# 中華民國第52屆中小學科學展覽會
# 作品說明書

---

高中組　數學科

**第三名**

040415

**驚奇的數**

學校名稱：國立臺灣師範大學附屬高級中學

| 作者： | 指導老師： |
| --- | --- |
| 高二 黃敏書 | 翁立衛 |
| 高二 謝昀佐 | 洪允東 |
| 高二 黃育賢 | |


關鍵詞：驚奇的數、Pell 方程式、p 邊形數

# 摘要

我們定義『驚奇的數』是指一個完全平方數$a^2$，其中$a \in N$，若$\sum_{n=1}^{a^2} n$，恰爲另一個完全平方數時，則稱$a^2$爲『驚奇的數』。本研究是找出哪些以驚奇的數爲邊長的三邊形數是平方數。將問題轉換成連續股的直角三角形問題後，發現：當$a_n^2$爲驚奇的數時，滿足二階遞迴式爲$a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$。本研究亦推廣上述結果，利用Pell方程式與矩陣計算來求哪些邊長的$p$邊形數亦同時爲四邊形數。處理方法分爲兩類：一類可以使用矩陣計算來討論，已討論出附帶方程式部分的初始解情形。另一類無法使用矩陣計算，利用因式分解的技巧處理，發現與切比雪夫多項式有著密切關係。

# 一、研究動機

數學專研時間，老師發下5~6題的題目，給我們寫十五分鐘。時間一到，立即研討，其中有一題是有關『驚奇的數』的問題，特別引起我們的注意，於是舉手向老師提問。老師說：「呵呵!其實，我是故意不讓大家一下子就算出來這一題的。」在老師的挑戰性問法下，我們便開始研究起這"驚奇的數"了。

我們使用參考文獻[1]的矩陣方法，與高二下學期第三章「矩陣」有相當的關聯性，這些雖然並不在高中課程內，但學習這些知識可以處理更廣泛的矩陣問題。

# 二、研究目的

1.找出所有驚奇的數，並以一般式及遞迴式表示。
2.探討哪些$p$邊形數亦同時爲四邊形數，並以一般式及遞迴式討論之。
3.探討切比雪夫多項式與我們研究的巧妙關係。

# 三、研究設備及器材

人、計算紙、筆、橡皮擦、電腦

# 四、研究過程或方法

## (一)預備知識

我們討論驚奇的數時，先將問題轉換爲連續股直角三角形的問題，再推導之；至於求出哪些邊長的$p$邊形數亦同時爲四邊形數，需使用 Pell 方程式的矩陣形式去討論之。

1. Pell 方程式:$x^2 - dy^2 = 1$，其中$d \in N$且$d$不爲平方數，求$x$、$y$的整數解。設$(x_m$，$y_m)$爲方程式的解，設其初始解爲$(x_1, y_1)$，則可以寫出下列矩陣形式:

$$\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}^{m-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

2. 連續股直角三角形的兩股分別爲$k, k+1$，且$k$爲非負整數，斜邊$\sqrt{2k^2+2k+1}$亦爲整數的情況。除了$k=0$之外，其餘爲$(3,4,5),(20,21,29),(119,120,169)\ldots$。

## (二)驚奇的數與連續股直角三角形的關係

### 1.驚奇的數$a_n^2$

定義：所謂驚奇的數是指一個完全平方數$a^2$其中$a \in N$，且$\sum_{n=1}^{a^2} n$恰爲另一個完全平方數$t^2$。

我們經過初步的計算後發現$1, 49$以及$1681$都是驚奇的數。又因爲驚奇的數是一個平方數，所以我們把驚奇的數之通式寫成$a_n^2$，其中$a_n \in N$，故得$a_1 = 1$、$a_2 = 7$、$a_3 = 41$。試著討論此數列的一般式：

$$\boxed{\frac{a^2(a^2+1)}{2} = t^2\text{，其中}a^2\text{爲驚奇的數，}t \in N\text{。}}$$

我一時不知從何下手，便開始窮舉。經過漫長的窮舉，我得到了$a_4 = 239$，此時我很興奮，看到了第四項，直覺告訴我有著一個遞迴關係，感覺後一項約等於前一項的6倍，接著就發現了一個二階遞迴的關係式:

$$\boxed{a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}}$$

根據此遞迴關係式，容易得到$a_5 = 1393$，此時我的$t_5 = 40391$，$a_6 = 8119$，此時$t_6 = 1372105$，感覺上這遞迴式似乎是對的，於是開始試著去證明它。

### 2.將問題轉換爲整數邊長的直角三角形連續股問題

定理 1：$a_n$必爲奇數的型式

[證明]

**當$a = 2k, k \in N$**，以之代入方程式，得到：$\frac{(4k^2)(4k^2+1)}{2} = t^2 = k^2(8k^2+2)$，由於$k \in N$，但因爲$k^2$、$t^2$皆爲平方數，故$8k^2+2$也就必須是一個平方數。但平方數除以 4 必定整除或餘 1，又$8k^2+2$除以4餘2，故不是一個平方數，所以**假設不真，矛盾，因此 $a$ 爲奇數之型式**。

問題：若$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$爲一數列使得$a^2$爲驚奇的數，則$a_n$的遞迴式爲何？

討論：因爲$a_n^2$爲驚奇的數，由定理 1 得知$a_n$必爲奇數。設$a_n = 2k_{n-1}+1$則因

$$\sum_{i=0}^{a_n} i = \frac{(4k_{n-1}^2+4k_{n-1}+1)(4k_{n-1}^2+4k_{n-1}+2)}{2} = (2k_{n-1}+1)^2(2k_{n-1}^2+2k_{n-1}+1) = t^2$$

故若設$t_{n-1} = ((t_{n-1})_1, (t_{n-1})_2, (t_{n-1})_3) = (k_{n-1}, k_{n-1}+1, \sqrt{2k_{n-1}^2+2k_{n-1}+1})$，則

$|(t_{n-1})_2 - (t_{n-1})_1| = 1$且$(t_{n-1})_1^2 + (t_{n-1})_2^2 = (t_{n-1})_3^2$

由此可知，若$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$數列使得$a^2$爲驚奇的數存在，則存在上述數列$t_{n-1}$，反之亦然。

我們列出前幾組的$k$, $k+1$, $\sqrt{2k^2+2k+1}$並檢查$\sqrt{2k^2+2k+1}$是否爲整數，收錄$\sqrt{2k^2+2k+1}$爲整數的$k$值，並計算$2k+1$之值，根據定義$(2k+1)^2$即爲所求。
將驚奇的數之前幾項及部分結果列之如【表 1】所示：

| $k$ | $k+1$ | $\sqrt{2k^2+2k+1}$ | 是否符合 | $a=2k+1$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 是 | 1 |
| 1 | 2 | $\sqrt{5}$ | 否 | |
| 2 | 3 | $\sqrt{13}$ | 否 | |
| 3 | 4 | 5 | 是 | 7 |
| 4 | 5 | $\sqrt{41}$ | 否 | |
| 5 | 6 | $\sqrt{61}$ | 否 | |
| 6 | 7 | $\sqrt{85}$ | 否 | |
| 7 | 8 | $\sqrt{113}$ | 否 | |
| … | … | … | 否 | |
| 20 | 21 | 29 | 是 | 41 |
| 119 | 120 | 169 | 是 | 239 |
| 696 | 697 | 985 | 是 | 1393 |
| 4059 | 4060 | 5741 | 是 | 8119 |
| 23660 | 23661 | 33461 | 是 | 47321 |

【表 1】

由之前的討論之假設：

$$a_n = 2k_{n-1}+1。$$

從幾何上來看，$k_n$是連續股之直角三角形中的短股，除了$k_0=0$外。

試著來證明，假設直角三角形三邊長爲$n^2-m^2$、$2mn$、$n^2+m^2$。根據窮舉的結果，$(m,n)$數對的前幾項爲(1,2)、(2,5)、(5,12)、(12、29)、(29,70)…$(m_i,n_i)$…，$i\in$ N我們觀察$(m_i,n_i)$有如下關係：

$$m_{i+2}=2m_{i+1}+m_i$$
$$n_i=m_{i+1}$$

因爲這是一個連續股的直角三角形，所以$(m,n)$數對可以列出一關係式

$$|2mn-(n^2-m^2)|=1$$

將上式的$n_i$代換成$m_{i+1}$，得$|2m_{i+1}m_i-(m_{i+1}^2-m_i^2)|=1$
定理 2：令$\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$爲一遞迴數列：$m_0=0$，$m_1=1$且$m_n=2m_{n-1}+m_{n-2}$，其中$n\geq 2$
則數列$t_i=((t_i)_1,(t_i)_2,(t_i)_3)=(m_{i+1}^2-m_i^2,2m_{i+1}m_i,m_{i+1}^2+m_i^2)$滿足$(t_i)_1^2+(t_i)_2^2=(t_i)_3^2$且

$$(t_i)_2-(t_i)_1=2m_{i+1}m_i-m_{i+1}^2-m_i^2=1，當i爲奇數$$
$$(t_i)_1-(t_i)_2=m_{i+1}^2-m_i^2-2m_{i+1}m_i=1，當i爲偶數$$

註：當$i\geq 1$，$t_i$代表連續股直角三角形的三邊長。
[證明]

我們使用數學歸納法。

當$i=0$，$t_0=(m_1^2-m_0^2,2m_1m_0,m_1^2+m_0^2)=(1,0,1)$

當$i=1$，$t_1=(m_2^2-m_1^2,2m_2m_1,m_2^2+m_1^2)=(3,4,5)$

當$i=2$，$t_2=(m_3^2-m_2^2,2m_2m_1,m_3^2+m_2^2)=(21,20,29)$

設$i=k$時成立，即$t_k=((t_k)_1,(t_k)_2,(t_k)_3)$代表連續股直角三角形的三邊長。

$$(t_k)_2-(t_k)_1=2m_{k+1}m_k-(m_{k+1}^2+m_k^2)=1\text{，當}k\text{爲奇數}$$

$$(t_k)_1-(t_k)_2=(m_{k+1}^2+m_k^2)-2m_{k+1}m_k=1\text{，當}k\text{爲偶數}$$

於是$t_{k+1}=((t_{k+1})_1,(t_{k+1})_2,(t_{k+1})_3)$代表三角形三邊長。則

$(m_{k+2}^2-m_{k+1}^2)-2m_{k+1}m_{k+2}$

$=[(2m_{k+1}+m_k)^2-m_{k+1}^2]-2(2m_{k+1}+m_k)m_{k+1}$

$=(4m_{k+1}^2+4m_{k+1}m_k+m_k^2-m_{k+1}^2)-4m_{k+1}^2-2m_{k+1}m_k$

$=2m_{k+1}m_k-(m_{k+1}^2-m_k^2)$

所以我們推得：

當$k+1$爲奇數

$$(t_{k+1})_2-(t_{k+1})_1=2m_{k+2}m_{k+1}-(m_{k+2}^2-m_{k+1}^2)=(m_{k+1}^2+m_k^2)-2m_{k+1}m_k=1$$

