

中華民國第 52 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組 數學科

最佳創意獎

040417

“軌” 謎 “心” 竅

學校名稱：國立鳳山高級中學

作者：	指導老師：
高二 張詠盛	連崇馨
高二 楊雅涵	黃佩瑜
高二 陳碩文	

關鍵詞：正射影三角形、五心軌跡、圓錐曲線

「軌」謎「心」竅

摘要

平面上有一個有趣的幾何性質：在平面上給一定圓， L_1, L_2, L_3 為通過圓心之三相異直線，若圓上有一動點 P ，過 P 分別作對 L_1, L_2, L_3 之投影點 A, B, C ，此 $\triangle ABC$ 我們稱為 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影三角形，則 $\triangle ABC$ 為一剛體三角形(Rigid Triangle)，即隨著動點 P 在圓上移動， $\triangle ABC$ 之形狀、大小不變。

本篇研究主要是針對 L_1, L_2, L_3 之相對位置，分別探討 P 點在圓上移動時，其正射影三角形之性質及其五心之軌跡。更進一步將 P 點在圓上移動之情形推廣至 P 點在其他圓錐曲線上移動之情形。

這次的研究，我們利用了 GeoGebra 的軟體協助觀察各種情形之軌跡圖形，並引入了三線坐標系之觀念協助我們推導公式，研究中善用了三角形的五心中三線坐標系與直角座標系相互轉換之性質，搭配高二學習到的圓錐曲線內容，得到許多令人驚喜的結論。

壹、研究動機

在數學專題課程中，老師教我們使用 GeoGebra 這個幾何軟體，在老師利用這個軟體呈現各種漂亮的幾何性質時，引發我們對於幾何圖形之各種性質濃厚的興趣。在尋找科展題材時，我們找到了一份簡短的論文「Projected Rotating Polygons」[3]中提到：有 n 條相異直線 $L_1, L_2, \dots, L_n$ 均通過一定圓圓心，在圓上任取一動點 P ，分別作 P 對 $L_1, L_2, \dots, L_n$ 之投影點 $H_1, H_2, \dots, H_n$ ，則連接各投影點所得之多邊形 $H_1 H_2 \dots H_n$ 隨著動點 P 在圓上移動，其形狀、大小均不變。

於是，我們利用 GeoGebra 軟體模擬上述性質中三條直線之情形，看著軌跡圖形的滾動，卻維持著相同的圖形，感到非常神奇，這讓我們有想繼續研究下去的動機。我們試著描繪出此三角形之重心，並觀察其軌跡圖形，竟然發現圖形為一橢圓，因此我們非常好奇三角形其他四心之軌跡是否同樣有相同或類似的結果。此外，若我們讓動點在其他圓錐曲線移動，所形成的正射影三角形是否也維持形狀、大小不變？而其五心的軌跡又是如何？我們開始著手做一連串的研究。

貳、研究目的

- 一、探討動點 P 在圓上， L_1, L_2, L_3 為過圓心之任意三相異直線，其正射影三角形之性質及其五心之軌跡。
- 二、探討動點 P 在橢圓上， L_1, L_2, L_3 為過橢圓中心之任意三相異直線，其正射影三角形之性質以及其五心之軌跡。
- 三、探討動點 P 在雙曲線上， L_1, L_2, L_3 為過雙曲線中心之任意三相異直線，其正射影三角形之性質以及其五心之軌跡。
- 四、探討動點 P 在拋物線上， L_1, L_2, L_3 為過拋物線焦點之任意三相異直線，其正射影三角形之性質以及其五心之軌跡。

參、研究設備及器材

紙和筆、電腦、GeoGebra 軟體

肆、研究過程與方法

首先，我們針對本文中會使用到的幾個名詞與其性質作明確的定義與描述，且在求五心之軌跡方程式的過程中，我們發現部分點的計算相當繁瑣且不易操作，因此我們進行了資料

的搜索與參考，引入了三線坐標系(或稱內心坐標系)(Trilinear coordinate)進行一系列研究。

定義一：正射影三角形

在平面上一點 P ， L_1, L_2, L_3 為平面上三相異直線，過 P 點對 L_1, L_2, L_3 作垂直線所得之垂足點分別為 A, B, C ，連接 A, B, C 形成 $\triangle ABC$ ，則稱 $\triangle ABC$ 為 P 點對 L_1, L_2, L_3 之正射影三角形。

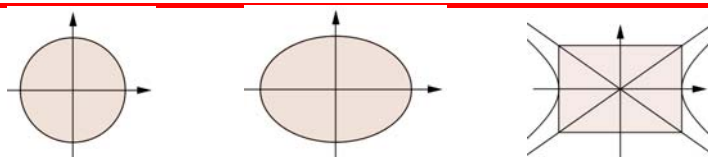
定義二：剛體三角形(Rigid Triangle)

在平面上一三角形 $\triangle ABC$ ，經平移或旋轉均保持其形狀與大小不變的三角形，則稱 $\triangle ABC$ 為一剛體三角形。

定義三：三線坐標系(或稱內心坐標系)(Trilinear coordinate)

在平面上給定一三角形 $\triangle ABC$ ，其中 $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b, \overline{AB} = c$ ， P' 為平面上之一點，若 P' 到 $\triangle ABC$ 之三邊 $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ 之距離比為 $\alpha : \beta : \gamma$ ，則點 P' 對 $\triangle ABC$ 之三線坐標為序對 $\alpha : \beta : \gamma$ 或 (α, β, γ) 。

定義四：有心錐線之中心面積



圓中心面積：一個半徑為 r 的圓內部面積 πr^2 。

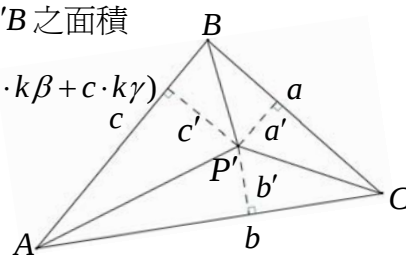
橢圓中心面積：一個長軸為 $2a$ 、短軸為 $2b$ 的橢圓內部面積 πab 。

雙曲線中心面積：過雙曲線兩頂點且垂直貫軸之直線與兩漸近線交四點 A, B, C, D ，則矩形 $ABCD$ 內部面積為 $4ab$ 。

性質一：若點 P' 對 $\triangle ABC$ 之三線坐標為 $\alpha : \beta : \gamma$ ，而 P' 點到 $\triangle ABC$ 之三邊 $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ 之實際距離為 a', b', c' ，則 $a' = k\alpha, b' = k\beta, c' = k\gamma$ ， $k = \frac{2\Delta}{a\alpha + b\beta + c\gamma} \neq 0$ ，其中 Δ 表 $\triangle ABC$ 之面積。

[證明]：設 $\Delta, \Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ 分表 $\triangle ABC, \triangle BP'C, \triangle AP'C, \triangle AP'B$ 之面積

$$\begin{aligned} \text{如圖，} \Delta &= \Delta_a + \Delta_b + \Delta_c = \frac{1}{2}(a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c') = \frac{1}{2}(a \cdot k\alpha + b \cdot k\beta + c \cdot k\gamma) \\ &= \frac{k}{2}(a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c \cdot \gamma) \Rightarrow k = \frac{2\Delta}{a\alpha + b\beta + c\gamma} \quad \blacksquare \end{aligned}$$



性質二：(三線坐標系與笛卡爾坐標系之轉換)

在平面上給定一三角形 $\triangle ABC$ ，其中 $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b, \overline{AB} = c$ ， P' 為平面上之一點，若點 P' 對 $\triangle ABC$ 之三線坐標為 $\alpha : \beta : \gamma$ ，且 $\triangle ABC$ 三頂點之笛卡爾坐標(直角坐標)分別為 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ ， O 為笛卡爾坐標系之原點，則

$$\overrightarrow{OP'} = \frac{a\alpha}{a\alpha + b\beta + c\gamma} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{b\beta}{a\alpha + b\beta + c\gamma} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{c\gamma}{a\alpha + b\beta + c\gamma} \cdot \overrightarrow{OC}$$

即 P' 之笛卡爾坐標(直角坐標)可表示為

$$P'(x, y) = \frac{a\alpha \cdot A + b\beta \cdot B + c\gamma \cdot C}{a\alpha + b\beta + c\gamma} = \left(\frac{a\alpha \cdot x_1 + b\beta \cdot x_2 + c\gamma \cdot x_3}{a\alpha + b\beta + c\gamma}, \frac{a\alpha \cdot y_1 + b\beta \cdot y_2 + c\gamma \cdot y_3}{a\alpha + b\beta + c\gamma} \right)$$

[證明]：若點 P' 對 $\triangle ABC$ 之三線坐標為 $\alpha:\beta:\gamma$ ，即 $P'(\alpha, \beta, \gamma)$ ， $a' = k\alpha$ ， $b' = k\beta$ ， $c' = k\gamma$

(1) 點 P' 在 $\triangle ABC$ 之內部

$$\Delta P'BC : \Delta P'AC : \Delta P'AB = a'a : b'b : c'c = k\alpha a : k\beta b : k\gamma c = \alpha a : \beta b : \gamma c$$

$$\text{由向量性質可得 } a\alpha \vec{P'A} + b\beta \vec{P'B} + c\gamma \vec{P'C} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow a\alpha \left(\vec{P'O} + \vec{OA} \right) + b\beta \left(\vec{P'O} + \vec{OB} \right) + c\gamma \left(\vec{P'O} + \vec{OC} \right) = \vec{0}$$

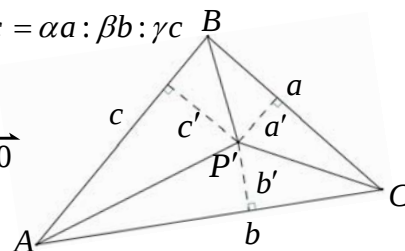
$$\Rightarrow (a\alpha + b\beta + c\gamma) \vec{P'O} = -a\alpha \vec{OA} - b\beta \vec{OB} - c\gamma \vec{OC}$$

$$\Rightarrow \vec{OP'} = \frac{a\alpha}{a\alpha + b\beta + c\gamma} \vec{OA} + \frac{b\beta}{a\alpha + b\beta + c\gamma} \vec{OB} + \frac{c\gamma}{a\alpha + b\beta + c\gamma} \vec{OC}$$

$$\text{故當 } O \text{ 為坐標之原點 } O(0,0), P'(x,y) = \left(\frac{a\alpha x_1 + b\beta x_2 + c\gamma x_3}{a\alpha + b\beta + c\gamma}, \frac{a\alpha y_1 + b\beta y_2 + c\gamma y_3}{a\alpha + b\beta + c\gamma} \right)$$

(2) 點 P' 在 $\triangle ABC$ 之邊上或外部

$$\text{由向量之性質 } a\alpha \vec{P'A} + b\beta \vec{P'B} + c\gamma \vec{P'C} = \vec{0}, \text{ 同理可證。} \blacksquare$$



爲了簡化研究過程，我們參考 Wikipedia, the free encyclopedia[5]及 Mathworld Wolfram[6]並引用了 Classical triangle centers 之列表中五心之三線坐標之表示法，並用性質二，將五心之三線坐標，轉換回直角坐標(笛卡爾坐標)，列表如下：

五心的三線坐標系與笛卡爾坐標系：

Name	符號	三線坐標系	直角坐標系(笛卡爾坐標系)
內心	I	$1:1:1$	$I(x,y) = \frac{aA + bB + cC}{a + b + c}$
重心	G	$bc:ca:ab$	$G(x,y) = \frac{A + B + C}{3}$
外心	O	$\cos A : \cos B : \cos C$	$O(x,y) = \frac{a \cos A \cdot A + b \cos B \cdot B + c \cos C \cdot C}{a \cos A + b \cos B + c \cos C}$
垂心	H	$\sec A : \sec B : \sec C$	$H(x,y) = \frac{a \sec A \cdot A + b \sec B \cdot B + c \sec C \cdot C}{a \sec A + b \sec B + c \sec C}$
傍心 A	E_A	$-1:1:1$	$E_A(x,y) = \frac{-aA + bB + cC}{-a + b + c}$
傍心 B	E_B	$1:-1:1$	$E_B(x,y) = \frac{aA - bB + cC}{a - b + c}$
傍心 C	E_C	$1:1:-1$	$E_C(x,y) = \frac{aA + bB - cC}{a + b - c}$

此外，此篇作品中，有部分軌跡方程式爲非標準式之圓錐曲線，爲了觀察方程式中之特殊性質，我們必須利用圓錐曲線的轉軸公式將軌跡方程式化成標準式，我們將其化簡後呈現如下：

圓錐曲線轉軸公式：

一、二次曲線 $\Gamma: (ax+by)^2 + (cx+dy)^2 = e^2$ 轉軸後可化成 $\Gamma': Ax^2 + Cy^2 = e^2 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{e}{\sqrt{A}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{e}{\sqrt{C}}\right)^2} = 1$

$$\text{令 } \alpha = (a-d)^2 + (b+c)^2, \beta = (a+d)^2 + (b-c)^2$$

當 $ab+cd > 0$

$$(1) bc > ad, \text{ 則 } \sqrt{A} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{2}, \sqrt{C} = \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{2(bc-ad)}, \frac{1}{\sqrt{C}} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{2(bc-ad)}.$$

$$(2) bc < ad, \text{ 則 } \sqrt{A} = \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}{2}, \sqrt{C} = \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}{2(ad-bc)}, \frac{1}{\sqrt{C}} = \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}{2(ad-bc)}.$$

當 $ab+cd < 0$

$$(3) bc > ad, \text{ 則 } \sqrt{A} = \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{2}, \sqrt{C} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{2(bc-ad)}, \frac{1}{\sqrt{C}} = \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{2(bc-ad)}.$$

$$(4) bc < ad, \text{ 則 } \sqrt{A} = \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}{2}, \sqrt{C} = \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}{2(ad-bc)}, \frac{1}{\sqrt{C}} = \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}{2(ad-bc)}.$$

$$\text{中心面積爲 } \frac{\pi e^2}{\sqrt{AC}} = \frac{\pi e^2}{|ad-bc|}.$$

二、二次曲線 $\Gamma: (ax+by)^2 - (cx+dy)^2 = e^2$ 轉軸後可化成 $\Gamma': Ax^2 + Cy^2 = e^2$

$$\text{令 } \alpha = a^2 + b^2 - c^2 - d^2, \beta = (2ab - 2cd)^2 + (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2$$

(5) $ab - cd > 0$, 則

$$A = \frac{\alpha + \sqrt{\beta}}{2} > 0, C = \frac{\alpha - \sqrt{\beta}}{2} < 0 \Rightarrow \Gamma': Ax^2 - (-C)y^2 = e^2 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{e}{\sqrt{A}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{e}{\sqrt{-C}}\right)^2} = 1.$$

(6) $ab - cd < 0$, 則

$$A = \frac{\alpha - \sqrt{\beta}}{2} < 0, C = \frac{\alpha + \sqrt{\beta}}{2} > 0 \Rightarrow \Gamma': -(-A)x^2 + Cy^2 = e^2 \Rightarrow -\frac{x^2}{\left(\frac{e}{\sqrt{-A}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{e}{\sqrt{C}}\right)^2} = 1.$$

$$\text{中心面積 } \frac{4e^2}{\sqrt{-AC}} = \frac{4e^2}{|ad-bc|}.$$

[證明]

一、由座標轉換下的不變式可知

$$\begin{cases} A+C = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\ A-C = \pm \sqrt{(2ab+2cd)^2 + (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2} \text{ (與 } 2ab+2cd \text{ 同號)} \end{cases}$$

$$\text{欲找出 } \alpha + \beta = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2), \alpha\beta = (2ab+2cd)^2 + (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2$$

我們利用根與係數關係與二次方程式公式解 $x^2 - (\alpha + \beta)x + (\alpha\beta) = 0$ 得

$$\alpha = (a-d)^2 + (b+c)^2, \beta = (a+d)^2 + (b-c)^2 \text{ 可解 } \sqrt{A}, \sqrt{C}.$$

二、同一之證法 ■

[註：因版面限制，我們將完整的推導過程置於研究日誌中。]

研究一：動點 P 在圓上， L_1, L_2, L_3 為過圓心之任意三相異直線

不失一般性，在研究一的部分，我們將圓心置於原點，三直線即為過原點之直線，並將 L_2 置於 y 軸上，因此可設圓： $x^2 + y^2 = r^2$ ， $L_1: y = mx$ ， $L_2: x = 0$ ， $L_3: y = nx$ ， $m > 0 > n$ 且 $m+n \geq 0$ ，為了以下計算方便，我們整理幾個將需要的數據，列表如下：

數據表 1：【圓： $x^2 + y^2 = r^2$ ，動點 $P(r \cos \theta, r \sin \theta)$ ， $L_1: y = mx$ ， $L_2: x = 0$ ， $L_3: y = nx$ 】

