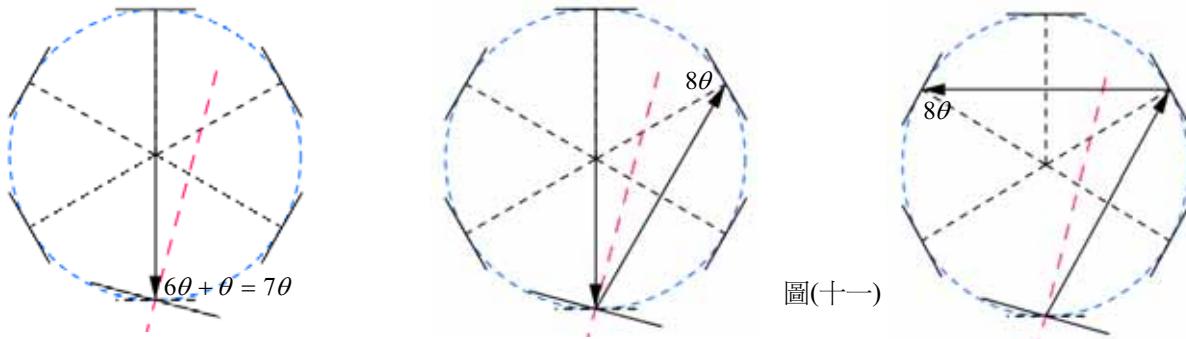
在第三層裡， $R_3 = 2$ ， $J_3 = 3$ ， $O_3 = 1$ 。



圖(十)

第四層 $M_1 \quad M_5 \quad M_3$
 $7\theta \rightarrow 8\theta \rightarrow 8\theta$

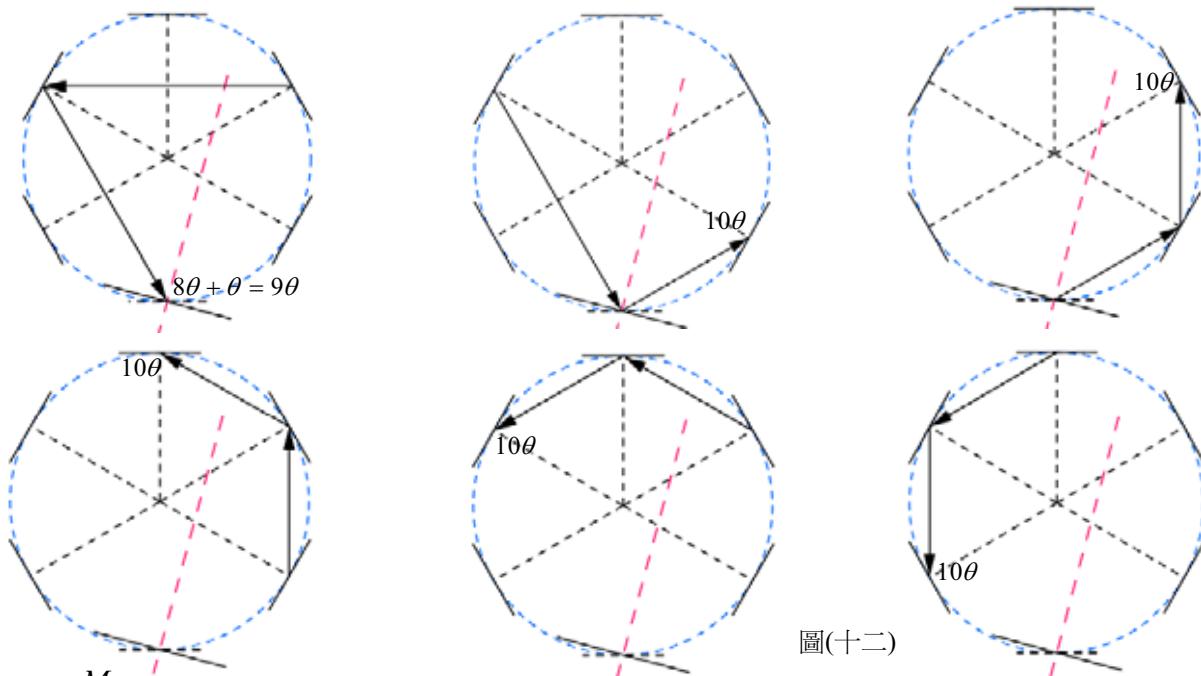
在第四層裡， $R_4 = 3$ ， $J_4 = 4$ ， $O_4 = 2$ 。



圖(十一)

第五層 $M_1 \quad M_6 \quad M_5 \quad M_4 \quad M_3 \quad M_2$
 $9\theta \rightarrow 10\theta \rightarrow 10\theta \rightarrow 10\theta \rightarrow 10\theta \rightarrow 10\theta$

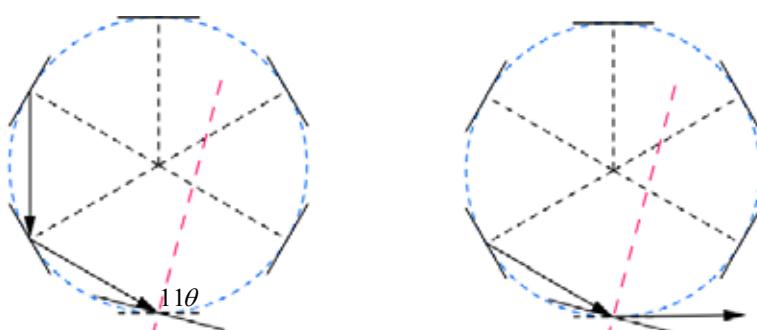
在第五層裡， $R_5 = 6$ ， $J_5 = 5$ ， $O_5 = 5$ 。



圖(十二)

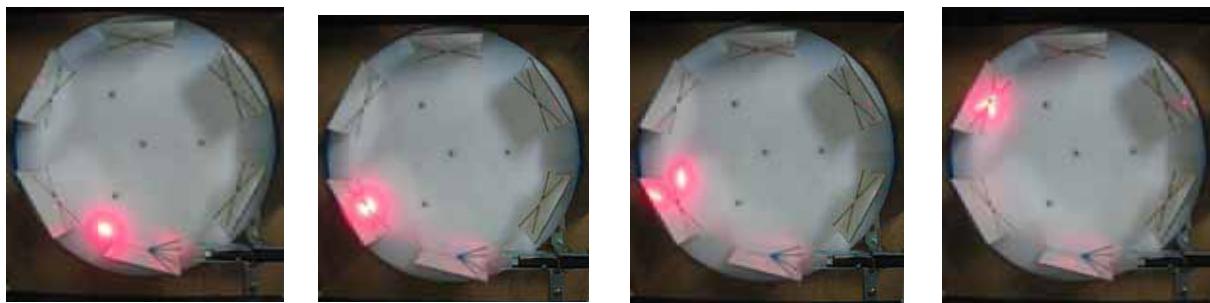
第六層 M_1
 $11\theta \rightarrow$ 回到發光源

在第六層裡， $R_6 = 1$ ， $J_6 = 6$ ， $O_6 = 1$ 。

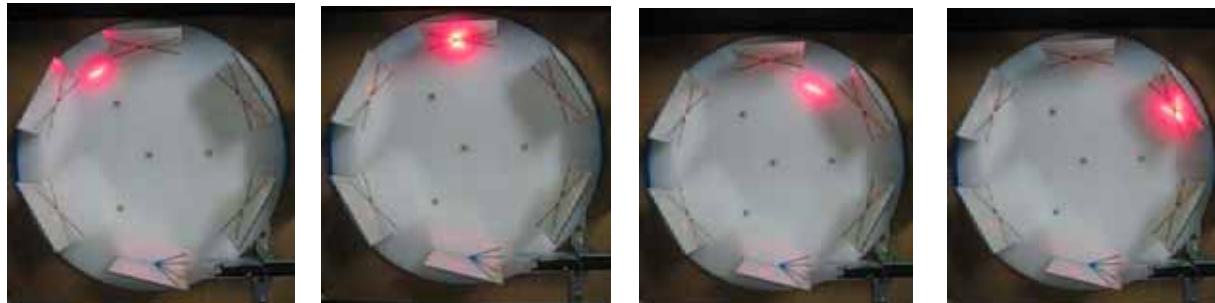


圖(十三)

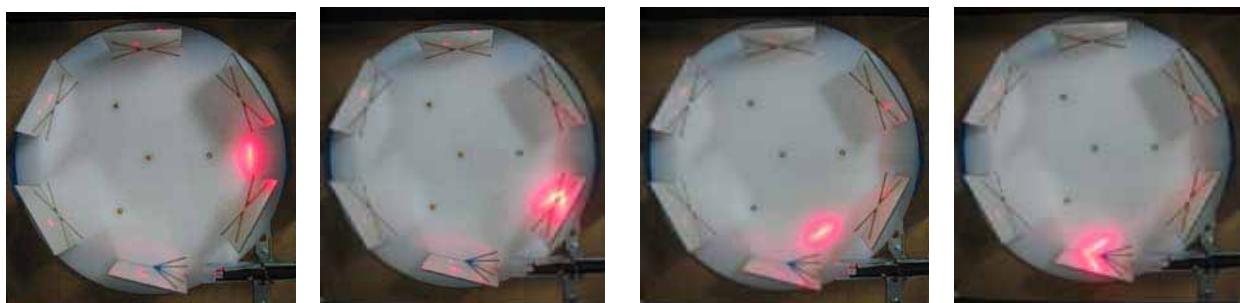
以下為實際以六邊形之模型組進行模擬之實拍圖(光線在第一層反射之情形)



(依光線行進之順序為由左至右)



(依光線行進之順序為由左至右)



二、定義 2：

(一)完全反射數：在正 n 邊形的 n 個鏡面間，光線在任兩個鏡面間均可形成反射，即光線之反射路徑恰為正 n 邊形之所有邊及對角線，此時之反射數的總和為 $2C_2^n + 1$ ，稱為完全反射數，此時反射路徑所形成的圖稱為完全圖。

(二)原始反射數：在正 n 邊形的 n 個鏡面間，我們將雷射光線射向一順時針調整角度

$\theta = \frac{90^\circ}{n}$ 的鏡面，且其他鏡面皆不調動，而光線在此正 n 邊形上的反射次數，稱為原始反射數。

(三)缺線數：缺線數 = $\frac{1}{2}(\text{完全反射數} - \text{反射數})$

在正 n 邊形的 n 個鏡面間，我們將雷射光線射向一順時針調整角度 $\theta = \frac{90^\circ}{n}$ 的鏡面，且其他鏡面皆不調動的情形下，我們得到了以下的定理一～二與引理一～三：

定理一：光線在正 n 邊形的 n 個鏡面間反射必定在第 n 層才會返回到發光源的起始點。

證明：

假設入射光線的方向與所反射鏡面順時針方向的夾角為 ϕ ，

又令 $\theta = \frac{90^\circ}{n}$ ，則觀察 ϕ 的角度變化。

第一層 $\theta \rightarrow 2\theta \rightarrow 2\theta \rightarrow \dots \rightarrow 2\theta$

...

