中華民國第52屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040416

「心圓異碼」－尋找隱藏的第六顆心

學校名稱：國立彰化高級中學

作者：	指導老師：
高二 鄭建佑 高二 劉庭維 高二 柯汶松	劉鴻博

關鍵詞：二次曲線、存在性、反演

「心圓異碼」－尋找隱藏的第六顆心

摘要

由費瑪點的定義（連接所有頂點的距離和最短），偶然讓我們思索，△ABC 同平面是否存在點Ｏ，使得$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{AB}=\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{BC}=\overline{OC}+\overline{OA}+\overline{CA}$。我們稱點爲「周界點」。

利用反演，我們用尺規作圖找出了此點在任意三角形的作圖方法。利用周界點定義藉由雙曲線變動關係找出周界點，找出任意三角形的周界點位置，在用ＧＳＰ找出任意三角形周界點變動軌跡。進行雙曲線追蹤時，發現此點在某些三角形中可能不存在，我們推導出此點存在的充要條件爲：

$$\sqrt{a^2-(c-b)^2}+\sqrt{b^2-(c-a)^2} > \sqrt{c^2-(b-a)^2}$$（三邊長 $c \geq b \geq a$）

藉由ＧＥＯ，我們研究三角形的周界點軌跡和存在區間。我們更進一步探討在平面中不存在周界點的三角形在空間中使能找到周界點。

壹、研究動機

今年彰化縣承辦鹿港燈會，各地人潮湧入，需解決交通壅塞的問題，路徑規劃成爲一大考驗。我們的研究方向來自在數學課時，我們學到費瑪點的性質：在一圖形中找到一個Ｐ點，連接所有頂點的總距離合最短即是費瑪點。這使我們聯想是否有這樣的點，該點與三角形的三頂點相連接後可形成三塊「等周長」的三角形呢？我們稱這樣的點爲「周界點」。

貳、研究目的

周界點可能位在三角形的內部、邊上、外部甚至是不存在，我們將找出周界點的作圖方式、存在的判別式以及相關性質的研究，進而更了解周界點隱藏的另一面。因此本研究將周界點的定義如下（圖 2－1)：存在一點Ｏ，使得

$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{AB}=\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{BC}=\overline{OC}+\overline{OA}+\overline{CA}$，則Ｏ稱作△ＡＢＣ周界點。

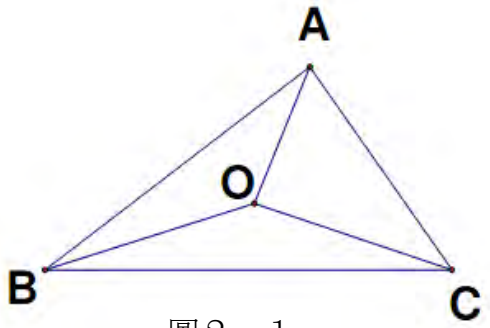

圖２－１

參、研究器材

ＧＳＰ、ＧＥＯ、ＥＸＣＥＬ、ＭＡＰＬＥ

肆、研究過程

一、等腰三角形的周界點探究

等腰三角形的周界點一定位在底邊中垂線。理由如下：

如圖 (4－1)已知$\overline{AB}=\overline{AC}$，又O必須滿足

$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{AB}=\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{BC}=\overline{OC}+\overline{OA}+\overline{CA}$，可推得$\overline{OB}=\overline{OC}$，因此O在$\overline{BC}$的中垂線$\overleftrightarrow{AD}$上。(圖４－１)

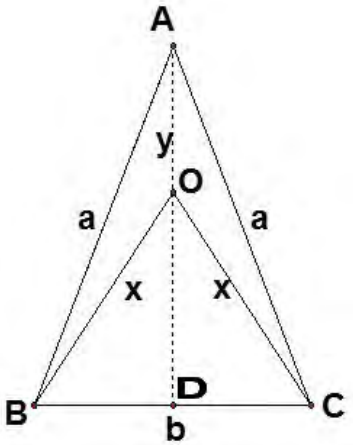

圖４－１

假設ａ＞ｂ，則推得ｘ＞ｙ。由周界點定義得知：ａ＋ｘ＋ｙ＝ｘ＋ｘ＋ｂ ，化簡得ａ＋ｙ＝ｘ＋ｂ，可將ｘ轉化成對ｙ作圖（圖４－２），ｘ＝ｙ＋（ａ－ｂ）(以較大兩邊－最小邊作圖)

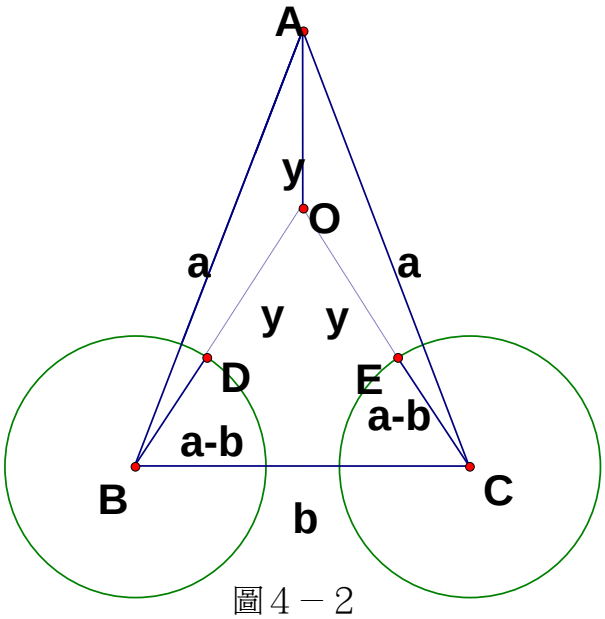

圖４－２

分別以 Ｂ、Ｃ爲圓心，長度爲 ａ－ｂ爲半徑作圓，推得$\overline{OA}=\overline{OD}=\overline{OE}=y$，於是周界點變成△ＡＤＥ的外心，且△ＡＤＥ的外接圓恰好與圓Ａ與圓Ｂ外切。以下我們將利用反演性質找出待作點Ｄ、Ｅ。

可利用的反演性質如下（圖４－３）：

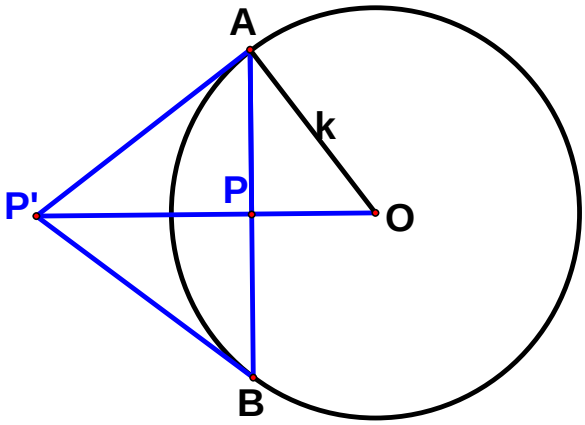

圖 4－3

圓Ｏ是平面上的定圓，對於平面上異於Ｏ點的任意點Ｐ其對應點在Ｐ'在$\overrightarrow{OP}$上，且滿足

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP'}=k^2$，稱此變換Ｉ爲反演變換。（註：對點Ｐ作反演得Ｐ'，稱其爲Ｐ的「反演點」，對圖形Ｆ作反演得Ｆ'，稱其爲Ｆ的「反形」）

以圓冪中的切割線性質可推得反演變換的作圖法：

（１）Ｐ在圓內：連$\overrightarrow{OP}$，作過Ｐ⊥$\overrightarrow{OP}$交圓Ｏ於Ａ、Ｂ兩點，其過Ａ與圓Ｏ的切線交$\overrightarrow{OP}$於Ｐ'， 即爲所求。

（２）Ｐ在圓外：作過Ｐ點與圓Ｏ的切線，連切點Ａ、Ｂ，交$\overline{OP}$於Ｐ'，即爲所求。

已知反演作圖後，我們所需利用的即爲反演中的保角性：在反演變換中，兩條曲線在交點處其交角不變，故兩圓相切（交角爲０°）其反形必相切或平行。

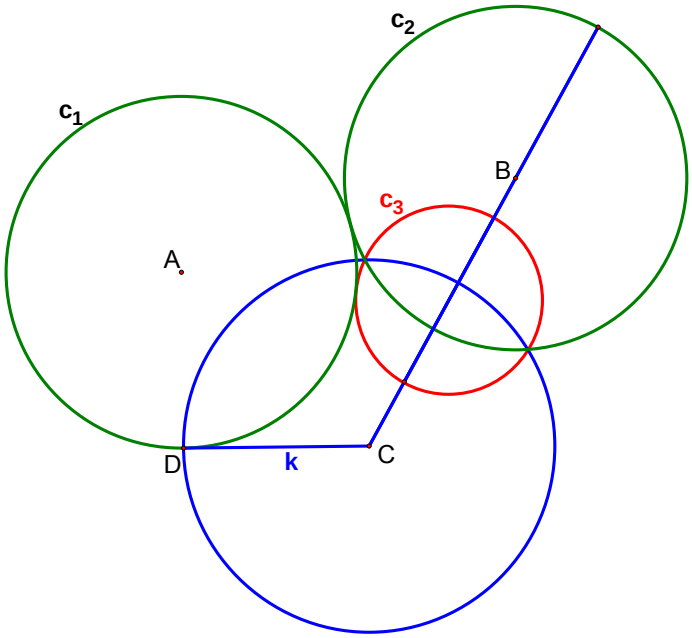

圖 4－4

以點Ｃ作爲反演中心，k^2爲反演冪。以知兩圓c_1、c_2與c_3相切，對兩圓作反演變換Ｉ（Ｃ，k^2），圓c_1其反形不變，圓c_2的反形爲c_2'。圓c_1與圓c_2'也相切。利用此保角性質，可作一圓，過一已知點且與兩已知圓相切。（圖 4－4）

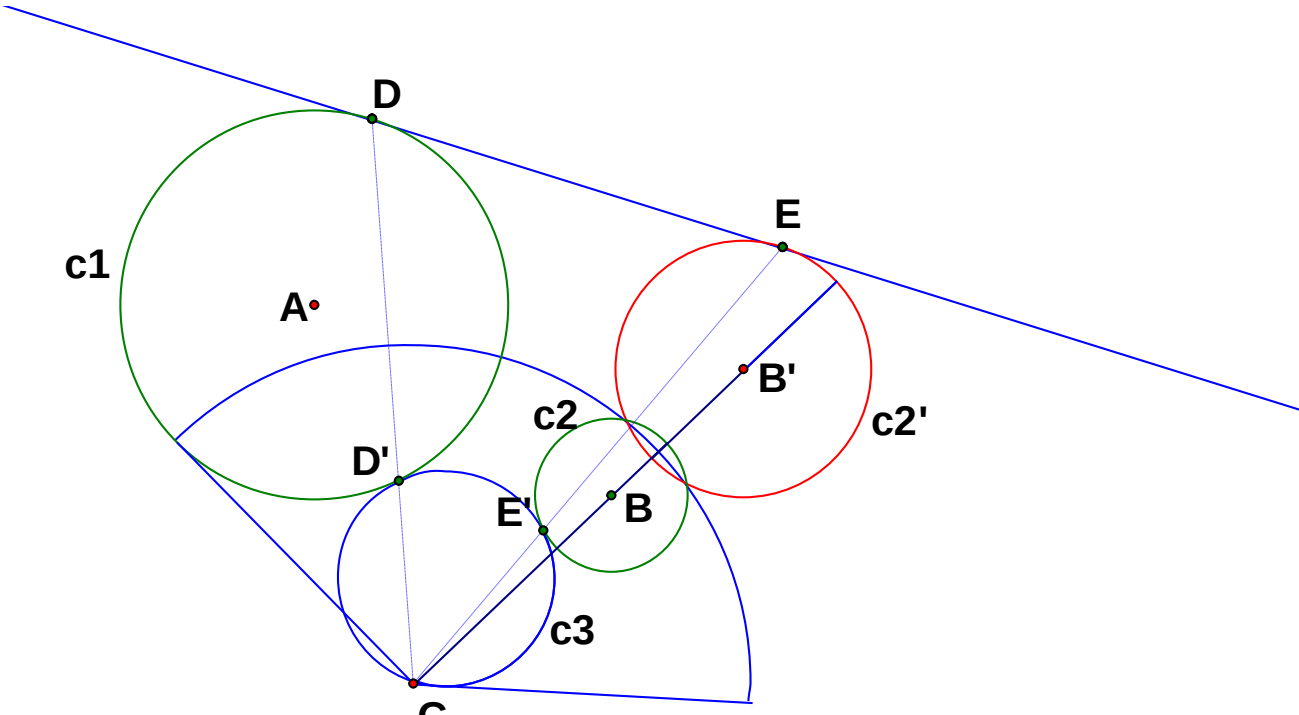

圖 4－5

作過C點且與圓c_1、圓c_2皆外切的圓（圖 4－5），由結果推得圓c_1、圓c_2、圓c_3相切，故其反形也都相切（c_1反形不變、c_2反形為c'_2、c_3反形為$\overleftrightarrow{DE}$）。根據保角性交角不變，故$\overline{CD}$、$\overline{CE}$與兩圓交點D'、E'即為切點。則成功作出待作條件。