點 A		點 B		點 C	
$\left(\frac{r(m \sin \theta + \cos \theta)}{1+m^2}, \frac{mr(m \sin \theta + \cos \theta)}{1+m^2} \right)$		$(0, r \sin \theta)$		$\left(\frac{r(n \sin \theta + \cos \theta)}{1+n^2}, \frac{nr(n \sin \theta + \cos \theta)}{1+n^2} \right)$	
邊長 a	$\frac{r}{\sqrt{1+n^2}}$	$\cos A$	$\frac{-n}{\sqrt{1+n^2}}$	$\sec A$	$\frac{-\sqrt{1+n^2}}{n}$
邊長 b	$\frac{r(m-n)}{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}$	$\cos B$	$\frac{1+mn}{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}$	$\sec B$	$\frac{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}{1+mn}$
邊長 c	$\frac{r}{\sqrt{1+m^2}}$	$\cos C$	$\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$	$\sec B$	$\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$

定理 1：在平面上有一定圓，三相異直線 L_1, L_2, L_3 均過此定圓之圓心，在圓上任取一動點 P ，則 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影 $\triangle ABC$ 為一剛體三角形 (Rigid Triangle)。

[證明]：利用數據表 1 中 A, B, C 三點的坐標與三邊長，

(1) 保角：由餘弦定理可得 $\cos A = \frac{-n}{\sqrt{1+n^2}}$ ，

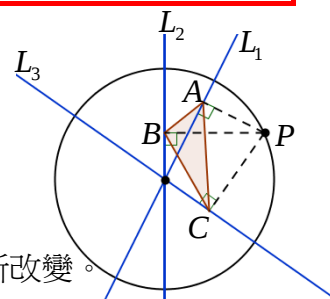
$$\cos B = \frac{1+mn}{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}, \quad \cos C = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

由此可知，角度並不隨 θ 改變而改變，只隨斜率 m 改變而有所改變。

(2) 保積： $\triangle ABC$ 面積 $= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} = \frac{(m-n)r^2}{2(1+m^2)(1+n^2)}$ ，亦不隨角度變

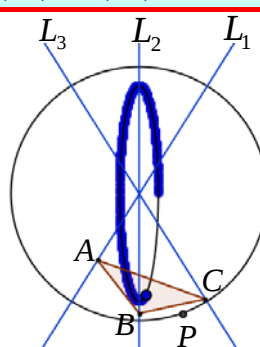
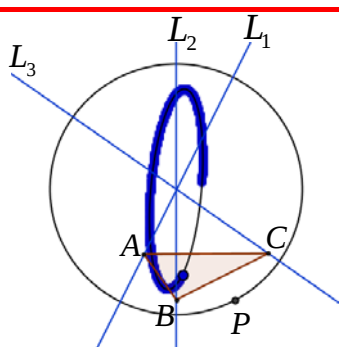
動而改變。由此可知， $\triangle ABC$ 有保積性質。

由(1)(2)可知 $\triangle ABC$ 為剛體三角形。 ■



定理 1.1：平面上有一半徑為 r 之定圓，相異三直線 L_1, L_2, L_3 均過此定圓之圓心，若 L_2 為鉛直線，在圓上任取一動點 P ，則點 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影 $\triangle ABC$ ，其內心 I 之軌跡為一橢圓。特別是，當 L_1, L_3 對稱於 L_2 時，內心 I 之軌跡為一橢圓的標準式。其中當 L_1 之斜率為 $m = \tan 30^\circ$ 時，內心 I 之軌跡為圓。

此外，所有的軌跡方程式均可經轉軸化成標準式 $\frac{x^2}{(Tr)^2} + \frac{y^2}{(Sr)^2} = 1$ 且 $T+S=1$ 。



[證明]：由三線坐標系推得內心 $I(x, y) = \frac{aA+bB+cC}{a+b+c}$ ，化簡後得到

$$\begin{cases} \frac{(m\sqrt{1+n^2} + n\sqrt{1+m^2})r \sin \theta}{(m-n+\sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} + \frac{(\sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2})r \cos \theta}{(m-n+\sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} = x \\ \left[\frac{m^2\sqrt{1+n^2} + n^2\sqrt{1+m^2} + (m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}{(m-n+\sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} \right] r \sin \theta + \frac{(n\sqrt{1+m^2} + m\sqrt{1+n^2})r \cos \theta}{(m-n+\sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} = y \end{cases}$$

利用克拉瑪公式求出 $\cos \theta$ 及 $\sin \theta$ 後再由 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 化簡得

$$\left[(m^2\sqrt{1+n^2} + n^2\sqrt{1+m^2} + (m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)})x - (m\sqrt{1+n^2} + n\sqrt{1+m^2})y \right]^2 + \left[-(m\sqrt{1+n^2} + n\sqrt{1+m^2})x + (\sqrt{1+n^2} + \sqrt{1+m^2})y \right]^2 = (m-n)^2 r^2$$

因此 $\triangle ABC$ 之內心 I 之軌跡為一橢圓。

[註] 令 $a = m^2\sqrt{1+n^2} + n^2\sqrt{1+m^2} + (m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)} > 0$

$$b = c = -(m\sqrt{1+n^2} + n\sqrt{1+m^2}) < 0, d = \sqrt{1+n^2} + \sqrt{1+m^2} > 0, f = (m-n) > 0$$

$ab+cd < 0$ 且 $ad-bc > 0$ ，上述軌跡方程式可經轉軸公式(4)化成標準式

$$\frac{x^2}{\left(\frac{(a+d) + \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2(ad-bc)} fr \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{(a+d) - \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2(ad-bc)} fr \right)^2} = 1$$

$$\text{且 } \frac{(a+d) + \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2(ad-bc)} f + \frac{(a+d) - \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2(ad-bc)} f = \frac{a+d}{ad-bc} f = 1$$

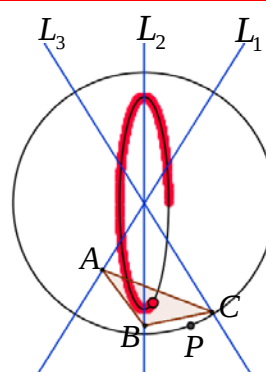
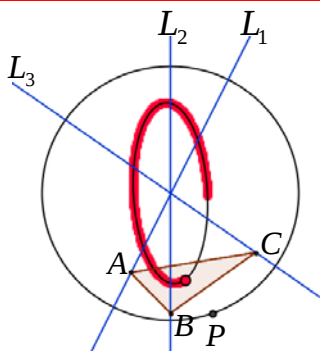
特別的是，當 $n = -m$ 時，軌跡方程式為 $\frac{x^2}{\left(\frac{r}{\sqrt{1+m^2}(\sqrt{1+m^2} + m)} \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{mr}{\sqrt{1+m^2}} \right)^2} = 1$ 為一橢圓

的標準式且 $\frac{1}{\sqrt{1+m^2}(\sqrt{1+m^2} + m)} + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} = 1$ 。

若 $\frac{1}{\sqrt{1+m^2}(\sqrt{1+m^2} + m)} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ$ ，內心 I 之軌跡為一圓。 ■

定理 1.2：平面上有一半徑為 r 之定圓，相異三直線 L_1, L_2, L_3 均過此定圓之圓心，若 L_2 為鉛直線，在圓上任取一動點 P ，則點 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影 $\triangle ABC$ ，其重心 G 之軌跡為一橢圓。特別的是，當 L_1, L_3 對稱於 L_2 時，重心 G 之軌跡為一橢圓的標準式。其中當 L_1 之斜率為 $m = \tan 30^\circ$ 時，重心 G 之軌跡為圓。

此外，所有的軌跡方程式均可經轉軸化成標準式 $\frac{x^2}{(Tr)^2} + \frac{y^2}{(Sr)^2} = 1$ 且 $T+S=1$ 。



[證明]：由三線坐標系推得重心 $G(x, y) = \frac{A+B+C}{3}$ ，化簡後得到

$$\begin{cases} \frac{r(m+n)(1+mn)}{3(1+m^2)(1+n^2)} \sin \theta + \frac{r(m^2+n^2+2)}{3(1+m^2)(1+n^2)} \cos \theta = x \\ \frac{r(1+2m^2+2n^2+3m^2n^2)}{3(1+m^2)(1+n^2)} \sin \theta + \frac{r(m+n)(1+mn)}{3(1+m^2)(1+n^2)} \cos \theta = y \end{cases}$$

利用克拉瑪公式求出 $\cos \theta$ 及 $\sin \theta$ 後再由 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 化簡得

$$\left[-(1+2m^2+2n^2+3m^2n^2)x + (m+n)(1+mn)y \right]^2 + \left[(m+n)(1+mn)x - (m^2+n^2+2)y \right]^2 = \frac{4(1+m^2+n^2-mn)^2 r^2}{9}$$

因此 $\triangle ABC$ 重心 G 之軌跡為一橢圓。

[註] 令 $a = -(1+2m^2+2n^2+3m^2n^2) < 0$, $b = c = (m+n)(1+mn)$, $d = -(m^2+n^2+2) < 0$

$$f = \frac{2(1+m^2+n^2-mn)}{3} > 0$$

(1) 當 $1+mn > 0$, $b = c > 0 \Rightarrow ab + cd < 0$ ，上述軌跡方程式可經轉軸公式(4)化成標準式

$$\frac{x^2}{\left(\frac{-(a+d) + \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2(ad-bc)} fr \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{-(a+d) - \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2(ad-bc)} fr \right)^2} = 1$$

且 $\frac{-(a+d) + \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2(ad-bc)} f + \frac{-(a+d) - \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2(ad-bc)} f = \frac{-(a+d)f}{(ad-bc)} = 1$

(2) 當 $1+mn < 0$, $b = c < 0 \Rightarrow ab + cd > 0$ ，上述軌跡方程式可經轉軸公式(2)化成標準式

$$\frac{x^2}{\left(\frac{-(a+d) - \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2(ad-bc)} fr \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{-(a+d) + \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2(ad-bc)} fr \right)^2} = 1$$

且 $\frac{-(a+d) - \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2(ad-bc)} f + \frac{-(a+d) + \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2(ad-bc)} f = \frac{-(a+d)f}{(ad-bc)} = 1$

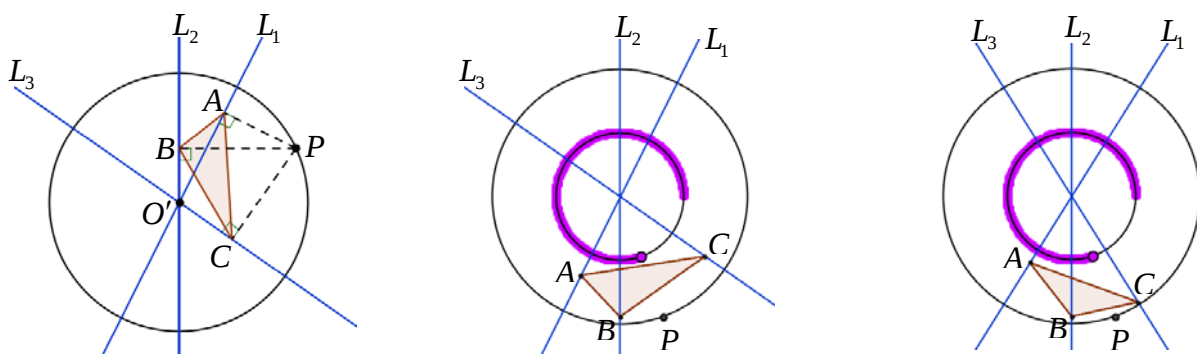
特別的是，當 $n = -m$ 時，軌跡方程式為 $\frac{x^2}{\left(\frac{2r}{3m^2+3} \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{(3m^2+1)r}{3m^2+3} \right)^2} = 1$ 為一橢圓的標準式

且 $\frac{2}{3m^2+3} + \frac{(3m^2+1)}{3m^2+3} = 1$ 。

若 $\frac{2}{3m^2+3} = \frac{(3m^2+1)}{3m^2+3} \Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ$ ，重心 G 之軌跡為一圓。■

定理 1.3：平面上有一半徑為 r 之定圓，相異三直線 L_1, L_2, L_3 均過此定圓之圓心，若 L_2 為鉛直線，在圓上任取一動點 P ，則點 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影 $\triangle ABC$ ，其外心 O 之軌跡為一圓，且此圓之半徑恰為原定圓之一半。

其軌跡方程式可化成標準式 $\frac{x^2}{(Tr)^2} + \frac{y^2}{(Sr)^2} = 1$ 且 $T+S=1$ ， $T=S=\frac{1}{2}$ 。



[證明 1]：如圖中，點 P, A, B, O', C 五點共圓且此圓即為 $\triangle ABC$ 之外接圓。

$\overline{O'P}$ 的中點即為 $\triangle ABC$ 之外心，當 P 在圓上移動，則 $\overline{O'P}$ 中點之軌跡為以 O' 為圓心， $\frac{1}{2}\overline{O'P}$ 為半徑之圓。

[證明 2]：由三線坐標系推得外心 $O(x, y) = \frac{a \cos A \cdot A + b \cos B \cdot B + c \cos C \cdot C}{a \cos A + b \cos B + c \cos C}$

$$\text{化簡後得到} \begin{cases} x = \frac{r \cos \theta}{2} \\ y = \frac{r \sin \theta}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{2x}{r} \\ \sin \theta = \frac{2y}{r} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{r^2}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = 1$$

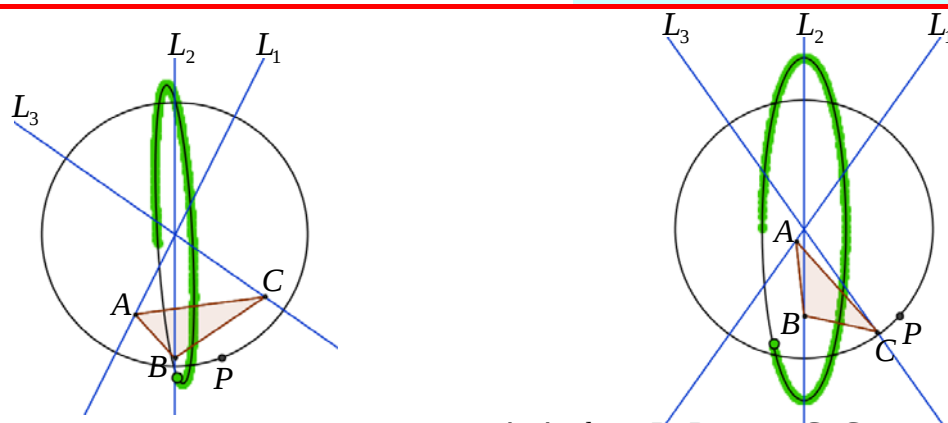
因此 $\triangle ABC$ 外心 O 之軌跡為一圓，且此圓之半徑恰為原定圓之一半。 ■

定理 1.4：平面上有一半徑為 r 之定圓，相異三直線 L_1, L_2, L_3 均過此定圓之圓心，若 L_2 為鉛直線，且 L_1, L_3 均不為水平線且不互相垂直，在圓上任取一動點 P ，則點 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影 $\triangle ABC$ ，其垂心 H 之軌跡為一橢圓。

特別是，當 L_1, L_3 對稱於 L_2 時，垂心 H 之軌跡為一橢圓的標準式。

其中當 L_1 之斜率為 $m = \tan 30^\circ$ 時，垂心 H 之軌跡為圓。

此外，所有的軌跡方程式均可經轉軸化成標準式 $\frac{x^2}{(Tr)^2} + \frac{y^2}{(Sr)^2} = 1$ 且 $T + S = 1$ 。



[證明]：由三線坐標系得知垂心 $H(x, y) = \frac{a \sec A \cdot A + b \sec B \cdot B + c \sec C \cdot C}{a \sec A + b \sec B + c \sec C}$

$$\text{化簡後得到} \begin{cases} \frac{r(m+n)(1+mn)}{(1+m^2)(1+n^2)} \sin \theta + \frac{r(1+mn)(1-mn)}{(1+m^2)(1+n^2)} \cos \theta = x \\ \frac{r(2m^2n^2+m^2+n^2)}{(1+m^2)(1+n^2)} \sin \theta + \frac{r(m+n)(1+mn)}{(1+m^2)(1+n^2)} \cos \theta = y \end{cases}$$

利用克拉瑪公式求出 $\cos \theta$ 及 $\sin \theta$ 後再由 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 化簡得

$$\left[\frac{-(2m^2n^2 + m^2 + n^2)x}{1+mn} + (m+n)y \right]^2 + [(m+n)x - (1-mn)y]^2 = 4m^2n^2r^2$$

因此 $\triangle ABC$ 垂心 H 之軌跡為一橢圓。

[註] 令 $a = \frac{-(2m^2n^2 + m^2 + n^2)}{1+mn}$, $b = c = m+n > 0$, $d = -1+mn < 0$, $f = -2mn > 0$

(1) 當 $1+mn > 0$, $ab+cd < 0$ 且 $ad-bc > 0$, $a+d < 0$

上述軌跡方程式可經轉軸公式(4)化成標準式

$$\frac{x^2}{\left(\frac{-(a+d) + \sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2}}{2(ad-bc)} fr \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{-(a+d) - \sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2}}{2(ad-bc)} fr \right)^2} = 1$$

且 $\frac{-(a+d) + \sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2}}{2(ad-bc)} f + \frac{-(a+d) - \sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2}}{2(ad-bc)} f = \frac{-(a+d)}{ad-bc} f = 1$