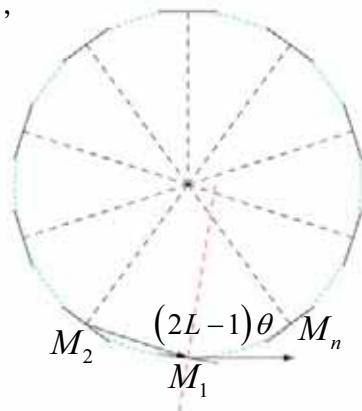
第 L 層 $(2L-1)\theta \rightarrow 2L\theta \rightarrow 2L\theta \rightarrow \dots \rightarrow 2L\theta$

因為要返回原發光源的起始點必定由 $M_2 \rightarrow M_1$ 反射回去，

因此當光線由 M_2 反射到 M_1 時， ϕ 必定為 $180^\circ - \theta$ ，

如圖(十四)，故 $(2L-1)\theta = 180^\circ - \theta$

$$\Rightarrow 2L\theta = 180^\circ \Rightarrow 2 \times L \times \frac{90^\circ}{n} = 180^\circ \Rightarrow L = n$$



圖(十四)

引理一：光線在正 n 邊形的 n 個鏡面間反射

(1) 當 n 為偶數時，光線在第 $\frac{n}{2}$ 層的最後一次反射後就開始折返回原入射路徑。

(2) 當 n 為奇數時，光線在第 $\frac{n+1}{2}$ 層的第一次反射後就開始折返回原入射路徑。

證明：

由定理一的證明過程中得知：

(1) n 為偶數時，光線要開始依原入射路徑折返時， $\phi = 90^\circ$ ；

若在第 L 層達到，則 $(2L-1)\theta = 90^\circ \Rightarrow (2L-1)\frac{90^\circ}{n} = 90^\circ \Rightarrow n = 2L-1$ ，

故 $L = \frac{n+1}{2}$ (不合) 或 $2L\theta = 90^\circ \Rightarrow 2L\frac{90^\circ}{n} = 90^\circ$ ，故 $L = \frac{n}{2}$

但在第 $\frac{n}{2}$ 層， ϕ 只有 $(n-1)\theta$ 及 $n\theta$ 兩次反射，而 $n\theta = 90^\circ$ ，因此光線在第 $\frac{n}{2}$ 層的最後

一次反射後就開始依原入射路徑折返。

(2) n 為奇數時，光線要開始反射依原入射路徑折返時， $\phi = 90^\circ$ ；

若在第 L 層達到，則 $(2L-1)\theta = 90^\circ \Rightarrow (2L-1)\frac{90^\circ}{n} = 90^\circ \Rightarrow n = 2L-1$ ，

故 $L = \frac{n+1}{2}$ 或 $2L\theta = 90^\circ \Rightarrow 2L\frac{90^\circ}{n} = 90^\circ$ ，故 $L = \frac{n}{2}$ (不合)

但在第 $\frac{n+1}{2}$ 層， ϕ 有 $n\theta \rightarrow (n+1)\theta \rightarrow (n+1)\theta \rightarrow \dots \rightarrow (n+1)\theta$ ，

而 $n\theta = 90^\circ$ ，因此光線在第 $\frac{n+1}{2}$ 層的第一次反射後就開始依原入射路徑折返。

事實上，我們發現正 n 邊形的 n 個鏡面間，連續兩個鏡面的間隔恰為一圓心角 $\frac{360^\circ}{n}$ ，假設入射光線的方向與所反射鏡面順時針方向的夾角為 ϕ ，我們觀察在每一層裡 ϕ 的角度變化：
 第一層： ϕ 的角度變化為 $\theta \rightarrow 2\theta \rightarrow 2\theta \rightarrow \dots \rightarrow 2\theta$ ，其中 $2\theta = \frac{180^\circ}{n}$ 為弦切角，剛好為所對弦弧度的一半，因此每次鏡面與鏡面移動的弧度為 $\frac{360^\circ}{n}$ ，也就是說每次反射均跳動一個鏡面，即 $J_1 = 1$ 。
 \vdots

第 L 層： ϕ 的角度變化為 $(2L-1)\theta \rightarrow 2L\theta \rightarrow 2L\theta \rightarrow \dots \rightarrow 2L\theta$ ，其中 $2L\theta = \frac{180^\circ}{n} \times L$ 為弦切角，剛好為所對弦弧度的一半，因此每次鏡面與鏡面移動的弧度為 $\frac{360^\circ}{n} \times L$ ，也就是說每次反射均跳動 L 個鏡面，即 $J_L = L$ 。

經由上述的觀察，我們有了以下的定理：

定理二：在正 n 邊形的 n 個鏡面間，光線在第 L 層的所有反射次數為 $R_L = \frac{n}{\gcd(n, J_L)}$ ，且

$$J_L \times R_L = n \times O_L$$

證明：

根據我們的定義，每一層的反射光線必需由 M_1 開始做反射。
 在第 L 層的反射中，光線一定由 M_1 開始做反射，而且此時光線每 L 個鏡面反射一次，即 $J_L = L$ ，但要進入第 $L+1$ 層則必須又要回到 M_1 開始反射，因此光線在第 L 層的反射過程中，

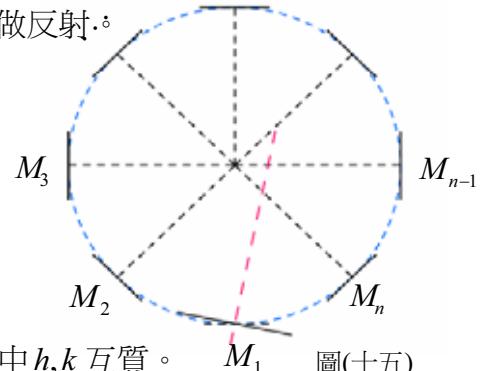
跳躍數 J_L 乘上經過反射鏡面數 R_L 必定為 n 的倍數，故 $J_L \times R_L = n \times t$ ， $t \in N$ 。

設 $\gcd(n, J_L) = d$ ，令 $n = dh$ ， $J_L = dk$ ， $h, k \in N$ ，其中 h, k 互質。

$$dk \times R_L = dh \times t \Rightarrow k \times R_L = h \times t$$

因此 k 必整除 t ，取 $t = k$ (最小值)，則 $R_L = h$ ， $k = O_L$ (圈數)。

故 $R_L = h = \frac{n}{d} = \frac{n}{\gcd(n, J_L)}$ ，也得到 $J_L \times R_L = n \times O_L$ 。



圖(十五)

引理二：在正 n 邊形的 n 個鏡面間，光線從發光源出發到折返回到發光源處，光線在各鏡面間的原始反射數為 $\sum_{L=1}^n R_L = \sum_{L=1}^n \frac{n}{\gcd(n, J_L)}$ 。

證明：

由定理一及定理二得證。

照上述作法，我們將到 $n=1 \sim 30$ 前全部都做了一遍，其值如下表一：

正 n 邊形	完全反射數	原始反射數	正 n 邊形	完全反射數	原始反射數
$n = 5$	21	21	$n = 18$	307	183
6	31	21	19	343	343
7	43	43	20	381	231
8	57	43	21	421	301
9	73	61	22	463	333
10	91	63	23	507	507
11	111	111	24	553	301
12	133	77	25	601	523
13	157	157	26	651	471
14	183	127	27	703	549
15	211	147	28	757	473
16	241	171	29	813	813
17	273	273	30	871	441

表一

根據上表之觀察，我們發現以下的引理：

引理三：在正 n 邊形的 n 個鏡面間，當邊數 $n = p$ ， p 為大於 2 的質數時，正 n 邊形的 n 個鏡面中，其原始反射數恰等於完全反射數，即缺線數為 0。

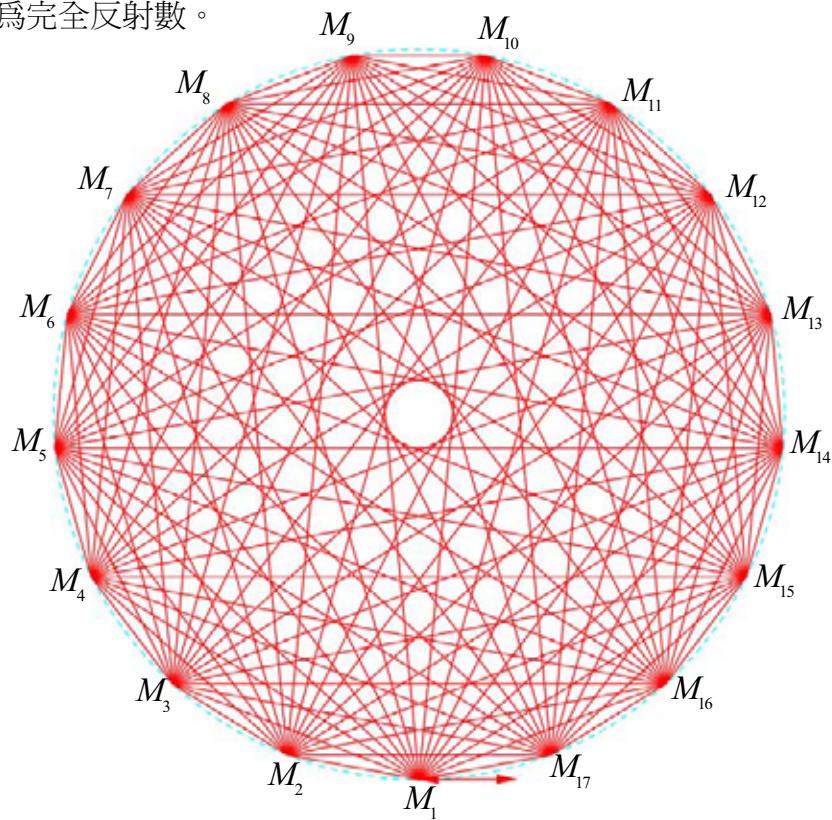
證明：

由引理二得知反射次數總和為

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n R_l &= \sum_{l=1}^p \frac{p}{\gcd(p, J_l)} = \frac{p}{\gcd(p, 1)} + \frac{p}{\gcd(p, 2)} + \cdots + \frac{p}{\gcd(p, p)} \\ &= p(p-1) + 1 = p^2 - p + 1 = 2C_2^n + 1 \end{aligned}$$