依據邊長的不同我們將分成兩種不同的方法：

（一）腰長＞底長（過已知點與兩已知圓外切）（圖 4－6）

（1）作△ABC，腰長a＞底長b，並於B、C為圓心，長度為 a－b為半徑作圓

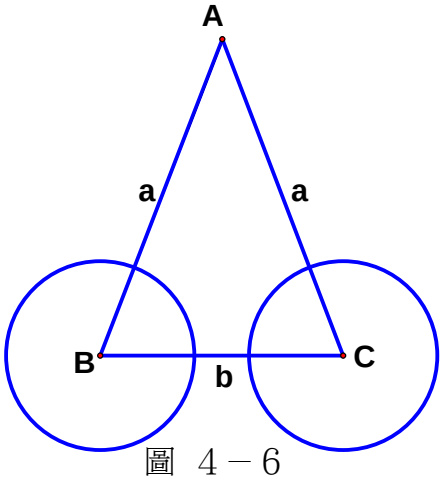

圖 4－6

（２）已Ａ爲反演中心，取$\overline{AD}$爲反演半徑，（圓Ｂ、Ｃ經反演不動）作Ｂ、Ｃ之外公切線交圓Ｂ、Ｃ於Ｅ、Ｆ，連$\overline{AE}$、$\overline{AF}$交圓Ｂ、Ｃ於Ｅ’、Ｆ’，以△ＡＥ’Ｆ’爲三角形作外心Ｏ即爲周界點。（圖４－７）

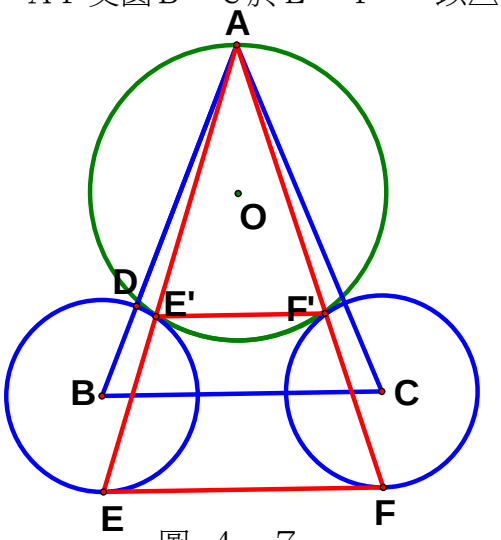

圖　４－７

（二）底長＞腰長（方法：過兩點與一已知圓外切）

（１）作△ＡＢＣ，腰長ａ＜底長ｂ，並以Ａ爲圓心，長度爲ｂ－ａ爲半徑作圓（圖４－８）

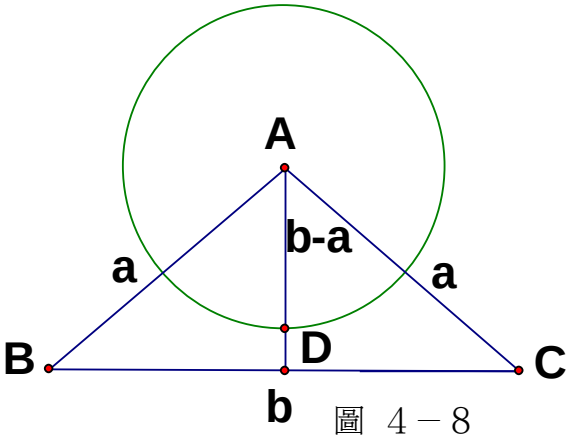

圖　４－８

（２）以△ＢＣＤ作其外心Ｏ即爲周界點。（圖　４－９）

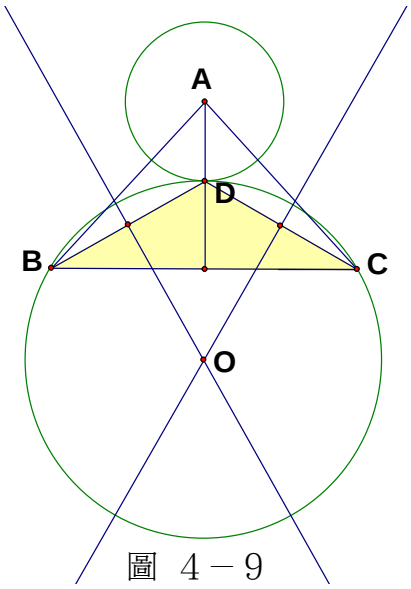

圖　４－９

但當圓Ａ半徑（ｂ－ａ）≧底邊上的高時，明顯的可看出無法作出外切圓（因Ｂ、Ｃ、Ｄ三點共線）（圖４－１０）

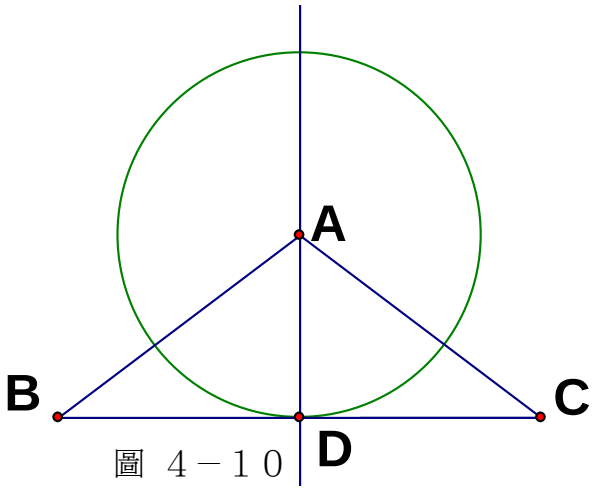

圖 ４－１０

故圓Ａ半徑（ｂ－ａ）＝底邊上的高時，爲周界點存在的條件臨界值。令$\overline{AB}$＝２ｘ，$\overline{BC}$＝２ｙ，則$\overline{AD}$＝２ｙ－２ｘ，由畢氏定理可推得ｘ：ｙ＝５：８，也就是腰長：底長＞５：８時周界點才存在。（圖 ４－１１）

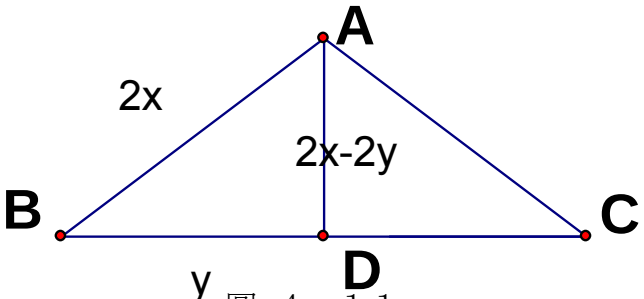

圖 ４－１１

當等腰△ＡＢＣ的周界點Ｏ在底邊$\overline{BC}$的中點，令$\overline{AB}$=$\overline{AC}$＝ ｘ，$\overline{BC}$＝ ２ｙ，$\overline{AO}$＝ｚ，由周界點定義及畢氏定理可推得，４ｙ＝ ｘ＋ ｙ＋ ｚ以及x^2＝ y^2＋ z^2，因此推出ｘ：ｙ：ｚ＝５：３：４（圖 ４－１２）

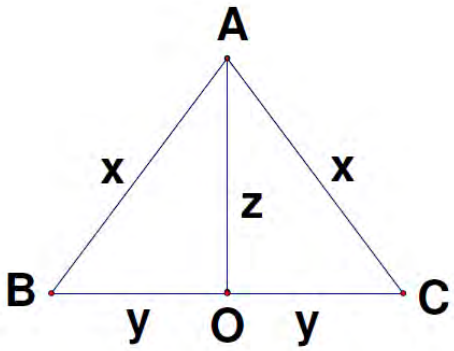

圖 ４－１２

1.等腰三角形中，腰長：底長＞５：６，周界點位於三角形內部
2.等腰三角形中，腰長：底長＝５：６，周界點位於三角形底邊中點

二、任意三角形之周界點探究

△ABC 中，若O爲周界點，$\overline{OA}=x$；$\overline{OB}=y$；$\overline{OC}=z$，$\overline{BC}=a$， $\overline{CA}=b$， $\overline{AB}=c$。假設 $a>b>c$，由周界點定義可推得 $a+y+z=b+z+x=c+x+y$，因此 $a+y=b+x$；$b+z=c+y$；$a+z=c+x$。由於 $a>b>c$，推得 $x>y>z$。（圖 4－13）

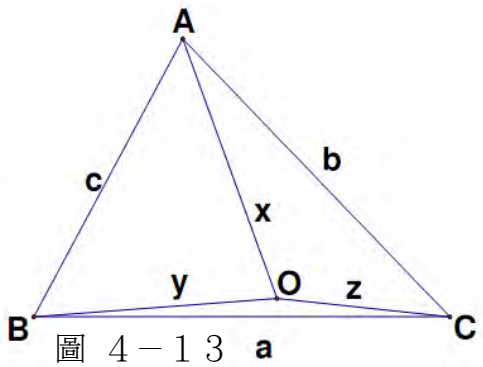

圖 4－13

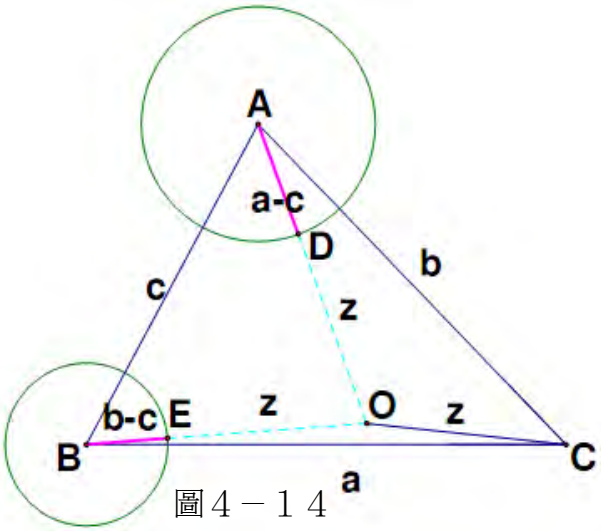

圖4－14

可把 x 、 y 皆表示成 z ，因而作圖目的轉爲 z 的作圖。

其中 $x=z+(a-c)$，$y=z+(b-c)$。分別以 A、B爲圓心，$\overline{AD}$（長度爲 $a-c$）與$\overline{BE}$（長度爲 $b-c$)爲半徑畫圓，推得$\overline{OC}=\overline{OD}=\overline{OE}=z$，於是周界點變成△CDE的外心，且△CDE 的外接圓恰好與圓A與圓B皆外切（圖4－14）。

欲通過以知點並與兩圓外切的圓，我們利用反演的保角性質作之先以結果來反推，分析如下:

1. 已知條件：圓 A、圓 B 及△ABC（藍色）
2. 待作條件：點D、點E及圓O（紅色）(圖4－15）

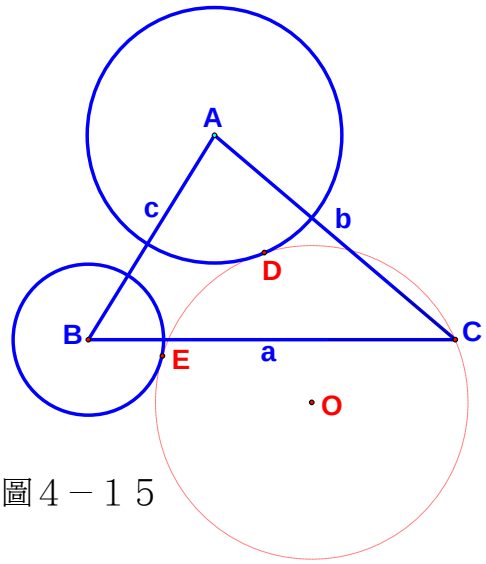

圖4－15

（一）任意三角形時，周界點的作圖

給定一個 △ ＡＢＣ，令 $\overline{AB}>\overline{AC}>\overline{BC}$（圖 ４－１６），其周界點的作圖如下：

1. 分別以 B、C 為圓心，$\overline{AC}-\overline{BC}$ 、$\overline{AB}-\overline{BC}$ 為半徑作圓。再以Ａ為圓心切線長 $\overline{AD}$ 為半徑畫出反演圓。（圖 ４－１７）