(2) 當 $1+mn < 0$, $ab+cd > 0$ 且 $ad-bc < 0$, $a+d > 0$

上述軌跡方程式可經轉軸公式(1)化成標準式

$$\frac{x^2}{\left(\frac{-\sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2} + (a+d)}{2(bc-ad)} fr \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2} + (a+d)}{2(bc-ad)} fr \right)^2} = 1$$

且 $\frac{-\sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2} + (a+d)}{2(bc-ad)} f + \frac{\sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2} + (a+d)}{2(bc-ad)} f = \frac{a+d}{bc-ad} f = 1$

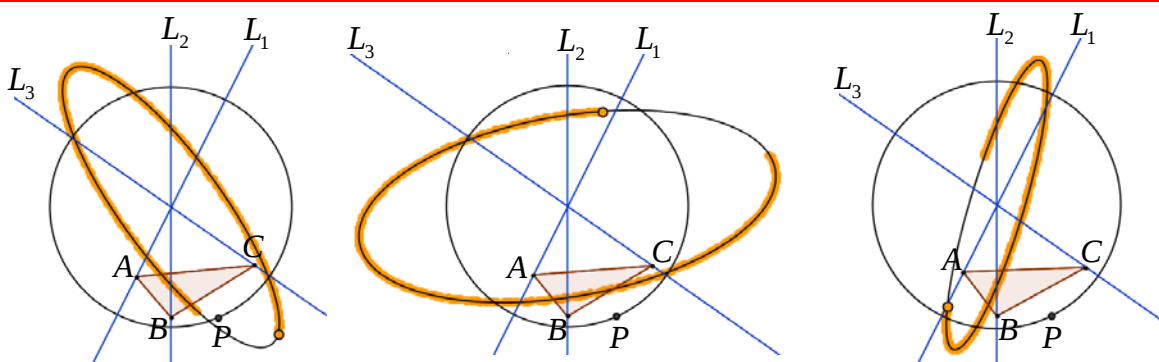
特別的是，當 $n = -m$ 時，軌跡方程式為 $\Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{(1-m^2)r}{m^2+1} \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{2m^2r}{m^2+1} \right)^2} = 1$ 為一橢圓的標準式

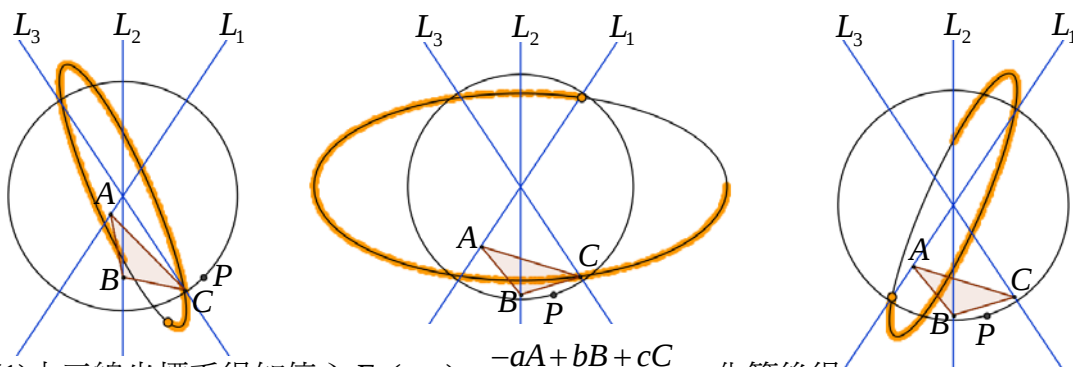
且 $\frac{(1-m^2)}{1+m^2} + \frac{2m^2}{1+m^2} = 1$ 。若 $\frac{(1-m^2)}{m^2+1} = \frac{2m^2}{m^2+1} \Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ$ ，垂心 H 之軌跡為一圓。■

定理 1.5：平面上有一半徑為 r 之定圓，相異三直線 L_1, L_2, L_3 均過此定圓之圓心，若 L_2 為鉛直線，在圓上任取一動點 P ，則點 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影 $\triangle ABC$ ，其傍心 E_A, E_B, E_C 之軌跡為一橢圓。

特別的是，當 L_1, L_3 對稱於 L_2 時，傍心 E_A, E_C 之軌跡為非標準式的橢圓，傍心 E_B 之軌跡為橢圓的標準式。

此外，所有的軌跡方程式均可經轉軸化成標準式 $\frac{x^2}{(Tr)^2} + \frac{y^2}{(Sr)^2} = 1$ 且 $T+S=1$ 。





[證明]：(1)由三線坐標系得知傍心 $E_A(x, y) = \frac{-aA+bB+cC}{-a+b+c}$ ，化簡後得

$$\begin{cases} \frac{(n\sqrt{1+m^2}-m\sqrt{1+n^2})r \sin \theta}{(m-n-\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} + \frac{(\sqrt{1+m^2}-\sqrt{1+n^2})r \cos \theta}{(m-n-\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} = x \\ \frac{\left[n^2\sqrt{1+m^2}-m^2\sqrt{1+n^2}+(m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)} \right] r \sin \theta}{(m-n-\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} + \frac{(n\sqrt{1+m^2}-m\sqrt{1+n^2})r \cos \theta}{(m-n-\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} = y \end{cases}$$

利用克拉瑪公式求出 $\cos \theta$ 及 $\sin \theta$ 後再由 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 化簡得

$$\left\{ -\left[n^2\sqrt{1+m^2}-m^2\sqrt{1+n^2}+(m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)} \right] x + (n\sqrt{1+m^2}-m\sqrt{1+n^2})y \right\}^2 + \left\{ (n\sqrt{1+m^2}-m\sqrt{1+n^2})x - (\sqrt{1+m^2}-\sqrt{1+n^2})y \right\}^2 = (m-n)^2 r^2$$

因此 $\triangle ABC$ 傍心 E_A 之軌跡為一橢圓。

[註] 令 $a = m^2\sqrt{1+n^2} - n^2\sqrt{1+m^2} - (m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)} < 0$

$$b = c = n\sqrt{1+m^2} - m\sqrt{1+n^2} < 0, d = -\sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2} < 0, f = m - n > 0$$

$ab + cd > 0$ 且 $ad - bc < 0, a + d < 0$ ，上述軌跡方程式可經轉軸公式(1)化成標準式

$$\frac{x^2}{\left(\frac{-\sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2} - (a+d)}{2(bc-ad)} fr \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2} - (a+d)}{2(bc-ad)} fr \right)^2} = 1$$

$$\text{且 } \frac{-\sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2} - (a+d)}{2(bc-ad)} f + \frac{\sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2} - (a+d)}{2(bc-ad)} f = \frac{-(a+d)}{bc-ad} f = 1$$

特別的是，當 $n = -m$ 時，軌跡方程式為 $\left[-\sqrt{1+m^2}(\sqrt{1+m^2}x + y) \right]^2 + \left[-\sqrt{1+m^2}x \right]^2 = r^2$

$$\text{可經轉軸後化成 } \frac{x^2}{\left(\frac{-\sqrt{m^4+6m^2+5+(1+m^2)}}{2(1+m^2)} r \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{m^4+6m^2+5+(1+m^2)}}{2(1+m^2)} r \right)^2} = 1$$

$$\text{且 } \frac{-\sqrt{m^4+6m^2+5+(1+m^2)}}{2(1+m^2)} + \frac{\sqrt{m^4+6m^2+5+(1+m^2)}}{2(1+m^2)} = 1 \quad \blacksquare$$

(2)由三線坐標系得知傍心 $E_B(x, y) = \frac{aA-bB+cC}{a-b+c}$ ，化簡後得到

$$\begin{cases} \frac{(n\sqrt{1+m^2}+m\sqrt{1+n^2})r \sin \theta}{(n-m+\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} + \frac{(\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})r \cos \theta}{(n-m+\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} = x \\ \frac{\left[n^2\sqrt{1+m^2}+m^2\sqrt{1+n^2}-(m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)} \right] r \sin \theta}{(n-m+\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} + \frac{(m\sqrt{1+n^2}+n\sqrt{1+m^2})r \cos \theta}{(n-m+\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} = y \end{cases}$$

利用克拉瑪公式求出 $\cos \theta$ 及 $\sin \theta$ 後再由 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 化簡得

$$\left\{ \left[n^2 \sqrt{1+m^2} + m^2 \sqrt{1+n^2} - (m-n) \sqrt{(1+m^2)(1+n^2)} \right] x - (n \sqrt{1+m^2} + m \sqrt{1+n^2}) y \right\}^2 + \left\{ - (n \sqrt{1+m^2} + m \sqrt{1+n^2}) x + (\sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2}) y \right\}^2 = (m-n)^2 r^2$$

因此 $\triangle ABC$ 傍心 E_B 之軌跡為一橢圓。

[註] 令 $a = m^2 \sqrt{1+n^2} + n^2 \sqrt{1+m^2} - (m-n) \sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}$

$$b = c = - (n \sqrt{1+m^2} + m \sqrt{1+n^2}) < 0, d = \sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2} > 0, f = m - n > 0$$

$ab+cd < 0$ 且 $ad-bc < 0, a+d > 0$ ，上述軌跡方程式可經轉軸公式(3)化成標準式

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2} + (a+d)}{2(bc-ad)} fr \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{-\sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2} + (a+d)}{2(ad-bc)} fr \right)^2} = 1$$

且 $\frac{\sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2} + (a+d)}{2(bc-ad)} f + \frac{-\sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2} + (a+d)}{2(bc-ad)} f = \frac{a+d}{bc-ad} f = 1$

特別的是，當 $n = -m$ 時，軌跡方程式為 $\frac{x^2}{\left(\frac{r}{m^2 - m\sqrt{1+m^2} + 1} \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{-mr}{\sqrt{1+m^2}} \right)^2} = 1$

為一橢圓的標準式且 $\frac{1}{m^2 - m\sqrt{1+m^2} + 1} + \frac{-m}{\sqrt{1+m^2}} = 1$ 。 ■

(3)由三線坐標系得知傍心 $E_C(x, y) = \frac{aA + bB - cC}{a + b - c}$ ，化簡後得到

$$\begin{cases} \frac{(m\sqrt{1+n^2} - n\sqrt{1+m^2})r \sin \theta}{(m-n + \sqrt{1+m^2} - \sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} + \frac{(\sqrt{1+n^2} - \sqrt{1+m^2})r \cos \theta}{(m-n + \sqrt{1+m^2} - \sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} = x \\ \frac{[m^2 \sqrt{1+n^2} - n^2 \sqrt{1+m^2} + (m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}]r \sin \theta}{(m-n + \sqrt{1+m^2} - \sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} + \frac{(m\sqrt{1+n^2} - n\sqrt{1+m^2})r \cos \theta}{(m-n + \sqrt{1+m^2} - \sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} = y \end{cases}$$

利用克拉瑪公式求出 $\cos \theta$ 及 $\sin \theta$ 後再由 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 化簡得

$$\left\{ -[m^2 \sqrt{1+n^2} - n^2 \sqrt{1+m^2} + (m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}]x + (m\sqrt{1+n^2} - n\sqrt{1+m^2})y \right\}^2 + \left\{ (m\sqrt{1+n^2} - n\sqrt{1+m^2})x - (\sqrt{1+n^2} - \sqrt{1+m^2})y \right\}^2 = (m-n)^2 r^2$$

因此 $\triangle ABC$ 傍心 E_C 之軌跡為一橢圓。

[註] 令 $a = -m^2 \sqrt{1+n^2} + n^2 \sqrt{1+m^2} - (m-n) \sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}$

$$b = c = m\sqrt{1+n^2} - n\sqrt{1+m^2} > 0, d = \sqrt{1+m^2} - \sqrt{1+n^2} > 0, f = m - n > 0$$

$ab + cd < 0$ 且 $ad - bc < 0, a + d < 0$ ，上述軌跡方程式可經轉軸公式(3)化成標準式

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2} - (a+d)}{2(bc-ad)} fr \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{-\sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2} - (a+d)}{2(ad-bc)} fr \right)^2} = 1$$

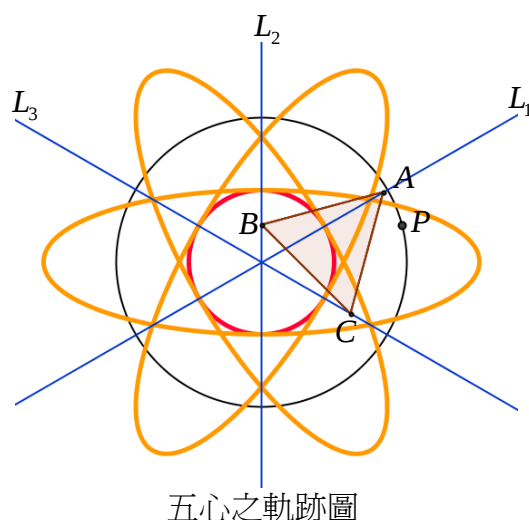
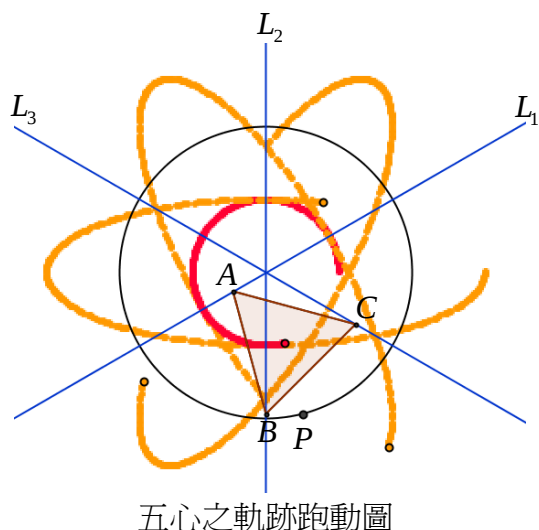
且 $\frac{\sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2} - (a+d)}{2(bc-ad)} f + \frac{-\sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2} - (a+d)}{2(bc-ad)} f = \frac{-(a+d)}{bc-ad} f = 1$

特別的是，當 $n = -m$ 時，軌跡方程式為 $\left[-\sqrt{1+m^2}(\sqrt{1+m^2}x - y) \right]^2 + \left[\sqrt{1+m^2}x \right]^2 = r^2$

可經轉軸後化成 $\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{m^4+6m^2+5+(1+m^2)}}{2(1+m^2)}r\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{-\sqrt{m^4+6m^2+5+(1+m^2)}}{2(1+m^2)}r\right)^2} = 1$

且 $\frac{\sqrt{m^4+6m^2+5+(1+m^2)}}{2(1+m^2)} + \frac{-\sqrt{m^4+6m^2+5+(1+m^2)}}{2(1+m^2)} = 1$ 。 ■

[註]：定理 1.1~定理 1.4 中，若 L_1, L_3 對稱於鉛直線 L_2 且 L_1 之斜率 $m = \tan 30^\circ$ ，此時 $\triangle ABC$ 為正三角形，且除傍心外，其餘四心重合，其軌跡為圓，如下圖所示：



研究二：動點 P 在橢圓上， L_1, L_2, L_3 為過橢圓中心之任意三相異直線

不失一般性，在研究二的部分，我們將橢圓的中心置於原點，三直線即為過原點之直線，並將 L_2 置於 y 軸上，設橢圓： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$ ， $L_1: y = mx$ ， $L_2: x = 0$ ， $L_3: y = nx$ ， $m > 0 > n$ 且 $m+n \geq 0$ ，而為了以下計算方便，我們整理幾個將需要的數據，列表如下：

數據表 2：[橢圓： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$ ，動點 $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ ， $L_1: y = mx$ ， $L_2: x = 0$ ， $L_3: y = nx$]

點 A		點 B		點 C	
$\left(\frac{mb \sin \theta + a \cos \theta}{1+m^2}, \frac{m^2 b \sin \theta + ma \cos \theta}{1+m^2}\right)$		$(0, b \sin \theta)$		$\left(\frac{nb \sin \theta + a \cos \theta}{1+n^2}, \frac{n(nb \sin \theta + a \cos \theta)}{1+n^2}\right)$	
邊長 a	$\sqrt{\frac{(a \cos \theta)^2 + (b \sin \theta)^2}{1+n^2}}$	$\cos A$	$\frac{-n}{\sqrt{1+n^2}}$	$\sec A$	$\frac{-\sqrt{1+n^2}}{n}$
邊長 b	$\sqrt{\frac{(m-n)^2 [(a \cos \theta)^2 + (b \sin \theta)^2]}{(1+m^2)(1+n^2)}}$	$\cos B$	$\frac{1+mn}{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}$	$\sec B$	$\frac{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}{1+mn}$
邊長 c	$\sqrt{\frac{(a \cos \theta)^2 + (b \sin \theta)^2}{1+m^2}}$	$\cos C$	$\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$	$\sec B$	$\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$

定理 2：在平面上有一橢圓，三相異直線 L_1, L_2, L_3 均過此橢圓之中心，在橢圓上任取一動點 P ，則 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影 ΔABC 為一相似三角形。