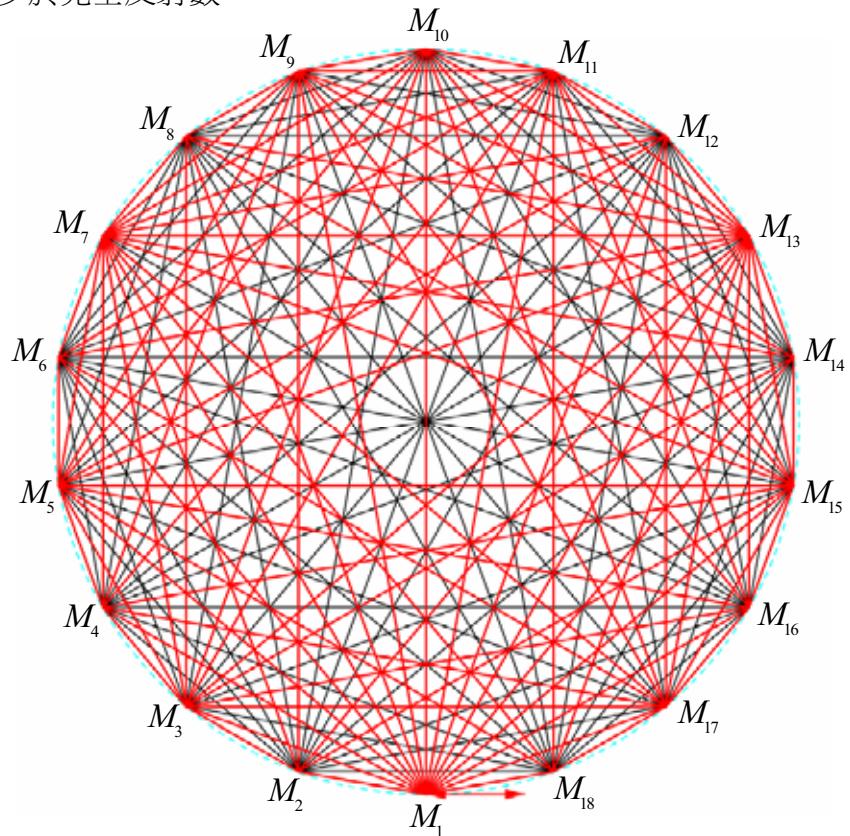
故得其原始反射數恰等於完全反射數。

如圖(十六)中之正十七邊形，光線之反射路徑恰為正十七邊形之所有邊及對角線，故其原始反射數恰為完全反射數。



圖(十六)

如圖(十七)中正十八邊形，光線之反射路徑無法行經正十八邊形之所有邊及對角線，故其原始反射數少於完全反射數。



圖(十七) 圖中之紅色線代表光線之反射路徑，黑色線為缺線

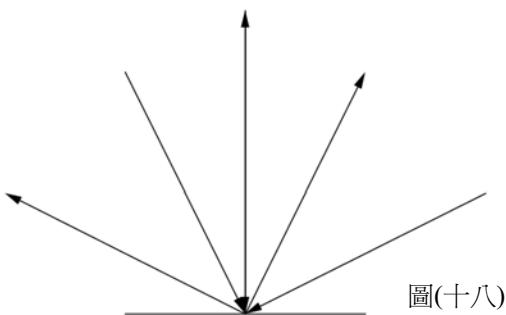
三、上界估計值：

在 n 為偶數時的正 n 邊形反射數無法達到完全反射數，我們希望找出在 n 為偶數時，其反射數的上界估計值。如圖(十八)~(二十一)中，由反射定律可知：一個反射鏡面的反射情形，在正 n 邊形反射中，

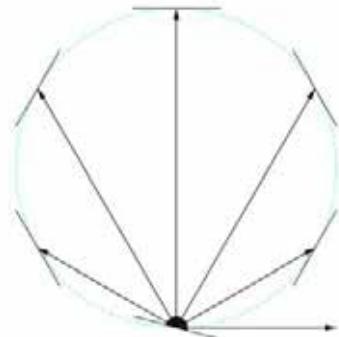
- (1)入射點 M_1 的反射數為 n ，因為從入射光線算起，加上至正 n 邊形上任意一點皆可與之形成反射，總共為 n 條反射線。
- (2)反射點 M_x 的反射數為 $n-1$ ，因為正 n 邊形上的任一點皆可與之形成反射，總共為 $n-1$ 條反射線。
- (3)除了入射點 M_1 與折返點 M_x 以外的點之反射數為 $n-2$ ，因為與對面鏡面的反射會使光線折返，所以除了對面鏡面的反射無法達到外，其餘正 n 邊形上的任一點皆可與之形成反射，總共為 $n-2$ 條反射線。

因此理想的偶數正 n 邊形最大反射數為 $n + (n-1) + (n-2)(n-2) = n^2 - 2n + 3$ ，我們將

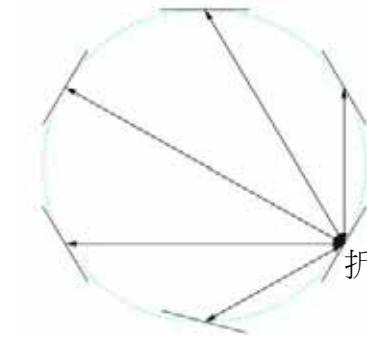
$n^2 - 2n + 3$ 此一數值稱為上界估計值。



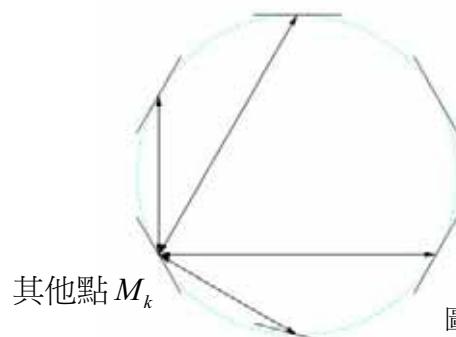
圖(十八)



圖(十九)



折返點 M_x
圖(二十)



其他點 M_k

圖(二十一)

四、定義 3：

由上述試驗所知，當 $n = p$ 時，其原始反射數恰等於完全反射數，但 n 為偶數的合成數時，原始反射數無法達到完全反射數，我們試圖去調整鏡面使得反射數能夠達到上界估計值，為了使問題較易執行，我們考慮每個鏡面有三種調整方法，稱為鏡面轉動數，定義如下：

(一)鏡面轉動數：

在正 n 邊形的 n 個鏡面中，令 $\theta = \frac{90^\circ}{n}$ ，則每個鏡面可以依順時針或逆時針旋轉一個 θ 角亦或是不轉動。

若鏡面依順時針轉動一個 θ ，以代號 $m_k = 1$ 表示， $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ；

若鏡面依逆時針轉動一個 θ ，以代號 $m_k = -1$ 表示， $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ；

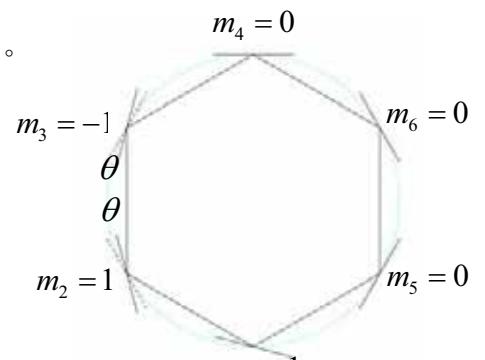
若鏡面不轉動，以代號 $m_k = 0$ 表示， $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 。

如圖(二十二)所示：

為了方便表示，將鏡面轉動數以陣列的方式表示：

鏡面位置 $M_1 M_2 M_3 \dots M_{n-1} M_n$

鏡面轉動數 $[m_1 m_2 m_3 \dots m_{n-1} m_n]$



圖(二十二)

(二)鏡面移動函數： $M_k(x)$ ，其中 k 代表光線正打在第 k 個鏡面，

x 代表光線即將依順時針方向移動 x 個鏡面。

(三)反射路徑函數：由反射路徑的移動情形我們定義一個函數關係

$$f(M_k(x)) = \begin{cases} M_{k+x}(x+m_{k+x}) & \text{if } k+x \leq n \\ M_r(x+m_r) & \text{if } k+x > n, k+x = n \cdot q + r, 0 \leq r < n \end{cases}$$

[圖例說明]：分別以 $n=5$ 及 $n=6$ 為例作說明，得到如下的路徑：

正五邊形： $n=5$

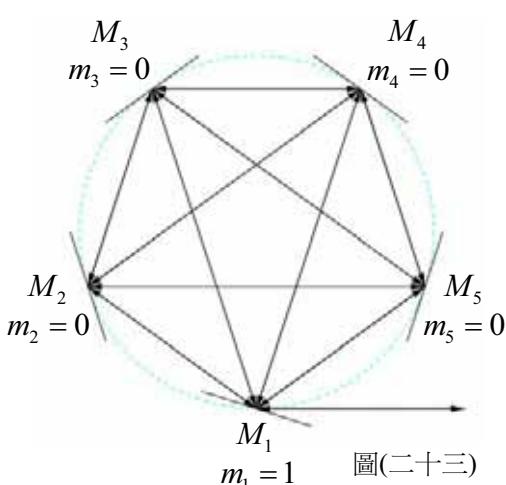
第一層： $M_1(1) \rightarrow M_2(1) \rightarrow M_3(1) \rightarrow M_4(1) \rightarrow M_5(1)$

第二層： $M_1(1+1) \rightarrow M_3(2) \rightarrow M_5(2) \rightarrow M_2(2) \rightarrow M_4(2)$

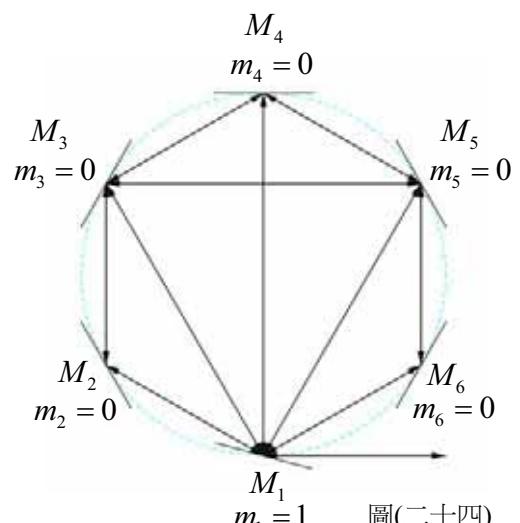
第三層： $M_1(2+1) \rightarrow M_4(3) \rightarrow M_2(3) \rightarrow M_5(3) \rightarrow M_3(3)$

第四層： $M_1(3+1) \rightarrow M_5(4) \rightarrow M_4(4) \rightarrow M_3(4) \rightarrow M_2(4)$

第五層： $M_1(4+1) \rightarrow$ 發光源



圖(二十三)



圖(二十四)

正六邊形： $n = 6$

第一層： $M_1(1) \rightarrow M_2(1) \rightarrow M_3(1) \rightarrow M_4(1) \rightarrow M_5(1) \rightarrow M_6(1)$

第二層： $M_1(1+1) \rightarrow M_3(2) \rightarrow M_5(2)$

第三層： $M_1(2+1) \rightarrow M_4(3)$

第四層： $M_1(3+1) \rightarrow M_5(4) \rightarrow M_3(4)$

第五層： $M_1(4+1) \rightarrow M_6(5) \rightarrow M_5(5) \rightarrow M_4(5) \rightarrow M_3(5) \rightarrow M_2(5)$

第六層： $M_1(5+1) \rightarrow$ 發光源

五、鏡面調整的規則：

我們試圖去調整鏡面使得反射數能夠達到上界的估計值，而在此過程裡每個鏡面(除入射點之鏡面外)的鏡面轉動數均有 $1, 0, -1$ 三種情形，調整鏡面的工作量相當可觀，經實驗與觀察，我們得到一些規則，藉由這些規則的輔助，在調整鏡面後，確實可增加光線的反射數，以下規則建立在 n 為偶數時的正 n 邊形。

規則(一)：在光線反射過程中， $M_k(x)$ 中的 x 不能為 0 或 n ，因為 x 的值代表即將順時針方向移動 x 個鏡面。

規則(二)：若 $m_l = 1$ ，則光線反射路徑不會連續經過 M_l 及 M_{l+1} ，即反射光線缺一條 $\overline{M_l M_{l+1}}$ 。