當$k+1$爲偶數

$$(t_{k+1})_1-(t_{k+1})_2=(m_{k+2}^2-m_{k+1}^2)-2m_{k+2}m_{k+1}=2m_{k+1}m_k-(m_{k+1}^2+m_k^2)=1$$

也就是$i=k+1$成立

由數學歸納法知，原命題成立。

因此我們可以求得$\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$的一般式

$$\boxed{m_i=\frac{\sqrt{2}}{4}[(1+\sqrt{2})^i-(1-\sqrt{2})^i]}$$

則$\{k_i\}_{i=0}^{\infty}$：

$$k_i=\begin{cases}(t_i)_2=2m_{i+1}m_i\text{，當}i\text{爲偶數}\\(t_i)_1=m_{i+1}^2-m_i^2\text{，當}i\text{爲奇數}\end{cases}$$

可以求得

$$\boxed{k_i=\frac{1}{4}\left[(1+\sqrt{2})^{2i+1}+(1-\sqrt{2})^{2i+1}-2\right]}$$

又因爲$a_n=2k_{n-1}+1$，推得

$$\boxed{a_n=\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{2n-1}+(1-\sqrt{2})^{2n-1}\right]}$$

計算$6a_{n-1}-a_{n-2}$可得$a_n$，也就是

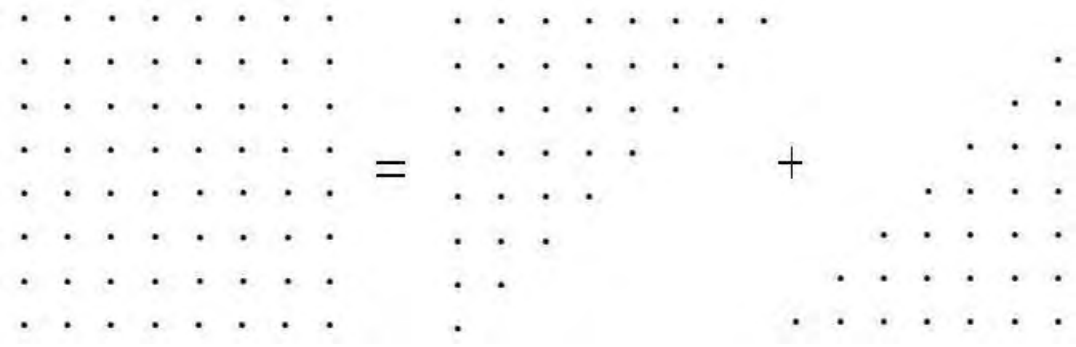
$$a_n=6a_{n-1}-a_{n-2}$$

符合原來的猜測。

### (三)$\frac{n(n-1)}{2}$數列與驚奇的數的關係

原先的研究主題是探討哪些邊長的三邊形數$\frac{n(n+1)}{2}$亦同時爲四邊形數。現將三邊形數

$\frac{n(n+1)}{2}$改成數學意義等價的$\frac{n(n-1)}{2}$，探討滿足$\frac{n(n-1)}{2}$的數是否亦同時爲四邊形數。而$\frac{n(n-1)}{2}$的幾何意義是一個四邊形數減掉一個邊長相等的三邊形數，如下圖:



因爲$p$邊形數的一般式爲$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$，其中$p\geq 3$，3 邊形數的一般式、4 邊形數的一般式、5 邊形數的一般式、…、$p$邊形數的一般式之間成等差數列，數列的首項 3 邊形數的一般式爲$\frac{n(n+1)}{2}$，數列的公差爲$\frac{n(n-1)}{2}$，於是**把$\frac{n(n-1)}{2}=u^2$，以 $b^2$ 代入$n$，得$\frac{b^2(b^2-1)}{2}=u^2$**。化簡得關係式:

$$\boxed{b^2-2\left(\frac{u}{b}\right)^2=1}$$

顯然這是 Pell 方程式$x^2-dy^2=1$的形式，將$b^2$、$\frac{u^2}{b}$分別以$x^2$、$y^2$簡化之。初始解$(x_1,y_1)=(3,2)$，它可以寫成一矩陣的形式:

$$\begin{bmatrix}x_m\\y_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & dy_1\\y_1 & x_1\end{bmatrix}^{m-1}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$$

也就是

$$\begin{bmatrix}x_m\\y_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 4\\2 & 3\end{bmatrix}^{m-1}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$

可以馬上得到$(x_2,y_2)$、$(x_3,y_3)$分別是$(17,12)$、$(99,70)$，這組數據和驚奇的數的數據有著非常密切的關係，列於【表 2】如下:

| n | $a$(當邊長爲$a^2$的三邊形數亦爲四邊形數時) | $b$(符合$\frac{b^2(b^2-1)}{2}=u^2$，$b,u\in N$) |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 |
| 2 | 7 | 17 |
| 3 | 41 | 99 |
| 4 | 239 | 577 |
| 5 | 1393 | 3363 |

【表 2】

我們從【表 2】觀察出以下幾個性質：

1. 將【表 2】中的$a$(當邊長爲$a^2$的三邊形數亦爲四邊形數時)所構成的數列：1,7,41,239,1393…，

依序將其相鄰兩項之差再除以 2 可得：$3(\because \frac{7-1}{2}=3)$、$17\ (\because \frac{41-7}{2}=17)$，恰爲$b$(符合$\frac{b^2(b^2-1)}{2}=u^2$，$b,u\in N$)所構成的數列：$3,17,99,577,3363\cdots$。

同樣地，將$b$(符合$\frac{b^2(b^2-1)}{2}=u^2$，$b,u\in N$)所構成的數列：$3,17,99,577,3363\cdots$將其相鄰兩項之差再除以 2 可得:$7(\because \frac{17-3}{2}=7)$、$41(\because \frac{99-17}{2}=41)$，恰爲$a$(當邊長爲$a^2$的三邊形數亦爲四邊形數時)所構成的數列：$1,7,41,239,1393\cdots$。

2. $b$(符合$\frac{b^2(b^2-1)}{2}=u^2$，$b,u\in N$)所構成的數列：$3,17,99,577,3363\cdots$，發現$3=2^2-1$，$17=4^2+1$，$99=10^2-1$，$577=24^2+1$，$3363=58^2-1$，數值始終是平方數$\pm1$。

## (四)從三邊形數推廣爲$p$邊形數

### 1. 當$p=6$時，與驚奇的數之關係

之前求哪些邊長爲平方數的三邊形數亦爲四邊形數。那我想推廣變成求哪些邊長爲平方數的$p$邊形數亦爲一四邊形數。則$p$邊形數的一般式爲$\frac{n(n+1)}{2}+(p-3)\frac{n(n-1)}{2}=\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$。

此時假設$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n=t^2$，將$n=a^2,a\in N$代入可得:$(p-2)a^2+(4-p)=2(\frac{t}{a})^2$，移項可得到：

$$\boxed{(p-2)a^2-2\left(\frac{t}{a}\right)^2=p-4，}$$

看出這是一個$px^2-qy^2=r,\ p,q\in N,r\in Z$的形式。爲了處理$px^2-qy^2=r$這種情形，我們從網路上查到一份有關 Pell 方程式的資料(參考文獻[1])。

引理 1：矩陣方法

將 Pell 方程式推廣爲$px^2-qy^2=r,\ p,q\in N,r\in Z$的形式。先求出**主方程式**:$px^2-qy^2=r$的初始解$(x_1,y_1)$，然後再求出**附帶方程式**:$x^2-pqy^2=1$的初始解$(x_0,y_0)$，根據其文章一系列循序漸進的論證過程，我們可證得$x_m,y_m$可表爲下列形式:

$$\boxed{\begin{bmatrix}x_m\\y_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0 & qy_0\\py_0 & x_0\end{bmatrix}^{m-1}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}}$$

因此可以使用這個公式解決**主方程式**:$(p-2)a^2-2\left(\frac{t}{a}\right)^2=p-4$的問題，也就是求出哪些邊長爲$a^2$的$p$邊形數亦爲四邊形數的問題。

我們可以利用矩陣討論驚奇的數，也就是將$p=3$代入**主方程式**得到$a^2-2\left(\frac{t}{a}\right)^2=-1$，將a、$\frac{t}{a}$分別以x、y代換得$x^2-2y^2=-1$，由**主方程式**：$x^2-2y^2=-1$得到初始解

$(x_1, y_1) = (1,1)$，再求出附帶方程式$x^2 - 2y^2 = 1$的初始解$(x_0, y_0)$=(3,2)，可推得$x_2 = 7$、$x_3 = 41\ldots$，跟之前以連續股的直角三角形所推導出來的結果殊途同歸，再次驗證我們的結果是正確的。我們接著研究哪些邊長爲$c^2$的六邊形數亦爲邊長爲$v$的四邊形數，因爲六邊形數和三邊形數有密切的關係。代入$p = 6$可得方程$2c^2 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1$，同乘負號可得:

$$\boxed{(\frac{v}{c})^2 - 2c^2 = -1}$$

一樣可以化爲$x^2 - 2y^2 = -1$的形式，顯然數對$(a, \frac{t}{a})$的所有整數解與數對$\left(\frac{v}{c}, c\right)$的所有整數解恰吻合，皆爲(1,1)、(7,5)、(41,29)、(239,169)…，容易看出$c_n = 1,5,29,169\ldots$，其遞迴式爲：$c_{n+2} = 6c_{n+1} - c_n$，它和$a_n$有一樣的遞迴式。