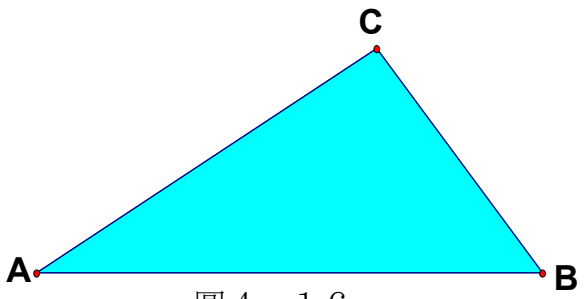

圖４－１６

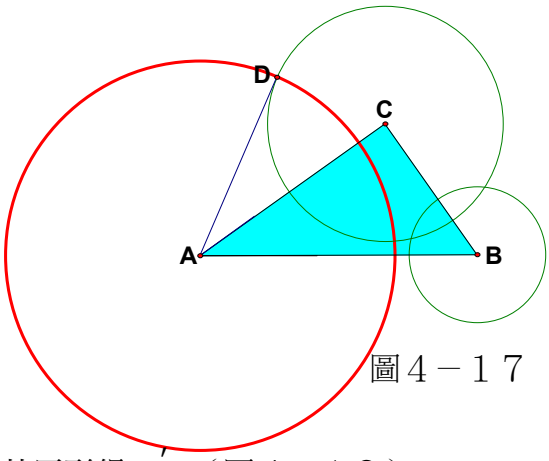

圖４－１７

2. 以Ａ為反演中心，$\overline{AD}$ 為反演半徑，對圓 c_2 其反形得 c'_2。（圖４－１８）

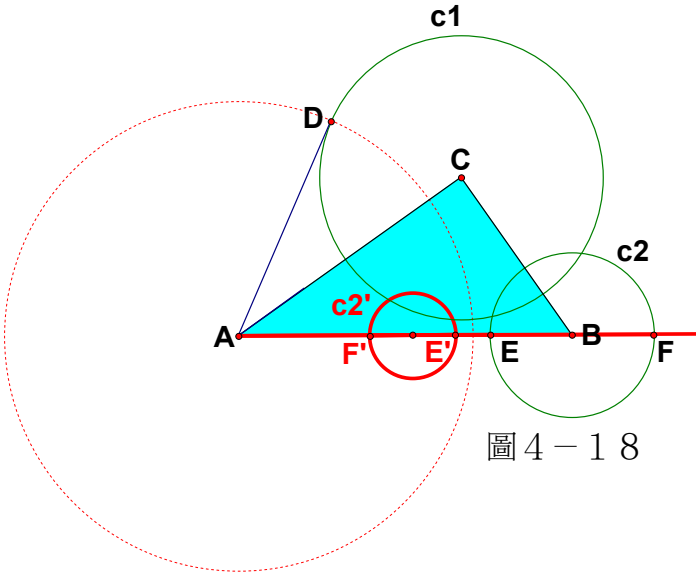

圖４－１８

3．作圓 c_1 與 c'_2 之公切線交圓 c_1 與 c'_2 於點Ｇ、點Ｈ。（圖４－１９）

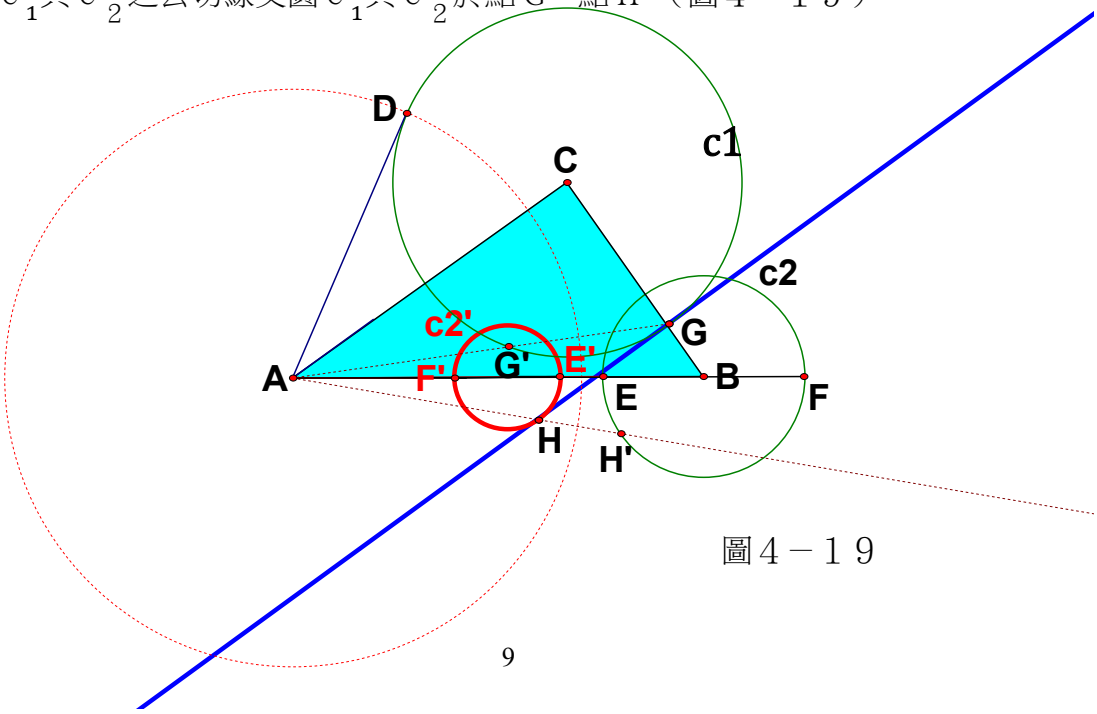

圖４－１９

4．連$\overline{AG}$、$\overline{AH}$與圓c_1、c_2交於G'、H'。作△AG'H'之外心，則O為△ABC的周界點。

（圖4－20）

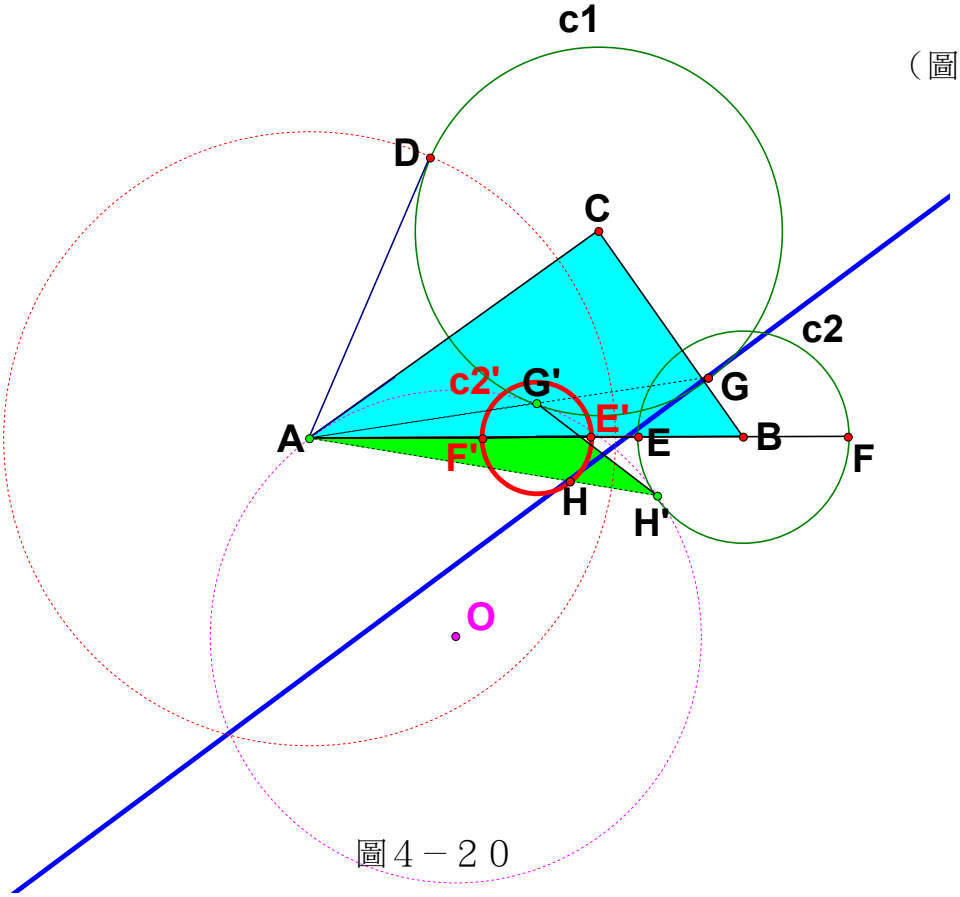

圖4－20

（一）任意三角形時周界點存在性的探討

有些三角形以直觀方式可察覺所有與圓c_1、圓c_2皆外切的圓皆不可能通過 A點。我們以固定最長邊$\overline{AB}$，拉動C點，尋找圖形的變動關係。

1.可作出一圓過點A且與圓c_1、圓c_2外切，故周界點存在。（圖4－21）

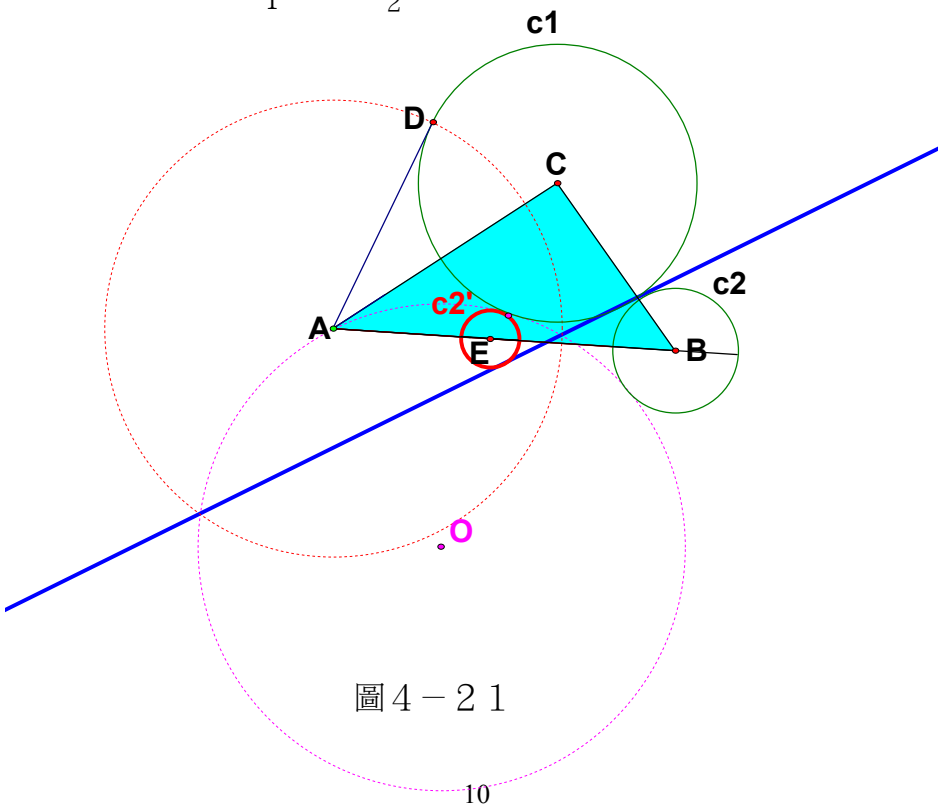

圖4－21

2.當外切圓O轉化成直線（與公切線重疊）為周界點不存在之臨界。（圖４－２２）

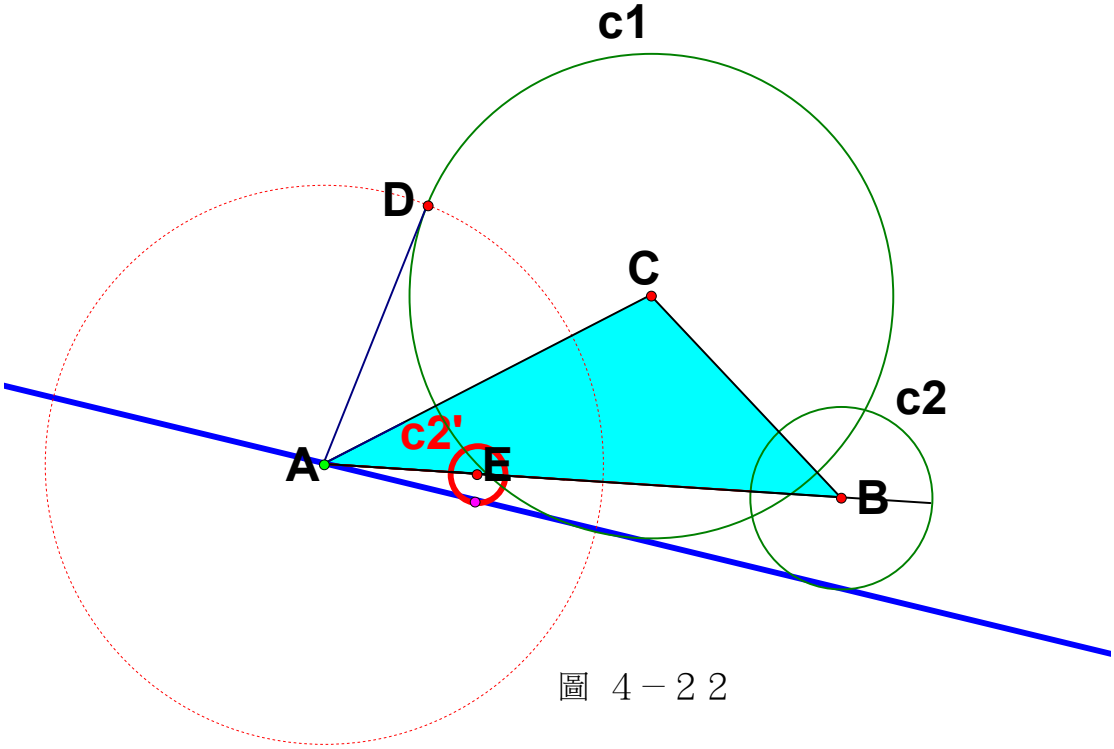

圖 ４－２２

3. 無法作出一圓過點A且與圓 c_1、圓 c_2 外切（相切情形為內切圓），故周界點不存在（圖４－２３）

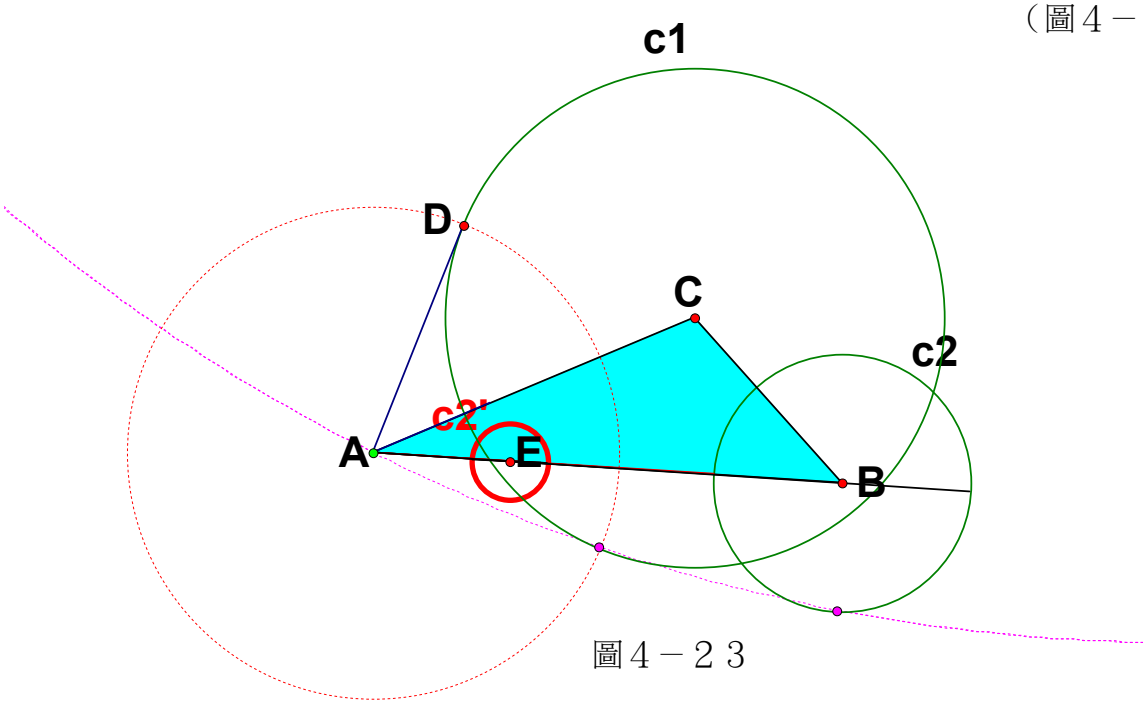

圖４－２３

我們發現$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$隨著圖形變動逼近周界點不存在的臨界時，比值為遞減關係。以下我們將利用此關係導出以三邊長判斷周界點是否存在的判別式。

△ABC 的周界點存在的充要條件為：任意時$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$＞臨界點$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$，也就是$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$的一般式必須大於臨界時的特殊式。（圖４－２４）

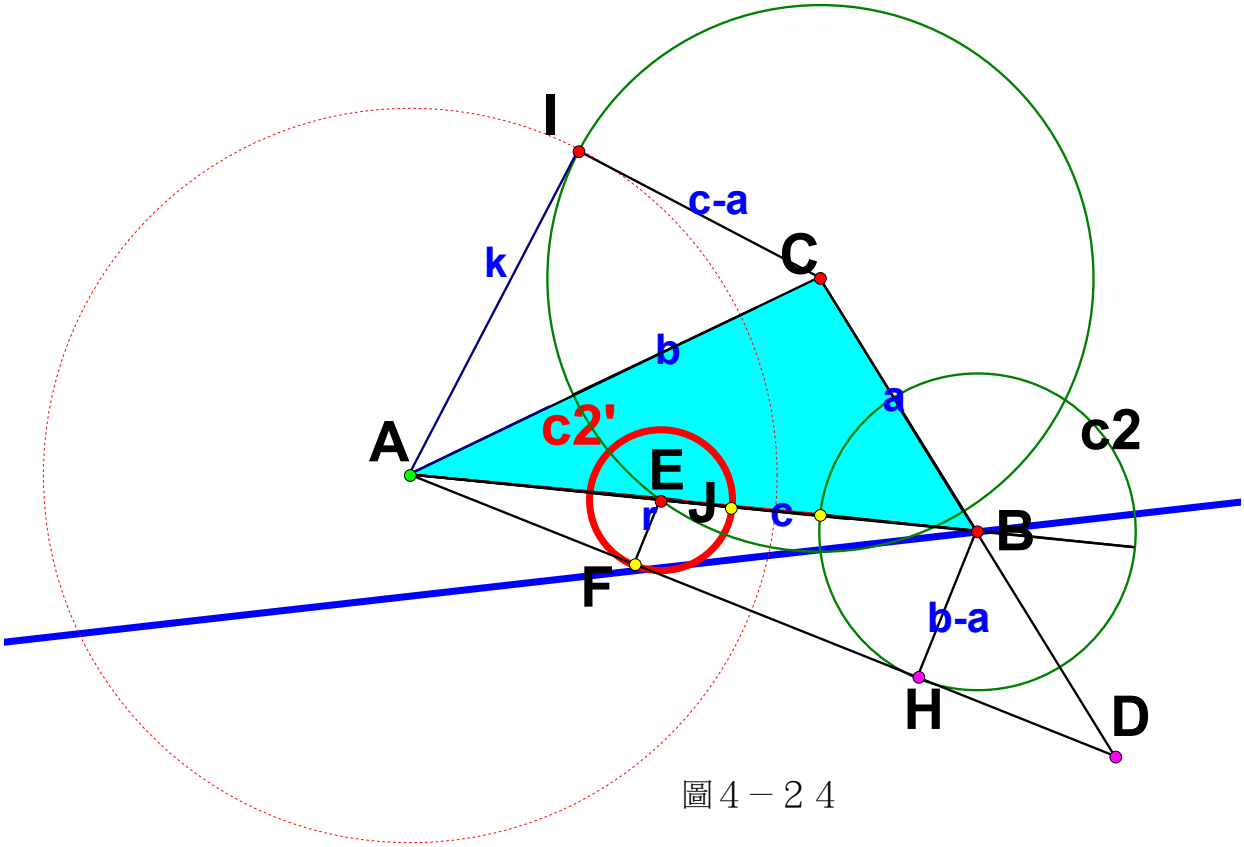

圖４－２４

已知一△ＡＢＣ三邊長為 $c \geq b \geq a$　可利用反演定義得$\overline{AJ}=\frac{b^2-(c-a)^2}{c-b+a}$

利用△ＡＥＦ ～△ＡＢＨ→$\overline{AE}$：$c=r:b-a$　（$\overline{AE}=\overline{AJ}-r$）