[說明]：若光線反射路徑為 $M_k \rightarrow M_l \rightarrow M_{l+1}$ ，其中 $m_l = 1$ ， $k \neq l$ 則

$$f(M_k(x)) = M_{k+x}(x+1) = M_l(x+1), \because m_l = 1$$

$$\text{又 } f^2(M_k(x)) = f(M_{k+x}(x+1)) = M_{l+x+1}(x+1+m_{l+x+1}) = M_{l+1}(x+1+m_{l+x+1})$$

$$\text{因此 } l+x+1 \equiv l+1 \pmod{n} \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{n},$$

故 $x = 0$ 或 n ，由規則(一)得到矛盾。

規則(三)：若 $m_l = -1$ ，則光線反射路徑不會連續經過 M_{l-1} 及 M_l ，即反射光線缺一條 $\overline{M_{l-1} M_l}$ 。

[說明]：若光線反射路徑為 $M_k \rightarrow M_{l-1} \rightarrow M_l$ ，其中 $m_l = -1$ ，則

$$f(M_k(x)) = M_{k+x}(x+m_{l-1}) = M_{l-1}(x+m_{l-1})$$

$$f^2(M_k(x)) = f(M_{l-1}(x+m_{l-1})) = M_{l-1+x+m_{l-1}}(x+m_{l-1}+(-1)) = M_l(x+m_{l-1}+(-1))$$

$$\text{因此 } l-1+x+m_{l-1} \equiv l \pmod{n} \Rightarrow x+m_{l-1} \equiv 1 \pmod{n}$$

故 $f^2(M_k(x)) = f(M_{l-1}(1)) = M_l(1+(-1)) = M_l(0)$ ，由規則(一)得到矛盾。

規則(四)：(1)若 $m_l = 1$ ， $m_{l+1} = -1$ ，其形式爲 $\frac{M_l \quad M_{l+1}}{1 \quad -1}$ ，則必缺一條反射線 $\overline{M_l M_{l+1}}$ 。

[說明]：由規則(二)、(三)可得知必缺一條反射線 $\overline{M_l M_{l+1}}$ 。

(2)若 $m_l = 1$ ， $m_{l+1} = 0$ ， $m_{l+2} = -1$ ，其形式爲 $\frac{M_l \quad M_{l+1} \quad M_{l+2}}{1 \quad 0 \quad -1}$ ，則必缺二條反射線

$\overline{M_l M_{l+1}}$ ， $\overline{M_{l+1} M_{l+2}}$ 。

[說明]：由規則(二)、(三)可得知必缺二條反射線 $\overline{M_l M_{l+1}}$ ， $\overline{M_{l+1} M_{l+2}}$ 。

(3)若 $m_l = 1$ ， $m_{l+1} = 0$ ， $m_{l+2} = 0$ ， $m_{l+3} = -1$ ，其形式爲 $\frac{M_l \quad M_{l+1} \quad M_{l+2} \quad M_{l+3}}{1 \quad 0 \quad 0 \quad -1}$ ，則

必缺三條反射線 $\overline{M_l M_{l+1}}$ ， $\overline{M_{l+1} M_{l+2}}$ ， $\overline{M_{l+2} M_{l+3}}$ 。

[說明]：由規則(二)、(三)可得知必缺二條反射線 $\overline{M_l M_{l+1}}$ ， $\overline{M_{l+2} M_{l+3}}$ 。

若光線反射路徑爲 $M_k \rightarrow M_{l+1} \rightarrow M_{l+2}$ ，其中 $k \neq l$ ， \therefore 必缺一條反射線

$\overline{M_l M_{l+1}}$ ，則 $f(M_k(x)) = M_{k+x}(x + m_{k+x}) = M_{l+1}(x + 0)$ ， $\because m_{k+x} = m_{l+1} = 0$

$f^2(M_k(x)) = f(M_{k+x}(x)) = M_{k+2x}(x + m_{k+2x}) = M_{l+2}(x + 0)$ ，

因爲 $m_{k+2x} = m_{l+2} = 0$ ，因此 $\begin{cases} k+x \equiv l+1 \pmod{n} \\ k+2x \equiv l+2 \pmod{n} \end{cases}$

$\Rightarrow x \equiv 1 \pmod{n} \Rightarrow k \equiv l \pmod{n} \Rightarrow k = l$ ，與已知條件 $k \neq l$ 矛盾

所以必缺一條反射線 $\overline{M_{l+1} M_{l+2}}$ ，因此 $\frac{M_l \quad M_{l+1} \quad M_{l+2} \quad M_{l+3}}{1 \quad 0 \quad 0 \quad -1}$ 必缺三條反射

線 $\overline{M_l M_{l+1}}$ ， $\overline{M_{l+1} M_{l+2}}$ ， $\overline{M_{l+2} M_{l+3}}$ 。

規則(五)：(1)以中心點爲對稱中心的兩鏡面 M_l 及 $M_{\frac{l+n}{2}}$ ，若 $m_l = 0$ 及 $m_{\frac{l+n}{2}} = 0$ ，則光線反射路

徑不會連續經過 M_l 及 $M_{\frac{l+n}{2}}$ ，否則會形成迴圈。

[說明]：若光線反射路徑爲 $M_k \rightarrow M_l \rightarrow M_{\frac{l+n}{2}}$ ，其中 $m_l = 0$ 及 $m_{\frac{l+n}{2}} = 0$ ，則

$f(M_k(x)) = M_{k+x}(x + 0) = M_l(x + 0)$ ， $\because m_l = 0$

$$\text{又 } f^2(M_k(x)) = f(M_l(x)) = M_{l+x}(x+0) = M_{\frac{l+n}{2}}(x+0) , \because m_{\frac{l+n}{2}} = 0$$

$$\text{得 } l+x \equiv l+\frac{n}{2} \pmod{n} \Rightarrow x \equiv \frac{n}{2} \pmod{n} , \text{ 即 } x = \frac{n}{2} ,$$

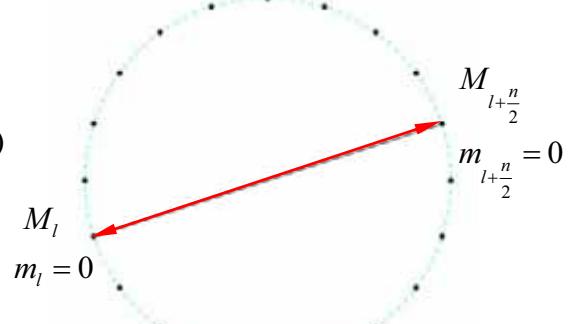
因此光線反射路徑爲

$$f(M_k(x)) = M_l(x) = M_l(\frac{n}{2})$$

$$f^2(M_k(x)) = f(M_l(\frac{n}{2})) = M_{\frac{l+n}{2}}(\frac{n}{2})$$

$$f^3(M_k(x)) = M_l(\frac{n}{2})$$

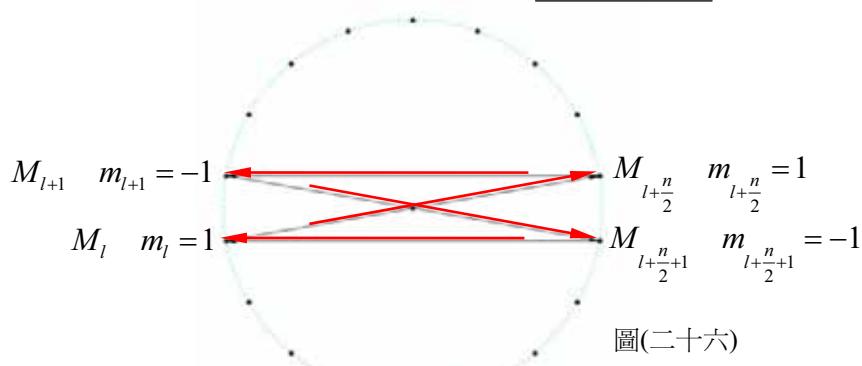
$$f^4(M_k(x)) = M_{\frac{l+n}{2}}(\frac{n}{2})$$



故 $M_l \leftrightarrow M_{\frac{l+n}{2}}$ 形成迴圈，如右圖(二十五)

圖(二十五)

(2)以中心點爲對稱中心的兩組 $\frac{M_l \quad M_{l+1}}{1 \quad -1}$ 、 $\frac{M_{\frac{l+n}{2}} \quad M_{\frac{l+n}{2}+1}}{1 \quad -1}$ 會形成迴圈。



圖(二十六)

[說明]：若光線反射路徑爲 $M_k \rightarrow M_l \rightarrow M_{\frac{l+n}{2}}$ ，其中 $m_l = 1$ 及 $m_{\frac{l+n}{2}} = 1$ ，則

$$f(M_k(x)) = M_{k+x}(x+1) = M_l(x+1) , \because m_l = 1$$

$$\text{又 } f^2(M_k(x)) = f(M_l(x+1)) = M_{l+x+1}(x+1+1) = M_{\frac{l+n}{2}}(x+1+1) , \because m_{\frac{l+n}{2}} = 1$$

$$\text{得 } l+x+1 \equiv l+\frac{n}{2} \pmod{n} \Rightarrow x \equiv \frac{n}{2}-1 \pmod{n} , \text{ 即 } x = \frac{n}{2}-1 ,$$

因此光線反射路徑爲 $f(M_k(x)) = M_l(x+1) = M_l(\frac{n}{2}) , \because m_l = 1$

$$f^2(M_k(x)) = f(M_l(\frac{n}{2})) = M_{\frac{l+n}{2}}(\frac{n}{2}+1) , \because m_{\frac{l+n}{2}} = 1$$

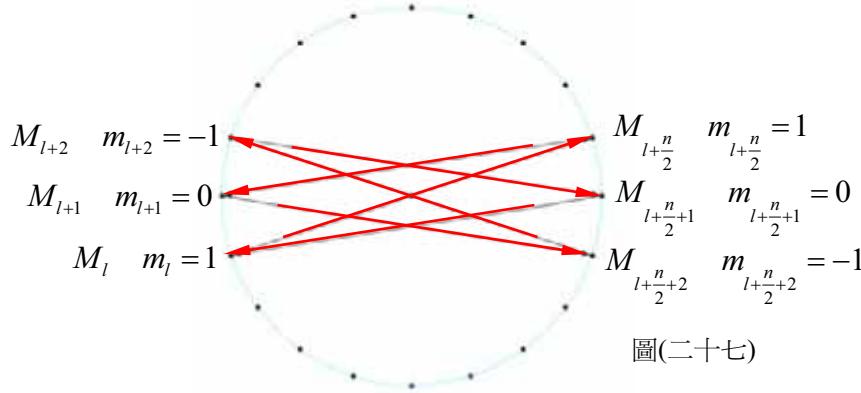
$$f^3(M_k(x)) = M_{l+1}(\frac{n}{2}) , \because m_{l+1} = -1$$

$$f^4(M_k(x)) = M_{l+\frac{n}{2}+1}(\frac{n}{2}-1) , \because m_{l+\frac{n}{2}+1} = -1$$

$$f^5(M_k(x)) = M_l(\frac{n}{2}) , \because m_l = 1$$

故形成迴圈，如上圖(二十六)