## 2.研究$p$邊形數亦爲四邊形數的問題分類

流程圖的解釋如下：

初步將$p$邊形數亦爲四邊形數的問題分爲兩部分：一是**矩陣可以解的；二是矩陣無法解的。**

**(1)矩陣可以解的(當$2(p-2)$不是平方數時)**

根據矩陣計算，若想要求出**主方程式**:$(p-2)a^2 - 2\left(\frac{t}{a}\right)^2 = p - 4$的通解，我們要先討論出**附帶方程式**:$a^2 - 2(p-2)\left(\frac{t}{a}\right)^2 = 1$的初始解。

1. **當$p$爲偶數**，**主方程式**:$(p-2)a^2 - 2\left(\frac{t}{a}\right)^2 = p - 4$可同除以 2，即化爲$\left(\frac{p-2}{2}\right)a^2 - \left(\frac{t}{a}\right)^2 = \frac{p-4}{2}$

時，所以由矩陣公式，得**附帶方程式**:$a^2-\left(\frac{p-2}{2}\right)\left(\frac{t}{a}\right)^2=1$。

2. **當$p$爲奇數，主方程式**:$(p-2)a^2-2\left(\frac{t}{a}\right)^2=p-4$，所以由矩陣公式，得**附帶方程式**:$a^2-2(p-2)\left(\frac{t}{a}\right)^2=1$。

假設$p$爲奇數時且附帶方程式無解，這也就是$2(p-2)$爲平方數。因爲$2(p-2)$是平方數，所以$p-2$必爲偶數，也就是$p$爲偶數。但是這假設矛盾，所以附帶方程式無解的情況只會發生在$p$爲偶數，這也就是爲什麼我們上面的流程圖會先將$p$邊形數亦爲四邊形數的問題先分$p$爲奇數與偶數，再將$p$爲偶數的情況分爲可以使用矩陣解以及無法使用矩陣解的情形。

由於，不論奇數或偶數的情況下，所需討論的方程式皆可表示爲$a^2-r\left(\frac{t}{a}\right)^2=1$的形式，分別令$r=\frac{p-2}{2}$或 $2(p-2)$。因爲以$r$來討論此方程式的初始解會比較方便，以下就是我們所掌握的$r$值與初始解的關係，列【表 3】如下：

| 方程式$a^2-r\left(\frac{t}{a}\right)^2=1$ 的初始解： | |
|---|---|
| **當$r=\lambda^2-1$時** | **初始解$\left(a,\frac{t}{a}\right)=(\lambda,1)$** |
| **當$r=\lambda(\lambda+1)$時** | **初始解$\left(a,\frac{t}{a}\right)=(2\lambda+1,2)$** |
| **當$r=\lambda^2-2$時** | **初始解$\left(a,\frac{t}{a}\right)=(\lambda^2-1,\lambda)$** |
| **當$r=\lambda^2+2$時** | **初始解$\left(a,\frac{t}{a}\right)=(\lambda^2+1,\lambda)$** |
| **當$r=k^2\lambda^2\pm\lambda$時** | **初始解$\left(a,\frac{t}{a}\right)=(2k^2\lambda\pm1,2k)$** |
| **當$r=k^2\lambda^2\pm2\lambda$時** | **初始解$\left(a,\frac{t}{a}\right)=(k^2\lambda\pm1,k)$** |

【表 3】

以證明當$r=k^2\lambda^2\pm2\lambda$爲例：
方程式$(k^2\lambda\pm1)^2-(k^2\lambda^2\pm2\lambda)(k)^2=1$ 恆成立

**(2)矩陣無法解的**

**當$\frac{p-2}{2}$爲平方數**時，則$a^2-\left(\frac{p-2}{2}\right)\left(\frac{t}{a}\right)^2=1$，**無解**，所以我們**不能以上述的矩陣公式去計算之**。因此，我們回歸到原來的問題$\left(\frac{p-2}{2}\right)a^2-\left(\frac{t}{a}\right)^2=\frac{p-4}{2}$，此時我們可以假設$\frac{p-2}{2}=k^2$，代

入原式可得

$$k^2a^2-\left(\frac{t}{a}\right)^2=k^2-1，$$

爲方便討論，將$(\boldsymbol{a},\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{a}})$**以**$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$**取代**，並以$k$值來討論，數對$(a,\frac{t}{a})$的所有正整數解。即是求方程式$k^2x^2-y^2=k^2-1$的解。隨著 k 值逐一討論，發現：

(1)當$k$爲任意正整數時，$(x,y)=(1,1)$爲解；

(2)當$k=2x$，$(x,y)=(x,2x^2-1)$，爲方程式的解；

(3)當$k=4x^2-1$，$(x,y)=(x,4x^3-3x)$爲方程式的解；

(4)當$k=8x^3-4x$，$(x,y)=(x,8x^4-8x^2+1)$爲方程式的解。

我們發現：$(x,y)=(1,1)$爲共同的解，稱爲第一鏈；當$k=2x$時，$(x,y)=(x,2x^2-1)$都會成爲方程式的解，稱之第二鏈；當$k=4x^2-1$，也就是$k=15,35,63,99$時，$(x,4x^3-3x)$會成爲方程式的解，這一部分，稱之爲第三鏈，以此類推，以**第$\boldsymbol{n}$鏈**來稱呼同一系列、符合相同關係的$(x,y)$。把這些結果列於【表 4】：

| p | k | 第一鏈 | 第二鏈 | 第三鏈 | 第四鏈 | p | k | 第一鏈 | 第二鏈 | 第三鏈 | 第四鏈 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 2 | (1_1) | | | | 1802 | 30 | (1_1) | (15_449) | | |
| 20 | 3 | (1_1) | | | | 1924 | 31 | (1_1) | | | |
| 34 | 4 | (1_1) | (2_7) | | | 2050 | 32 | (1_1) | (16_511) | | |
| 52 | 5 | (1_1) | | | | 2180 | 33 | (1_1) | | | |
| 74 | 6 | (1_1) | (3_17) | | | 2314 | 34 | (1_1) | (17_577) | | |
| 100 | 7 | (1_1) | | | | 2452 | 35 | (1_1) | | (3_99) | |
| 130 | 8 | (1_1) | (4_31) | | | 2594 | 36 | (1_1) | (18_647) | | |
| 164 | 9 | (1_1) | | | | 2740 | 37 | (1_1) | | | |
| 202 | 10 | (1_1) | (5_49) | | | 2890 | 38 | (1_1) | (19_721) | | |
| 244 | 11 | (1_1) | | | | 3044 | 39 | (1_1) | | | |
| 290 | 12 | (1_1) | (6_71) | | | 3202 | 40 | (1_1) | (20_799) | | |
| 340 | 13 | (1_1) | | | | 3364 | 41 | (1_1) | | | |
| 394 | 14 | (1_1) | (7_97) | | | 3530 | 42 | (1_1) | (21_881) | | |
| 452 | 15 | (1_1) | | (2_26) | | 3700 | 43 | (1_1) | | | |
| 514 | 16 | (1_1) | (8_127) | | | 3874 | 44 | (1_1) | (22_967) | | |
| 580 | 17 | (1_1) | | | | 4052 | 45 | (1_1) | | | |
| 650 | 18 | (1_1) | (9_161) | | | 4234 | 46 | (1_1) | (23_1057) | | |
| 724 | 19 | (1_1) | | | | 4420 | 47 | (1_1) | | | |
| 802 | 20 | (1_1) | (10_199) | | | 4610 | 48 | (1_1) | (24_1151) | | |
| 884 | 21 | (1_1) | | | | 4804 | 49 | (1_1) | | | |
| 970 | 22 | (1_1) | (11_241) | | | 5002 | 50 | (1_1) | (25_1249) | | |
| 1060 | 23 | (1_1) | | | | 5204 | 51 | (1_1) | | | |
| 1154 | 24 | (1_1) | (12_287) | | | 5410 | 52 | (1_1) | (26_1351) | | |
| 1252 | 25 | (1_1) | | | | 5620 | 53 | (1_1) | | | |
| 1354 | 26 | (1_1) | (13_337) | | | 5834 | 54 | (1_1) | (27_1457) | | |
| 1460 | 27 | (1_1) | | | | 6052 | 55 | (1_1) | | | |
| 1570 | 28 | (1_1) | (14_391) | | | 6274 | 56 | (1_1) | (28_1567) | | (2_97) |
| 1684 | 29 | (1_1) | | | | 6500 | 57 | (1_1) | | | |

【表 4】

繼續向前推進，列出更多鏈的關係，整理出【表 5】，如下所示：

| | 第一鏈 | | 第二鏈 | | 第三鏈 | | 第四鏈 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| k | ( x , y ) | k | ( x , y ) | k | ( x , y ) | k | ( x , y ) |
| x | 1 , 1 | 2x | $(x, 2x^2-1)$ | $4x^2-1$ | $(x, 4x^3-3x)$ | $8x^3-4x$ | $(x, 8x^4-8x^2+1)$ |
| 2 | 1 , 1 | 4 | 2 , 7 | 15 | 2 , 26 | 56 | 2 , 97 |
| 3 | 1 , 1 | 6 | 3 , 17 | 35 | 3 , 99 | 204 | 3 , 577 |
| 4 | 1 , 1 | 8 | 4 , 31 | 63 | 4 , 244 | 496 | 4 , 921 |
| 5 | 1 , 1 | 10 | 5 , 49 | 99 | 5 , 485 | 980 | 5 , 4801 |
| 6 | 1 , 1 | 12 | 6 , 71 | 143 | 6 , 846 | 1704 | 6 , 10081 |
| 7 | 1 , 1 | 14 | 7 , 97 | 195 | 7 , 1351 | 2716 | 7 , 18817 |
| 8 | 1 , 1 | 16 | 8 , 127 | 255 | 8 , 2024 | 4064 | 8 , 32257 |
| 9 | 1 , 1 | 18 | 9 , 161 | 323 | 9 , 2889 | 5796 | 9 , 51841 |
| 10 | 1 , 1 | 20 | 10 , 199 | 399 | 10 , 3970 | 7960 | 10 , 79201 |
| 11 | 1 , 1 | 22 | 11 , 241 | 483 | 11 , 5291 | 10604 | 11 , 116161 |
| 12 | 1 , 1 | 24 | 12 , 287 | 575 | 12 , 6876 | 13776 | 12 , 164737 |
| 13 | 1 , 1 | 26 | 13 , 337 | 675 | 13 , 8749 | 17524 | 13 , 227137 |
| | | | | | | | |
| | 第五鏈 | | 第六鏈 | | 第七鏈 | | 第八鏈 |
| k | ( x , y ) | k | ( x , y ) | k | ( x , y ) | k | ( x , y ) |
| $16x^4-12x^2+1$ | $(x, 16x^5-20x^3+5x)$ | $32x^5-32x^3+6x$ | $(x, 32x^6-48x^4-18x^2-1)$ | $64x^6-80x^4+24x^2-1$ | $(x, 64x^7-112x^5+56x^3-7x)$ | $128x^7-192x^5+80x^3-8x$ | $(x, 128x^8-256x^6+160x^4-32x^2+1)$ |
| 209 | 2 , 362 | 780 | 2 , 1351 | 2911 | 2 , 5042 | 10864 | 2 , 18817 |
| 1189 | 3 , 3363 | 6930 | 3 , 19601 | | | | |
| 3905 | 4 , 15124 | | | | | | |
| 9701 | 5 , 47525 | | | | | | |