得 $r=\frac{(b-a)[b^2-(c-a)^2]}{c^2-(b-a)^2}$，$\overline{AE}=\frac{c[b^2-(c-a)^2]}{c^2-(b-a)^2}$，$\overline{AF}=\frac{b^2-(c-a)^2}{\sqrt{c^2-(b-a)^2}}$

由此可知$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$的一般式為: $\frac{b^2-(c-a)^2}{c^2-(b-a)^2}$。

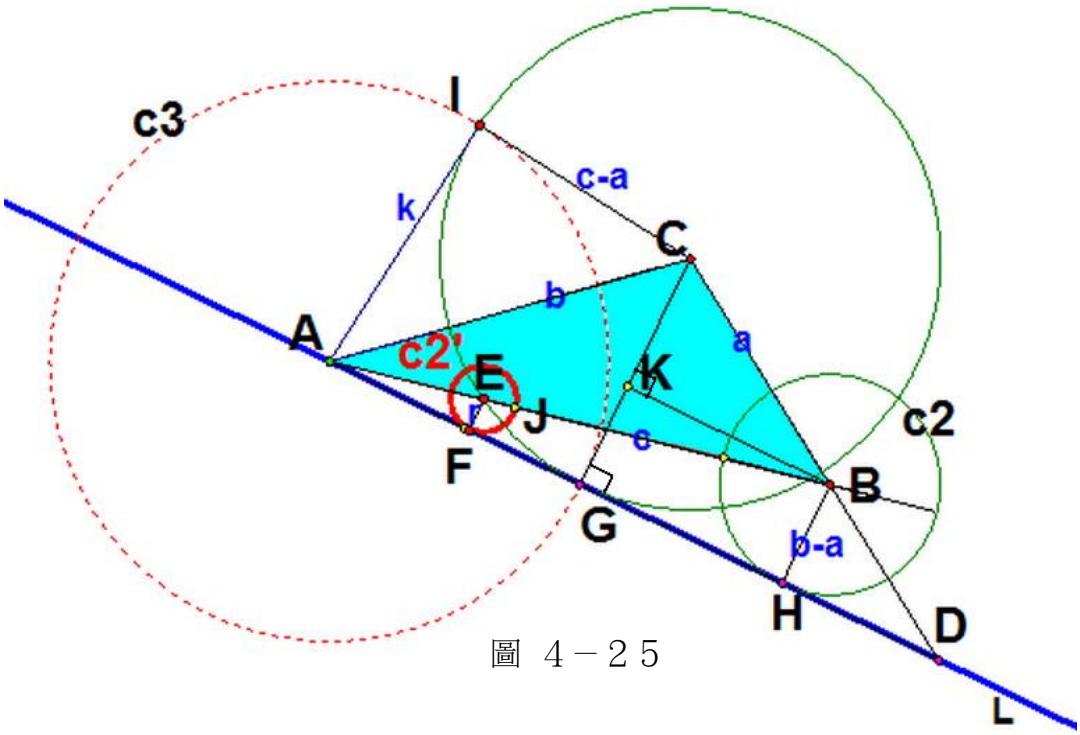

圖 4－25

作過C點且與公切線L（藍色）垂直的線段交L於G點。(圖4－25)

於臨界值時△AIC≅△AGC（RHS全等)，得知$\overline{CG}$與圓c_3相切，故

$\overline{AG}=k$ (僅存在於臨界值時的特殊條件)。

由畢氏定理得知：$\overline{BK}=\sqrt{a^2-(c-b)^2}=\overline{GH}$ ($\overline{BK}//\overline{GH}$)。

利用△AEF～△ABH→$\overline{AE}:\overline{AB}=\overline{AF}:\overline{AH}$（$\overline{AH}=\overline{AG}+\overline{GH}$）

$$\rightarrow \overline{AE}=\frac{c\left[b^2-(c-a)^2\right]}{\sqrt{c^2-(b-a)^2}\left(k+\sqrt{a^2-(c-b)^2}\right)}$$

由此可知 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$ 的特殊式為: $\dfrac{b^2-(c-a)^2}{\sqrt{c^2-(b-a)^2}\left(k+\sqrt{a^2-(c-b)^2}\right)}$。

可知：一般式＞特殊式→ $\dfrac{b^2-(c-a)^2}{c^2-(b-a)^2} > \dfrac{b^2-(c-a)^2}{\sqrt{c^2-(b-a)^2}\left(k+\sqrt{a^2-(c-b)^2}\right)}$

經化簡：$k+\sqrt{a^2-(c-b)^2} > \sqrt{c^2-(b-a)^2}$　　由$k=\sqrt{b^2-(c-a)^2}$

得周界點的判別式為: $\sqrt{a^2-(c-b)^2}+\sqrt{b^2-(c-a)^2} > \sqrt{c^2-(b-a)^2}$（$c\geq b\geq a$）

再經由餘弦定理可轉換為$\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{a}}+\sqrt{\dfrac{1-\cos B}{b}}>\sqrt{\dfrac{1-\cos C}{c}}$（$c\geq b\geq a$）

以下我們將判別式$\sqrt{a^2-(c-b)^2}+\sqrt{b^2-(c-a)^2}>\sqrt{c^2-(b-a)^2}$（$c\geq b\geq a$）轉換為圖形並作解釋（圖４－２６）：