(3)以中心點為對稱中心的兩組 $\frac{M_l}{1}, \frac{M_{l+1}}{0}, \frac{M_{l+2}}{-1}, \frac{M_{l+\frac{n}{2}}}{1}, \frac{M_{l+\frac{n}{2}+1}}{0}, \frac{M_{l+\frac{n}{2}+2}}{-1}$ 會形成迴圈。



圖(二十七)

[說明]：若光線反射路徑為 $M_k \rightarrow M_l \rightarrow M_{l+\frac{n}{2}}$ ，其中 $m_l = 1$ 及 $m_{l+\frac{n}{2}} = 1$ ，則

$$f(M_k(x)) = M_{k+x}(x+1) = M_l(x+1) , \because m_l = 1$$

$$\text{又 } f^2(M_k(x)) = f(M_l(x+1)) = M_{l+x+1}(x+1+1) = M_{l+\frac{n}{2}}(x+1+1) , \because m_{l+\frac{n}{2}} = 1$$

$$\text{得 } l+x+1 \equiv l+\frac{n}{2} \pmod{n} \Rightarrow x \equiv \frac{n}{2}-1 \pmod{n} , \text{ 即 } x = \frac{n}{2}-1 ,$$

$$\text{因此光線反射路徑為 } f(M_k(x)) = M_l(x+1) = M_l(\frac{n}{2}) , \because m_l = 1$$

$$f^2(M_k(x)) = f(M_l(\frac{n}{2})) = M_{l+\frac{n}{2}}(\frac{n}{2}+1) , \because m_{l+\frac{n}{2}} = 1$$

$$f^3(M_k(x)) = M_{l+1}(\frac{n}{2}+1+0) , \because m_{l+1} = 0$$

$$f^4(M_k(x)) = M_{l+\frac{n}{2}+2}(\frac{n}{2}+1-1) , \because m_{l+\frac{n}{2}+2} = -1$$

$$f^5(M_k(x)) = M_{l+2}(\frac{n}{2}-1) , \because m_{l+2} = -1$$

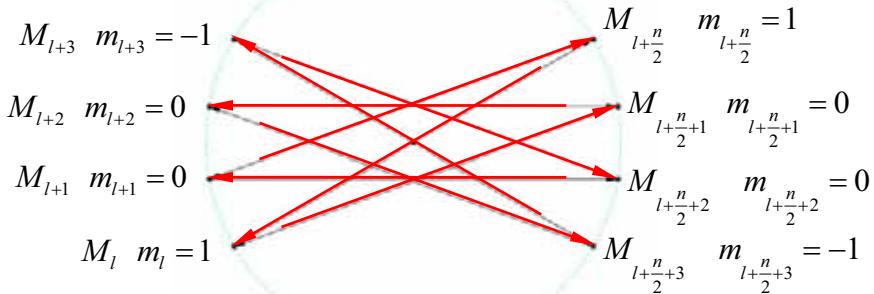
$$f^6(M_k(x)) = M_{l+\frac{n}{2}+1}(\frac{n}{2}-1+0) , \because m_{l+\frac{n}{2}+1} = 0$$

$$f^7(M_k(x)) = M_l(\frac{n}{2}-1+1) = M_l(\frac{n}{2}) , \because m_l = 1$$

故形成迴圈，如上圖(二十七)

$$(4) \text{以中心點為對稱中心的兩組 } \begin{array}{ccccccccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} & M_{l+3} & M_{l+\frac{n}{2}} & M_{l+\frac{n}{2}+1} & M_{l+\frac{n}{2}+2} & M_{l+\frac{n}{2}+3} \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \text{ 會}$$

形成迴圈。



[說明]：同理，如(3)之說明。

圖(二十八)

規則(六)：當光線反射到鏡面 M_l 後依原路徑折返，此時 $m_l = 0$

[說明]：反射光線要依原路徑折返其中必有 $M_k \rightarrow M_l \rightarrow M_k$ 路徑，則

$$f(M_k(x)) = M_{k+x}(x + m_{k+x}) = M_l(x + m_l)$$

$$f^2(M_k(x)) = f(M_{k+x}(x + m_{k+x})) = M_{k+x+x+m_{k+x}}(x + m_{k+x} + m_{k+2x+m_{k+x}}) = M_k(x + m_{k+x} + m_{k+2x+m_{k+x}})$$

因此 $k + x + x + m_{k+x} \equiv k \pmod{n} \Rightarrow 2x + m_{k+x} \equiv 0 \pmod{n}$ ，但 $m_{k+x} \in \{1, 0, -1\}$

故得 $m_{k+x} = 0$ ， $2x \equiv 0 \pmod{n}$ ，即 $x = \frac{n}{2}$

$$\Rightarrow f(M_k(\frac{n}{2})) = M_{k+\frac{n}{2}}(\frac{n}{2} + 0) = M_l(\frac{n}{2}) \text{，} f^2(M_k(\frac{n}{2})) = M_k(\frac{n}{2} + m_k)$$

[說明例]：鏡面不轉動與鏡面轉動結果之比較

$$(1) \text{原本不轉動的正六邊形鏡面反射} : \begin{array}{ccccccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_6 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

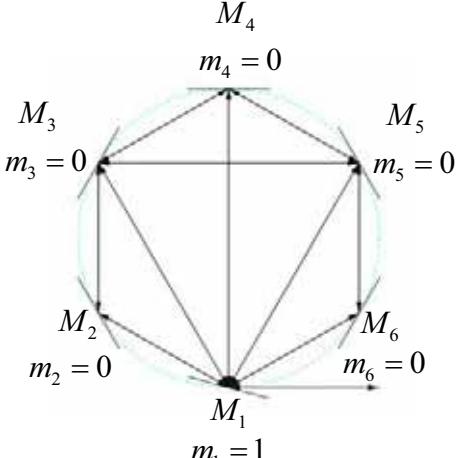
$$\begin{aligned} M_1(1) &\rightarrow M_2(1) \rightarrow M_3(1) \rightarrow M_4(1) \rightarrow M_5(1) \rightarrow M_6(1) \rightarrow M_1(1+1) \rightarrow M_3(2) \rightarrow M_5(2) \\ &\rightarrow M_1(2+1) \rightarrow M_4(3) \rightarrow M_1(3+1) \rightarrow M_5(4) \rightarrow M_3(4) \rightarrow M_1(4+1) \rightarrow M_6(5) \rightarrow M_5(5) \\ &\rightarrow M_4(5) \rightarrow M_3(5) \rightarrow M_2(5) \rightarrow M_1(5+1) \rightarrow \text{發光源} \end{aligned}$$

如下圖(二十九)中共計反射 21 次。

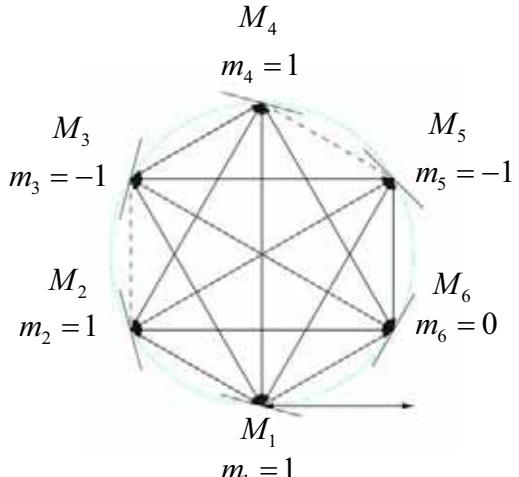
$$(2) \text{我們將鏡面轉動之規則用於正六邊形中} : \begin{array}{ccccccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_6 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} M_1(1) &\rightarrow M_2(1+1) \rightarrow M_4(2+1) \rightarrow M_1(3+1) \rightarrow M_5(4-1) \rightarrow M_2(3+1) \rightarrow M_6(4+0) \\ &\rightarrow M_4(4+1) \rightarrow M_3(5-1) \rightarrow M_1(4+1) \rightarrow M_6(5+0) \rightarrow M_5(5-1) \rightarrow M_3(4-1) \\ &\rightarrow M_6(3+0) \rightarrow M_3(3-1) \rightarrow M_5(2-1) \rightarrow M_6(1+0) \rightarrow M_1(1+1) \rightarrow M_3(2-1) \\ &\rightarrow M_4(1+1) \rightarrow M_6(2+0) \rightarrow M_2(2+1) \rightarrow M_5(3-1) \rightarrow M_1(2+1) \rightarrow M_4(3+1) \\ &\rightarrow M_2(4+1) \rightarrow M_1(5+1) \rightarrow \text{發光源} \end{aligned}$$

如下圖(三十)中共計反射 27 次。



圖(二十九)



圖(三十)

六、重要性質：

經由上述的規則，發現了幾個重要的性質，而為了方便以下性質之證明，在此先給出兩個計算公式：

(1)位置公式： $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_0 - \beta - 2\gamma = n - E - P = n - 2$

[說明]： x_1 為 $\frac{M_l \quad M_{l+1}}{1 \quad -1}$ 佔用的兩個位置； x_2 為 $\frac{M_l \quad M_{l+1} \quad M_{l+2}}{1 \quad 0 \quad -1}$ 佔用的三個位置；

x_3 為 $\frac{M_l \quad M_{l+1} \quad M_{l+2} \quad M_{l+3}}{1 \quad 0 \quad 0 \quad -1}$ 佔用的四個位置； x_0 為 $\frac{M_l \quad M_{l+\frac{n}{2}}}{0 \quad 0}$ 佔用的兩個位置

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 皆為其組數， $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Z$ 且 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$ ；

而 E 為入射鏡面，佔用一個位置； P 為折返點，佔用一個位置，其中 x_2 及 x_3 中的 0 會與 x_0 中的 0 重複算，故需減掉重複算的 0。

(2)缺線公式： $\alpha x_1' + \beta x_2' + \gamma x_3' + \delta x_4' = y$ ， y 為缺線數。

[說明]： x_1' 為 $\frac{M_l \quad M_{l+1}}{1 \quad -1}$ 所產生的一條缺線； x_2' 為 $\frac{M_l \quad M_{l+1} \quad M_{l+2}}{1 \quad 0 \quad -1}$ 所產生的兩條缺線

x_3' 為 $\frac{M_l \quad M_{l+1} \quad M_{l+2} \quad M_{l+3}}{1 \quad 0 \quad 0 \quad -1}$ 所產生的三條缺線； x_0' 為 $\frac{M_l \quad M_{l+\frac{n}{2}}}{0 \quad 0}$ 所產生的一條缺線

性質(一)：若缺線數為 $\frac{n-2}{2}$ ，意即反射數達到上界估計值，鏡面只能由 $\frac{M_l \quad M_{l+1}}{1 \quad -1}$ 及 $\frac{M_l \quad M_{l+\frac{n}{2}}}{0 \quad 0}$ 去搭配。

[證明]：

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4 - \beta - 2\gamma = n-2 \\ \alpha x'_1 + \beta x'_2 + \gamma x'_3 + \delta x'_4 = \frac{n-2}{2} \end{cases}, \text{代入所定義的值得}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + 4\gamma + 2\delta - \beta - 2\gamma = n-2 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma + \delta = \frac{n-2}{2} \end{cases} \Rightarrow \beta + 2\gamma = 0$$