[證明]：

利用數據表 2 中 A, B, C 三點的坐標與三邊長，

(1) 保角：由餘弦定理可得

$$\cos A = \frac{-n}{\sqrt{1+n^2}}, \quad \cos B = \frac{1+mn}{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}},$$

$$\cos C = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

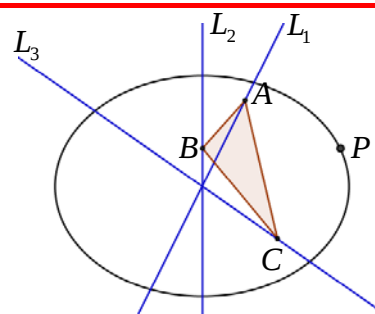
由此可知，角度並不隨 θ 改變而改變，只隨斜率 m 改變而有所改變。

(2) 不保積：但此時我們卻發現

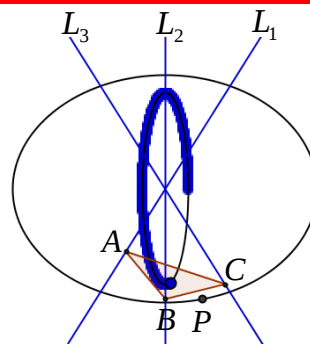
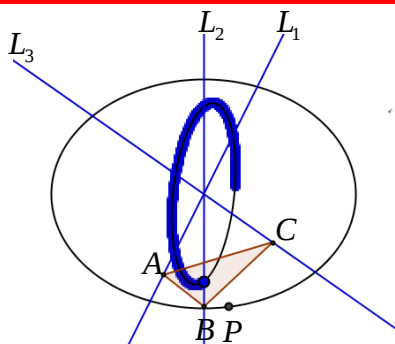
$$\Delta ABC \text{ 面積} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} = \frac{(m-n)[(a \cos \theta)^2 + (b \sin \theta)^2]}{2(1+m^2)(1+n^2)}, \text{ 會隨 } \theta \text{ 變}$$

動而改變，故可知 ΔABC 在此情況下並無保積性質。

由(1)(2)可知 ΔABC 為相似三角形。■



定理 2.1：平面上有一長軸為 $2a$ ，短軸為 $2b$ 之橢圓，相異三直線 L_1, L_2, L_3 均過此橢圓之中心，若 L_2 為鉛直線，在橢圓上任取一動點 P ，則點 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影 ΔABC ，其內心 I 之軌跡為一橢圓。特別是，當 L_1, L_3 對稱於 L_2 時，內心 I 之軌跡為一橢圓的標準式 $\frac{x^2}{(Ta)^2} + \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$ 且 $T+S=1$ ，其中當 L_1 之斜率為 $m = \frac{a}{\sqrt{2ab+b^2}}$ 時，內心 I 之軌跡為圓。



[證明]：由三線坐標系推得內心 $I(x, y) = \frac{aA + bB + cC}{a + b + c}$ ，化簡後得到

$$\begin{cases} \frac{(m\sqrt{1+n^2} + n\sqrt{1+m^2})b \sin \theta}{(m-n + \sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} + \frac{(\sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2})a \cos \theta}{(m-n + \sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} = x \\ \frac{[m^2\sqrt{1+n^2} + n^2\sqrt{1+m^2} + (m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}]b \sin \theta}{(m-n + \sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} + \frac{(n\sqrt{1+m^2} + m\sqrt{1+n^2})a \cos \theta}{(m-n + \sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} = y \end{cases}$$

利用克拉瑪公式求出 $\cos \theta$ 及 $\sin \theta$ 後再由 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 化簡得

$$\frac{[(m^2\sqrt{1+n^2} + n^2\sqrt{1+m^2} + (m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)})x - (m\sqrt{1+n^2} + n\sqrt{1+m^2})y]^2}{a^2} + \frac{[-(m\sqrt{1+n^2} + n\sqrt{1+m^2})x + (\sqrt{1+n^2} + \sqrt{1+m^2})y]^2}{b^2} = (m-n)^2$$

因此 ΔABC 之內心 I 之軌跡為一橢圓。

[註] $a' = \frac{m^2\sqrt{1+n^2} + n^2\sqrt{1+m^2} + (m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}{a} > 0, b' = \frac{-(m\sqrt{1+n^2} + n\sqrt{1+m^2})}{a} < 0,$

$$c' = \frac{-(m\sqrt{1+n^2} + n\sqrt{1+m^2})}{b} < 0, d' = \frac{\sqrt{1+n^2} + \sqrt{1+m^2}}{b} > 0, f = m-n > 0$$

$a'b' + c'd' < 0$ 且 $a'd' - b'c' > 0$ ，上述軌跡方程式可經轉軸公式(4)化成標準式

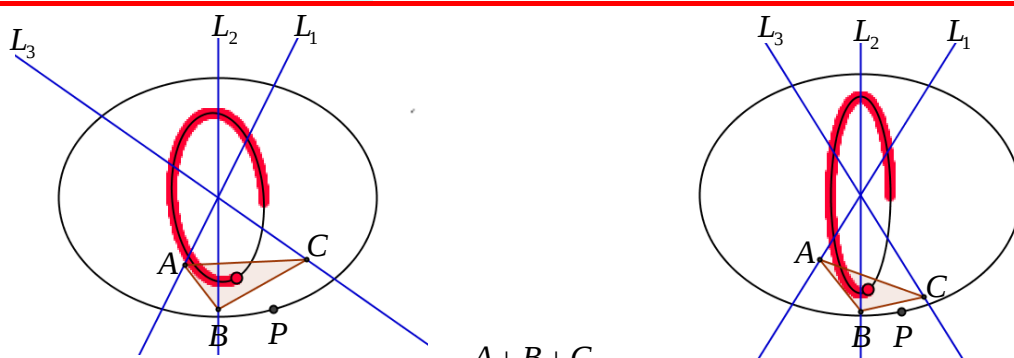
$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{(a'+d')^2 + (b'-c')^2} + \sqrt{(a'-d')^2 + (b'+c')^2}}{2(a'd' - b'c')} f \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{(a'+d')^2 + (b'-c')^2} - \sqrt{(a'-d')^2 + (b'+c')^2}}{2(a'd' - b'c')} f \right)^2} = 1$$

特別的是，當 $n = -m$ 時，軌跡方程式為 $\frac{x^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{1+m^2}(\sqrt{1+m^2} + m)} \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{mb}{\sqrt{1+m^2}} \right)^2} = 1$ 為一橢圓的

標準式且 $\frac{1}{\sqrt{1+m^2}(\sqrt{1+m^2} + m)} + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} = 1$ 。

若 $\frac{a}{\sqrt{1+m^2}(\sqrt{1+m^2} + m)} = \frac{mb}{\sqrt{1+m^2}} \Rightarrow m = \frac{a}{\sqrt{2ab+b^2}}$ ，內心 I 之軌跡為一圓。 ■

定理 2.2: 平面上有一長軸為 $2a$ ，短軸為 $2b$ 之橢圓，相異三直線 L_1, L_2, L_3 均過此橢圓之中心，若 L_2 為鉛直線，在橢圓上任取一動點 P ，則點 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影 $\triangle ABC$ ，其重心 G 之軌跡為一橢圓。特別的是，當 L_1, L_3 對稱於 L_2 時，重心 G 之軌跡為一橢圓的標準式 $\frac{x^2}{(Ta)^2} + \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$ 且 $T + S = 1$ 。其中當 L_1 之斜率為 $m = \sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{2a}{b} - 1 \right)}$ 時，重心 G 之軌跡為圓。



[證明]：由三線坐標系推得重心 $G(x, y) = \frac{A+B+C}{3}$ ，化簡後得到

$$\begin{cases} \frac{(m+n)(1+mn)}{3(1+m^2)(1+n^2)} b \sin \theta + \frac{(m^2+n^2+2)}{3(1+m^2)(1+n^2)} a \cos \theta = x \\ \frac{(1+2m^2+2n^2+3m^2n^2)}{3(1+m^2)(1+n^2)} b \sin \theta + \frac{(m+n)(1+mn)}{3(1+m^2)(1+n^2)} a \cos \theta = y \end{cases}$$

利用克拉瑪公式求出 $\cos \theta$ 及 $\sin \theta$ 後再由 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 化簡得

$$\frac{[-(1+2m^2+2n^2+3m^2n^2)x + (m+n)(1+mn)y]^2}{a^2} + \frac{[(m+n)(1+mn)x - (m^2+n^2+2)y]^2}{b^2} = \frac{4(1+m^2+n^2-mn)^2}{9}$$

因此 $\triangle ABC$ 重心 G 之軌跡為一橢圓。

[註] 令 $a' = \frac{-(1+2m^2+2n^2+3m^2n^2)}{a} < 0, b' = \frac{(m+n)(1+mn)}{a}, c' = \frac{(m+n)(1+mn)}{b}$

$$d' = \frac{-(m^2+n^2+2)}{b} < 0, f = \frac{2(1+m^2+n^2-mn)}{3} > 0$$

(1) 當 $1+mn > 0$, $a'b'+c'd' < 0$ 且 $a'd'-b'c' > 0$, 上述軌跡方程式可經轉軸公式(4)化成標準式

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{(a'+d')^2 + (b'-c')^2} + \sqrt{(a'-d')^2 + (b'+c')^2}}{2(a'd'-b'c')} f \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{(a'+d')^2 + (b'-c')^2} - \sqrt{(a'-d')^2 + (b'+c')^2}}{2(a'd'-b'c')} f \right)^2} = 1$$

(2) 當 $1+mn < 0$, $a'b'+c'd' > 0$ 且 $a'd'-b'c' > 0$, 上述軌跡方程式可經轉軸公式(2)化成標準式

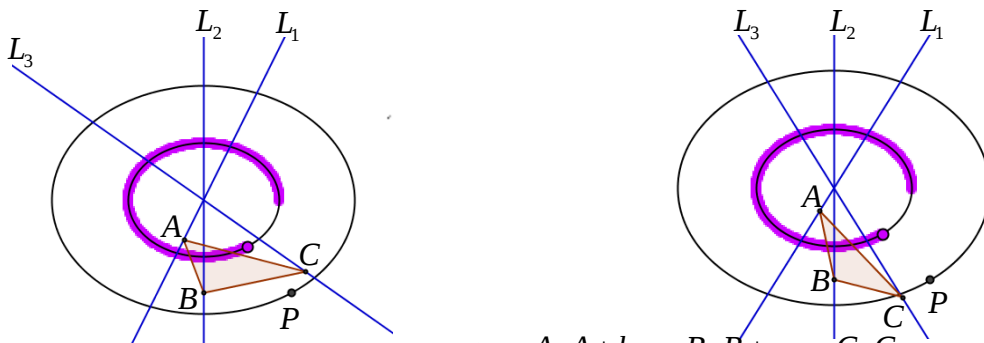
$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{(a'+d')^2 + (b'-c')^2} - \sqrt{(a'-d')^2 + (b'+c')^2}}{2(a'd'-b'c')} f \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{(a'+d')^2 + (b'-c')^2} + \sqrt{(a'-d')^2 + (b'+c')^2}}{2(a'd'-b'c')} f \right)^2} = 1$$

特別的是, 當 $n = -m$ 時, 軌跡方程式為 $\frac{x^2}{\left(\frac{2a}{3m^2+3} \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{(3m^2+1)b}{3m^2+3} \right)^2} = 1$ 為一橢圓的標準式

$$\text{且 } \frac{2}{3m^2+3} + \frac{3m^2+1}{3m^2+3} = 1。$$

$$\text{若 } \frac{2a}{3m^2+3} = \frac{(3m^2+1)b}{3m^2+3} \Rightarrow m = \sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{2a}{b} - 1 \right)}, \text{ 重心 } G \text{ 之軌跡為一圓。} \blacksquare$$

定理 2.3: 平面上有一長軸為 $2a$, 短軸為 $2b$ 之橢圓, 相異三直線 L_1, L_2, L_3 均過此橢圓之中心, 若 L_2 為鉛直線, 在橢圓上任取一動點 P , 則點 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影 $\triangle ABC$, 其外心 O 之軌跡為一橢圓的標準式 $\frac{x^2}{(Ta)^2} + \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$ 且 $T+S=1, T=S=\frac{1}{2}$, 且此橢圓之長短軸恰為原橢圓之一半。

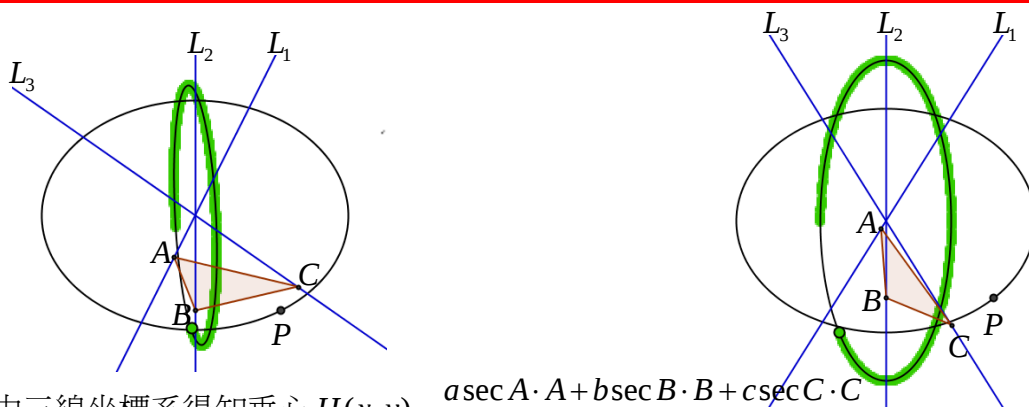


$$[\text{證明}] : \text{由三線坐標系推得外心 } O(x, y) = \frac{a \cos A \cdot A + b \cos B \cdot B + c \cos C \cdot C}{a \cos A + b \cos B + c \cos C}$$

$$\text{化簡後得到 } \begin{cases} x = \frac{a \cos \theta}{2} \\ y = \frac{b \sin \theta}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{a}{2} \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b}{2} \right)^2} = 1, \text{ 其中 } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1。 \blacksquare$$

因此 $\triangle ABC$ 外心 O 之軌跡為一橢圓, 且此橢圓之長短軸恰為原橢圓之一半。

定理 2.4: 平面上有一長軸為 $2a$ ，短軸為 $2b$ 之橢圓，相異三直線 L_1, L_2, L_3 均過此橢圓之中心，若 L_2 為鉛直線，在橢圓上任取一動點 P ，則點 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影 $\triangle ABC$ ，其垂心 H 之軌跡為一橢圓。特別是，當 L_1, L_3 對稱於 L_2 時，垂心 H 之軌跡為一橢圓的標準式 $\frac{x^2}{(Ta)^2} + \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$ 且 $T+S=1$ 。其中當 L_1 之斜率為 $m = \sqrt{\frac{a}{a+2b}}$ 時，垂心 H 之軌跡為圓。



[證明]: 由三線坐標系得知垂心 $H(x, y) = \frac{a \sec A \cdot A + b \sec B \cdot B + c \sec C \cdot C}{a \sec A + b \sec B + c \sec C}$

$$\text{化簡後得到} \begin{cases} \frac{(m+n)(1+mn)}{(1+m^2)(1+n^2)} b \sin \theta + \frac{(1+mn)(1-mn)}{(1+m^2)(1+n^2)} a \cos \theta = x \\ \frac{(2m^2n^2 + m^2 + n^2)}{(1+m^2)(1+n^2)} b \sin \theta + \frac{(m+n)(1+mn)}{(1+m^2)(1+n^2)} a \cos \theta = y \end{cases}$$

利用克拉瑪公式求出 $\cos \theta$ 及 $\sin \theta$ 後再由 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 化簡得

$$\frac{[-(2m^2n^2 + m^2 + n^2)x + (1+mn)(m+n)y]^2}{a^2(1+mn)^2} + \frac{[(m+n)x - (1-mn)y]^2}{b^2} = 4m^2n^2$$

因此 $\triangle ABC$ 垂心 H 之軌跡為一橢圓。

[註] 令 $a' = \frac{-(2m^2n^2 + m^2 + n^2)}{(1+mn)a}$, $b' = \frac{m+n}{a} > 0$, $c' = \frac{m+n}{b} > 0$, $d' = \frac{-1+mn}{b} < 0$, $f = -2mn > 0$

(1) 若 $1+mn > 0$, $a'b'+c'd' < 0$ 且 $a'd'-b'c' > 0$, 上述軌跡方程式可經轉軸公式(4)化成標準式

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{(a'+d')^2 + (b'-c')^2} + \sqrt{(a'-d')^2 + (b'+c')^2}}{2(a'd'-b'c')} f \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{(a'+d')^2 + (b'-c')^2} - \sqrt{(a'-d')^2 + (b'+c')^2}}{2(a'd'-b'c')} f \right)^2} = 1$$

(2) 若 $1+mn < 0$

(i) 當 $a'b'+c'd' > 0$, $a'd'-b'c' < 0$, 上述軌跡方程式可經轉軸公式(1)化成標準式

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{(a'-d')^2 + (b'+c')^2} - \sqrt{(a'+d')^2 + (b'-c')^2}}{2(b'c'-a'd')} f \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{(a'-d')^2 + (b'+c')^2} + \sqrt{(a'+d')^2 + (b'-c')^2}}{2(b'c'-a'd')} f \right)^2} = 1$$