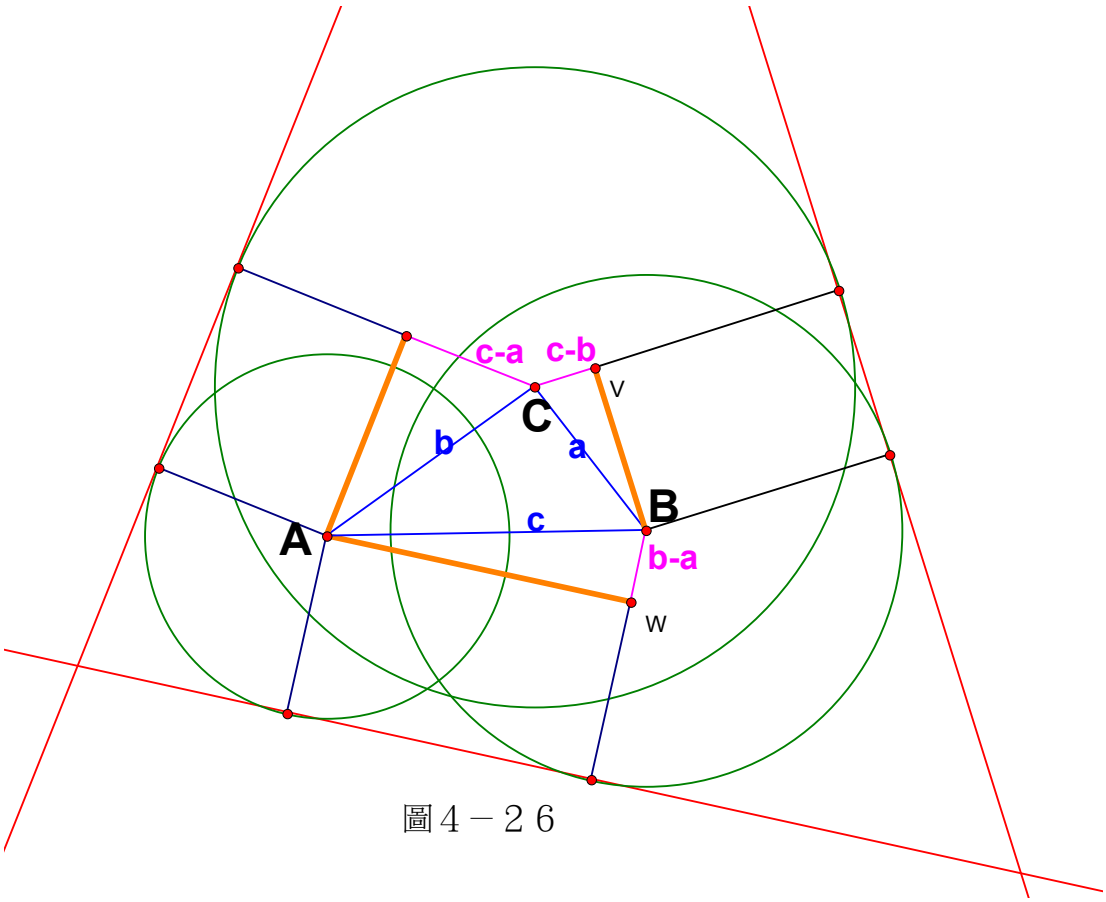

圖４－２６

我們發現此判別式可轉換成圖形：分別以Ａ、Ｂ、Ｃ為圓心，ａ、ｂ、ｃ為半徑作圓，作三圓之公切線，此三段公切線段長（橘色）即為判別式的三項， 故我們以此三線段長作三角形（圖４－２７），即可將判別式轉化為當三角形存在時，周界點即存在。（圖形判別式即為此三角形之兩邊之和大於第三邊）故我們可不經計算，直接由尺規作圖得知任意三角形周界點之存在與否。

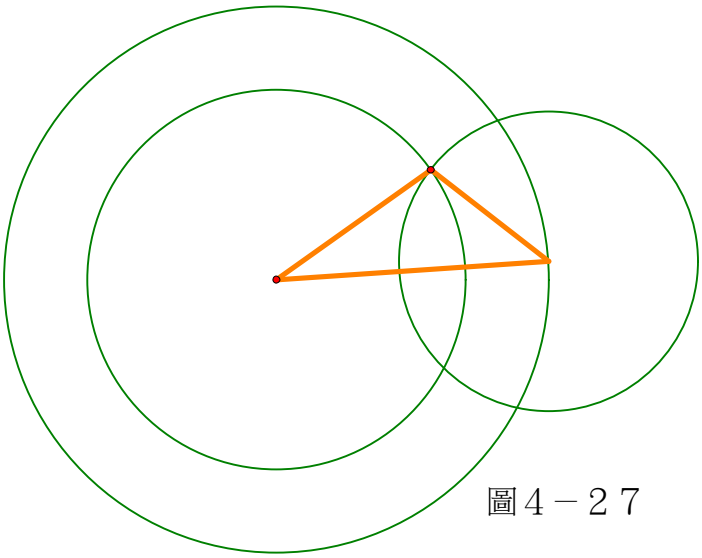

圖４－２７

我們以前述周界點作圖（圖４－２８），以及圖形判別式（圖４－２９）作驗證，當圖形變動至周界點不存在之臨界時，三角形轉化為直線。（兩較小邊和等於最大邊）

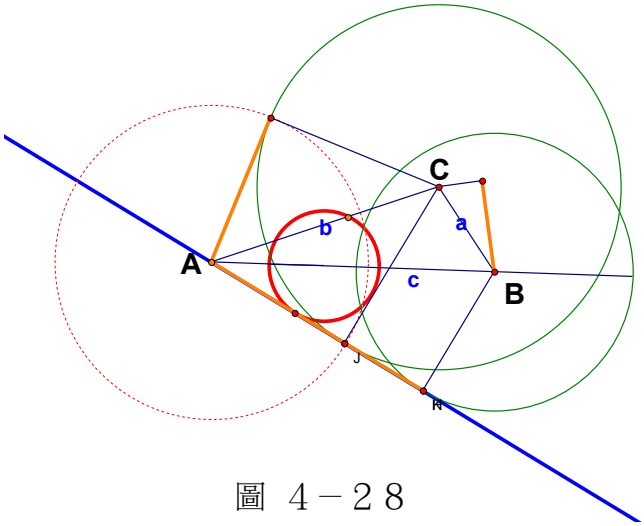

圖　４－２８

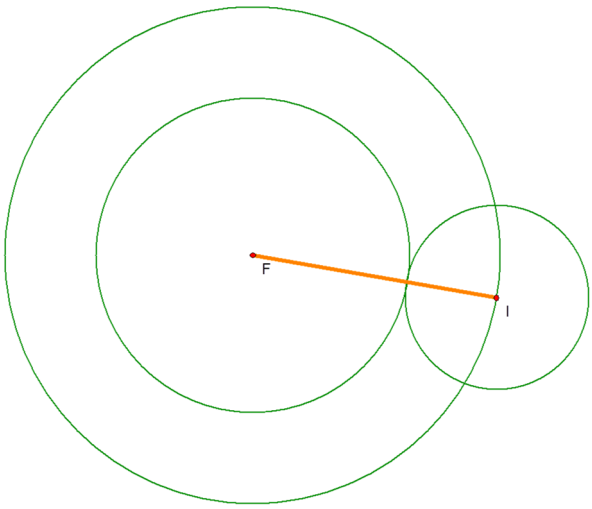

圖　４－２９

（三）任意三角形之周界點位置

1.銳角三角形周界點位置

（１）討論在邊上的情形。△ＡＢＣ中的三邊皆不等長，假設周界點Ｏ在最大邊$\overline{BC}$上，令$\overline{BC}$＝2a，　$\overline{CA}$＝2b，$\overline{AB}$＝2c（圖４－３０），其中 a＞b＞c，令$\overline{OA}$＝y，$\overline{OC}$＝x，則$\overline{OB}$＝2a-x，由周界點定義推得４ａ＝ｘ＋ｙ＋２ｂ＝ｙ＋２ｃ＋２ａ－ｘ，可解出ｘ＝ａ－ｂ＋ｃ；ｙ＝３ａ－ｂ－ｃ。因此推得$\overline{OA}$＝３ａ－ｂ－ｃ，$\overline{OB}$＝ａ＋ｂ－ｃ，$\overline{OC}$＝ａ－ｂ＋ｃ。（圖４－３１）

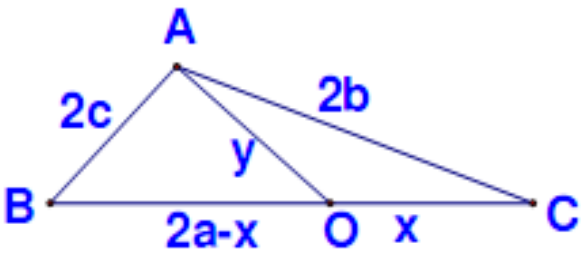

圖４－３０

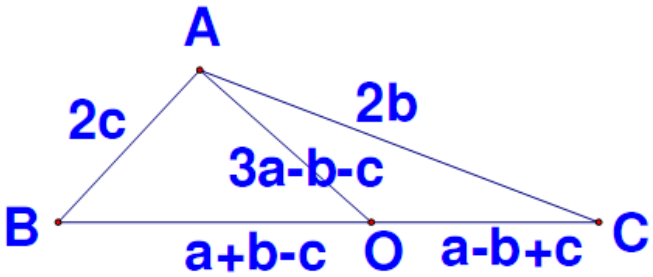

圖４－３１

$$\cos\angle ABC=\frac{(2c)^2+(a+b-c)^2-(3a-b-c)^2}{2(a+b-c)(2c)}=\frac{(2c)^2+(2a)^2-(2b)^2}{2(2a)(2c)}$$

化簡得 $8a^3-(a+b+c)[3a^2+(b-c)^2]=0$，該式為周界點位於不等邊三角形的邊上的判別式。

此外，由$\overline{OA}>\overline{OB}$、$\overline{OA}>\overline{OC}$可推得△ABC 為銳角三角形，故周界點在邊上的不等邊三角形必為銳角三角形。

O是銳角△ＡＢＣ的周界點，若 $\overline{BC}>\overline{CA}>\overline{AB}$，則$\overline{OA}>\overline{OB}>\overline{OC}$。

令 $\overline{BC}=a$， $\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，由周界點定義可知：$\overline{OA}=a-x$，$\overline{OB}=b-x$ ，

$\overline{OC}=c-x$，相當於分別將ａ、ｂ、ｃ 接上 ｘ，因此我們稱 ｘ爲「接距」。（圖４－３２）

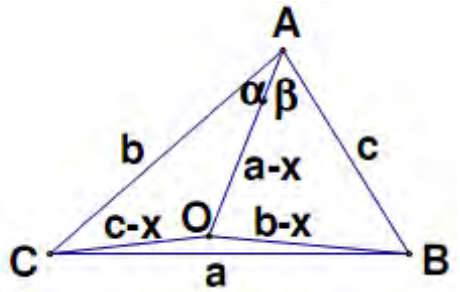

圖 ４－３２

結果：（１）接距 x 的公式解：

利用和角公式及餘弦定理，代入化簡得下列方程式：$Tx^2+Ux+V=0$，我們稱該方程式爲「接距方程式」。解方程式得知 $x=\dfrac{-U-\sqrt{U^2-4TV}}{2T}$

其中： $T=-4s^4+4(a^2+b^2+c^2)s^2-2(a^4+b^4+c^4)$

$U=-4(a^3+b^3+c^3)s^2+3(a^4+b^4+c^4)s+(a^5+b^5+c^5)+2abc(a^2+b^2+c^2)+abc(ab+bc+ca)$

$V=2(a^4+b^4+c^4)s^2-2(a^5+b^5+c^5)s-abc(a^3+b^3+c^3)-a^2b^2c^2$

（２）周界點在銳角界角形內部的判別式：

周界點Ｏ在銳角三角形 ABC 的內部的充分條件爲

∠ACO ＜∠ACB；∠ABO＜∠ABC，cos∠ACO＞cos∠ACB； cos∠ABO ＞ cos∠ABC

$$\frac{b^2+(a-x)^2-(c-x)^2}{2b(a-x)}>\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab};\frac{c^2+(b-x)^2-(a-x)^2}{2c(b-x)}>\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

合併化簡得（３ａ－ｂ－ｃ）ｘ＋ ｂｃ（$2\cos A-\cos B-\cos C$）＞ ０

2.直角三角形周界點位置

三邊不等長的直角三角形周界點位在三角形斜邊中線的延長線上，與直角頂點距離兩倍於斜邊中線的位置。（∵△ＡＢＣ≅△ＯＣＢ≅△ＣＯＡ≅△ＢＡＯ）（圖４－３３）

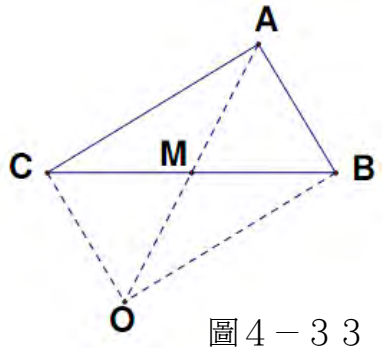

圖４－３３

３.鈍角三角形周界點位置

由反證法可推得三邊不等長的鈍角三角形周界點位在三角形外部。

證明：△ＡＢＣ中$\overline{BC}>\overline{CA}>\overline{AB}$，∠Ａ＞９０°，令周界點Ｏ存在。

（1）假設周界點位於△ＡＢＣ內部，∵$\overline{BC}>\overline{CA}>\overline{AB}$，由周界點定義推得$\overline{OA}>\overline{OB}>\overline{OC}$，由大角對大邊可推得∠２＞∠１；∠４＞∠３，則由外角定理可推得∠ＢＯＣ＝∠１＋∠２＋∠３＋∠４＞ 2(∠１＋∠３)＝２∠Ａ＞180°，與凹四邊形的角度性質矛盾。