因 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Z$ 且 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$ ，故可得 $\beta = \gamma = 0$

性質(二)：若缺線數為 $\frac{n-2}{2} + 1$ ，鏡面只能由一組 $\frac{M_l \ M_{l+1} \ M_{l+2}}{1 \ 0 \ -1}$ 與 $\frac{M_l \ M_{l+1}}{1 \ -1}$ 及 $\frac{M_l \ M_{l+\frac{n}{2}}}{0 \ 0}$ 去搭配。

[證明]：

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4 - \beta - 2\gamma = n-2 \\ \alpha x'_1 + \beta x'_2 + \gamma x'_3 + \delta x'_4 = \frac{n-2}{2} + 1 \end{cases}, \text{代入所定義的值得}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + 4\gamma + 2\delta - \beta - 2\gamma = n-2 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma + \delta = \frac{n-2}{2} + 1 \end{cases} \Rightarrow \beta + 2\gamma = 1,$$

因 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Z$ 且 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$ ，故可得 $\beta = 1, \gamma = 0$

性質(三)：若缺線數為 $\frac{n-2}{2} + 2$ ，鏡面只能由兩組 $\frac{M_l \ M_{l+1} \ M_{l+2}}{1 \ 0 \ -1}$ 或一組 $\frac{M_l \ M_{l+1} \ M_{l+2} \ M_{l+3}}{1 \ 0 \ 0 \ -1}$ 與 $\frac{M_l \ M_{l+1}}{1 \ -1}$ 及 $\frac{M_l \ M_{l+\frac{n}{2}}}{0 \ 0}$ 去搭配。

[證明]：

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4 - \beta - 2\gamma = n-2 \\ \alpha x'_1 + \beta x'_2 + \gamma x'_3 + \delta x'_4 = \frac{n-2}{2} + 2 \end{cases}, \text{代入所定義的值得}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + 4\gamma + 2\delta - \beta - 2\gamma = n-2 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma + \delta = \frac{n-2}{2} + 2 \end{cases} \Rightarrow \beta + 2\gamma = 2$$

因 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Z$ 且 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$ ，故可得 $\beta = 2, \gamma = 0$ 或 $\beta = 0, \gamma = 1$ ，共有兩組解。

性質(四)：若缺線數為 $\frac{n-2}{2} + 3$ ，鏡面只能由三組 $\begin{array}{ccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} \\ \hline 1 & 0 & -1 \end{array}$ 或一組 $\begin{array}{ccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} \\ \hline 1 & 0 & -1 \end{array}$ 及

一組 $\begin{array}{cccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} & M_{l+3} \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}$ 與 $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+1} \\ \hline 1 & -1 \end{array}$ 及 $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+\frac{n}{2}} \\ \hline 0 & 0 \end{array}$ 去搭配。

[證明]：

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4 - \beta - 2\gamma = n-2 \\ \alpha x'_1 + \beta x'_2 + \gamma x'_3 + \delta x'_4 = \frac{n-2}{2} + 3 \end{array} \right. , \text{代入所定義的值得}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\alpha + 3\beta + 4\gamma + 2\delta - \beta - 2\gamma = n-2 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma + \delta = \frac{n-2}{2} + 3 \end{array} \right. \Rightarrow \beta + 2\gamma = 3$$

因 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Z$ 且 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$ ，故可得 $\beta = 3, \gamma = 0$ 或 $\beta = 1, \gamma = 1$ ，共有兩組解。

七、策略擬定：

在尋求上界估計值的過程裡每個鏡面(除入射點之鏡面外)的鏡面轉動數均有 $1, 0, -1$ 三種情形，考慮排列組合的搭配，工作量相當可觀，因此經由規則(一)~規則(六)以及性質(一)~(四)，我們擬定出以下的策略，可有效地減少工作量：

策略(一)：由性質(一)得知，若缺線數為 $\frac{n-2}{2}$ ，意即反射數達到上界估計值，鏡面只能由

$\begin{array}{cc} M_l & M_{l+1} \\ \hline 1 & -1 \end{array}$ 及 $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+\frac{n}{2}} \\ \hline 0 & 0 \end{array}$ 去搭配，再經由電腦程式的輔助，找出鏡面正確的擺放位置。

策略(二)：由性質(二)得知，若缺線數為 $\frac{n-2}{2} + 1$ ，鏡面只能由一組 $\begin{array}{ccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} \\ \hline 1 & 0 & -1 \end{array}$ 與 $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+1} \\ \hline 1 & -1 \end{array}$

及 $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+\frac{n}{2}} \\ \hline 0 & 0 \end{array}$ 去搭配，再經由電腦程式的輔助，找出鏡面正確的擺放位置。

策略(三)：由性質(三)得知，若缺線數為 $\frac{n-2}{2} + 2$ ，鏡面只能由兩組 $\begin{array}{ccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} \\ \hline 1 & 0 & -1 \end{array}$ 或一組

$\begin{array}{cccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} & M_{l+3} \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}$ 與 $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+1} \\ \hline 1 & -1 \end{array}$ 及 $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+\frac{n}{2}} \\ \hline 0 & 0 \end{array}$ 去搭配，再經由電腦程式的輔助，

找出鏡面正確的擺放位置。

策略(四)：由性質(四)得知，若缺線數為 $\frac{n-2}{2}+3$ ，鏡面只能由三組 $\begin{array}{ccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} \\ \hline 1 & 0 & -1 \end{array}$ 或一組

$\begin{array}{ccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} \\ \hline 1 & 0 & -1 \end{array}$ 及一組 $\begin{array}{cccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} & M_{l+3} \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}$ 與 $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+1} \\ \hline 1 & -1 \end{array}$ 及 $\begin{array}{cc} M_l & M_{\frac{l+n}{2}} \\ \hline 0 & 0 \end{array}$ 去搭配，

再經由電腦程式的輔助，找出鏡面正確的擺放位置。

八、尋求最佳解的過程：

步驟(一)：執行策略(一)，若無法找出最佳解，即表示此正 n 邊形之缺線數大於 $\frac{n-2}{2}$ ，於是進行步驟(二)。

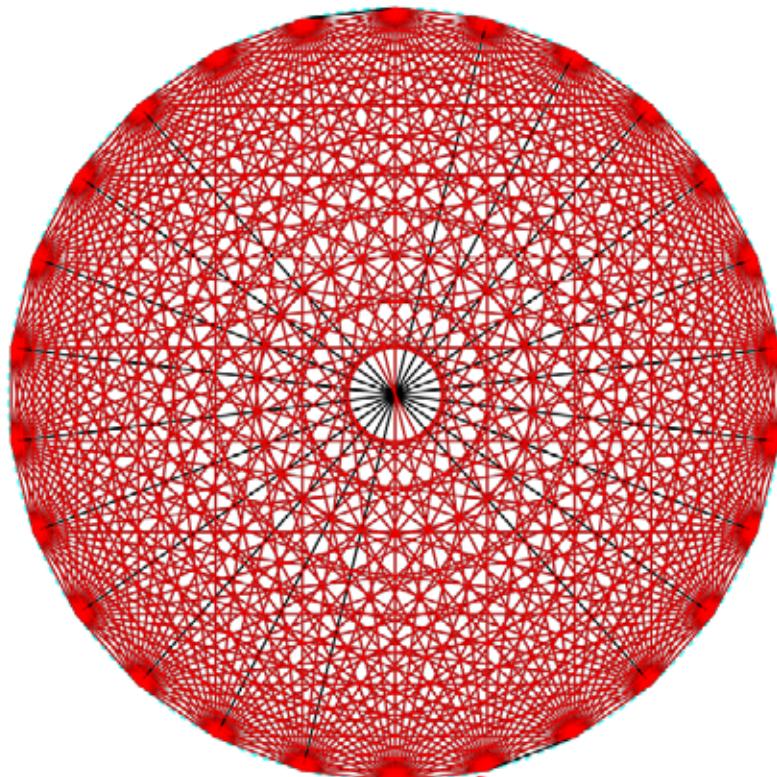
步驟(二)：執行策略(二)，若無法找出最佳解，即表示此正 n 邊形之缺線數大於 $\frac{n-2}{2}+1$ ，於是行步驟(三)。

步驟(三)：執行策略(三)，若無法找出最佳解，即表示此正 n 邊形之缺線數大於 $\frac{n-2}{2}+2$ ，於是進行步驟(四)。

步驟(四)：執行策略(四)。

在 n 為偶數，且 $6 \leq n \leq 34$ 的情形運用前述之規則、性質與擬定策略作一完整的探討，其中 $6 \leq n \leq 16$ 及 $n=22, 26$ 時，執行策略(一)即可求得最佳解，最大反射數均可達到上界估計值，以 $n=26$ 為圖例。

圖例： $n=26$ ，使用 $\begin{array}{c} 1 \\ \hline -1 \end{array}$ 即達到最佳解的反射路徑，反射數為 627。



下面針對未達上界估計值的 $n=18, 20, 24, 28, 30, 32, 34$ 之情形逐一進行策略之操作說明，而所求得之反射數即為最大值：

(1) $n=18$ 時

步驟(一)：執行策略(一)

發現最大解 $[1 \underline{1 -1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \underline{-1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ ，缺線數

為 16 大於 $\frac{18-2}{2}$ ，非最佳解，於是進行步驟(二)。

步驟(二)：執行策略(二)

發現最大解 $[1 \underline{1 -1} \ \underline{1 -1} \ 0 \ \underline{1 -1} \ \underline{1 0 -1} \ \underline{1 -1} \ \underline{1 -1} \ 0 \ \underline{1 -1}]$ ，缺

線數為 15 大於 $\frac{18-2}{2}+1$ ，非最佳解，於是進行步驟(三)。

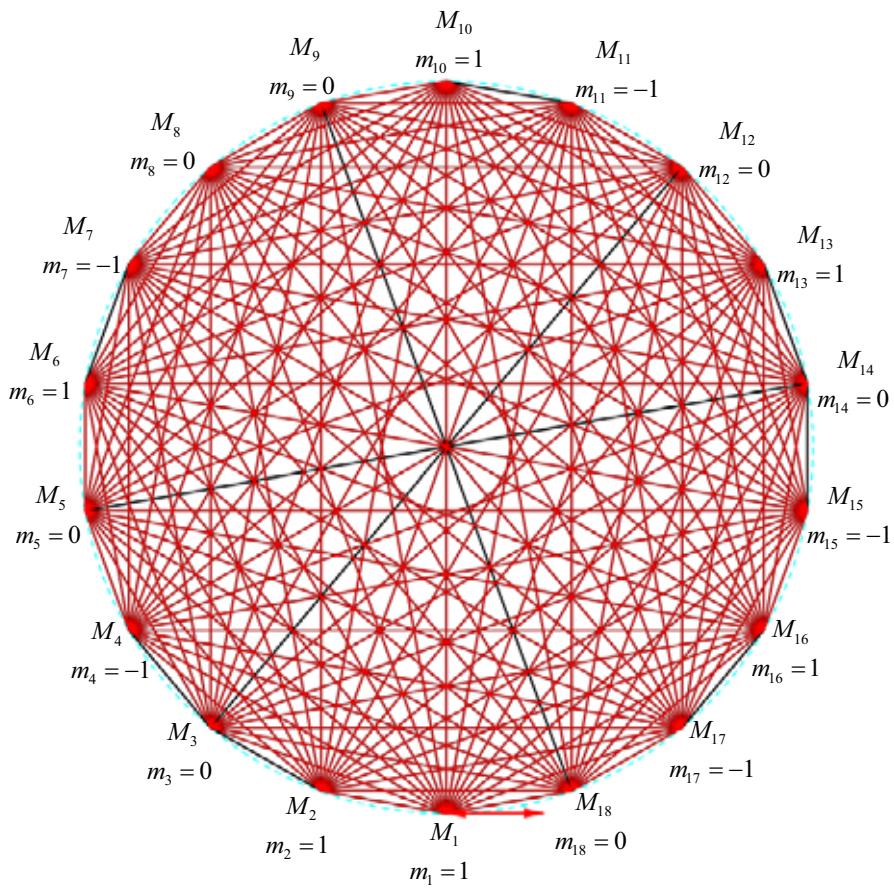
步驟(三)：執行策略(三)