(ii) 當 $a'b'+c'd' < 0$, $a'd'-b'c' < 0$, 上述軌跡方程式可經轉軸公式(3)化成標準式

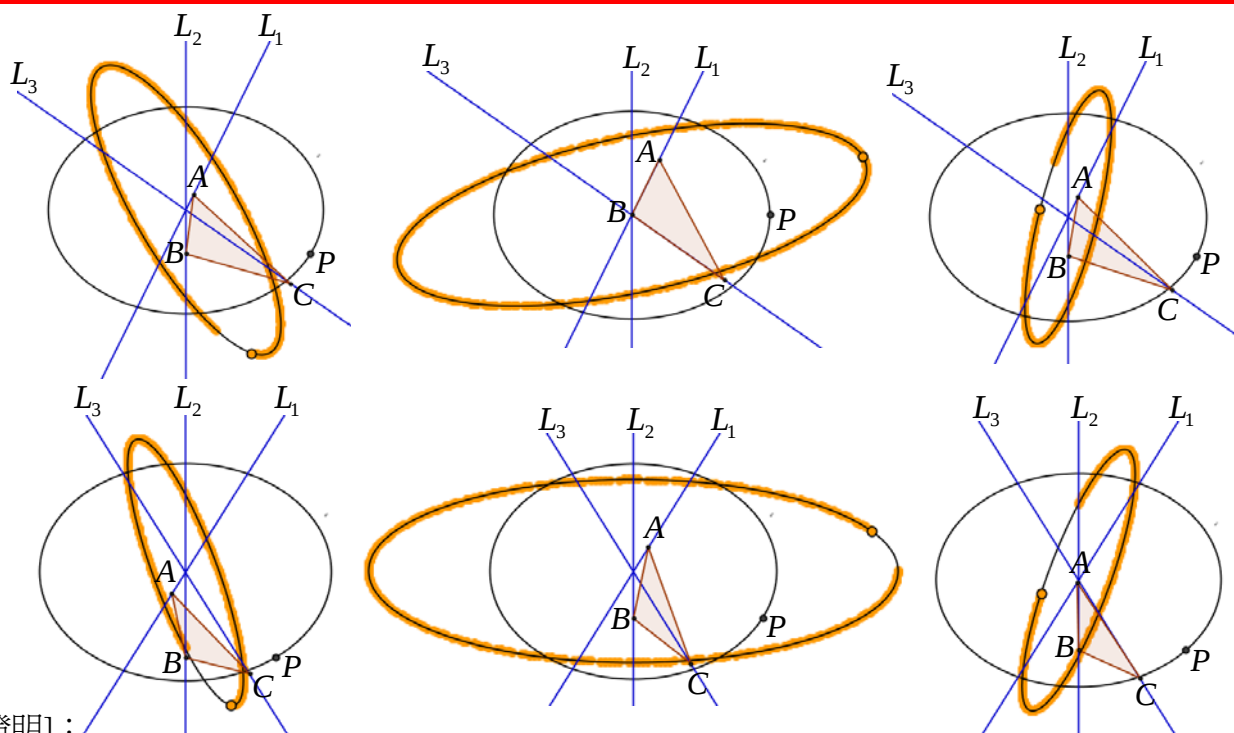
$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{(a'-d')^2 + (b'+c')^2} + \sqrt{(a'+d')^2 + (b'-c')^2}}{2(b'c'-a'd')} f \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{(a'-d')^2 + (b'+c')^2} - \sqrt{(a'+d')^2 + (b'-c')^2}}{2(b'c'-a'd')} f \right)^2} = 1$$

特別的是，當 $n = -m$ 時，軌跡方程式為 $\frac{x^2}{\left(\frac{(1-m^2)a}{m^2+1}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{2m^2b}{m^2+1}\right)^2} = 1$ 為一橢圓的標準式且

$$\frac{(1-m^2)}{1+m^2} + \frac{2m^2}{1+m^2} = 1。若 \frac{(1-m^2)a}{m^2+1} = \frac{2m^2b}{m^2+1} \Rightarrow m = \sqrt{\frac{a}{a+2b}}, 垂心 H 之軌跡為一圓。■$$

定理 2.5: 平面上有一長軸為 $2a$ ，短軸為 $2b$ 之橢圓，相異三直線 L_1, L_2, L_3 均過此橢圓之中心，若 L_2 為鉛直線，在橢圓上任取一動點 P ，則點 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影 $\triangle ABC$ ，其傍心 E_A, E_B, E_C 之軌跡為一橢圓。

特別的是，當 L_1, L_3 對稱於 L_2 時，傍心 E_A, E_C 之軌跡為非標準式的橢圓，傍心 E_B 之軌跡為橢圓的標準式 $\frac{x^2}{(Ta)^2} + \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$ 且 $T+S=1$ 。



[證明]:

(1) 由三線坐標系得知傍心 $E_A(x, y) = \frac{-aA+bB+cC}{-a+b+c}$ ，化簡後得

$$\begin{cases} \frac{(n\sqrt{1+m^2}-m\sqrt{1+n^2})b\sin\theta}{(m-n-\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} + \frac{(\sqrt{1+m^2}-\sqrt{1+n^2})a\cos\theta}{(m-n-\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} = x \\ \frac{\left[n^2\sqrt{1+m^2}-m^2\sqrt{1+n^2}+(m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}\right]b\sin\theta}{(m-n-\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} + \frac{(n\sqrt{1+m^2}-m\sqrt{1+n^2})a\cos\theta}{(m-n-\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} = y \end{cases}$$

利用克拉瑪公式求出 $\cos\theta$ 及 $\sin\theta$ 後再由 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ 化簡得

$$\frac{\left\{-\left[n^2\sqrt{1+m^2}-m^2\sqrt{1+n^2}+(m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}\right]x+(n\sqrt{1+m^2}-m\sqrt{1+n^2})y\right\}^2}{a^2} + \frac{\left\{[n\sqrt{1+m^2}-m\sqrt{1+n^2}]x-(\sqrt{1+m^2}-\sqrt{1+n^2})y\right\}^2}{b^2} = (m-n)^2$$

因此 $\triangle ABC$ 傍心 E_A 之軌跡為一橢圓。

[註] 令 $a' = \frac{m^2\sqrt{1+n^2} - n^2\sqrt{1+m^2} - (m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}{a} < 0, b' = \frac{n\sqrt{1+m^2} - m\sqrt{1+n^2}}{a} < 0$

$$c' = \frac{n\sqrt{1+m^2} - m\sqrt{1+n^2}}{b} < 0, d' = \frac{-\sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2}}{b} < 0, f = m - n > 0$$

$a'b' + c'd' > 0, a'd' - b'c' < 0$ ，上述軌跡方程式可經轉軸公式(1)化成標準式

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{(a'-d')^2 + (b'+c')^2} - \sqrt{(a'+d')^2 + (b'-c')^2}}{2(b'c' - a'd')} f \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{(a'-d')^2 + (b'+c')^2} + \sqrt{(a'+d')^2 + (b'-c')^2}}{2(b'c' - a'd')} f \right)^2} = 1$$

特別是，當 $n = -m$ 時，軌跡方程式為

$$\frac{a^2(1+m^2) + b^2(m^4 + 2m^2 + 1)}{a^2b^2}x^2 + \frac{2(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}{a^2}xy + \frac{(1+m^2)}{a^2}y^2 = 1 \text{ 爲一非標準式的橢圓。} \blacksquare$$

(2) 由三線坐標系得知傍心 $E_B(x, y) = \frac{aA - bB + cC}{a - b + c}$ ，化簡後得到

$$\begin{cases} \frac{(n\sqrt{1+m^2} + m\sqrt{1+n^2})b\sin\theta}{(n-m+\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} + \frac{(\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})a\cos\theta}{(n-m+\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} = x \\ \frac{[n\sqrt{1+m^2} + m\sqrt{1+n^2} - (m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}]b\sin\theta}{(n-m+\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} + \frac{(m\sqrt{1+n^2} + n\sqrt{1+m^2})a\cos\theta}{(n-m+\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} = y \end{cases}$$

利用克拉瑪公式求出 $\cos\theta$ 及 $\sin\theta$ 後再由 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ 化簡得

$$\frac{\left[\frac{n^2\sqrt{1+m^2} + m^2\sqrt{1+n^2} - (m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}{a^2} x - \frac{(n\sqrt{1+m^2} + m\sqrt{1+n^2})y}{a^2} \right]^2}{a^2} + \frac{\left[\frac{-(n\sqrt{1+m^2} + m\sqrt{1+n^2})x + (\sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2})y}{b^2} \right]^2}{b^2} = (m-n)^2$$

因此 $\triangle ABC$ 傍心 E_B 之軌跡爲一橢圓。

[註] 令 $a' = \frac{m^2\sqrt{1+n^2} + n^2\sqrt{1+m^2} - (m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}{a} < 0, b' = \frac{-(n\sqrt{1+m^2} + m\sqrt{1+n^2})}{a} < 0$

$$c' = \frac{-(n\sqrt{1+m^2} + m\sqrt{1+n^2})}{b} < 0, d' = \frac{\sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2}}{b} > 0, f = m - n > 0$$

當 $a'b' + c'd' < 0, a'd' - b'c' < 0$ ，上述軌跡方程式可經轉軸公式(3)化成標準式

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{(a'-d')^2 + (b'+c')^2} + \sqrt{(a'+d')^2 + (b'-c')^2}}{2(b'c' - a'd')} f \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{(a'-d')^2 + (b'+c')^2} - \sqrt{(a'+d')^2 + (b'-c')^2}}{2(b'c' - a'd')} f \right)^2} = 1$$

特別是，當 $n = -m$ 時，軌跡方程式為 $\frac{x^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{1+m^2}(\sqrt{1+m^2}-m)} \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{-mb}{\sqrt{1+m^2}} \right)^2} = 1$ 爲一橢圓

的標準式且 $\frac{1}{\sqrt{1+m^2}(\sqrt{1+m^2}-m)} + \frac{-m}{\sqrt{1+m^2}} = 1$ 。 $\blacksquare$

(3) 由三線坐標系得知傍心 $E_C(x, y) = \frac{aA + bB - cC}{a + b - c}$ ，化簡後得到

$$\begin{cases} \frac{(m\sqrt{1+n^2} - n\sqrt{1+m^2})b\sin\theta}{(m-n+\sqrt{1+m^2}-\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} + \frac{(\sqrt{1+n^2}-\sqrt{1+m^2})a\cos\theta}{(m-n+\sqrt{1+m^2}-\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} = x \\ \frac{[m^2\sqrt{1+n^2} - n^2\sqrt{1+m^2} + (m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}]b\sin\theta}{(m-n+\sqrt{1+m^2}-\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} + \frac{(m\sqrt{1+n^2} - n\sqrt{1+m^2})a\cos\theta}{(m-n+\sqrt{1+m^2}-\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} = y \end{cases}$$

利用克拉瑪公式求出 $\cos \theta$ 及 $\sin \theta$ 後再由 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 化簡得

$$\frac{\left\{ -\left[m^2\sqrt{1+n^2} - n^2\sqrt{1+m^2} + (m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)} \right]x + (m\sqrt{1+n^2} - n\sqrt{1+m^2})y \right\}^2}{a^2} + \frac{\left[(m\sqrt{1+n^2} - n\sqrt{1+m^2})x - (\sqrt{1+n^2} - \sqrt{1+m^2})y \right]^2}{b^2} = (m-n)^2$$

因此 $\triangle ABC$ 傍心 E_C 之軌跡為一橢圓。

[註] 令 $a' = \frac{-m^2\sqrt{1+n^2} + n^2\sqrt{1+m^2} - (m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}{a} < 0, b' = \frac{m\sqrt{1+n^2} - n\sqrt{1+m^2}}{a} > 0$

$$c' = \frac{m\sqrt{1+n^2} - n\sqrt{1+m^2}}{b} > 0, d' = \frac{\sqrt{1+m^2} - \sqrt{1+n^2}}{b} > 0, f = m - n > 0$$

(1) 當 $a'b' + c'd' < 0, a'd' - b'c' < 0$ ，上述軌跡方程式可經轉軸公式(3)化成標準式

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{(a'-d')^2 + (b'+c')^2} + \sqrt{(a'+d')^2 + (b'-c')^2}}{2(b'c' - a'd')} f \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{(a'-d')^2 + (b'+c')^2} - \sqrt{(a'+d')^2 + (b'-c')^2}}{2(b'c' - a'd')} f \right)^2} = 1$$

(2) 當 $a'b' + c'd' > 0, a'd' - b'c' < 0$ ，上述軌跡方程式可經轉軸公式(1)化成標準式

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{(a'-d')^2 + (b'+c')^2} - \sqrt{(a'+d')^2 + (b'-c')^2}}{2(b'c' - a'd')} f \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{(a'-d')^2 + (b'+c')^2} + \sqrt{(a'+d')^2 + (b'-c')^2}}{2(b'c' - a'd')} f \right)^2} = 1$$

特別是，當 $n = -m$ 時，軌跡方程式為

$$\frac{a^2(1+m^2) + b^2(m^4 + 2m^2 + 1)}{a^2b^2}x^2 - \frac{2(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}{a^2}xy + \frac{(1+m^2)}{a^2}y^2 = 1 \text{ 為一非標準式的橢圓。} \blacksquare$$

研究三：動點 P 在雙曲線上， L_1, L_2, L_3 為過雙曲線中心之任意三相異直線

不失一般性，在研究三的部分，我們將雙曲線的中心置於原點，三直線即為過原點之直線，並將 L_2 置於 y 軸上，設雙曲線： $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = r^2, L_1: y = mx, L_2: x = 0, L_3: y = nx$ ， $m > 0 > n$ 且 $m+n \geq 0$ ，而為了以下計算方便，我們整理幾個將需要的數據，列表如下：

數據表 3：[雙曲線： $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = r^2$ ，動點 $P(a \sec \theta, b \tan \theta), L_1: y = mx, L_2: x = 0, L_3: y = nx$]

點 A		點 B		點 C	
$\left(\frac{mb \tan \theta + a \sec \theta}{1+m^2}, \frac{m^2b \tan \theta + ma \sec \theta}{1+m^2} \right)$		$(0, b \tan \theta)$		$\left(\frac{(nb \tan \theta + a \sec \theta)}{1+n^2}, \frac{n(nb \tan \theta + a \sec \theta)}{1+n^2} \right)$	
邊長 a	$\sqrt{\frac{(a \sec \theta)^2 + (b \tan \theta)^2}{1+n^2}}$	$\cos A$	$\frac{-n}{\sqrt{1+n^2}}$	$\sec A$	$\frac{-\sqrt{1+n^2}}{n}$
邊長 b	$\sqrt{\frac{(m-n)^2[(a \sec \theta)^2 + (b \tan \theta)^2]}{(1+m^2)(1+n^2)}}$	$\cos B$	$\frac{1+mn}{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}$	$\sec B$	$\frac{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}{1+mn}$
邊長 c	$\sqrt{\frac{(a \sec \theta)^2 + (b \tan \theta)^2}{1+m^2}}$	$\cos C$	$\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$	$\sec B$	$\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$

定理 3：在平面上有一雙曲線，三相異直線 L_1, L_2, L_3 均過此雙曲線之中心，在雙曲線上任取一動點 P ，則 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影 $\triangle ABC$ 為一相似三角形。

[證明]：

利用數據表 3 中 A, B, C 三點的坐標與三邊長，

(1)保角：由餘弦定理可得 $\cos A = \frac{-n}{\sqrt{1+n^2}}$ ，

$$\cos B = \frac{1+mn}{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}, \quad \cos C = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

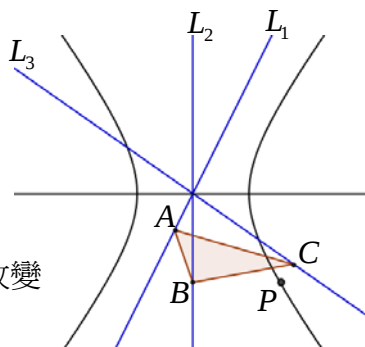
由此可知，角度並不隨 θ 改變而改變，只隨斜率 m 改變而有所改變。

(2)不保積：但此時我們卻發現

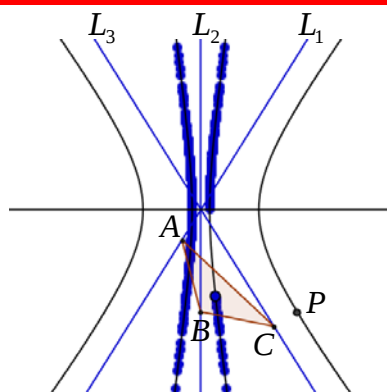
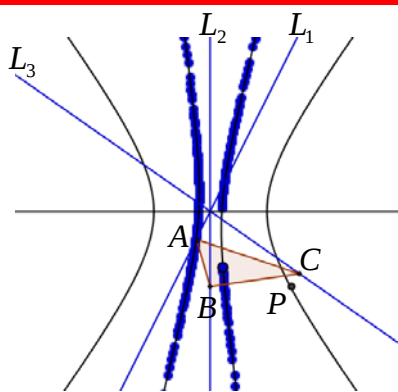
$$\Delta ABC \text{ 面積} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} = \frac{(m-n)[(a \sec \theta)^2 + (b \tan \theta)^2]}{2(1+m^2)(1+n^2)}, \text{ 會隨 } \theta \text{ 變}$$