（2）假設周界點位於 △ ABC 邊上，則與前述周界點於邊上必爲銳角三角形性質矛盾。

由（1）（2）得知，三邊不等長的鈍角三角形周界點位在三角形外部。（圖４－３４）

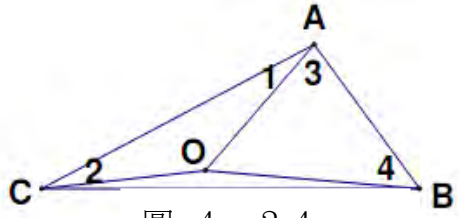

圖 ４－３４

三、由存在判別式探討周界點存在區間

（一）爲尋求任意三角形中周界點的位置，我們將三角形座標化，但若將等周長作爲唯一限制，則無法有系統地討論出所有三角形的周界點，ｅｘ：邊長 10、10 、10 和 8 、8 、14 兩者雖等周長但無法分爲同類。

爲解決此問題，藉由相似形性質我們可以對三角形進行縮放而不失周界點的一般性，固可將所有相似三角形視爲同一類而不須討論ｅｘ：8 、8 、14→10、10、17.5 如此一來即可用下列敘述的方式以周長和固定邊的比值($r=\frac{\text{周長}}{\text{固定邊}}$)來對三角形進行分類與解析。

（二）根據周界點定義$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{AB}=\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{BC}=\overline{OC}+\overline{OA}+\overline{CA}$

經移項消去可得$\overline{OA}-\overline{OC}=\overline{BC}-\overline{AB}$、$\overline{OB}-\overline{OA}=\overline{CA}-\overline{BC}$、$\overline{OB}-\overline{OC}=\overline{CA}-\overline{AB}$

可看出此三式各爲一條單支的雙曲線，且由上方三式可看出周界點同時在三條單支的雙曲線上，故周界點爲任兩單支雙曲線的交點，如（圖 ４－３５）

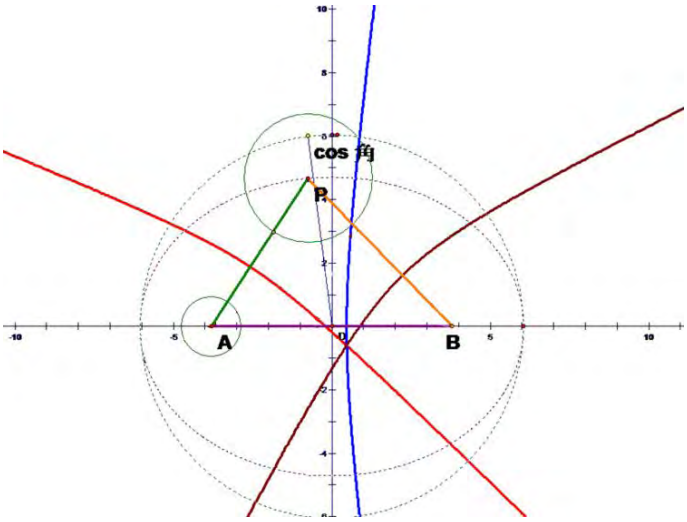

圖 4－35

（三）給定一固定邊且等周長之三角形，置入平面座標系中，令O（0，0）、A（－c，0）、B（c，0）、P（x，y）其中c爲一常數，而x、y皆爲變數。由上述定義可知，令

$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 且 $2a=\overline{AP}+\overline{BP}$，則$P\in\Gamma$。因周長必爲底長的r倍(r＞2)，故令周長爲r(2c)，且令θ爲橢圓的參數角。(圖4－36)

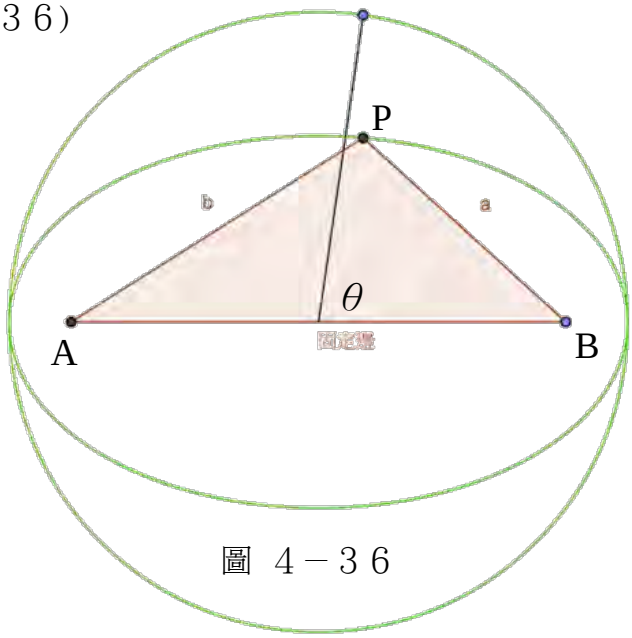

圖 4－36

1. 座標（x，y）轉換爲橢圓參數式

$2c+2a=2rc$

$a=c(r-1)$

$b^2=a^2-c^2$

$b=c\sqrt{r^2-2r}$ （b＞0）

$(x,y)=(a\cos\theta,\ b\sin\theta)=(c\cos\theta\ (r-1),\ c\sin\theta\sqrt{r^2-2r})$

2. 長度轉換

藉由焦半徑公式$\overline{PA}=a+\frac{c}{a}x$，$\overline{PB}=a-\frac{c}{a}$

將 a,c,x 值帶入得

$\overline{AC}=c(r-1+\cos\theta)$ $\overline{BC}=c(r-1-\cos\theta)$ $\overline{AB}=2c$

由於兩邊和大於第三邊，所以r必定大於2，$\overline{BC}$邊必定大於0

3. 帶入周界點存在判別式求 cos θ 區間

由於此判別式的三邊長並不具有輪換性，故我們嘗試將判別式經左右化簡後得

$$-5(a^4+b^4+c^4)+4(a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-4abc(a+b+c)>0$$

經化簡後得：$6s^4-(a^4+b^4+c^4)-4(ab+bc+ca)s^2>0$ （$s=\dfrac{a+b+c}{2}$）

將 $\overline{AC}$、$\overline{BC}$、$\overline{AB}$代入判別式得：

$$6(rc)^4-[c(r-1+\cos\theta)^4+c(r-1-\cos\theta)^4+(2c)^4]-$$

$$4r^2c^2[c^2(r-1+\cos\theta)(r-1-\cos\theta)+2c^2(r-1+\cos\theta)+2c^2(r-1-\cos\theta)]>0$$

得： $-2r^2+6r-3+2\sqrt{r(r-2)^3}>\cos^2\theta>-2r^2+6r-3-2\sqrt{r(r-2)^3}$

結論：藉由cosθ 的範圍限制，我們可以求出周界點的存在區間。

（四）我們固定底邊長，以 r 值爲變因進行追蹤。

1.由相似原理將所有三角形的固定邊座標訂爲（１,０）、（－１,０）

(1)當 r 固定時(縮放後周長相等)，三角形的頂點會落在同一橢圓的邊上，因此cos θ 變化時，我們可以發現周界點的軌跡。（圖４－３７）

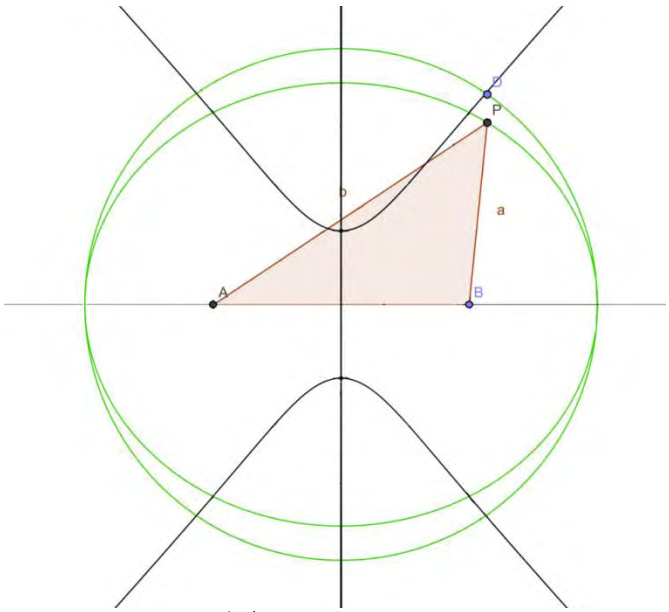

圖４－３７

(2)當 r 符合條件時(r ＞ 2)，皆可找出與其對應的橢圓，之後作法與(1)相同，故周界點存在判別式成立時，我們可以找出任意三角形周界點軌跡與存在區間。

例： r ＝ 2.2 5 代入 $-2r^2+6r-3+2\sqrt{r(r-2)^3} > \cos^2\theta > -2r^2+6r-3-2\sqrt{r(r-2)^3}$

得： 0.7 5 $> \cos^2\theta >$ 0 → 0 $> \cos\theta > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 且 $\frac{\sqrt{3}}{2} > \cos\theta > 0$（圖４－３８）