【表 5】

1. 由【表 5】可以針對$k$與$(x,y)$的關係整理出【表 6】如下：

| 第$n$鏈 | $k$ | $(x,y)$ | 舉例 |
|---|---|---|---|
| 第一鏈 | $x$ | (1,1) | (1,1),(1,1),(1,1) |
| 第二鏈 | $2x$ | $(x, 2x^2-1)$ | (2,7),(3,17),(4,31) |
| 第三鏈 | $4x^2-1$ | $(x, 4x^3-3x)$ | (2,26),(3,99),(4,244) |
| 第四鏈 | $8x^3-4x$ | $(x, 8x^4-8x^2+1)$ | (2,97),(3,577) |
| 第五鏈 | $16x^4-12x^2+1$ | $(x, 16x^5-20x^3+5x)$ | (2,362),(3,3363) |
| 第六鏈 | $32x^5-32x^3+6x$ | $(x, 32x^6-48x^4-18x^2-1)$ | (2,1351),(3,19601) |
| 第七鏈 | $64x^6-80x^4+24x^2-1$ | $(x, 64x^7-112x^5+56x^3-7x)$ | (2,5042) |
| 第八鏈 | $128x^7-192x^5+80x^3-8$ | $(x, 128x^8-256x^6+160x^4-32x^2+1)$ | (2,18817) |

【表 6】

求解主方程式$k^2x^2-y^2=k^2-1$時，嘗試以因式分解的方法，求出$x$,$y$的解，我們把$k$,$x$,$y$的關係列之如表，經市賽的口試教授及指導老師的提點後。查閱文獻[6][7]知：方程式$k^2x^2-y^2=k^2-1$的解$y$與$k$分別爲第一類及第二類切比雪夫多項式。

**第一類切比雪夫多項式：$T_0=1$，$T_1=x$，$T_{n+2}(x)=2xT_{n+1}(x)-T_n(x)$**

**第二類切比雪夫多項式：$U_0=1$，$U_1=2x$，$U_{n+2}(x)=2xU_{n+1}(x)-U_n(x)$**

並以 Pell 方程式定義切比雪夫多項式：$T_n^2-(x^2-1)U_{n-1}^2=1$

經過移項可得：$U_{n-1}^2x^2-T_n^2=U_{n-1}^2-1$

恰與主方程式： $k^2x^2-y^2=k^2-1$

發現$k$對應著$U_{n-1}$，$y$對應著$T_n$，也就是$U_{n-1}$爲$k$的解，$T_n$爲$y$的解。

### 3.初步結果的呈現

$p$邊形數亦爲四邊形數的方程式可化簡爲$(p-2)a^2-2\left(\frac{t}{a}\right)^2=p-4$(A 式)，觀察係數後可以得到$(x_1,y_1)=(1,1)$。因此可將上述(A 式)代換爲$(p-2)x^2-2y^2=p-4$。根據之前的求法要求出方程式$x^2-2(p-2)y^2=1$ (B 式)的初始解，逐一檢查出$p=3\sim50$的情況。以下爲三邊形數到五十邊形數的簡表【表 7】整理，以下爲$a$值與遞迴式的關係：

| $p$ | 主方程式 | $a$值 | 遞迴式 |
|---|---|---|---|
| 3 | $x^2-2y^2=-1$ | -7,-1,1,7,41,239 | $a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$ |
| 4 | $x^2-y^2=0$ | -2,-1,0,1,2,3,4,5 | $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$ |
| 5 | $3x^2-2y^2=1$ | 89,9,1,1,9,89,881 | $a_{n+2}=10a_{n+1}-a_n$ |
| 6 | $2x^2-y^2=1$ | 5,1,1,5,29,169 | $a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$ |
| 7 | $5x^2-2y^2=3$ | 265,7,1,31,1177 | $a_{n+2}=38a_{n+1}-a_n$ |
| 8 | $3x^2-y^2=2$ | 3,1,1,3,11,41 | $a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$ |
| 9 | $7x^2-2y^2=5$ | 209,7,1,23,689 | $a_{n+2}=30a_{n+1}-a_n$ |
| 10 | $4x^2-y^2=3$ | 1 | |
| 11 | $9x^2-2y^2=7$ | 305,9,1,25,849 | $a_{n+2}=34a_{n+1}-a_n$ |
| 12 | $5x^2-y^2=4$ | 89,5,1,13,233<br>34,2,2,34,610,10946 | $a_{n+2}=18a_{n+1}-a_n$ |
| 13 | $11x^2-2y^2=9$ | 44521,113,1,281,110713<br>3537,9,9,3537 | $a_{n+2}=394a_{n+1}-a_n$ |
| 14 | $6x^2-y^2=5$ | 29,3,1,7,69 | $a_{n+2}=10a_{n+1}-a_n$ |
| 15 | $13x^2-2y^2=11$ | 3161,31,1,71,7241 | $a_{n+2}=102a_{n+1}-a_n$ |
| 16 | $7x^2-y^2=6$ | 79,5,1,11,175 | $a_{n+2}=16a_{n+1}-a_n$ |
| 17 | $15x^2-2y^2=13$ | 153,7,1,15,329 | $a_{n+2}=22a_{n+1}-a_n$ |
| 18 | $8x^2-y^2=7$ | 64,11,2,1,4,23,134 | $a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$ |
| 19 | $17x^2-2y^2=15$ | 1609,23,1,47,3289 | $a_{n+2}=70a_{n+1}-a_n$ |
| 20 | $9x^2-y^2=8$ | 1 | |
| 21 | $19x^2-2y^2=17$ | 1849,25,1,49,3625 | $a_{n+2}=74a_{n+1}-a_n$ |
| 22 | $10x^2-y^2=9$ | 18721,493,13,1,25,949,36037<br>3,111,4215,160059 | $a_{n+2}=38a_{n+1}-a_n$ |
| 23 | $21x^2-2y^2=19$ | 6049,233,9,1,17,441,11449 | $a_{n+2}=26a_{n+1}-a_n$ |
| 24 | $11x^2-y^2=10$ | 2773,139,7.1,13,259,5167 | $a_{n+2}=20a_{n+1}-a_n$ |
| 25 | $23x^2-2y^2=21$ | 17159,1,31511<br>13189529,271,41,1995199 | $a_{n+2}=48670a_{n+1}-a_n$ |
| 26 | $12x^2-y^2=11$ | 961,69,5,1,9,125,1741 | $a_{n+2}=14a_{n+1}-a_n$ |
| 27 | $25x^2-2y^2=23$ | 14057,71,1,127,25145 | $a_{n+2}=198a_{n+1}-a_n$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 28 | $13x^2 - y^2 = 12$ | 469,1,829<br>98644,76,4,5116<br>55807,43,7,9043 | $a_{n+2} = 1298a_{n+1} - a_n$ |
| 29 | $27x^2 - 2y^2 = 25$ | 342409,353,1,617<br>14535,15,15,14535 | $a_{n+2} = 970a_{n+1} - a_n$ |
| 30 | $14x^2 - y^2 = 13$ | 9859,329,11,1,19,569,17051 | $a_{n+2} = 30a_{n+1} - a_n$ |
| 31 | $29x^2 - 2y^2 = 27$ | 14455,1,24751<br>609,15,587481 | $a_{n+2} = 39206a_{n+1} - a_n$ |
| 32 | $15x^2 - y^2 = 14$ | 1425,181,23,3,1,5,39,307,2417 | $a_{n+2} = 8a_{n+1} - a_n$ |
| 33 | $31x^2 - 2y^2 = 29$ | 745999,5921,47,1,79,9953,1253999 | $a_{n+2} = 126a_{n+1} - a_n$ |
| 34 | $16x^2 - y^2 = 15$ | 1,2 | |
| 35 | $33x^2 - 2y^2 = 31$ | 827961,6369,49,1,81,10529,1368689 | $a_{n+2} = 130a_{n+1} - a_n$ |
| 36 | $17x^2 - y^2 = 16$ | 108809,1649,25,1,41,2705,178489<br>4,260,17156 | $a_{n+2} = 66a_{n+1} - a_n$ |
| 37 | $35x^2 - 2y^2 = 33$ | 95881,191,1,311,156121<br>8527,17,7,3497,1755487 | $a_{n+2} = 502a_{n+1} - a_n$ |
| 38 | $18x^2 - y^2 = 17$ | 14981,441,13,1,21,713,24221 | $a_{n+2} = 34a_{n+1} - a_n$ |
| 39 | $37x^2 - 2y^2 = 35$ | 2839,1,4559<br>761977,103,17,125663 | $a_{n+2} = 7398a_{n+1} - a_n$ |
| 40 | $19x^2 - y^2 = 18$ | 44539,1,71059<br>3051,9,1037331<br>209,131,15143129 | $a_{n+2} = 115598a_{n+1} - a_n$ |
| 41 | $39x^2 - 2y^2 = 37$ | 460529,4345,41,1,65,6889,730169 | $a_{n+2} = 106a_{n+1} - a_n$ |
| 42 | $20x^2 - y^2 = 19$ | 40249,2243,125,7,1,11,197,3535,63433 | $a_{n+2} = 18a_{n+1} - a_n$ |
| 43 | $41x^2 - 2y^2 = 39$ | 41401,127,1,199,64873 | $a_{n+2} = 326a_{n+1} - a_n$ |
| 44 | $21x^2 - y^2 = 20$ | 4729,43,1, 67,7369<br>1538,14,2,206,22658<br>987,9,3,321,35307 | $a_{n+2} = 110a_{n+1} - a_n$ |
| 45 | $43x^2 - 2y^2 = 41$ | 8161,1,12649 | $a_{n+2} = 20810a_{n+1} - a_n$ |
| 46 | $22x^2 - y^2 = 21$ | 61069,155,1,239,94165<br>7481,19,5,1951 | $a_{n+2} = 394a_{n+1} - a_n$ |
| 47 | $45x^2 - 2y^2 = 43$ | 820497,21607,569,15,1,23,873,33151 | $a_{n+2} = 38a_{n+1} - a_n$ |
| 48 | $23x^2 - y^2 = 22$ | 43709,911,19,1,29,1391,66739 | $a_{n+2} = 48a_{n+1} - a_n$ |
| 49 | $47x^2 - 2y^2 = 45$ | 1701167,1,2585423<br>26313,39,167150697<br>2521,407,1744639609 | $a_{n+2} = 4286590a_{n+1} - a_n$ |
| 50 | $24x^2 - y^2 = 23$ | 37824,3821,386,39,4,1,6,59,584,5781 | $a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n$ |