發現最大解 $[1 \underline{1 0 -1} \ 0 \ \underline{1 -1} \ 0 \ 0 \ \underline{1 -1} \ 0 \ \underline{1 0 -1} \ \underline{1 -1} \ 0]$ 與

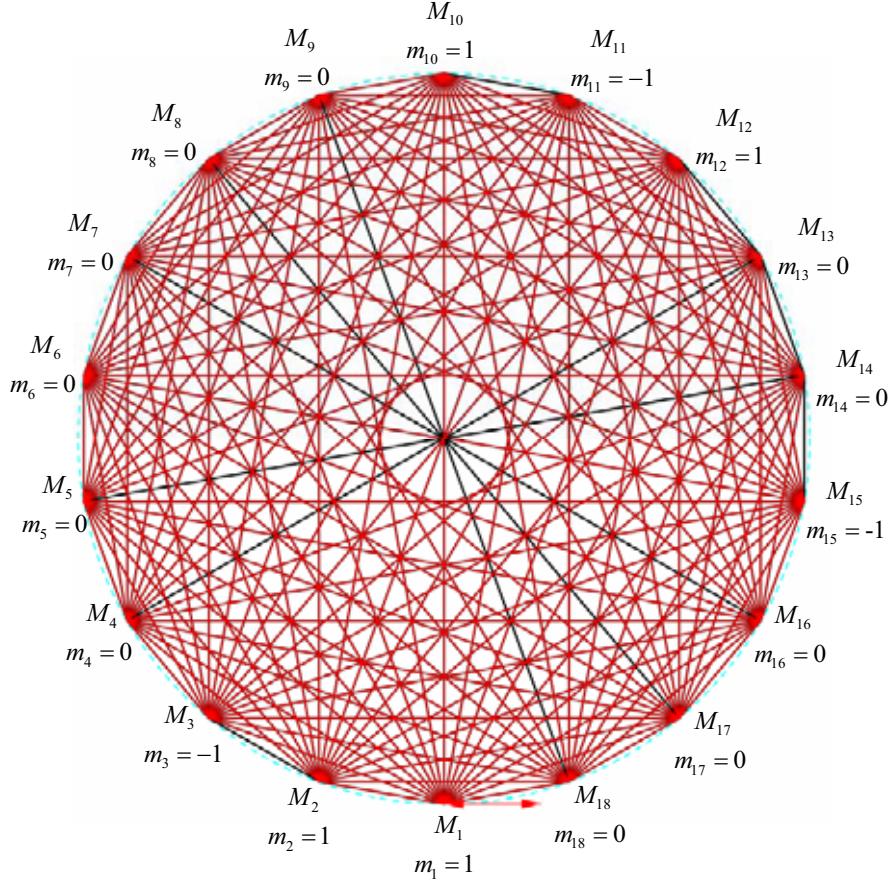
$[1 \underline{1 -1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \underline{1 -1} \ \underline{1 0 0 -1} \ 0 \ 0 \ 0]$ ，缺線數為 10 等於

$\frac{18-2}{2}+2$ ，找到最佳解。

圖例： $n=18$ 時，使用 $\underline{1 -1}$ 及 $\underline{1 0 -1}$ 達到最佳解的反射路徑，反射數為 287 。



圖例： $n=18$ 時，使用 $\underline{1 \ -1}$ 及 $\underline{1 \ 0 \ 0 \ -1}$ 達到最佳解的反射路徑，反射數為 287。



(2) $n=20$ 時

步驟(一)：執行策略(一)

發現最大解 $[1 \ 0 \ 0 \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ -1} \ 0 \ 0 \ 0 \ \underline{1 \ -1} \ 0 \ 0 \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ -1} \ 0 \ 0]$ ，

缺線數為 13 大於 $\frac{20-2}{2}$ ，非最佳解，於是進行步驟(二)。

步驟(二)：執行策略(二)

發現最大解 $[1 \ 0 \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ 0 \ -1} \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ -1} \ 0]$

與 $[1 \ \underline{1 \ -1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ 0 \ -1} \ 0 \ 0 \ 0]$ ，缺線數為

13 大於 $\frac{20-2}{2}+1$ ，非最佳解，於是進行步驟(三)。

步驟(三)：執行策略(三)

發現最大解 $[1 \ 0 \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ -1} \ 0 \ \underline{1 \ 0 \ -1} \ 0 \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ 0 \ -1}]$ ，

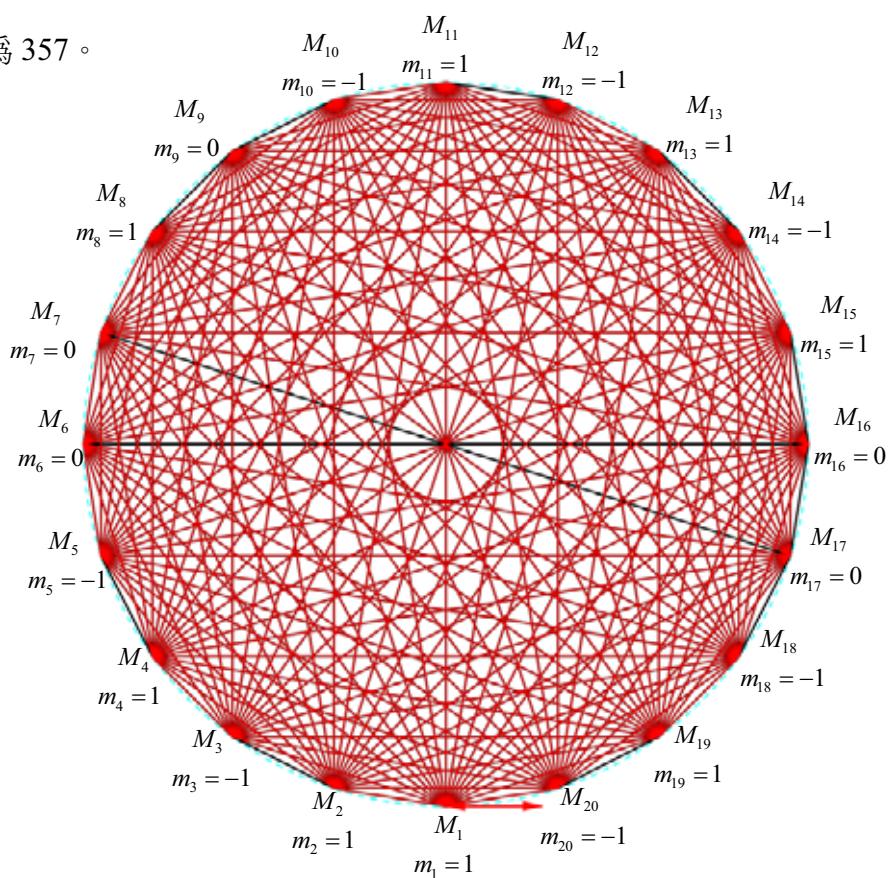
缺線數為 13 大於 $\frac{20-2}{2}+2$ ，非最佳解，於是進行步驟(四)。

步驟(四)：執行策略(四)

發現最大解 $[1 \underline{1 -1} \underline{1 -1} \underline{0 \ 0} \underline{1 \ 0 -1} \underline{1 -1} \underline{1 -1} \underline{1 \ 0 \ 0 -1} \underline{1 -1}]$,

缺線數為 12 等於 $\frac{20-2}{2}+3$, 找到最佳解。

圖例： $n=20$ 時，使用 $\underline{1 -1}$ 、 $\underline{1 \ 0 -1}$ 及 $\underline{1 \ 0 \ 0 -1}$ 達到最佳解的反射路徑，反射
數為 357。



(3) $n=24, 28, 32, 34$ 時，如同 $n=18$ ，在步驟(三)時找到最佳解

$n=24$ 的解，缺線數為 13 等於 $\frac{24-2}{2}+2$

$$[1 \ 0 \ 0 \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{-1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \underline{0 \ 0 -1} \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{-1} \ 0 \ 0]$$

$n=28$ 的解，缺線數為 15 等於 $\frac{28-2}{2}+2$

$$[1 \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{-1} \ 0 \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{-1} \ 0 \ 0 \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{0 -1} \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{0 -1}]$$

$n=32$ 的解，缺線數為 17 等於 $\frac{32-2}{2}+2$

$$[1 \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{0 \ 0 -1} \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{-1} \ 0 \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{0 \ 0 1 -1} \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{-1}]$$

$n=34$ 的解，缺線數為 18 等於 $\frac{34-2}{2}+2$

$$[1 \ 0 \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{-1} \ 0 \ 1 \underline{-1} \ 1 \ 0 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 0 \ -1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{-1}]$$

(4) $n=30$ 時，如同 $n=20$ ，在步驟(四)時找到最佳解，缺線數為 17 等於 $\frac{30-2}{2}+3$

$$[1 \ 1 \underline{0 -1} \ 0 \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{0 -1} \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{-1} \ 0 \ 0 \ 1 \underline{0 -1} \ 1 \underline{-1} \ 0 \ 1 \underline{-1} \ 1 \underline{-1}]$$