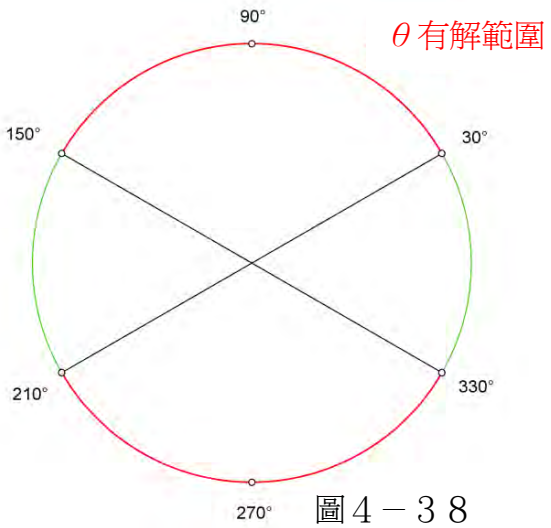

圖４－３８

r ＝ 2.2 5時，周界點存在區間的討論

(1) θ ＝90° ：雙曲線不相交，無周界點（圖４－３９）

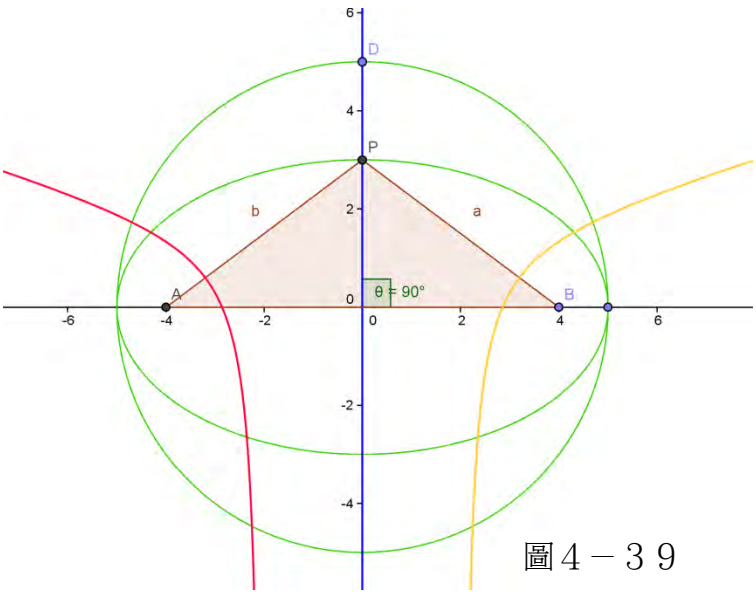

圖４－３９

（2）30° ＜θ＜ 90° ：有周界點（圖４－４０）

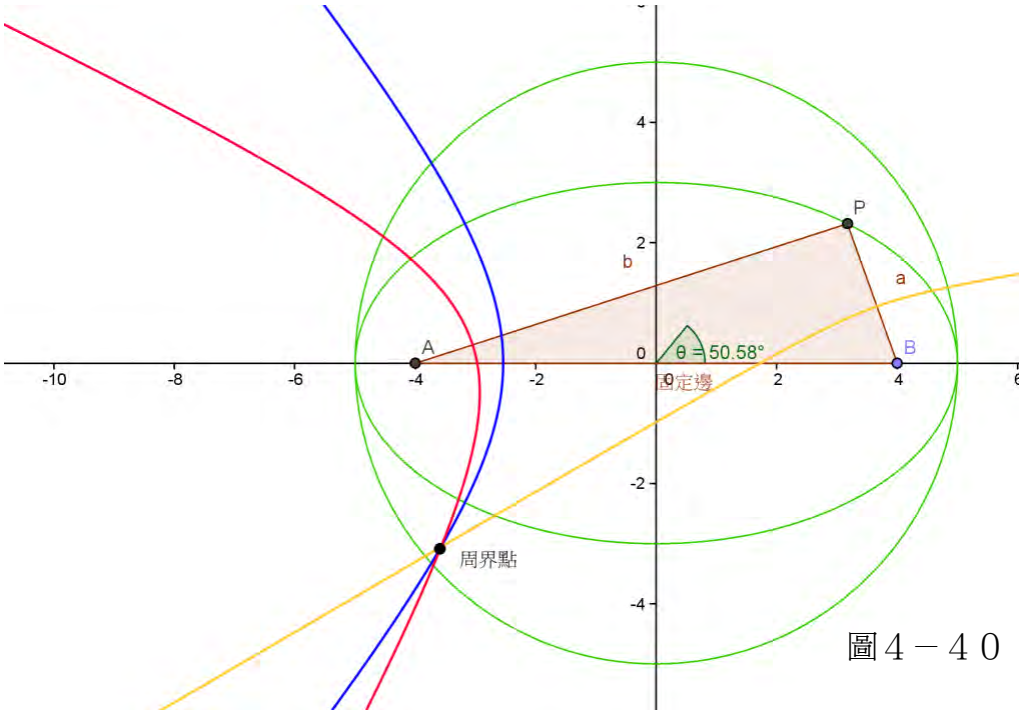

圖４－４０

（3）$\theta \leqq 30°$ ：雙曲線發散，無周界點（圖４－４１）

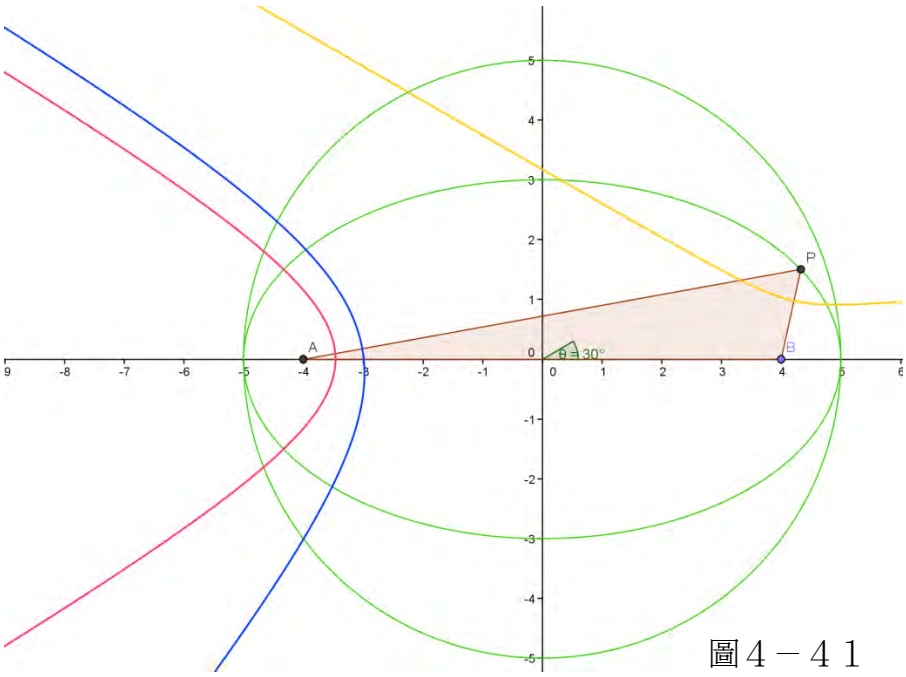

圖４－４１

四、空間中周界點的存在性探討

（一）設平面上有一周界點 O 滿足：

$$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{AB}=\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{BC}=\overline{OC}+\overline{OA}+\overline{CA}$$

以等腰三角形 ABC 邊長(５,５,８)爲例。 (圖４－４２)

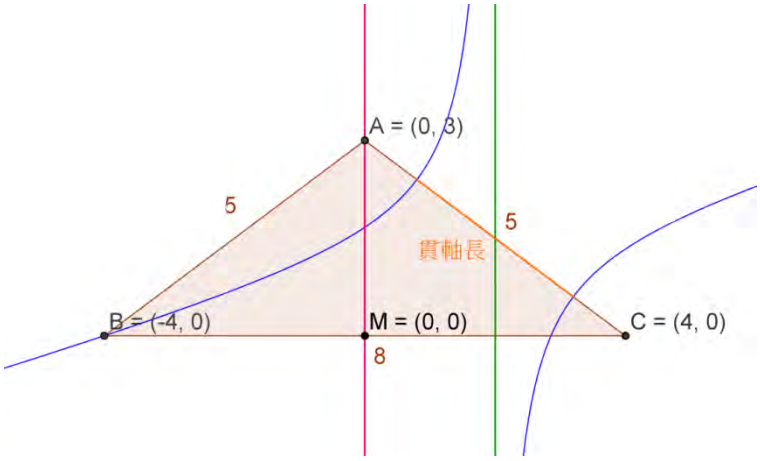

圖４－４２

→$\overline{BC}-\overline{BA}=\overline{OA}-\overline{OC}=3$， 可知Ｂ、Ｏ皆在以Ａ、Ｃ爲焦點，貫軸長爲３之雙曲線上但不同支，由雙曲線定義可知，此雙曲線的焦距＝５、貫軸長＝３→共軛軸長＝４

可推得Ｏ點所在那一側的漸進線與貫軸銳角夾角$\tan\theta=\frac{4}{3}$ 與$\tan\angle CAM$相同，故漸進線與中垂線($\overline{AM}$)平行，所以沒有交點，則Ｏ不存在。

將平面不存在周界點的三角形置入空間中，探討在空間中是否存。以上述三角形爲例，將其置入空間中：

令Ｏ爲空間中的周界點，可得出周界點與Ａ,Ｃ所在的平面，根據周界點性質可得出Ｏ仍落在此平面中焦點爲Ａ,Ｃ焦距＝５、貫軸長＝３、共軛軸長＝４的單支雙曲線上，此雙曲線與ｘ-ｙ平面的雙曲線全等，固可視爲將 x-y 平面上的單支雙曲線以貫軸爲轉軸做旋轉得一單邊二葉雙曲面，且不與中垂面(雙曲面退化)相交，故空間中亦無周界點Ｏ。(圖４－４３)

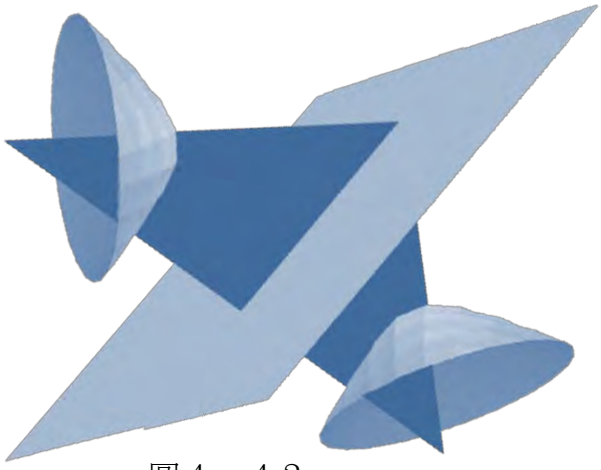

圖４－４３

在ｘ－ｙ平面上，任意邊長三角形的周界點的位置可視爲兩單支雙曲線的交點，若無交點(與圖形同向的漸進射線不相交)，則周界點亦不存在。（圖４－４４）

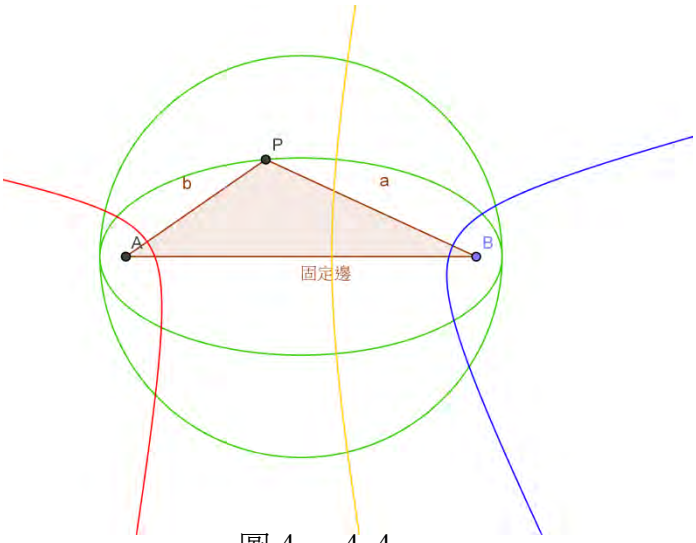

圖４－４４

空間中一般的三角形與上述討論的等腰三角形概念相似。

將平面中單支雙曲線以自身的貫軸爲轉軸做旋轉得單邊二葉雙曲面，可發現皆不相交。

（圖４－４５）

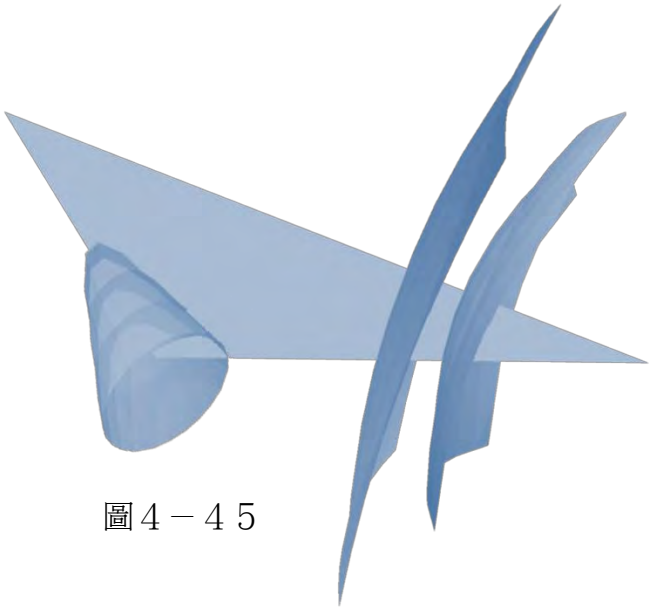

圖４－４５

我們得到結果：平面中若無周界點存在，則空間中亦不存在

（二）討論平面中存在周界點的三角形，在空間中的存在情形

已知平面中一△ＡＢＣ，及其周界點O’（圖４－４６），分別以Ａ、Ｂ、Ｃ爲球心，$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$爲半徑，在空間中做球。（圖４－４７）

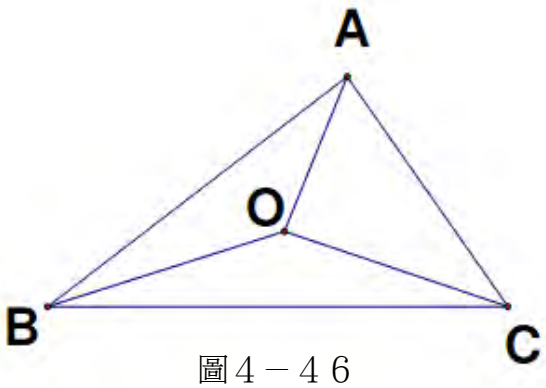

圖４－４６

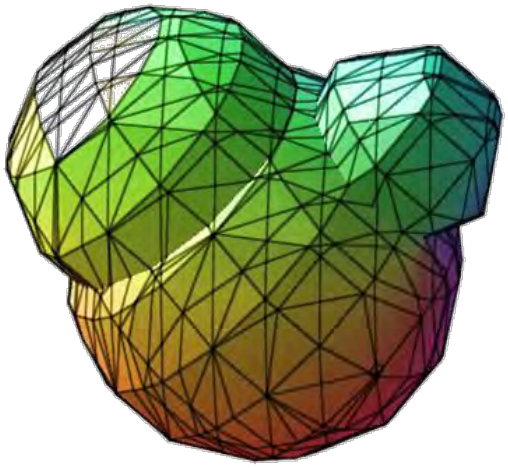
圖４－４７

找一球半徑爲ｔ使其與其他三球相切，則此球心與三頂點構成之三角形的周長爲

$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{AB}+2t$、$\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{BC}+2t$、$\overline{OC}+\overline{OA}+\overline{CA}+2t$，將ｔ消除後仍符合周界點定義，推得此球的球心Ｏ即爲空間中的周界點，因與三球相切的球可有無限多個，所以周界點在空間中的解爲一直線或曲線。

（三）空間中特殊等腰三角形周界點的函數推導

已知等腰三角形的腰長：底邊爲５：６在平面時，底邊中點有一周界點(3，4)，我們將此情形推廣至空間中，底邊 6 放於原點至＋x 軸，A(0，0，0)、B(6，0，0)、C (3，4，0)。

假設 ΔABC 在空間中有周界點 O(x，y，z)，由前述證明等腰三角形周界點位於中垂線上，故 x 座標爲 3。由 $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{AB}=\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{BC}$ ：

$$2\sqrt{3^2+y^2+z^2}+6=\sqrt{3^2+y^2+z^2}+\sqrt{(y-4)^2+z^2}+5$$

（1）化簡得 $\sqrt{3^2+y^2+z^2}<\sqrt{(y-4)^2+z^2}\rightarrow(y-4)^2>9+y^2$

（2）化簡 $\sqrt{3^2+y^2+z^2}+1=\sqrt{(y-4)^2+z^2}$

由（1）（2）得: $z^2=15y^2-24y$，y≦0 ，x＝3。

所以腰長：底邊爲５：６的等腰三角形不僅在平面存在周界點，空間中解的圖形爲一雙曲線。

伍、研究結果

△ABC 的周界點O，滿足$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{AB}=\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{BC}=\overline{OC}+\overline{OA}+\overline{CA}$的點，研究成果如下：