【表 7】

備註:【表 7】中之$x$、$y$分別表a、$\frac{t}{a}$。

當$p=12,28,44$時，可以將多條遞迴式合併成一條新的遞迴式。

## 4.數據的歸納與整理、漏解問題

**以 7 邊形數爲例：由矩陣計算可求出 a 值 1 的下一項爲 31，繼續推得下一項爲 1177**。但是無意間將 1、31 分別代回遞迴式$a_{n+2}=38a_{n+1}-a_n$的$a_1$、$a_2$，卻求得$a_0=7$，依照此方法，將 7、1 分別反代回遞迴式$a_{n+2}=38a_{n+1}-a_n$的$a_0$、$a_1$，求得$a_{-1}=265$，如此一來會產生新數列，顯示先前所疏漏的解。

我們發現$a$值數列有五個類型：

**(1)**僅有**有限個數解**，(如【**表 7**】淡紫色部分)，$p=10,20,34,52$)，這是由於方程式

$x^2-(\frac{p-2}{2})y^2=1$的$y^2$係數$\frac{p-2}{2}$爲平方數，沒有實數解，因此$a_n$就無法寫成遞迴形式。

**(2)**逆推的數列呈會**絕對值相等但爲負號的數**(如【**表 7**】淺綠色部分)；

**(3)**逆推的數列呈會**等值的數**(如【**表 7**】淺黃色部分)；

**(4)**逆推的數列呈會**出現異於前述數列的值(如【表 7】**淺藍色部分)；

**(5)利用窮舉與手算，發現有遺漏的解**，(如【**表 7**】部分，p=12,13)。

說明如下：

如$p=3$時的，$a$值 1 由矩陣計算可以求出下一項是 7，1、7 分別反代入由矩陣所推得的遞迴式$a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$的$a_1$、$a_2$，可求得$a_0=-1$，卻和$a_1=1$差一個負號；繼續推出$a_{-1}=7$卻和$a_2$差一個負號，這一部分以綠色的底色表示。

有些數列反代後會呈現等值的數列，如 6 邊形數$a$值 1 由矩陣計算可以求出下一項是 5，由 1、5 分別反代回遞迴式$a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$的$a_1$、$a_2$，可求得$a_0=1$，$a_{-1}=5$恰與$a_1$、$a_2$，這一部分以黃色的底色表示。

除此之外，有一部分反代回遞迴關係式，會得到新的數列，如前述的 7 邊形數，反代後所呈現的新數列(以前兩項爲例)：$a_0=7$、$a_{-1}=265$並未出現在原來的數列中，代回原方程式檢查，發現這些新數列亦爲方程式的解，這表示「反代」的方式產生新的解，這顯示「反代」是有意義的，值得我們後續探討；這一部分以淺藍色底色表示。

我們依照矩陣的公式去討論 13 邊形數的情形時，發現其$(x_0,y_0)$遠大於其他邊形數的$(x_0,y_0)$，13 邊形數的$(x_0,y_0)=(197,42)$，代入矩陣公式可推得其遞迴式$a_{n+2}=394a_{n+1}-a_n$，由於$a_{n+1}$的係數異常的大，好奇心的驅使我去驗證此遞迴式是否涵蓋了所有的解。由矩陣公式可得到$(x_1,y_1)=(1,1)$，$(x_2,y_2)=(281,659)$，於是從 1 窮舉，尋找有沒有遺漏掉的解，神奇的是發現了$(x_2',y_2')=(9,21)$，然後將$(x_2',y_2')$代入矩陣公式得到$(x_3',y_3')=(3537,8295)$，在這邊我們可以將 13 邊形數的情形視爲有 2 組初始解(1,1)、(9,21)，一遞迴式$a_{n+2}=394a_{n+1}-a_n$，造出兩條數列，這一部分稱爲第五類型。

## 5.遞迴式係數的推導

我們試著歸納$p$邊形數$a_n$的一般式，所以需要先求初始解$(x_0,y_0)$。以下爲$p$邊形數$(x_0,y_0)$及遞迴式的簡表【表 8】，強調$(x_0,y_0)$與遞迴式係數的關係:

| 邊形數 | $x_0$ | $y_0$ | 遞迴式 |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 2 | $a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$ |
| 4 | 1 | 1 | $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$ |
| 5 | 5 | 2 | $a_{n+2}=10a_{n+1}-a_n$ |
| 6 | 3 | 2 | $a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$ |
| 7 | 19 | 6 | $a_{n+2}=38a_{n+1}-a_n$ |
| 8 | 2 | 1 | $a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$ |
| 9 | 15 | 4 | $a_{n+2}=30a_{n+1}-a_n$ |
| 10 | 1 | 1 | |
| 11 | 17 | 4 | $a_{n+2}=34a_{n+1}-a_n$ |
| 12 | 9 | 4 | $a_{n+2}=18a_{n+1}-a_n$ |
| 13 | 197 | 42 | $a_{n+2}=394a_{n+1}-a_n$ |
| 14 | 5 | 2 | $a_{n+2}=10a_{n+1}-a_n$ |
| 15 | 51 | 10 | $a_{n+2}=102a_{n+1}-a_n$ |
| 16 | 8 | 3 | $a_{n+2}=16a_{n+1}-a_n$ |
| 17 | 11 | 2 | $a_{n+2}=22a_{n+1}-a_n$ |
| 18 | 3 | 1 | $a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$ |
| 19 | 35 | 6 | $a_{n+2}=70a_{n+1}-a_n$ |
| 20 | 1 | 1 | |

【表 8】

由【表 8】可觀察到，若將遞迴式$a_{n+2}=\alpha a_{n+1}-a_n$的形式，則可以發現$\alpha=2x_0$，將遞迴式簡化爲$x_{n+2}=\alpha x_{n+1}-x_n(a=x)$。由原來的公式:$px^2-qy^2=r$，其初始解$(x_1,y_1)$，$x^2-pqy^2=1$的初始解$(x_0,y_0)$。進一步可推得:

$$\begin{bmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0 & qy_0\\py_0 & x_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0 & qy_0\\py_0 & x_0\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$$

定理 3：

$$x_{n+2}=2x_0x_{n+1}-x_n$$

**[證明]**

令$A=\begin{bmatrix}x_0 & qy_0\\py_0 & x_0\end{bmatrix}$，

現在求$\begin{vmatrix}x_0-x & qy_0\\py_0 & x_0-x\end{vmatrix}=0$之$x$解。(使$det(A-Ix)=0$)，也就是特徵方程。

即求$(x-x_0)^2-py_0qy_0=0\Longrightarrow x^2-2x_0x+x_0^2-pqy_0^2=0$

$\Longrightarrow x^2-2x_0x+1=0$(∵由公式定義)

得$x=\frac{2x_0\pm\sqrt{4x_0^2-4}}{2}=x_0\pm\sqrt{x_0^2-1}$

取$B=\begin{bmatrix}x_0-\sqrt{x_0^2-1} & 0\\0 & x_0+\sqrt{x_0^2-1}\end{bmatrix}$

令可逆矩陣$P=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$使$AP=PB$，即

$$\begin{bmatrix} x_0 & qy_0 \\ py_0 & x_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0-\sqrt{x_0^2-1} & 0 \\ 0 & x_0+\sqrt{x_0^2-1} \end{bmatrix}$$

所以$\begin{cases} x_0a+qy_0c=ax_0-a\sqrt{x_0^2-1} \\ x_0b+qy_0d=bx_0+b\sqrt{x_0^2-1} \\ x_0c+py_0a=cx_0-c\sqrt{x_0^2-1} \\ x_0d+py_0b=dx_0+d\sqrt{x_0^2-1} \end{cases}$，則$\begin{cases} a=\frac{-qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}c \\ b=\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}d \\ c=\frac{-py_0}{\sqrt{x_0^2-1}}a \\ d=\frac{py_0}{\sqrt{x_0^2-1}}b \end{cases}$

令$c=d=1$，則$P=\begin{bmatrix} \frac{-qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}} & \frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

可得$P^{-1}=\frac{1}{\frac{-qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}-\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}}\begin{bmatrix} 1 & \frac{-qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}} \\ -1 & \frac{-qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}} \end{bmatrix}=\frac{1}{\frac{-2qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}}\begin{bmatrix} 1 & \frac{-qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}} \\ -1 & \frac{-qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}} \end{bmatrix}$

$A=APP^{-1}=(AP)P^{-1}=PBP^{-1}$

故

$A^n=(PBP^{-1})^n=PB^nP^{-1}=$

$$\begin{bmatrix} \frac{-qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}} & \frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (x_0-\sqrt{x_0^2-1})^n & 0 \\ 0 & (x_0+\sqrt{x_0^2-1})^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\frac{-2qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\frac{2qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{-qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^n & \frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^n \\ (x_0-\sqrt{x_0^2-1})^n & (x_0+\sqrt{x_0^2-1})^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\frac{-2qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\frac{2qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^n+\frac{1}{2}(x_0+\sqrt{x_0^2-1})^n & \frac{1}{2}\frac{-qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^n+\frac{1}{2}\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}(x_0+\sqrt{x_0^2-1})^n \\ \frac{1}{\frac{-2qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^n+\frac{1}{\frac{2qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}}(x_0+\sqrt{x_0^2-1})^n & \frac{1}{2}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^n+\frac{1}{2}(x_0+\sqrt{x_0^2-1})^n \end{bmatrix}$$