動而改變，故可知 ΔABC 在此情況下並無保積性質。

由(1)(2)可知 ΔABC 為相似三角形。



定理 3.1：平面上有一貫軸為 $2a$ ，共軛軸為 $2b$ 之雙曲線，相異三直線 L_1, L_2, L_3 均過此雙曲線之中心，若 L_2 為鉛直線，在雙曲線上任取一動點 P ，則點 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影 ΔABC ，其內心 I 之軌跡為一雙曲線。特別的是，當 L_1, L_3 對稱於 L_2 時，內心 I 之軌跡為一雙曲線的標準式 $\frac{x^2}{(Ta)^2} - \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$ 且 $T + S = 1$ 。



[證明]：由三線坐標系推得內心 $J(x, y) = \frac{aA + bB + cC}{a + b + c}$ ，化簡後得到

$$\begin{cases} \frac{(m\sqrt{1+n^2} + n\sqrt{1+m^2})b \tan \theta}{(m-n + \sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} + \frac{(\sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2})a \sec \theta}{(m-n + \sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} = x \\ \frac{[m^2\sqrt{1+n^2} + n^2\sqrt{1+m^2} + (m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}]b \tan \theta}{(m-n + \sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} + \frac{(n\sqrt{1+m^2} + m\sqrt{1+n^2})a \sec \theta}{(m-n + \sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} = y \end{cases}$$

利用克拉瑪公式求出 $\sec \theta$ 及 $\tan \theta$ 後再由 $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$ 化簡得

$$\frac{[(m^2\sqrt{1+n^2} + n^2\sqrt{1+m^2} + (m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)})x - (m\sqrt{1+n^2} + n\sqrt{1+m^2})y]^2}{a^2} - \frac{[-(m\sqrt{1+n^2} + n\sqrt{1+m^2})x + (\sqrt{1+n^2} + \sqrt{1+m^2})y]^2}{b^2} = (m-n)^2$$

因此 ΔABC 之內心 I 之軌跡為一雙曲線。

[註] 令 $a' = \frac{m^2\sqrt{1+n^2} + n^2\sqrt{1+m^2} + (m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}{a} > 0, b' = \frac{-(m\sqrt{1+n^2} + n\sqrt{1+m^2})}{a} < 0,$
 $c' = \frac{-(m\sqrt{1+n^2} + n\sqrt{1+m^2})}{b} < 0, d' = \frac{\sqrt{1+n^2} + \sqrt{1+m^2}}{b} > 0, f = (m-n) > 0$

(1) 當 $a'b' - c'd' > 0$ ，上述軌跡方程式可經轉軸公式(5)化成標準式 $\Gamma': Ax^2 - (-C)y^2 = f^2$

$$A = \frac{(a'^2 - c'^2 + b'^2 - d'^2) + \sqrt{(2a'b' - 2c'd')^2 + (a'^2 - c'^2 - b'^2 + d'^2)^2}}{2} > 0$$

$$C = \frac{(a'^2 - c'^2 + b'^2 - d'^2) - \sqrt{(2a'b' - 2c'd')^2 + (a'^2 - c'^2 - b'^2 + d'^2)^2}}{2} < 0$$

(2) 當 $a'b' - c'd' < 0$ ，上述軌跡方程式可經轉軸公式(6)化成標準式 $\Gamma': -(-A)x^2 + Cy^2 = f^2$

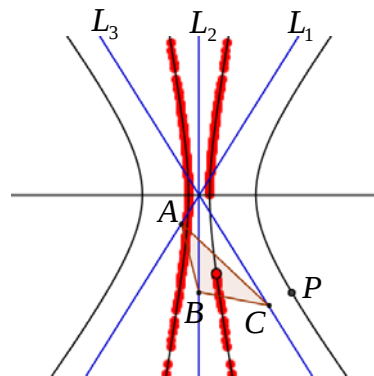
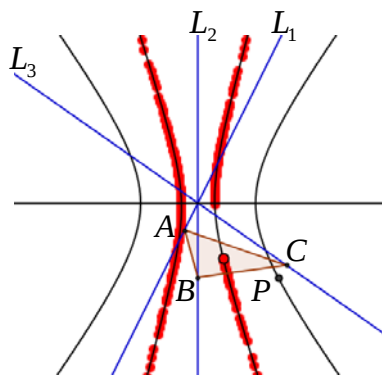
$$A = \frac{(a'^2 - c'^2 + b'^2 - d'^2) - \sqrt{(2a'b' - 2c'd')^2 + (a'^2 - c'^2 - b'^2 + d'^2)^2}}{2} < 0$$

$$C = \frac{(a'^2 - c'^2 + b'^2 - d'^2) + \sqrt{(2a'b' - 2c'd')^2 + (a'^2 - c'^2 - b'^2 + d'^2)^2}}{2} > 0$$

特別是，當 $n = -m$ 時，軌跡方程式為 $\frac{x^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{1+m^2}(\sqrt{1+m^2}+m)}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{mb}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2} = 1$ 為一雙曲線

的標準式且 $\frac{1}{\sqrt{1+m^2}(\sqrt{1+m^2}+m)} + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} = 1$ 。■

定理 3.2：平面上有一實軸為 $2a$ ，共軛軸為 $2b$ 之雙曲線，相異三直線 L_1, L_2, L_3 均過此雙曲線之中心，若 L_2 為鉛直線，在雙曲線上任取一動點 P ，則點 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影 $\triangle ABC$ ，其重心 G 之軌跡為一雙曲線。特別是，當 L_1, L_3 對稱於 L_2 時，其重心 G 之軌跡為一雙曲線的標準式 $\frac{x^2}{(Ta)^2} - \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$ 且 $T + S = 1$ 。



[證明]：由三線坐標系推得重心 $G(x, y) = \frac{A+B+C}{3}$ ，化簡後得到

$$\begin{cases} \frac{(m+n)(1+mn)}{3(1+m^2)(1+n^2)} b \tan \theta + \frac{(m^2+n^2+2)}{3(1+m^2)(1+n^2)} a \sec \theta = x \\ \frac{(1+2m^2+2n^2+3m^2n^2)}{3(1+m^2)(1+n^2)} b \tan \theta + \frac{(m+n)(1+mn)}{3(1+m^2)(1+n^2)} a \sec \theta = y \end{cases}$$

利用克拉瑪公式求出 $\sec \theta$ 及 $\tan \theta$ 後再由 $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$ 化簡得

$$\frac{[-(1+2m^2+2n^2+3m^2n^2)x + (m+n)(1+mn)y]^2}{a^2} - \frac{[(m+n)(1+mn)x - (m^2+n^2+2)y]^2}{b^2} = \frac{4(1+m^2+n^2-mn)^2}{9}$$

因此 $\triangle ABC$ 重心 G 之軌跡為一雙曲線。

[註] $a' = \frac{-(1+2m^2+2n^2+3m^2n^2)}{a} < 0, b' = \frac{(m+n)(1+mn)}{a}, c' = \frac{(m+n)(1+mn)}{b}$
 $d' = \frac{-(m^2+n^2+2)}{b} < 0, f = \frac{2(1+m^2+n^2-mn)}{3} > 0$

(1) 當 $a'b' - c'd' > 0$ ，上述軌跡方程式可經轉軸公式(5)化成標準式 $\Gamma': Ax^2 - (-C)y^2 = f^2$

$$A = \frac{(a'^2 - c'^2 + b'^2 - d'^2) + \sqrt{(2a'b' - 2c'd')^2 + (a'^2 - c'^2 - b'^2 + d'^2)^2}}{2} > 0$$

$$C = \frac{(a'^2 - c'^2 + b'^2 - d'^2) - \sqrt{(2a'b' - 2c'd')^2 + (a'^2 - c'^2 - b'^2 + d'^2)^2}}{2} < 0$$

(2) 當 $a'b' - c'd' < 0$ ，上述軌跡方程式可經轉軸公式(6)化成標準式 $\Gamma': -(-A)x^2 + Cy^2 = f^2$

$$A = \frac{(a'^2 - c'^2 + b'^2 - d'^2) - \sqrt{(2a'b' - 2c'd')^2 + (a'^2 - c'^2 - b'^2 + d'^2)^2}}{2} < 0$$

$$C = \frac{(a'^2 - c'^2 + b'^2 - d'^2) + \sqrt{(2a'b' - 2c'd')^2 + (a'^2 - c'^2 - b'^2 + d'^2)^2}}{2} > 0$$

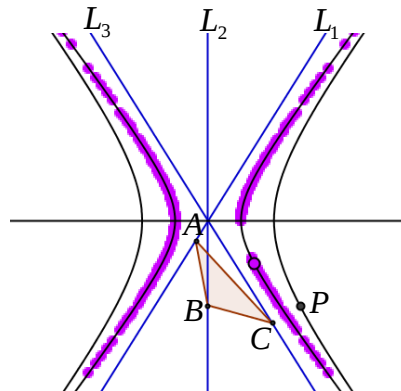
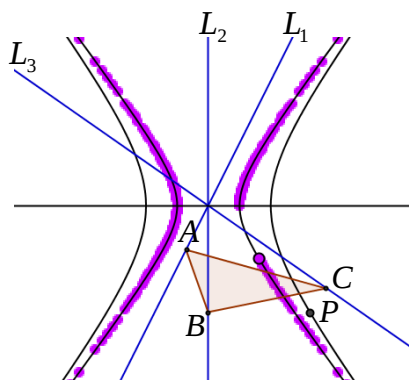
特別的是，當 $n = -m$ 時，軌跡方程式為 $\frac{x^2}{\left(\frac{2a}{3m^2+3}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{(3m^2+1)b}{3m^2+3}\right)^2} = 1$ 為一雙曲線的標準式

$$\text{且 } \frac{2}{3m^2+3} + \frac{3m^2+1}{3m^2+3} = 1 \quad \blacksquare$$

定理 3.3：平面上有一貫軸為 $2a$ ，共軛軸為 $2b$ 之雙曲線，相異三直線 L_1, L_2, L_3 均過此雙曲線之中心，若 L_2 為鉛直線，在雙曲線上任取一動點 P ，則點 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影

$\triangle ABC$ ，其外心 O 之軌跡為一雙曲線的標準式 $\frac{x^2}{(Ta)^2} - \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$ 且 $T + S = 1$ ，

$T = S = \frac{1}{2}$ ，且此雙曲線之貫軸與共軛軸恰為原雙曲線之一半。

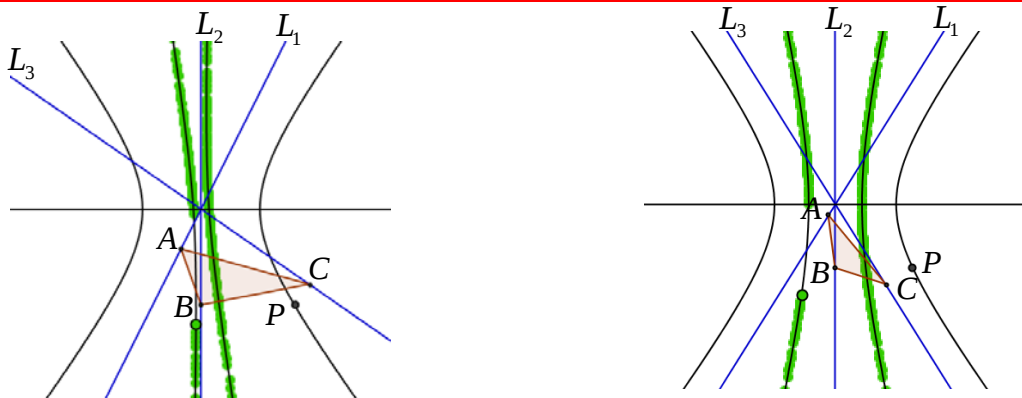


[證明]：由三線坐標系推得外心 $O(x, y) = \frac{a \cos A \cdot A + b \cos B \cdot B + c \cos C \cdot C}{a \cos A + b \cos B + c \cos C}$

$$\text{化簡後得到 } \begin{cases} x = \frac{a \sec \theta}{2} \\ y = \frac{b \tan \theta}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = 1, \text{ 其中 } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1。$$

因此 $\triangle ABC$ 外心 O 之軌跡為一雙曲線，且此雙曲線之貫軸及共軛軸恰為原雙曲線之一半。 $\blacksquare$

定理 3.4：平面上有一貫軸為 $2a$ ，共軛軸為 $2b$ 之雙曲線，相異三直線 L_1, L_2, L_3 均過此雙曲線之中心，若 L_2 為鉛直線，在雙曲線上任取一動點 P ，則點 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影 $\triangle ABC$ ，其垂心 H 之軌跡為一雙曲線。特別是，當 L_1, L_3 對稱於 L_2 時，其垂心 H 之軌跡為一雙曲線的標準式 $\frac{x^2}{(Ta)^2} - \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$ 且 $T + S = 1$ 。



[證明]：由三線坐標系得知垂心 $H(x, y) = \frac{a \sec A \cdot A + b \sec B \cdot B + c \sec C \cdot C}{a \sec A + b \sec B + c \sec C}$

化簡後得到
$$\begin{cases} \frac{(m+n)(1+mn)}{(1+m^2)(1+n^2)} b \tan \theta + \frac{(1+mn)(1-mn)}{(1+m^2)(1+n^2)} a \sec \theta = x \\ \frac{(2m^2n^2 + m^2 + n^2)}{(1+m^2)(1+n^2)} b \tan \theta + \frac{(m+n)(1+mn)}{(1+m^2)(1+n^2)} a \sec \theta = y \end{cases}$$

利用克拉瑪公式求出 $\sec \theta$ 及 $\tan \theta$ 後再由 $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$ 化簡得

$$\frac{[-(2m^2n^2 + m^2 + n^2)x + (1+mn)(m+n)y]^2}{a^2(1+mn)^2} - \frac{[(m+n)x - (1-mn)y]^2}{b^2} = 4m^2n^2$$

因此 $\triangle ABC$ 垂心 H 之軌跡為一雙曲線。

[註] 令 $a' = \frac{-(2m^2n^2 + m^2 + n^2)}{(1+mn)a}$, $b' = \frac{m+n}{a} > 0$, $c' = \frac{m+n}{b} > 0$, $d' = \frac{-1+mn}{b} < 0$

(1) 若 $1+mn > 0$

(i) 當 $a'b' - c'd' > 0$ ，上述軌跡方程式可經轉軸公式(5)化成標準式 $\Gamma': Ax^2 - (-C)y^2 = f^2$

$$A = \frac{(a'^2 - c'^2 + b'^2 - d'^2) + \sqrt{(2a'b' - 2c'd')^2 + (a'^2 - c'^2 - b'^2 + d'^2)^2}}{2} > 0$$

$$C = \frac{(a'^2 - c'^2 + b'^2 - d'^2) - \sqrt{(2a'b' - 2c'd')^2 + (a'^2 - c'^2 - b'^2 + d'^2)^2}}{2} < 0$$

(ii) 當 $a'b' - c'd' < 0$ ，上述軌跡方程式可經轉軸公式(6)化成標準式 $\Gamma': -(-A)x^2 + Cy^2 = f^2$

$$A = \frac{(a'^2 - c'^2 + b'^2 - d'^2) - \sqrt{(2a'b' - 2c'd')^2 + (a'^2 - c'^2 - b'^2 + d'^2)^2}}{2} < 0$$

$$C = \frac{(a'^2 - c'^2 + b'^2 - d'^2) + \sqrt{(2a'b' - 2c'd')^2 + (a'^2 - c'^2 - b'^2 + d'^2)^2}}{2} > 0$$

(2) 若 $1+mn < 0$ ，上述軌跡方程式可經轉軸公式(5)化成標準式 $\Gamma': Ax^2 - (-C)y^2 = f^2$

$$A = \frac{(a'^2 - c'^2 + b'^2 - d'^2) + \sqrt{(2a'b' - 2c'd')^2 + (a'^2 - c'^2 - b'^2 + d'^2)^2}}{2} > 0$$