（一）等腰三角形周界點

1.作圖原理：反演、中垂線

2.作圖方法概述：因腰長底長的不同，分爲兩種情形

（1）腰長＞底長（過已知點與兩已知圓外切）：以腰長減底長爲半徑，與底邊兩頂點做圓，做兩圓公切線，連接頂角交兩圓於兩點，這兩點與頂角之外心即爲周界點

（2）底長＞腰長（過兩點與已知圓外切）：以底長減腰長爲半徑，做底邊中垂線與圓相交於一點，此交點與底角頂點之外心即爲周界點

3.等腰三角形之周界點存在判別式：底長：腰長＞5：8

4.周界點位置：

（1）等腰三角形中，腰長：底長＞5：6，周界點位於三角形內部

（2）等腰三角形中，5：6＞腰長：底長＞5：8，周界點位於三角形外部

（二）三邊不等長的三角形周界點

1.作圖原理：反演作圖、周界點定義

2.作圖方法概述：先分別以最大角與次大角頂點爲圓心 ，最大邊與最小邊之差、次大邊與最小邊之差爲半徑作出兩圓。以最小角爲反演中心，對一圓作反演，作反形與另一圓之公切線，切點與反演中心連線，交前述兩頂點圓於兩點，此兩點與反演中心的外心即爲周界點。

3.三邊不等長的周界點存在判別式：

給定△ABC 邊長分別爲 a 、b 、c

（1）$\sqrt{a^2-(c-b)^2}+\sqrt{b^2-(c-a)^2} > \sqrt{c^2-(b-a)^2}$（$c \geq b \geq a$）

（2）$\sqrt{\frac{1-\cos A}{a}}+\sqrt{\frac{1-\cos B}{b}}>\sqrt{\frac{1-\cos C}{c}}$（$c \geq b \geq a$）

（3）可根據圖形判別式之兩邊之和大於第三邊，周界點即存在。

4.周界點位置：

(1) 周界點位於三角形邊上的判別式爲：$8a^3-(a+b+c)[3a^2+(b-c)^2]=0$ （$a>b>c$）

(2) 三邊不等長的鈍角三角形周界點恆位在三角形外部

(3) 三邊不等長的直角三角形周界點位在三角形斜邊中線的延長線上，與直角頂點距離兩倍於斜邊中線的位置

(4)三邊不等長的銳角三角形△ ABC 中，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$（$a>b>c$），其周界點在三角形內部的判別式爲$(3a-b-c)x+bc(2\cos A-\cos B-\cos C)>0$

接距 $x=\dfrac{-U-\sqrt{U^2-4TV}}{2T}$

（三）以橢圓對三角形作分類：

1. $r = \dfrac{\text{周長}}{\text{固定邊}}$ ，藉由縮放及改變 r 值將三角形分類

令A（－c，0）、B（c，0）、P（x，y），座標（x，y）轉換爲橢圓參數式

$(x, y) = (c\cos\theta\ (r-1),\ c\sin\theta\sqrt{r^2-2r})$

$\overline{AC} = c(r-1+\cos\theta)$ $\overline{BC} = c(r-1-\cos\theta)$ $\overline{AB} = 2c$

2.將$\overline{AC}$、$\overline{BC}$、$\overline{AB}$帶入周界點存在判別式

$$-2r^2+6r-3+2\sqrt{r(r-2)^3} > \cos^2\theta > -2r^2+6r-3-2\sqrt{r(r-2)^3}$$

藉由cosθ 的範圍限制，我們可以求出周界點的存在區間。

（四）空間中周界點的存在性探討

1. 平面中周界點可視爲兩單支雙曲線的解

2. 探討空間中的性質，將平面中單支雙曲線以貫軸爲轉軸做旋轉得單邊二葉雙曲面，若平面上無交點，則空間中的雙曲面亦無交點，故三角形在平面無周界點時，在空間中亦不存在。

3. 已知平面中一△ABC，及其周界點O，分別以A、B、C爲球心，$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$爲半徑做球。找一球半徑爲 t 使其與其他三球相切，則此球心與三頂點構成之三角形的周長仍符合周界點定義，推得此球的球心O’即爲空間中的周界點，因與三球相切的球可有無限多個，所以周界點在空間中的解爲一曲線。

陸、討論與展望

一、討論

(一)周界點的軌跡變動探討

1. 藉由 Geogebra 軌跡追蹤，我們得知周界點的軌跡圖形可藉由 r 的範圍來分類

令 $r = \dfrac{\text{周長}}{\text{固定邊}}$

（１） r ≧2.67，周界點的位置及軌跡不會超過 x 軸（臨界值，腰長：底長＝５：６）

（圖 ６－１）

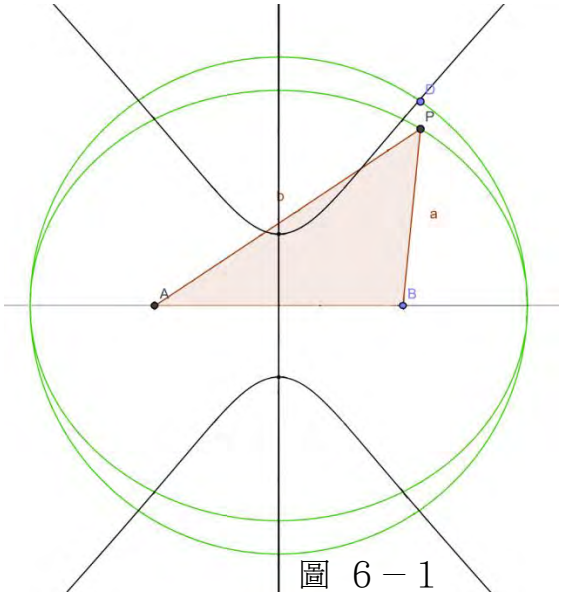

圖 ６－１

（２）2.67> r > 2.25，周界點的位置及軌跡會超過Ｘ軸（圖 ６－２）

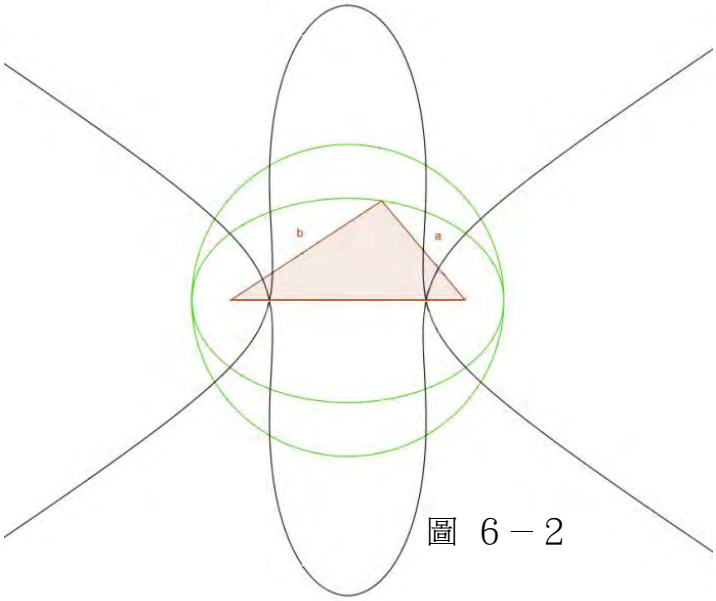

圖 ６－２

（３） r ＜2.25，周界點存在區間爲兩個不等式區間（圖 ６－３）

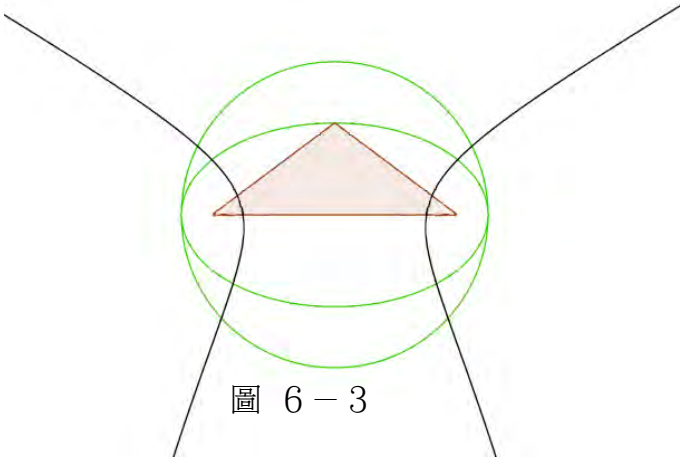

圖 ６－３

令周界點O座標爲（x,y），依周界點定義解聯立，可得其軌跡函數（圖 6－4）

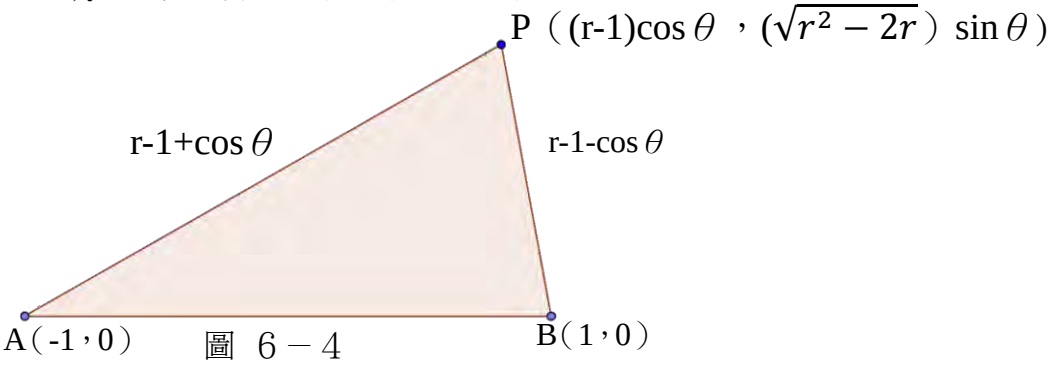

圖 6－4

推得下列的聯立方程式可代表周界點座標，但完整的軌跡函數仍待深入研究。

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+y^2}-\sqrt{(x+1)^2+y^2}=2\cos\theta \\ \sqrt{(x-1)^2+y^2}-\sqrt{[x-(r-1)\cos\theta]^2+\left[y-\left(\sqrt{r^2-2r}\right)\sin\theta\right]^2}=r-3+\cos\theta \end{cases}$$

二、展望

周界點可望在生活中提供多元的應用，諸如管線配置(自來水，瓦斯，電纜)、路徑規劃（地圖繪製等）、晶體電路、電阻…… ，而對於純數學的貢獻也有一定的潛力。未來也可望將三角形的周界點應用，進一步延伸至多邊形的探討、與費瑪點的位置關係或將研究範圍擴及三維，進而找出周界點在立體空間的性質。

柒、結論

△ABC 邊長爲 a 、b 、c

一、作圖方法：定義反演作圖

二、周界點存在判別式：

1.$\sqrt{a^2-(c-b)^2}+\sqrt{b^2-(c-a)^2} > \sqrt{c^2-(b-a)^2}$（c ≥ b ≥ a）

由上式可化簡爲：$\sqrt{\frac{1-\cos A}{a}}+\sqrt{\frac{1-\cos B}{b}}>\sqrt{\frac{1-\cos C}{c}}$（c ≥ b ≥ a）

2.可根據圖形判別式之兩邊之和大於第三邊，周界點即存在。

三、周界點位置：可由判別式判斷其位置關係

四、以橢圓對三角形作分類：

藉由 cosθ 的範圍限制，我們可以求出周界點的存在區間：

$$-2r^2+6r-3+2\sqrt{r(r-2)^3}>\cos^2\theta>-2r^2+6r-3-2\sqrt{r(r-2)^3} \quad \left(r=\frac{\text{周長}}{\text{固定邊}}\right)$$

五、空間中周界點的存在性探討

1.平面中周界點可視爲兩單支雙曲線的解，故在平面無周界點時，在空間中亦不存在。

2.在平面中周界點存在，在空間中的解爲一曲線或直線。

捌、參考資料

汪曉勤、張小明。**圓之吻:阿波羅尼斯問題的歷史**。數學傳播30卷2期，P.40-50

有心？無心？「形動」見真情--解開三角形的周心密碼。**第50屆中小學科學展覽會**。

國中組數學科第三名

形內與形外。**台灣2002年國際科學展覽會**。高中組數學科

左銓如、季素月。**初等幾何研究**。九章出版社。P.202-223。1998 年

楊維哲。**高中資優生的立體解析幾何學**。三民書局。P.165-234。1998 年

Felix Klein。**高觀點下的初等數學－第三卷**。九章出版社。P.141-143。1996 年

H.S.M.Coxeter、S.L.Gewitzer。**幾何學的新探索**。凡異出版社。P.117-131。1995 年

【評語】040416

1. 參考資料豐富，但沒有直接關係。

2. 若周界點要在有條件下才能成立，顯然不足與“五心”相提並論，所以“第六顆心”的題目不是那麼合適。

3. p12 $\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$ 不宜稱為臨界點。

4. 自創「接距」概念，再加檢討，精神可嘉。