又$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}=A^n\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$，且$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

故$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^n\left(1-\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}\right)+\frac{1}{2}(x_0+\sqrt{x_0^2-1})^n(1+\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}})$

$$2x_0x_{n+1}=2x_0\left[\frac{1}{2}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^n\left(1-\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}\right)+\frac{1}{2}(x_0+\sqrt{x_0^2-1})^n(1+\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}})\right]$$

$$-x_n=-\left[\frac{1}{2}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^{n-1}\left(1-\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}\right)+\frac{1}{2}(x_0+\sqrt{x_0^2-1})^{n-1}(1+\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}})\right]$$

$2x_0x_{n+1}-x_n$

$$=\frac{1}{2}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^{n-1}\left(1-\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}\right)[2x_0(x_0-\sqrt{x_0^2-1})-1]+\frac{1}{2}(x_0+\sqrt{x_0^2-1})^{n-1}(1+\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}})[2x_0(x_0+\sqrt{x_0^2-1})-1]$$

$$=\frac{1}{2}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^{n-1}\left(1-\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}\right)\left(2x_0^2-2x_0\sqrt{x_0^2-1}-1\right)+\frac{1}{2}(x_0+\sqrt{x_0^2-1})^{n-1}\left(1+\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}\right)\left(2x_0^2+2x_0\sqrt{x_0^2-1}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^{n-1}\left(1-\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}\right)(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^2+\frac{1}{2}(x_0+\sqrt{x_0^2-1})^{n-1}\left(1+\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}\right)(x_0+\sqrt{x_0^2-1})^2$$

$$=\frac{1}{2}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^{n+1}\left(1-\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}\right)+\frac{1}{2}(x_0+\sqrt{x_0^2-1})^{n+1}\left(1+\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}\right)$$

$=x_{n+2}$

也就是$x_{n+2}=2x_0x_{n+1}-x_n$，可得$\alpha=2x_0$。

## 6.遞迴式的合併

我們發現在以下情況下，可以將多條遞迴式合併成另一條遞迴式。

合併前：

| $p$ | 主方程式 | a 值 | 遞迴式 |
|---|---|---|---|
| 12 | $5x^2-y^2=4$ | 89,5,1,13,233<br>34,2,2,34,610,10946 | $a_{n+2}=18a_{n+1}-a_n$ |
| 28 | $13x^2-y^2=12$ | 469,1,829<br>98644,76,4,5116<br>55807,43,7,9043 | $a_{n+2}=1298a_{n+1}-a_n$ |
| 44 | $21x^2-y^2=20$ | 4729,43,1, 67,7369<br>1538,14,2,206,22658<br>987,9,3,321,35307 | $a_{n+2}=110a_{n+1}-a_n$ |

【表 9】

合併後：

| $p$ | 主方程式 | a 值 | 遞迴式 |
|---|---|---|---|
| 12 | $5x^2-y^2=4$ | 13,5,2,1,1,2,5,13,34,89,233,610 | $a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$ |
| 28 | $13x^2-y^2=12$ | 5116,469,43,4,1,7,76,829,9043 | $a_{n+2}=11a_{n+1}-a_n$ |
| 44 | $21x^2-y^2=20$ | 206,43,9,2,1,3,14,67,321,1538 | $a_{n+2}=5a_{n+1}-a_n$ |

【表 10】

我們試著去觀察係數$2x'$與係數$2x_0$的關係，列之如【表 11】：

| $p$ | 係數$2x_0$ | 係數$2x'$ | $\frac{2x_0}{2x'}$ | 關係 |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 18 | 3 | 6 | $18 = 3^3 - 3(3)$ |
| 28 | 1298 | 11 | 118 | $1298 = 11^3 - 3(11)$ |
| 44 | 110 | 5 | 22 | $110 = 5^3 - 3(5)$ |

【表 11】

由上表可以看出當遞迴式可以合併時，則係數$2x'$必爲係數$2x_0$的倍數，且此倍數恰爲係數$2x'$的平方減 3，也就是$\frac{2x_0}{2x'} = (2x')^2 - 3$，同乘$2x'$得

$$(2x')^3 - 3(2x') = 2x_0$$

移項可得：

$$(2x')^3 - 3(2x') - 2x_0 = 0$$

另外，根據我們先前所推得理論，遞迴式的係數$\alpha$恰爲附帶方程式的初始解$x_0$的兩倍，亦即$\alpha = 2x_0$。於是我們想試著將$x'$代入附帶方程式，解得$y'$，發現$x'$、$y'$的小數部分皆爲 0.5，例如當$p = 12$時，主方程式$5x^2 - y^2 = 4$，$x' = 1.5$，將$x'$代入附帶方程式$x^2 - 5y^2 = 1$解得$y' = 0.5$，此時我們使用矩陣計算$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & qy_0 \\ py_0 & x_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 2.5 & 1.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & qy_0 \\ py_0 & x_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 2.5 & 1.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$，我們成功的將第二列的解與第一列合併了，而且新的遞迴式$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$之$a_{n+1}$的係數與附帶方程式的初始解依然符合$\alpha = 2x_0$的關係。我們的這種作法其實就是想取一個比$x_0$更理想的初始解$x'$，條件從$x_0$爲整數，放寬至只要$2x'$爲整數即可，使得遞迴式的係數變小，來合併遞迴式。至於$(2x')^3 - 3(2x') - 2x_0 = 0$爲什麼成立我們仍在努力驗證中。

## (五)去除邊長爲平方數的限制

回到三邊形數轉四邊形數的情況，由於驚奇的數對於三邊形數長有限制，現在討論只限定邊長爲正整數的情形，可列出:

$$\boxed{\frac{a(a+1)}{2} = t^2\text{，其中}a\text{、}t \in N}$$

其中$a$爲三邊形數的邊長，$t$爲四邊形數的邊長。由於我們目前尚未有一套完整的做法，所以我們配方左式可得:

$$t^2 = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{8}$$

$$a = \sqrt{(t^2 + \frac{1}{8})^2 \times 2} - \frac{1}{2}$$

將$t = 1,2,3\ldots$依序代入上是檢查$a$是否爲正整數，前幾組解列於【表 12】：

| 邊長爲$a^2$之<br>三邊形數的邊長 | $t$<br>四邊形數的邊長 | $a$<br>三邊形數的邊長 | $t$<br>四邊形數的邊長 |
|---|---|---|---|
| $\boxed{1}$ | 1 | $\boxed{1}$ | 1 |
| $\boxed{49}$ | 35 | 8 | 6 |
| $\boxed{1681}$ | 1189 | $\boxed{49}$ | 35 |
| $\boxed{57121}$ | 40391 | 288 | 204 |
| $\boxed{1940449}$ | 1372105 | $\boxed{1681}$ | 1189 |

【表 12】

備註:$\boxed{數字}$皆爲驚奇的數：$\boxed{1}$, $\boxed{49}$, $\boxed{1681}$, $\boxed{57121}$, $\boxed{1940449}$, ….。

觀察：邊長爲$a$的三邊形數的邊長：1, 8, 49, 288, 1681,…，發現將相鄰兩項相減可依序得到7,41,239,1393,8119，恰爲驚奇的數之正平方根：$\sqrt{\boxed{1}}$、$\sqrt{\boxed{49}}$、$\sqrt{\boxed{1681}}$、$\sqrt{\boxed{57121}}$、$\sqrt{\boxed{1940449}}$，也就是說，邊長爲$a$的三邊形數的邊長：1, 8, 49, 288, 1681,…恰爲驚奇的數之正平方根的級數和。例如:8=$\sqrt{\boxed{1}}+\sqrt{\boxed{49}}$, 49=$\sqrt{\boxed{1}}+\sqrt{\boxed{49}}+\sqrt{\boxed{1681}}$, 288=$\sqrt{\boxed{1}}+\sqrt{\boxed{49}}+\sqrt{\boxed{1681}}+\sqrt{\boxed{57121}}$。

# 五、研究結果

## (一)、驚奇的數:$a_n^2$轉成四邊形數:$t_n^2$的研究結果

本研究所討論之驚奇的數，其本身是一個完全平方數且邊長爲$a_n^2$的三邊形數，幾何意義爲解釋上，邊長爲$a_n^2$的三邊形數亦同時爲四邊形數$t_n^2$。我們推導出$a_n$、$t_n$的遞迴式與一般式，列之如【表 13】：

| | 遞迴式 | 一般式 |
|---|---|---|
| 驚奇的數:$a_n^2$ | $a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$ | $a_n = \frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n-1} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n-1}\right]$ |
| 四邊形數:$t_n^2$ | $t_n = 34t_{n-1} - t_{n-2}$ | $t_n = \frac{\sqrt{2}}{8}\left[-\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2n+1} + \left(3-2\sqrt{2}\right)^{2n+1}\right]$ |

【表 13】

## (二)、推廣型驚奇的數$b_n^2$轉成四邊形數$u_n^2$的研究結果

當$\frac{n(n-1)}{2}$中的$n$是一個完全平方數$b_n^2$時，$\frac{b_n^2(b_n^2-1)}{2}$亦爲完全平方$u_n^2$時，其$b_n$和$u_n$的遞迴式與一般式如【表 14】所示：

| | 遞迴式 | 一般式 |
|---|---|---|
| 推廣型驚奇的數$b_n^2$ | $b_n = 6b_{n-1} - b_{n-2}$ | $b_n = \frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}\right]$ |
| 四邊形數$u_n^2$ | $u_n = 34u_{n-1} - u_{n-2}$ | $u_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2n} - \left(3-2\sqrt{2}\right)^{2n}\right]$ |

【表 14】

## (三)、邊長為$c_n^2$的六邊形數亦為四邊形數$v_n^2$的研究結果

當六邊形數$c_n^2(2c_n^2-1)$是一個完全平方數$v_n^2$時，其$c_n$和$v_n$的遞迴式與一般式如【表 15】所示：

| | 遞迴式 | 一般式 |
|---|---|---|
| 六邊形數: $c_n^2(2c_n^2-1)$ | $c_n = 6c_{n=1} - c_{n-2}$ | $c_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n-1} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n-1}\right]$ |
| 四邊形數:$v_n^2$ | $v_n = 34v_{n-1} - v_{n-2}$ | $v_n = \frac{\sqrt{2}}{8}\left[-\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2n+1} + \left(3-2\sqrt{2}\right)^{2n+1}\right]$ |