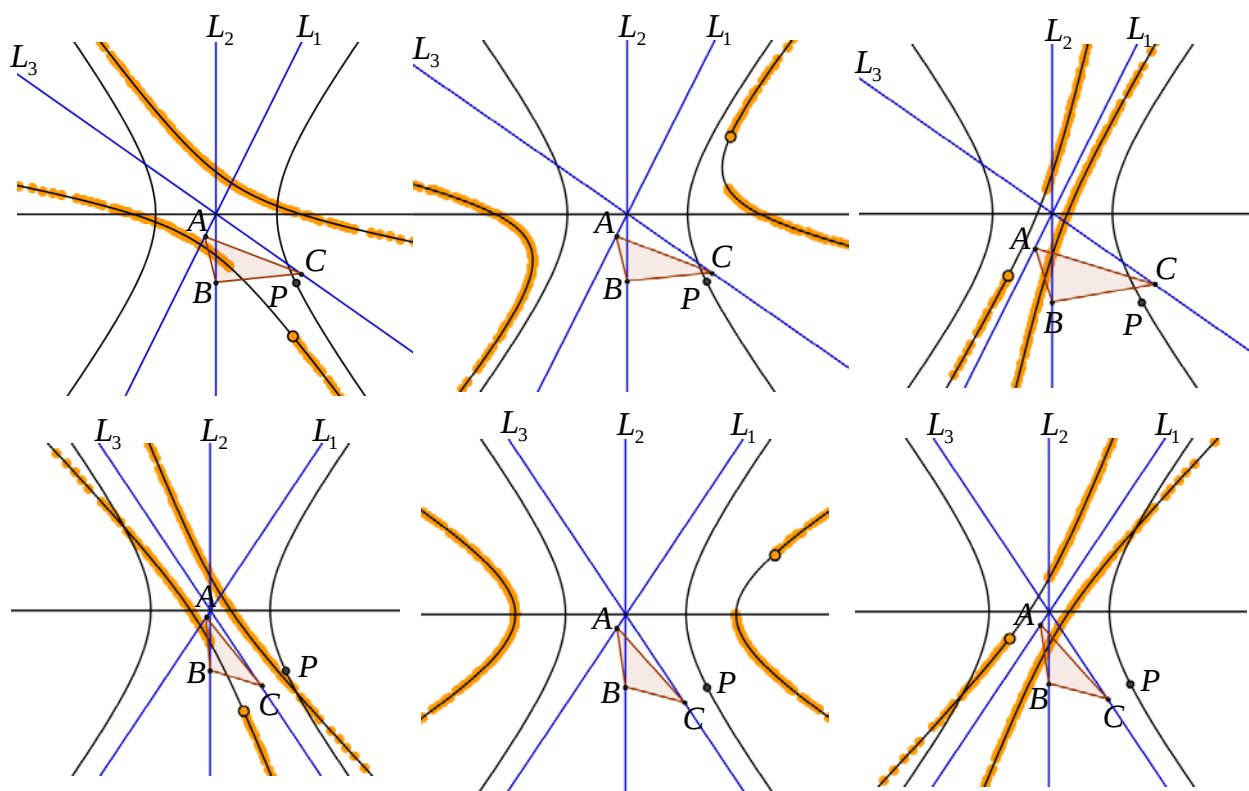
$$C = \frac{(a'^2 - c'^2 + b'^2 - d'^2) - \sqrt{(2a'b' - 2c'd')^2 + (a'^2 - c'^2 - b'^2 + d'^2)^2}}{2} < 0$$

特別的是，當 $n = -m$ 時，軌跡方程式為 $\frac{x^2}{\left(\frac{(1-m^2)a}{m^2+1}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{2m^2b}{m^2+1}\right)^2} = 1$ 為一雙曲線的標準式且

$$\frac{(1-m^2)}{1+m^2} + \frac{2m^2}{1+m^2} = 1 \quad \blacksquare$$

定理 3.5：平面上有一貫軸為 $2a$ ，共軛軸為 $2b$ 之雙曲線，相異三直線 L_1, L_2, L_3 均過此雙曲線之中心，若 L_2 為鉛直線，在雙曲線上任取一動點 P ，則點 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影 $\triangle ABC$ ，其傍心 E_A, E_B, E_C 之軌跡為一雙曲線。

特別的是，當 L_1, L_3 對稱於 L_2 時，傍心 E_A, E_C 之軌跡為非標準式的雙曲線，傍心 E_B 之軌跡為雙曲線的標準式 $\frac{x^2}{(Ta)^2} - \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$ 且 $T+S=1$ 。



[證明]：(1)由三線坐標系得知傍心 $E_A(x, y) = \frac{-aA+bB+cC}{-a+b+c}$ ，化簡後得

$$\begin{cases} \frac{(n\sqrt{1+m^2}-m\sqrt{1+n^2})b\tan\theta}{(m-n-\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} + \frac{(\sqrt{1+m^2}-\sqrt{1+n^2})a\sec\theta}{(m-n-\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} = x \\ \frac{[n^2\sqrt{1+m^2}-m^2\sqrt{1+n^2}+(m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}]b\tan\theta}{(m-n-\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} + \frac{(n\sqrt{1+m^2}-m\sqrt{1+n^2})a\sec\theta}{(m-n-\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} = y \end{cases}$$

利用克拉瑪公式求出 $\sec\theta$ 及 $\tan\theta$ 後再由 $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ 化簡得

$$\frac{\left\{ -[n^2\sqrt{1+m^2}-m^2\sqrt{1+n^2}+(m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}]x + (n\sqrt{1+m^2}-m\sqrt{1+n^2})y \right\}^2}{a^2} - \frac{\left\{ (n\sqrt{1+m^2}-m\sqrt{1+n^2})x - (\sqrt{1+m^2}-\sqrt{1+n^2})y \right\}^2}{b^2} = (m-n)^2$$

因此 $\triangle ABC$ 傍心 E_A 之軌跡為一雙曲線。

[註] 令 $a' = \frac{m^2\sqrt{1+n^2} - n^2\sqrt{1+m^2} - (m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}{a} < 0, b' = \frac{n\sqrt{1+m^2} - m\sqrt{1+n^2}}{a} < 0$

$$c' = \frac{n\sqrt{1+m^2} - m\sqrt{1+n^2}}{b} < 0, d' = \frac{-\sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2}}{b} < 0, f = m - n > 0$$

(1) 當 $a'b' - c'd' > 0$ ，上述軌跡方程式可經轉軸公式(5)化成標準式 $\Gamma': Ax^2 - (-C)y^2 = f^2$

$$A = \frac{(a'^2 - c'^2 + b'^2 - d'^2) + \sqrt{(2a'b' - 2c'd')^2 + (a'^2 - c'^2 - b'^2 + d'^2)^2}}{2} > 0$$

$$C = \frac{(a'^2 - c'^2 + b'^2 - d'^2) - \sqrt{(2a'b' - 2c'd')^2 + (a'^2 - c'^2 - b'^2 + d'^2)^2}}{2} < 0$$

(2) 當 $a'b' - c'd' < 0$ ，上述軌跡方程式可經轉軸公式(6)化成標準式 $\Gamma': -(-A)x^2 + Cy^2 = f^2$

$$A = \frac{(a'^2 - c'^2 + b'^2 - d'^2) - \sqrt{(2a'b' - 2c'd')^2 + (a'^2 - c'^2 - b'^2 + d'^2)^2}}{2} < 0$$

$$C = \frac{(a'^2 - c'^2 + b'^2 - d'^2) + \sqrt{(2a'b' - 2c'd')^2 + (a'^2 - c'^2 - b'^2 + d'^2)^2}}{2} > 0$$

特別的是，當 $n = -m$ 時，軌跡方程式為

$$\frac{-a^2(1+m^2) + b^2(m^4 + 2m^2 + 1)}{a^2b^2}x^2 + \frac{2(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}{a^2}xy + \frac{(1+m^2)}{a^2}y^2 = 1 \text{ 為一非標準式的雙曲線。} \blacksquare$$

(2) 由三線坐標系得知傍心 $E_B(x, y) = \frac{aA - bB + cC}{a - b + c}$ ，化簡後得到

$$\begin{cases} \frac{(n\sqrt{1+m^2} + m\sqrt{1+n^2})b \tan \theta}{(n-m+\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} + \frac{(\sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2})a \sec \theta}{(n-m+\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} = x \\ \frac{[n\sqrt{1+m^2} + m\sqrt{1+n^2} - (m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}]b \tan \theta}{(n-m+\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} + \frac{(m\sqrt{1+n^2} + n\sqrt{1+m^2})a \sec \theta}{(n-m+\sqrt{1+m^2}+\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} = y \end{cases}$$

利用克拉瑪公式求出 $\sec \theta$ 及 $\tan \theta$ 後再由 $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$ 化簡得

$$\frac{\left[\frac{n^2\sqrt{1+m^2} + m^2\sqrt{1+n^2} - (m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}{a^2} x - \frac{(n\sqrt{1+m^2} + m\sqrt{1+n^2})y}{b^2} \right]^2 - \left[\frac{-(n\sqrt{1+m^2} + m\sqrt{1+n^2})x + (\sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2})y}{b^2} \right]^2}{a^2} = (m-n)^2$$

因此 $\triangle ABC$ 傍心 E_B 之軌跡為一雙曲線。

[註] 令 $a' = \frac{m^2\sqrt{1+n^2} + n^2\sqrt{1+m^2} - (m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}{a} < 0, b' = \frac{-(n\sqrt{1+m^2} + m\sqrt{1+n^2})}{a} < 0$

$$c' = \frac{-(n\sqrt{1+m^2} + m\sqrt{1+n^2})}{b} < 0, d' = \frac{\sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2}}{b} > 0, f = m - n > 0$$

上述軌跡方程式可經轉軸公式(5)化成標準式 $\Gamma': Ax^2 - (-C)y^2 = f^2$

$$A = \frac{(a'^2 - c'^2 + b'^2 - d'^2) + \sqrt{(2a'b' - 2c'd')^2 + (a'^2 - c'^2 - b'^2 + d'^2)^2}}{2} > 0$$

$$C = \frac{(a'^2 - c'^2 + b'^2 - d'^2) - \sqrt{(2a'b' - 2c'd')^2 + (a'^2 - c'^2 - b'^2 + d'^2)^2}}{2} < 0$$

特別的是，當 $n = -m$ 時，軌跡方程式為

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a^2}{\sqrt{1+m^2}(\sqrt{1+m^2}-m)} \right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{-m}{\sqrt{1+m^2}} \right)^2} = 1 \text{ 其中 } \frac{1}{\sqrt{1+m^2}(\sqrt{1+m^2}-m)} + \frac{-m}{\sqrt{1+m^2}} = 1$$

因此 $\triangle ABC$ 傍心 E_B 之軌跡為一雙曲線的標準式。 $\blacksquare$

(3)由三線坐標系得知傍心 $E_c(x,y) = \frac{aA+bB-cC}{a+b-c}$ ，化簡後得到

$$\begin{cases} \frac{(m\sqrt{1+n^2}-n\sqrt{1+m^2})b\tan\theta}{(m-n+\sqrt{1+m^2}-\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} + \frac{(\sqrt{1+n^2}-\sqrt{1+m^2})a\sec\theta}{(m-n+\sqrt{1+m^2}-\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} = x \\ \left[\frac{m^2\sqrt{1+n^2}-n^2\sqrt{1+m^2}+(m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}{(m-n+\sqrt{1+m^2}-\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} \right] b\tan\theta + \frac{(m\sqrt{1+n^2}-n\sqrt{1+m^2})a\sec\theta}{(m-n+\sqrt{1+m^2}-\sqrt{1+n^2})\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}} = y \end{cases}$$

利用克拉瑪公式求出 $\sec\theta$ 及 $\tan\theta$ 後再由 $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ 化簡得

$$\frac{\left\{ -\left[m^2\sqrt{1+n^2}-n^2\sqrt{1+m^2}+(m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)} \right] x + (m\sqrt{1+n^2}-n\sqrt{1+m^2}) y \right\}^2}{a^2} - \frac{\left[(m\sqrt{1+n^2}-n\sqrt{1+m^2}) x - (\sqrt{1+n^2}-\sqrt{1+m^2}) y \right]^2}{b^2} = (m-n)^2$$

因此 $\triangle ABC$ 傍心 E_c 之軌跡為一雙曲線。

[註] 令 $a' = \frac{-m^2\sqrt{1+n^2}+n^2\sqrt{1+m^2}-(m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}{a} < 0, b' = \frac{m\sqrt{1+n^2}-n\sqrt{1+m^2}}{a} > 0$

$$c' = \frac{m\sqrt{1+n^2}-n\sqrt{1+m^2}}{b} > 0, d' = \frac{\sqrt{1+m^2}-\sqrt{1+n^2}}{b} > 0, f = m-n > 0$$

上述軌跡方程式可經轉軸公式(6)化成標準式 $\Gamma': -(-A)x^2 + Cy^2 = f^2$

$$A = \frac{(a'^2 - c'^2 + b'^2 - d'^2) - \sqrt{(2a'b' - 2c'd')^2 + (a'^2 - c'^2 - b'^2 + d'^2)^2}}{2} < 0$$

$$C = \frac{(a'^2 - c'^2 + b'^2 - d'^2) + \sqrt{(2a'b' - 2c'd')^2 + (a'^2 - c'^2 - b'^2 + d'^2)^2}}{2} > 0$$

特別的是，當 $n = -m$ 時，軌跡方程式為

$$-\frac{a^2(1+m^2)+b^2(m^4+2m^2+1)}{a^2b^2}x^2 - \frac{2(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}{a^2}xy + \frac{(1+m^2)}{a^2}y^2 = 1 \text{ 為一非標準式的雙曲線。} \blacksquare$$

研究四：動點 P 在拋物線上， L_1, L_2, L_3 為過拋物線焦點之任意三相異直線

不失一般性，我們將拋物線的焦點平移至 $(c_1, 0)$ ，三直線即為過焦點之直線， L_2 為過焦點之鉛直線，設拋物線： $y^2 = 4c_1x$ ， $L_1: y = m(x - c_1)$ ， $L_2: x = c_1$ ， $L_3: y = -m(x - c_1)$ ， $m > 0 > n$ 且 $m+n \geq 0$ ，而為了以下計算方便，我們整理幾個將需要的數據，列表如下：

數據表 4：

[拋物線： $y^2 = 4c_1x$ ，動點 $P(c_1t^2, 2c_1t)$ ， $L_1: y = m(x - c_1)$ ， $L_2: x = c_1$ ， $L_3: y = -m(x - c_1)$ ， $c_1 > 0$]

點 A		點 B		點 C	
$\left(\frac{c_1(m+t)^2}{1+m^2}, \frac{c_1m(t^2+2mt-1)}{1+m^2} \right)$		$(c_1, 2c_1t)$		$\left(\frac{c_1(n+t)^2}{1+n^2}, \frac{c_1n(t^2+2nt-1)}{1+n^2} \right)$	
邊長 a	$\frac{c_1(t^2+1)}{\sqrt{1+n^2}}$	$\cos A$	$\frac{-n}{\sqrt{1+n^2}}$	$\sec A$	$\frac{-\sqrt{1+n^2}}{n}$
邊長 b	$\frac{c_1(m-n)(t^2+1)}{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}$	$\cos B$	$\frac{1+mn}{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}$	$\sec B$	$\frac{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}{1+mn}$
邊長 c	$\frac{c_1(t^2+1)}{\sqrt{1+m^2}}$	$\cos C$	$\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$	$\sec B$	$\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$

定理 4：在平面上有一拋物線，三相異直線 L_1, L_2, L_3 均過此拋物線之焦點，在拋物線上任取一動點 P ，則 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影 $\triangle ABC$ 為一相似三角形。

[證明]：

利用數據表 4 中 A, B, C 三點的坐標與三邊長，

(1)保角：由餘弦定理可得 $\cos A = \frac{-n}{\sqrt{1+n^2}}$ ，

$$\cos B = \frac{1+mn}{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}, \quad \cos C = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

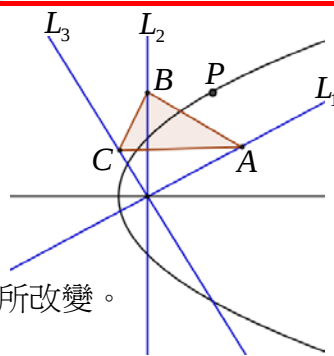
由此可知，角度並不隨 t 改變而改變，只隨斜率 m 改變而有所改變。

(2)但此時我們卻發現

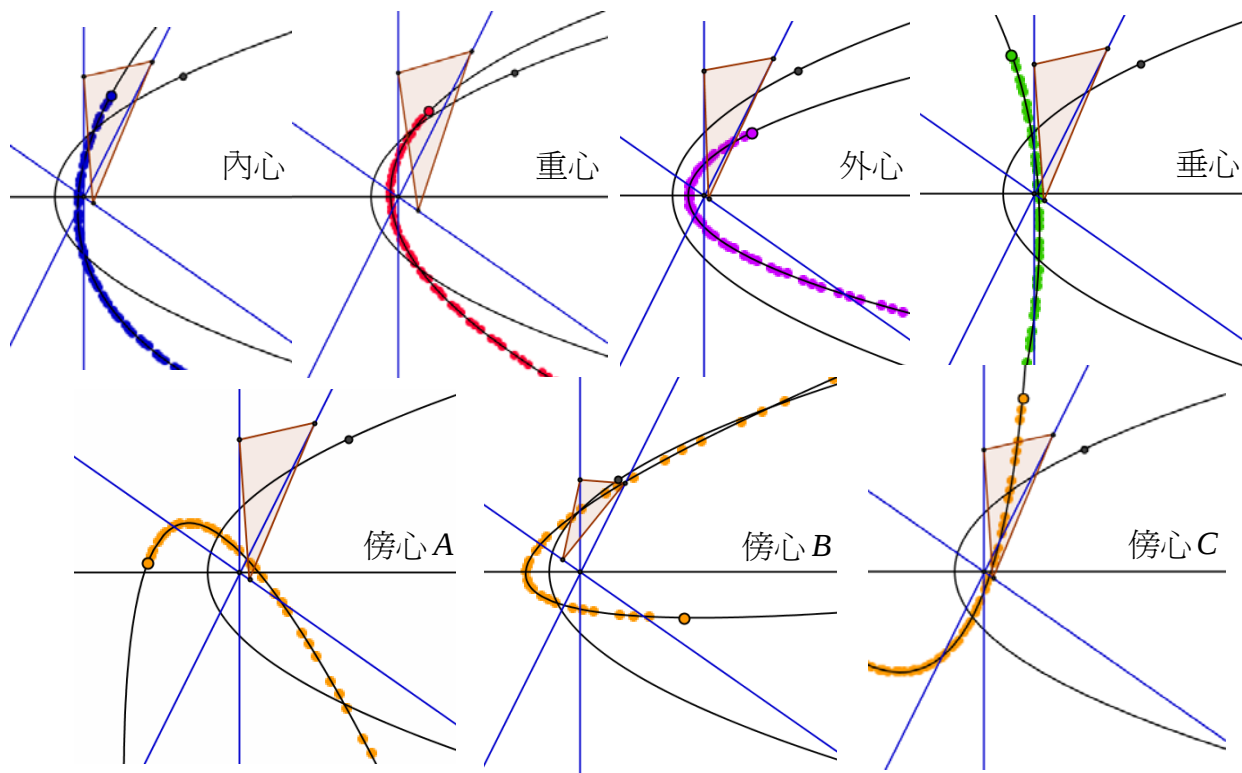
$$\triangle ABC \text{ 面積} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} = \frac{c_1^2 (m-n)(t^2+1)^2}{2(1+m^2)(1+n^2)}, \text{ 會隨 } t \text{ 變動而改變。}$$