伍、研究結果

一、當正 n 邊形的第一個鏡面依順時針調整角度 $\theta = \frac{90^\circ}{n}$ ，且其餘鏡面均不轉動，則在正 n 邊

形的 n 個鏡面間，光線從發光源出發到折返回到發光源處，光線在各鏡面間的原始反射

$$\sum_{L=1}^n R_L = \sum_{L=1}^n \frac{n}{\gcd(n, J_L)}$$

二、在正 n 邊形的第一個鏡面依順時針調整角度 $\theta = \frac{90^\circ}{n}$ ，且其餘鏡面均不轉動，當 n 為大於

2 的質數時，其原始反射路徑可形成完全圖，且其原始反射數等於完全反射數 $(2C_2^n + 1)$ 。

三、在正 n 邊形的每個鏡面(除入射點之鏡面外)的鏡面轉動數均有 1, 0, -1 的情形，在 n 為偶數，且 $6 \leq n \leq 34$ 的情形之最大解整理如下表所呈現：

n	鏡面轉動數	C	U	P	d_1	d_2	α	β	γ	δ
6	[1 0 1 -1 0 0*]	31	27	27	2	0	1	0	0	1
	[1 1 -1 1 -1 0*]						2	0	0	0
8	[1 1 -1 0* 1 -1 1 -1]	57	51	51	3	0	3	0	0	0
10	[1 1 -1 0* 0 1 -1 1 -1 0]	91	83	83	4	0	3	0	0	1
12	[1 1 -1 1 -1 0* 1 -1 1 -1 1 -1]	133	123	123	5	0	5	0	0	0
14	[1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 0*]	183	171	171	6	0	6	0	0	0
16	[1 1 -1 0* 0 0 0 0 1 -1 1 -1 0 0 0 0]	241	227	227	7	0	3	0	0	4
18	[1 1 -1 0 0 0* 0 0 0 1 -1 1 0 0 -1 0 0 0]	307	291	287	8	2	2	0	1	5
	[1 1 0 -1 0 1 -1 0* 0 1 -1 0 1 0 -1 1 -1 0]						3	2	0	3
20	[1 1 -1 1 -1 0 0 1 0* -1 1 -1 1 -1 1 0 0 -1 1 -1]	381	363	357	9	3	5	1	1	2
22	[1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0*]	463	443	443	10	0	1	0	0	9
	[1 0 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 0 0* 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1]						9	0	0	1
	[1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 0*]						10	0	0	0
24	[1 0 0 1 -1 1 -1 1 -1 0* 0 0 1 0 0 -1 1 -1 1 -1 1 -1 0 0]	553	531	527	11	2	6	0	1	4
26	[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0* 1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -1]	651	627	627	12	0	2	0	0	10
28	[1 1 -1 1 -1 1 -1 0 1 -1 1 -1 0 0* 1 -1 1 -1 1 -1 1 0 -1 1 -1 0 -1]	757	731	727	13	2	9	2	0	2
30	[1 1 0 -1 0 1 -1 1 0 -1 1 -1 1 -1 0 * 0 1 0 -1 1 -1 0 1 -1 1 -1 1 -1]	871	843	837	14	3	8	3	0	3
32	[1 1 -1 1 1 -1 1 0 0 -1 1 -1 1 -1 0 * 1 -1 1 -1 1 -1 1 0 0 1 -1 1 -1 1 -1]	993	963	959	15	2	12	0	1	2
34	[1 0 * 1 -1 1 1 -1 1 0 1 -1 1 0 -1 1 1 -1 1 1 -1 1 0 1 -1 1 1 -1]	1123	1091	1087	16	2	12	2	0	2

[註]：上表中 n 為邊數， C 為完全反射數， U 為上界估計值， P 為最佳解，

$d_1 = \frac{C-U}{2}$ 為上界估計值之缺線數， $d_2 = \frac{U-P}{2}$ 為最佳解較上界估計值增加之缺線數，

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 分別為 $\frac{M_l}{1}, \frac{M_{l+1}}{-1}, \frac{M_l}{1}, \frac{M_{l+1}}{0}, \frac{M_{l+2}}{-1}, \frac{M_l}{1}, \frac{M_{l+1}}{0}, \frac{M_{l+2}}{0}, \frac{M_{l+3}}{-1}$ 及 $\frac{M_l}{0}, \frac{M_{l+\frac{n}{2}}}{0}$ 之

組數，* 表折返點之位置。

陸、結論與討論

一、探討偶數之合成數

- 1· 從發現的最佳解中，觀察到在 $6 \leq n \leq 16$ 及 $n=22,26$ 時，最佳解之反射數都是上界估計值，而 $n=18,24,28,32,34$ 時，缺線數都比上界估計值的缺線數多兩條；而 $n=20$ 與 $n=30$ ，缺線數都比上界估計值的缺線數多三條，故推測當邊數 n 愈來愈大時，其質因數組成的個數與形式的複雜度，最佳解的缺線數與上界估計值的缺線數之差距也會愈來愈大。
- 2· 藉由偶數邊所發現之規律與性質去探討 n 為奇數之合成數的情形，但奇數邊與偶數邊之結構並不相同無法完全套用之前的規則，然而我們也得到一些初步的結果，如在奇數邊可考慮搭配使用 2 0 -2 之策略可以增加反射數，下表為目前所觀察之結果，其中 n 為邊數， C 為完全反射數， P 為最佳解， $d = \frac{1}{2}(C - P)$ 為缺線數，* 表折返點之位置。

n	只使用 1 -1、1 0 -1、1 0 0 -1 的情況	C	P	d
9	[1 0 0 0 1* -1 0 0 0]	73	69	2
15	[1 1 -1 0 0 0 0 1* -1 0 0 0 0 1 -1]	211	195	8
	[1 0 0 0 1 -1 0 1 * -1 0 1 -1 0 0 0]			
	[1 0 0 0 0 0 0 1* -1 0 0 1 -1 1 -1]			
21	[1 0 1 -1 0 0 0 0 1 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 1* -1 0]	421	397	12
	[1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 -1 1 -1 0 0 1 -1 1 * -1 0]			
25	[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1* 0 -1 0 0 0 1 -1 0 1 -1 0 0]	601	583	9
27	[1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -1 0 0 1 * -1 0 0 0 0 1 -1 0 0 1 -1]	703	667	18
	[1 1 -1 1 -1 0 0 1 -1 0 0 0 0 1* -1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -1 0]			
n	搭配 2 0 -2 的情況	C	P	d
9	[1 0 0 0 1* -1 0 0 0]	73	69	2
15	[1 * 0 0 0 0 0 0 0 2 0 -2 1 -1 0]	211	199	6
21	[1 * 1 -1 0 0 0 0 0 0 1 0 -1 0 0 0 0 2 0 -2]	421	401	10
25	[1 * 0 1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 -2 0 0 0]	601	589	6
27	[1 * 0 0 0 0 2 0 -2 0 0 1 -1 0 0 2 0 -2 0 0 1 -1 0 0 0 0]	703	679	12

- 3· 從我們發現的最佳解之鏡面轉動數去觀察，發現了一項有趣的性質，我們稱之為「頭尾相接」，即將偶數邊之最佳解分成上下相對各 $\frac{n}{2}$ 個位置，其形式是由 E 進入，經 1 或 -1，最後進入 P 點。以下以 $n=6$ 為例，列出其最佳解與對應之示意圖：

$$n=6, ; \text{ 最佳解 } \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & * \end{bmatrix}; \text{ 示意圖 } \begin{bmatrix} E & \rightarrow & \square & \downarrow \\ \uparrow & \rightarrow & P \end{bmatrix}; \text{ 最佳解 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \text{ 示意圖 } \begin{bmatrix} E & 0 & \downarrow \\ \leftarrow & 0 & P \end{bmatrix}$$

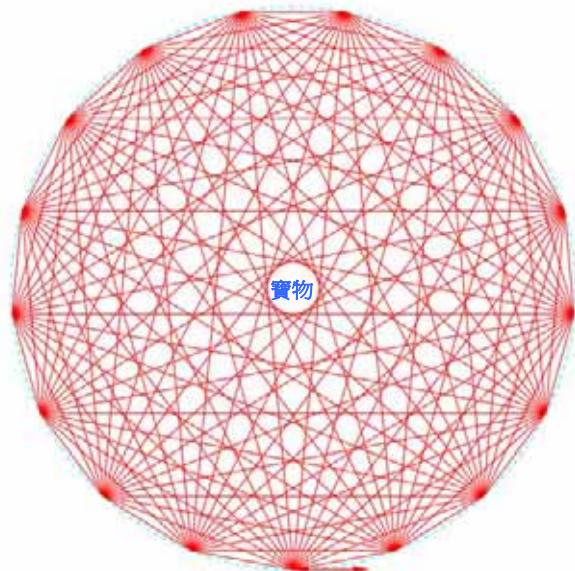
期望利用在上述 $6 \leq n \leq 34$ 之最佳解所觀察到的「頭尾相接」之特殊性質，找出一般化之最佳解的鏡面轉動數與鏡面擺放位置。

4 · 進一步探討能否將平面上正 n 邊形之鏡面擺放與反射之情形推廣至空間中球面之反射情形。

二、兩項應用：

應用一、天羅地網—防盜警報系統 (啟發來源：電影 Entrapment，中文片名：「將計就計」)

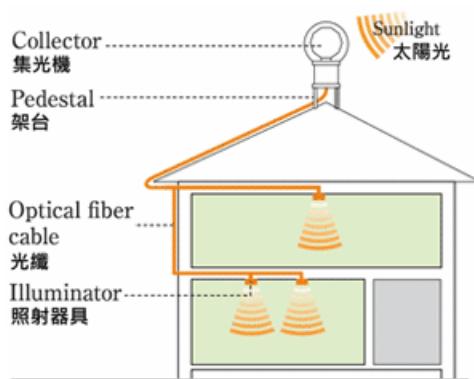
我們想到經由本文所探討的理論將鏡面經適當的轉動角度與位置的安排，可佈置出如天羅地網的雷射光線，配合紅外線感應器，形成一個十分完善的防盜警報系統。



應用二、節能減碳—綠建築的照明系統

(1) 室內照明：

如下圖所示，由於光纖傳送方式成本相當高，若能利用我們研究之理論配合在室內裝潢時，於室內之樑柱、角落或層板間，適當的配置一些鏡面，藉由採光與集光之設計將光線引入，經鏡面之反射提高照明度。此舉雖不能完全取代電燈之照明，但可發揮輔助之功效，也符合現今綠建築以自然採光之概念，也可達到節能減碳之效果。



追日系統與光纖傳送



示意圖：圖中虛線標記處即鏡面擺放位置

(2)停車場的照明：

大型之地下停車場常用天井採光，但單純的天井採光其照明之效果大都是集中在天井周圍，其他地方之亮度仍不佳，因此我們可以利用天井採光及集光後，配合停車場常見之凸面鏡，如圖所示，輔以我們的研究理論將光線引入後經由鏡面之反射，可以增加地下停車場的照明效果，且此照明範圍較天井採光之方式更為廣泛。



示意圖：圖中虛線標記處即鏡面擺放位置

柒、參考資料

- 1 · 余文卿(民 99)。普通高級中學數學 2。翰林出版。
- 2 · 台北市建國高級中學 49 屆 314 班合譯。針與線。數學思考(50 頁)。九章出版。
1998 年 12 月一版
- 3 · 何思賢,康雅婷,陳瓩方。第38屆國中數學科展作品第二名。鏡射乾坤。.
- 4 · 林佑蒔。2004 年國際科展。正 n 邊形光圈之路徑追蹤。
- 5 · Elwyn R. Berlekamp & Tom Rodgers, The Mathemagician and Pied Puzzler: A Collection in Tribute to Martin Gardner. M. Oskar van Deventer, Point Mirror Reflection(pp.245-251)
- 6 · Martin Gardner From Wikipedia, the free encyclopedia , from
http://en.wikipedia.org/wiki/Martin_Gardner
- 7 · Sloane, N. J. A. Sequence A001844/M3826 in "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences."

【評語】040418

1. 以鏡面調整角度來研究反射，是很有創意的想法。
2. 模型製作精良，對研究本身及說明都有幫助，且具有生活應用上的價值。
3. 數學理論運用較少。