【表 15】

## (四)、$p$邊形數亦為四邊形數的研究結果

利用 Pell 方程式與矩陣計算試著找出$p$邊形數和四邊形數之間的關係，發現：在$p \le 50$的情況下，$p = 10,20,34$是無解的，其他的$p$邊形數都可以同時為四邊形數。$p$邊形數的邊長$a_n^2$的遞迴式、前幾項以及轉換後的 Pell 方程式列之如【表 16】：

| $p$ | 主方程式 | a 值 | 遞迴式 |
|---|---|---|---|
| 3 | $x^2-2y^2=-1$ | -7,-1,1,7,41,239 | $a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$ |
| 4 | $x^2-y^2=0$ | -2,-1,0,1,2,3,4,5 | $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$ |
| 5 | $3x^2-2y^2=1$ | 89,9,1,1,9,89,881 | $a_{n+2}=10a_{n+1}-a_n$ |
| 6 | $2x^2-y^2=1$ | 5,1,1,5,29,169 | $a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$ |
| 7 | $5x^2-2y^2=3$ | 265,7,1,31,1177 | $a_{n+2}=38a_{n+1}-a_n$ |
| 8 | $3x^2-y^2=2$ | 3,1,1,3,11,41 | $a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$ |
| 9 | $7x^2-2y^2=5$ | 209,7,1,23,689 | $a_{n+2}=30a_{n+1}-a_n$ |
| 10 | $4x^2-y^2=3$ | 1 | |
| 11 | $9x^2-2y^2=7$ | 305,9,1,25,849 | $a_{n+2}=34a_{n+1}-a_n$ |
| 12 | $5x^2-y^2=4$ | 89,5,1,13,233<br>34,2,2,34,610,10946 | $a_{n+2}=18a_{n+1}-a_n$ |
| 13 | $11x^2-2y^2=9$ | 44521,113,1,281,110713<br>3537,9,9,3537 | $a_{n+2}=394a_{n+1}-a_n$ |
| 14 | $6x^2-y^2=5$ | 29,3,1,7,69 | $a_{n+2}=10a_{n+1}-a_n$ |
| 15 | $13x^2-2y^2=11$ | 3161,31,1,71,7241 | $a_{n+2}=102a_{n+1}-a_n$ |
| 16 | $7x^2-y^2=6$ | 79,5,1,11,175 | $a_{n+2}=16a_{n+1}-a_n$ |
| 17 | $15x^2-2y^2=13$ | 153,7,1,15,329 | $a_{n+2}=22a_{n+1}-a_n$ |
| 18 | $8x^2-y^2=7$ | 64,11,2,1,4,23,134 | $a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$ |
| 19 | $17x^2-2y^2=15$ | 1609,23,1,47,3289 | $a_{n+2}=70a_{n+1}-a_n$ |
| 20 | $9x^2-y^2=8$ | 1 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 21 | $19x^2 - 2y^2 = 17$ | 1849,25,1,49,3625 | $a_{n+2} = 74a_{n+1} - a_n$ |
| 22 | $10x^2 - y^2 = 9$ | 18721,493,13,1,25,949,36037<br>3,111,4215,160059 | $a_{n+2} = 38a_{n+1} - a_n$ |
| 23 | $21x^2 - 2y^2 = 19$ | 6049,233,9,1,17,441,11449 | $a_{n+2} = 26a_{n+1} - a_n$ |
| 24 | $11x^2 - y^2 = 10$ | 2773,139,7.1,13,259,5167 | $a_{n+2} = 20a_{n+1} - a_n$ |
| 25 | $23x^2 - 2y^2 = 21$ | 17159,1,31511<br>13189529,271,41,1995199 | $a_{n+2} = 48670a_{n+1} - a_n$ |
| 26 | $12x^2 - y^2 = 11$ | 961,69,5,1,9,125,1741 | $a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n$ |
| 27 | $25x^2 - 2y^2 = 23$ | 14057,71,1,127,25145 | $a_{n+2} = 198a_{n+1} - a_n$ |
| 28 | $13x^2 - y^2 = 12$ | 469,1,829<br>98644,76,4,5116<br>55807,43,7,9043 | $a_{n+2} = 1298a_{n+1} - a_n$ |
| 29 | $27x^2 - 2y^2 = 25$ | 342409,353,1,617<br>14535,15,15,14535 | $a_{n+2} = 970a_{n+1} - a_n$ |
| 30 | $14x^2 - y^2 = 13$ | 9859,329,11,1,19,569,17051 | $a_{n+2} = 30a_{n+1} - a_n$ |
| 31 | $29x^2 - 2y^2 = 27$ | 14455,1,24751<br>609,15,587481 | $a_{n+2} = 39206a_{n+1} - a_n$ |
| 32 | $15x^2 - y^2 = 14$ | 1425,181,23,3,1,5,39,307,2417 | $a_{n+2} = 8a_{n+1} - a_n$ |
| 33 | $31x^2 - 2y^2 = 29$ | 745999,5921,47,1,79,9953,1253999 | $a_{n+2} = 126a_{n+1} - a_n$ |
| 34 | $16x^2 - y^2 = 15$ | 1,2 | |
| 35 | $33x^2 - 2y^2 = 31$ | 827961,6369,49,1,81,10529,1368689 | $a_{n+2} = 130a_{n+1} - a_n$ |
| 36 | $17x^2 - y^2 = 16$ | 108809,1649,25,1,41,2705,178489<br>4,260,17156 | $a_{n+2} = 66a_{n+1} - a_n$ |
| 37 | $35x^2 - 2y^2 = 33$ | 95881,191,1,311,156121<br>8527,17,7,3497,1755487 | $a_{n+2} = 502a_{n+1} - a_n$ |
| 38 | $18x^2 - y^2 = 17$ | 14981,441,13,1,21,713,24221 | $a_{n+2} = 34a_{n+1} - a_n$ |
| 39 | $37x^2 - 2y^2 = 35$ | 2839,1,4559<br>761977,103,17,125663 | $a_{n+2} = 7398a_{n+1} - a_n$ |
| 40 | $19x^2 - y^2 = 18$ | 44539,1,71059<br>3051,9,1037331<br>209,131,15143129 | $a_{n+2} = 115598a_{n+1} - a_n$ |
| 41 | $39x^2 - 2y^2 = 37$ | 460529,4345,41,1,65,6889,730169 | $a_{n+2} = 106a_{n+1} - a_n$ |
| 42 | $20x^2 - y^2 = 19$ | 40249,2243,125,7,1,11,197,3535,63433 | $a_{n+2} = 18a_{n+1} - a_n$ |
| 43 | $41x^2 - 2y^2 = 39$ | 41401,127,1,199,64873 | $a_{n+2} = 326a_{n+1} - a_n$ |
| 44 | $21x^2 - y^2 = 20$ | 4729,43,1, 67,7369<br>1538,14,2,206,22658<br>987,9,3,321,35307 | $a_{n+2} = 110a_{n+1} - a_n$ |
| 45 | $43x^2 - 2y^2 = 41$ | 8161,1,12649 | $a_{n+2} = 20810a_{n+1} - a_n$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 46 | $22x^2-y^2=21$ | 61069,155,1,239,94165<br>7481,19,5,1951 | $a_{n+2}=394a_{n+1}-a_n$ |
| 47 | $45x^2-2y^2=43$ | 820497,21607,569,15,1,23,873,33151 | $a_{n+2}=38a_{n+1}-a_n$ |
| 48 | $23x^2-y^2=22$ | 43709,911,19,1,29,1391,66739 | $a_{n+2}=48a_{n+1}-a_n$ |
| 49 | $47x^2-2y^2=45$ | 1701167,1,2585423<br>26313,39,167150697<br>2521,407,1744639609 | $a_{n+2}=4286590a_{n+1}-a_n$ |
| 50 | $24x^2-y^2=23$ | 37824,3821,386,39,4,1,6,59,584,5781 | $a_{n+2}=10a_{n+1}-a_n$ |

【表 16】

當$p=12,28,44$時，可以將多條遞迴式合併成一條新的遞迴式。

### (五)、遞迴式$a_{n+2}=\alpha a_{n+1}-a_n$及附帶方程式：$x^2-pqy^2=1$，有$\alpha=2x_0$關係

型如$px^2-qy^2=r$的**主方程式**，欲求出其初始解$(x_1,y_1)$，先求出**附帶方程式**：$x^2-pqy^2=1$的初始解$(x_0,y_0)$。當$pq$不是平方數時，把$x^2-pqy^2=1$的$x$解寫成遞迴式：$a_{n+2}=\alpha a_{n+1}-a_n$，可得證$\alpha=2x_0$。

### (六)、無法使用矩陣計算，方程式$k^2x^2-y^2=k^2-1$，探討$k$、$x$、$y$之間的關係

| | $k$ | $(x,y)$ |
|---|---|---|
| 第一鏈 | $x$ | $(1,1)$ |
| 第二鏈 | $2x$ | $(x,2x^2-1)$ |
| 第三鏈 | $4x^2-1$ | $(x,4x^3-3x)$ |
| 第四鏈 | $8x^3-4x$ | $(x,8x^4-8x^2+1)$ |
| 第五鏈 | $16x^4-12x^2+1$ | $(x,16x^5-20x^3+5x)$ |
| 第六鏈 | $32x^5-32x^3+6x$ | $(x,32x^6-48x^4-18x^2-1)$ |
| 第七鏈 | $64x^6-80x^4+24x^2-1$ | $(x,64x^7-112x^5+56x^3-7x)$ |
| 第八鏈 | $128x^7-192x^5+80x^3-8$ | $(x,128x^8-256x^6+160x^4-32x^2+1)$ |
| ・・・ | ・・・ | ・・・ |
| 第 n 鏈 | $\boldsymbol{U_{n-1}(x)}$ | $(x,\boldsymbol{T_n}(x))$ |

【表 17】

由文獻[6][7]可知：方程式 $k^2x^2-y^2=k^2-1$的解$y$與$k$分別爲第一類$\boldsymbol{T_n}(x)$及第二類$\boldsymbol{U_{n-1}(x)}$切比雪夫多項式。