故可知 $\triangle ABC$ 在此情況下並無保積性質。

由(1)(2)可知隨著動點 P 在拋物線上移動所形成的 $\triangle ABC$ 為相似三角形。■



定理 4.1：平面上有一拋物線，相異三直線 L_1, L_2, L_3 均過此拋物線之焦點，若 L_2 為鉛直線，在拋物線上任取一動點 P ，則點 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影 $\triangle ABC$ ，其五心之軌跡均為一拋物線，其中外心之軌跡與原拋物線共焦點。特別是，當 L_1, L_3 對稱於 L_2 時， $\triangle ABC$ 之五心之軌跡均為一拋物線的標準式。



[註]：動點 P 在拋物線上移動的部分， $\triangle ABC$ 之五心之軌跡均為拋物線，由於拋物線之軌跡方程式僅能以參數式之方式呈現，且拋物線為無心錐線與下面研究五所討論之中心面積比無關，基於篇幅之考量，在此只說明結果，但為求圓錐曲線之探討的完整性，我們仍將軌跡方程式之證明置於研究日誌中。

研究五：動點 P 在有心錐線上之綜合比較

由研究一、二、三之結果發現，所探討的軌跡存在很多特別的性質，除了部分已在之前定理中討論，我們更發現無論點在圓、橢圓或雙曲線上移動時，只要 L_1, L_2, L_3 斜率給定，其五心軌跡所呈現之圖形中心面積與原有心錐線之中心面積比值竟然完全不變，以定理 5 呈現如下：(此證明只需將研究一、二、三已有的結果稍加計算即可得，在此僅以精簡部分呈現於下方之綜合比較表中。)

定理 5：平面上有三有心錐線：圓、橢圓、雙曲線，相異三直線 L_1, L_2, L_3 均過有心錐線之中心，若 L_2 為鉛直線，在有心錐線上任取一動點 P ，則點 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影 $\triangle ABC$ ，其五心之軌跡所圍成的中心面積與原有心錐線中心面積比值皆為一定值。

動點 P 在有心錐線上之綜合比較表($m+n < 0$ 之軌跡與 $m+n > 0$ 為對稱，故不列於表中)

有心錐線		圓 半徑 r		橢圓 長軸為 $2a$,短軸為 $2b$		雙曲線 實軸為 $2a$,共軛軸為 $2b$				
原方程式		$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$		$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$		$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$				
五心軌跡 (經旋轉後)		$\frac{x^2}{(Tr)^2} + \frac{y^2}{(Sr)^2} = 1$		$\frac{x^2}{(Ta)^2} + \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$		$\frac{x^2}{(Ta)^2} - \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$ 或 $-\frac{x^2}{(Ta)^2} + \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$				
是否 滿足 $T+S=1$	$m+n=0$	滿足		滿足(E_B 滿足, E_A, E_C 不滿足)		滿足(E_B 滿足, E_A, E_C 不滿足)				
	$m+n>0$	滿足		不滿足(E_B 滿足, E_A, E_C 不滿足)		不滿足(E_B 滿足, E_A, E_C 不滿足)				
內心	$m+n>0$	$T>S>0$		$Ta>Sb>0$		$\frac{b^2}{a^2} \leq \frac{\sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2}}{m^2\sqrt{1+n^2} + n^2\sqrt{1+m^2} + (m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}$		$\frac{x^2}{(Ta)^2} - \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$		
						$\frac{b^2}{a^2} > \frac{\sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2}}{m^2\sqrt{1+n^2} + n^2\sqrt{1+m^2} + (m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}$		$-\frac{x^2}{(Ta)^2} + \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$		
	$m+n=0$	$m = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$T = S > 0$	$m = \frac{a}{\sqrt{2ab+b^2}}$	$Ta = Sb > 0$	$\frac{x^2}{(Ta)^2} - \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$				
		$0 < m < \frac{1}{\sqrt{3}}$	$T > S > 0$	$0 < m < \frac{a}{\sqrt{2ab+b^2}}$	$Ta > Sb > 0$					
		$m > \frac{1}{\sqrt{3}}$	$S > T > 0$	$m > \frac{a}{\sqrt{2ab+b^2}}$	$Sb > Ta > 0$					
中心面積比值		$ TS = \frac{(m-n)}{(m-n)\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)} + (1+n^2)\sqrt{1+m^2} + (1+m^2)\sqrt{1+n^2}}$								
重心	$m+n>0$	$1+mn>0$	$T>S>0$	$1+mn>0$	$Ta>Sb>0$	$1+mn>0$	$\frac{b^2}{a^2} \leq \frac{m^2+n^2+2}{1+2m^2+2n^2+3m^2n^2}$		$\frac{x^2}{(Ta)^2} - \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$	
								$\frac{b^2}{a^2} > \frac{m^2+n^2+2}{1+2m^2+2n^2+3m^2n^2}$		$-\frac{x^2}{(Ta)^2} + \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$
		$1+mn<0$	$S>T>0$	$1+mn<0$	$Sb>Ta>0$	$1+mn<0$	$\frac{b^2}{a^2} \geq \frac{m^2+n^2+2}{1+2m^2+2n^2+3m^2n^2}$		$\frac{x^2}{(Ta)^2} - \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$	
								$\frac{b^2}{a^2} < \frac{m^2+n^2+2}{1+2m^2+2n^2+3m^2n^2}$		$-\frac{x^2}{(Ta)^2} + \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$
	$1+mn=0$	$S>T>0$	$\frac{b}{a} \geq \frac{1}{2}$	$Sb \geq Ta > 0$	$\frac{x^2}{(Ta)^2} - \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$					
			$\frac{b}{a} < \frac{1}{2}$							$Ta > Sb > 0$
	$m+n=0$	$m = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$T = S > 0$	$m = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{2a}{b}-1\right)}$	$Ta = Sb > 0$	$\frac{x^2}{(Ta)^2} - \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$				
			$0 < m < \frac{1}{\sqrt{3}}$	$T > S > 0$	$0 < m < \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{2a}{b}-1\right)}$					
$m > \frac{1}{\sqrt{3}}$			$S > T > 0$	$m > \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{2a}{b}-1\right)}$	$Sb > Ta > 0$					
中心面積比值		$ TS = \frac{2(1+m^2+n^2-mn)}{9(1+m^2)(1+n^2)}$								
外心	$m+n \geq 0$	$T = S > 0$		$T = S > 0$ ($Ta > Sb > 0$)		$T = S > 0$ (左右雙曲)				
中心面積比值		$ TS = \frac{1}{4}$								

有心錐線		圓(半徑 r)		橢圓(長軸為 2a ,短軸為 2b)		雙曲線(貫軸為 2a ,共軛軸為 2b)				
垂心	m + n > 0	1 + mn > 0	T > S > 0	1 + mn > 0		Ta > Sb > 0	1 + mn > 0	$\frac{b^2}{a^2} \leq \frac{1 - m^2 n^2}{2m^2 n^2 + m^2 + n^2}$	$\frac{x^2}{(Ta)^2} - \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$	
								$\frac{b^2}{a^2} > \frac{1 - m^2 n^2}{2m^2 n^2 + m^2 + n^2}$	$-\frac{x^2}{(Ta)^2} + \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$	
	1 + mn < 0	S > 0 > T	1 + mn < 0	$\frac{b^2}{a^2} \geq \frac{m^2 n^2 - 1}{2m^2 n^2 + m^2 + n^2}$	Sb > 0 > Ta	1 + mn < 0		$\frac{x^2}{(Ta)^2} - \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$		
				$\frac{b^2}{a^2} < \frac{m^2 n^2 - 1}{2m^2 n^2 + m^2 + n^2}$	Ta > 0 > Sb					
	1 + mn = 0	一線段		一線段		一直線				
	m + n = 0	$m = \frac{1}{\sqrt{3}}$	T = S > 0	$m = \sqrt{\frac{a}{a + 2b}}$		Ta = Sb > 0	$\frac{x^2}{(Ta)^2} - \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$			
		$0 < m < \frac{1}{\sqrt{3}}$	T > S > 0	$0 < m < \sqrt{\frac{a}{a + 2b}}$		Ta > Sb > 0				
		$\frac{1}{\sqrt{3}} < m < 1$	S > T > 0	$\sqrt{\frac{a}{a + 2b}} < m < 1$		Sb > Ta > 0				
		m > 1	S > 0 > T	m > 1		Sb > 0 > Ta				
	中心面積比值		$ TS = \frac{-2mn(1 + mn)}{(1 + m^2)(1 + n^2)}$							
傍心 A	m + n > 0	S > 0 > T		Sb > 0 > Ta		$\frac{b^2}{a^2} > \frac{\sqrt{1 + m^2} - \sqrt{1 + n^2}}{-m^2 \sqrt{1 + n^2} + n^2 \sqrt{1 + m^2} + (m - n) \sqrt{(1 + m^2)(1 + n^2)}}$		$\frac{x^2}{(Ta)^2} - \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$		
					$\frac{b^2}{a^2} \leq \frac{\sqrt{1 + m^2} - \sqrt{1 + n^2}}{-m^2 \sqrt{1 + n^2} + n^2 \sqrt{1 + m^2} + (m - n) \sqrt{(1 + m^2)(1 + n^2)}}$		$-\frac{x^2}{(Ta)^2} + \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$			
m + n = 0		S > 0 > T		Sb > 0 > Ta		$\frac{x^2}{(Ta)^2} - \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$				
中心面積比值		$ TS = \frac{(m - n)}{(m - n) \sqrt{(1 + m^2)(1 + n^2)} - (1 + m^2) \sqrt{1 + n^2} + (1 + n^2) \sqrt{1 + m^2}}$								
傍心 B	m + n > 0	T > 0 > S		Ta > 0 > Sb		$\frac{x^2}{(Ta)^2} - \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$				
	m + n = 0		T > 0 > S		Ta > 0 > Sb		$\frac{x^2}{(Ta)^2} - \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$			
中心面積比值		$ TS = \frac{(m - n)}{(1 + m^2) \sqrt{1 + n^2} + (1 + n^2) \sqrt{1 + m^2} - (m - n) \sqrt{(1 + m^2)(1 + n^2)}}$								
傍心 C	m + n > 0	T > 0 > S	$\frac{b^2}{a^2} > \frac{\sqrt{1 + m^2} - \sqrt{1 + n^2}}{m^2 \sqrt{1 + n^2} - n^2 \sqrt{1 + m^2} + (m - n) \sqrt{(1 + m^2)(1 + n^2)}}$		Ta > 0 > Sb	$-\frac{x^2}{(Ta)^2} + \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$				
			$\frac{b^2}{a^2} \leq \frac{\sqrt{1 + m^2} - \sqrt{1 + n^2}}{m^2 \sqrt{1 + n^2} - n^2 \sqrt{1 + m^2} + (m - n) \sqrt{(1 + m^2)(1 + n^2)}}$		Sb > 0 > Ta					
m + n = 0		T > 0 > S		Ta > 0 > Sb		$-\frac{x^2}{(Ta)^2} + \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$				
中心面積比值		$ TS = \frac{(m - n)}{(1 + m^2) \sqrt{1 + n^2} - (1 + n^2) \sqrt{1 + m^2} + (m - n) \sqrt{(1 + m^2)(1 + n^2)}}$								

伍、研究結果

一、平面上有一半徑為 r 之定圓，相異三直線 L_1, L_2, L_3 均過此定圓之圓心，若 L_2 為鉛直線，在圓上任取一動點 P ，則點 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影 $\triangle ABC$ 為一剛體三角形，其五心之軌跡(除了外心)為一橢圓型式；而外心的軌跡為一圓。此外，所有軌跡方程式均可經轉軸

化成標準式 $\frac{x^2}{(Tr)^2} + \frac{y^2}{(Sr)^2} = 1$ 且 $T+S=1$ 。

二、平面上有一長軸為 $2a$ ，短軸為 $2b$ 之橢圓，相異三直線 L_1, L_2, L_3 均過此橢圓之中心，若 L_2 為鉛直線，在橢圓上任取一動點 P ，則點 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影 $\triangle ABC$ 為一相似三角形，其五心之軌跡皆為一橢圓型式。此外，當 L_1, L_3 對稱於 L_2 時，軌跡方程式可化成標準式

$$\frac{x^2}{(Ta)^2} + \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1 \text{ 且 } T + S = 1。$$

三、平面上有一貫軸為 $2a$ ，共軛軸為 $2b$ 之雙曲線，相異三直線 L_1, L_2, L_3 均過此雙曲線之中心，若 L_2 為鉛直線，在雙曲線上任取一動點 P ，則點 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影 $\triangle ABC$ 為一相似三角形，其五心之軌跡皆為一雙曲線。此外，當 L_1, L_3 對稱於 L_2 時，軌跡方程式可化成標準式 $\frac{x^2}{(Ta)^2} - \frac{y^2}{(Sb)^2} = 1$ 且 $T + S = 1$ 。

四、平面上有一拋物線，相異三直線 L_1, L_2, L_3 均過此拋物線之焦點，若 L_2 為鉛直線，在拋物線上任取一動點 P ，則點 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影 $\triangle ABC$ 為一相似三角形，其五心之軌跡皆為一拋物線。

五、平面上有三有心錐線：圓、橢圓、雙曲線，相異三直線 L_1, L_2, L_3 均過有心錐線之中心，若 L_2 為鉛直線， L_1, L_3 對稱於 L_2 ，在有心錐線上任取一動點 P ，則點 P 對 L_1, L_2, L_3 之正射影 $\triangle ABC$ ，其五心之軌跡所圍成的中心面積與原有心錐線中心面積比值皆為一定值。

陸、結論與討論

關於正射影三角形之性質與其五心軌跡之探討，我們已經有了一個很完整的結論。而軌跡方程式中， $T + S = 1$ 的性質如此漂亮，是否背後有著特殊的幾何意義，是我們想要繼續探討的部份。我們更期望可以將正射影三角形的討論延伸至正射影多邊形之討論，以期本篇研究可以趨於完美。

製作科展中，發現原來數學研究是一道長遠的路，在這路口解開一個難以解決的問題後，下一個難題卻在下一個路口等著我們。在各式各樣的辛酸與歡笑交纏後，終於編織出美麗且完整的結果，儘管疲累不堪，現在回首，許多的付出也讓我們對高中數學的知識更加了解。經過了這次研究，我們不但對數學軟體 GeoGebra 的操作更加熟悉，對於圓錐曲線的各式性質也瞭若指掌。在研究過程裡，由於隊友的互助合作，讓資料與成果都接近完整，也讓我們學習到，原來要完成一件良好的研究，不僅需要深厚的數學興趣與能力，還要團隊的默契與辛勞付出，讓走過的路更加美麗。

柒、參考資料

1. 柳賢 左太政(民 94)。高級中學數學 4。翰林書局。
2. 林福來 李恭晴 徐正梅 陳冒海 陳順宇 (民 90)。高級中學數學甲(上)。南一書局。
3. Dimitrios Kodokostas (2004). Projected Rotating Polygons .Mathematics Magazine, Vol. 77, No. 5 (Dec., 2004), pp. 388-390
4. Encyclopedia of Triangle Centers - ETC by Clark Kimberling; has trilinear coordinates (and barycentric) for more than 3200 triangle centers , from <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>
5. Trilinear Coordinates From Wikipedia, the free encyclopedia , from http://en.wikipedia.org/wiki/Trilinear_coordinates
6. Weisstein, Eric W., "Trilinear Coordinates" from MathWorld , from <http://mathworld.wolfram.com/TrilinearCoordinates.html>
7. Bogomolny, A. "Barycentric Coordinates." , from <http://www.cut-the-knot.org/triangle/barycenter.shtml>.

【評語】 040417

1. 以“垂足三角形”代替“正射影三角形”較為妥當。但頗具創意。
2. 能考慮到各種曲線，並能歸納一些結論，研究精神可嘉。
3. 本研究應具直觀性的性質，但以一大串代數式取代，似乎增加原始問題的複雜性。