## 六、討論

我們的研究最初以窮舉的方式蒐集數據，設法將問題轉換成直角三角形連續股問題。在研究過程中，找到高雄中學李老師的《論 Pell 方程式及其推廣》一文，文中說明了一種簡潔的表達方法：矩陣，可用來描述$px^2-qy^2=r$方程的通解，使得方程式的解呈現出一種簡潔而有系統的美。這篇文章幫助我們更全面處理$p$邊形數亦爲四邊形數的問題，但是發現在一些特定的情況下，此矩陣計算會漏解；另外找$x^2-ry^2=1$的初始解是有困難的；少數情況下無

法以矩陣計算討論$p$邊形數亦同時爲四邊形數，我們以因式分解討論之，如此其解爲有限個數，缺點是隨著$p$的增大，其計算量也更加複雜。

研究至此，有下列五點需要更進一步突破：

(一)在找尋$x^2-ry^2=1$的初始解時，雖然找出六類的初始解，但尚未對任意的$r\in N$有完整的掌握，至少希望能把足夠大的範圍填滿，需要一些努力及時間，克服這個問題。

(二)在解：奇數邊形$(p-2)x^2-2y^2=p-4$；偶數邊形$\left(\frac{p-2}{2}\right)a^2-\left(\frac{t}{a}\right)^2=\frac{p-4}{2}$的方程式當$p-4$或$\frac{p-4}{2}$是平方數時，會出現矩陣計算尚未求出的新解，利用反代回遞迴式，得出許多的新解。

偶數邊形的部份我們目前已證明出會漏解的情形。我們懷疑：**矩陣計算在特定情況下會漏解**，但究竟爲何，還需要更多的努力，找出矩陣計算漏解之原因以及漏解的通則。

(三)在某些情況下，我們可以將多條遞迴式合併爲一條新的遞迴式。我們試圖改進高雄中學李老師的《論 Pell 方程式及其推廣》的矩陣計算，以減少漏解的情況。原文獻所提供的方法爲求出附帶方程式的最小正整數初始解$(x_0,y_0)$，可推得其遞迴式係數爲$2x_0$；我們想試著放寬條件至只要使遞迴式係數爲正整數即可，也就是新遞迴式係數$2x'$我們允許$x'$爲小數點爲五，且$x'$亦爲附帶方程式的解。這樣的想法其實就是在設法縮小遞迴式係數，以求得更多的解，改進之前矩陣計算的疏漏，但至於嚴謹的證明與$(2x')^3-3(2x')-2x_0=0$爲什麼成立？以及理解此演算法的意義是我們的未來的重要目標。

(四)**無法以矩陣解時，以因式分解方式**求方程$k^2x^2-y^2=k^2-1$的解時，觀察$k$與數對$(x,y)$的規律性，發現：當將$y$表示成$x$的函數時，其係數恰好與$cos(n\theta)$的係數吻合，除了與切比雪夫多項式的關係，似乎還隱藏著某些未知的連結，找出這些連結的原因，是我們未來努力的方向。

(五)當去除$\frac{a^2(a^2+1)}{2}=t^2$三邊形數邊長爲平方數的限制，求得解$(a,t)$，列出前幾項如下：

| $a^2$<br>三邊形數的邊長 | $t$<br>四邊形數的邊長 | $a$<br>三邊形數的邊長 | $t$<br>四邊形數的邊長 |
|---|---|---|---|
| $\boxed{1}$ | 1 | $\boxed{1}$ | 1 |
| $\boxed{49}$ | 35 | 8 | 6 |
| $\boxed{1681}$ | 1189 | $\boxed{49}$ | 35 |
| $\boxed{57121}$ | 40391 | 288 | 204 |
| $\boxed{1940449}$ | 1372105 | $\boxed{1681}$ | 1189 |

【表 18】

(備註:邊長爲$a^2$的三邊形數的邊長(驚奇的數)：$\boxed{1}$, $\boxed{49}$, $\boxed{1681}$, $\boxed{57121}$, $\boxed{1940449}$, ….。)

我們從【表 18】觀察出以下幾個性質，但尚未證明：

**1.**邊長爲$a^2$的三邊形數的邊長(驚奇的數) ：$\boxed{1}$, $\boxed{49}$, $\boxed{1681}$, $\boxed{57121}$, $\boxed{1940449}$,…，皆會出現在邊長爲 a 的三邊形數的邊長：$\boxed{1}$, 8, $\boxed{49}$, 288, $\boxed{1681}$,⋯。

**2.**將 a 三邊形數的邊長所構成的數列 1,8,49,288,1681…相鄰兩項相減可依序得到 7(∵8-1=7) ,41

(∵49-8=41) ,239 (∵288-49=239) ,1393 (∵1681-288=1393)，可以觀察出其恰爲$a^2$三邊形數的邊長(驚奇的數)之正平方根：$\sqrt{1}$=1、$\sqrt{49}$=7、$\sqrt{1681}$=41、$\sqrt{57121}$=239、$\sqrt{1940449}$=1393

**3.**邊長爲 a 的三邊形數的邊長：1, 8, 49, 288, 1681,…恰爲驚奇的數之正平方根的級數和。例如:8=$\sqrt{1}+\sqrt{49}$, 49=$\sqrt{1}+\sqrt{49}+\sqrt{1681}$, 288=$\sqrt{1}+\sqrt{49}+\sqrt{1681}+\sqrt{57121}$。

## 七、結論

最初的研究是求：哪些邊長邊長爲$a^2$的三邊形數亦同時爲四邊形數，後來以直角三角形連續股的方法解決此問題。並探討出在數學意義上與$\frac{a^2(a^2+1)}{2}$等價的$\frac{a^2(a^2-1)}{2}$，滿足$\frac{a^2(a^2-1)}{2}$的數可否亦同時爲四邊形數。

解決問題後，擬推廣成：邊長爲$a^2$的$p$邊形數亦同時爲四邊形數。即是將問題化成方程$(p-2)x^2-2y^2=p-4$，求$x,y\in N$的解，但直角三角形連續股的方法在此並不適用。於是我們找到高雄中學李老師的《論 Pell 方程式及其推廣》一文，使用矩陣這項工具，先求出$x^2-pqy^2=1$方程式的初始解，用來描述$px^2-qy^2=r$方程式的通解，使得方程式的解呈現出一種簡潔而有系統的美，更幫助我們全面地處理此問題。

經過研究，我們要先將問題分爲$p$爲偶數或是奇數兩類。由於無法使用矩陣的情況只會發生在$p$爲偶數時，所以再將$p$爲偶數時的情況再細分成：(1)矩陣可以解的，要找出$x^2-ry^2=1$的初始解，再以矩陣表示$(p-2)x^2-2y^2=p-4$的通解。我們目前已構造出6類情形的初始解，尚須多一點時間去整理、涵蓋$p$爲任意數的情況。其中矩陣可以解的又可以在細分成①附帶方程式之初始解$(x_0,y_0)$皆爲整數②附帶方程式之初始解$(x_0,y_0)$的小數點爲五，此時多條遞迴式的解，可以合併成一條新的遞迴式。(2)矩陣不可以解的：要找出$k^2x^2-y^2=k^2-1$的解。在(1)(2)中，求解的意義是代表這些$p$邊形數恰爲四邊形數。我們目前已掌握：$p$ =10, 20, 52, 100, 164, 244, 340, 580, 724, 884, 1060, 1252, 1460, 1684, 1924, 2180, 2740, 3044, 3364, 3700, 4052, 4420, 4804, 5204, 5620, 6052, 6500，**這些$p$邊形數不可能同時爲四邊形數。**

接著，我們研究邊長爲$a^2$的$p$邊形數亦爲四邊形數，將條件放寬爲：邊長爲$a$的$p$邊形數亦爲四邊形數，目前研究到邊長爲$a$的三邊形數亦爲四邊形數的情形。

雖然我們已經從研究過程中得到部分的結果，但還有討論中所述的 5 項要點以及邊長爲$a^2$的$p$邊形數亦爲四邊形數的應用，需要突破、繼續思考。往後，將努力解決邊長爲$a^2$的$p$邊形數亦同時爲邊長爲$b^2$的$q$邊形數的問題，期盼我們能有所突破，持續進步。

## 八、參考資料及其他


[1]李家奇(民國 94 年 11 月 1 日)《論 pell 方程式及其推廣》雄中學報第八期 p211-p218 http://lib.kshs.kh.edu.tw/lib/journals/journals-94/P211.pdf

[2]許志農算術講義(2004 年 12 月 28 日)《佩爾方程式》http://math.ntnu.edu.tw/~maco/macobook/arith/arith37.pdf

[3]許志農算術講義(2004 年 12 月 28 日)《再談佩爾方程式》http://math.ntnu.edu.tw/~maco/macobook/arith/arith38.pdf

[4]李政豐、洪有情、陳昭地(2011 年 11 月 28 日)《初探多邊形數》高中數學電子報第 59 期 http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/Resources/ePaper/Default.aspx?id=59

[5]李政豐、洪有情、陳昭地(2011 年 12 月 20 日)《續探多邊形數》高中數學電子報第 60 期 http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/Resources/Ctrl/ePaper/eArticleDetail.aspx?id=a7a0ea34-0775-428e-a150-5763640614f8

[6]勾股鐵路網中華民國第四十七屆中小學科學展覽會 http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/47/senior/040410.pdf

[7] Abramowitz, Milton; Stegun, Irene A., eds. (1965), "Chapter 22", *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, New York: Dover, pp. 773 http://people.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_773.htm

[8]切比雪夫多項式. (2012, April 13). Retrieved from 維基百科, 自由的百科全書 http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E5%88%87%E6%AF%94%E9%9B%AA%E5%A4%AB%E5%A4%9A%E9%A1%B9%E5%BC%8F&oldid=20745790

## 【評語】040415

基本來說，本作品主要的貢獻是在研究邊長為 $a^2$ 的 P 邊形數在什麼情形下可以同時為四邊形數。作者指出廣義的 Pell Equation 無法用來刻劃此問題之解答，卻並未詳細說明失敗之主因為何，作者嘗試用反推，切比雪夫多項式，合併遞迴等方式去處理此一難題，雖未能完全解決問題，卻也獲致不少結論，並且展現出多樣的思路和科學的精神，是一件難得的作品。