中華民國第52屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040414

任意三角形衍生形的幾何性質研究

學校名稱：臺北市立麗山高級中學

作者：	指導老師：
高二 鍾昀澔	盧裕鵬
高二 薛兆原	洪明譽
高二 李念竺	

關鍵詞：衍生形、相似形、向量

摘要

以一任意三角形三邊向外做正方形，相鄰正方形頂點兩兩相連。爲了敘述方便，我們稱正方形頂點兩兩相連所圍成的區域作(第一層)衍生形。以形成的三個衍生形再向外作正方形並將相鄰頂點連線，得到第二層衍生形。以此類推得到第 n 層衍生形。

本研究首先探討衍生形重心形成的三角形與正方形重心的幾何關係、衍生形與原三角形的面積關係，再增加正多邊形的邊數或衍生形的層數與原三角形的幾何關係。本文主要使用向量及相似形證明所發現的幾何性質。

後半部分我們將原本三角形向外作正方形改爲作正五邊形，繼續 n 層衍生形等幾何性質的探討。最後，我們還發現第二層後的衍生形皆爲梯形，同一層的衍生形面積相等，且與原三角形面積比值 $a_n = 5a_{n-1} - a_{n-2}$ 。

關 鍵 詞：衍生形、相似形、向量

壹、研究動機

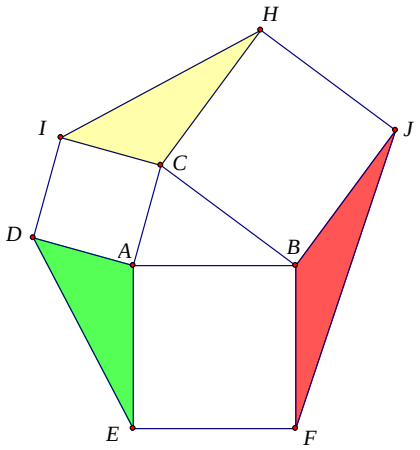
從歷史上著名的拿破崙三角形可得知，由一個任意三角形三邊向外延伸出三個等邊三角形，這三個延伸出的三角形中心連線可以形成一個等邊三角形。基於這項幾何定理，我們試想如果把向外延伸三個等邊三角形改成向外延伸三個正方形幾何性質會有何改變。

定理 0.1：

以三角形各邊向外作正方形，相鄰正方形兩頂點相連，其所成的三個三角形與原三角形面積相等。

定理 0.2：

任意三角形內，以三邊之中點爲頂點所形成的三角形，其重心與原三角形重心爲同一點



以一個任意三角形出發，經過簡單的尺規作圖，就能形成數個面積相等的三角形，我們便猜想，這三個衍生形的重心所形成的三角形的重心與原三角形的重心會不會也是同一點呢?

在使用 GSP 幾何軟體試驗後，除了得到肯定的答案外，還發現了更多不可思議的幾何性質。

貳、研究目的

一、　利用 GSP 幾何軟體發現衍生形的重心與原三角形重心的幾何關係並證明。

二、　利用 GSP 幾何軟體找出 (第 n 層)衍生形與原三角形重心的面積關係並證明。

參、研究設備及器材

紙、筆、GSP4.03、MathType

肆、研究方法

伍、研究結果

一、研究過程

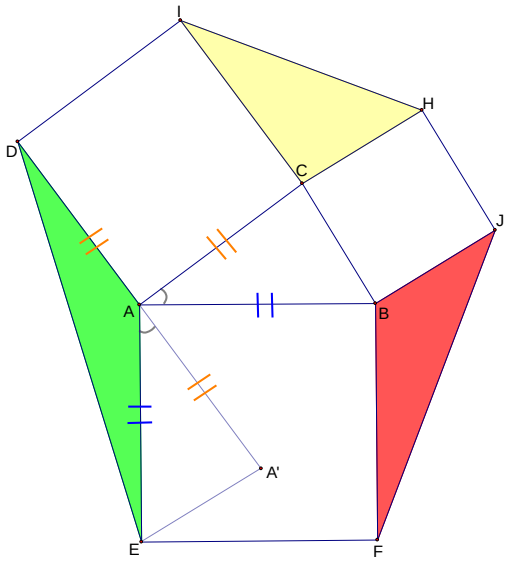
(一)、探討衍生形和原三角形與重心相關的幾何關係

引理 1：若以三角形 ABC 各邊長向外作正方形 ABFE, BCHJ, CADI 則 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{BJ}=\vec{0}$

證明：已知 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

將三向量順時針旋轉 $90°$

故 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{BJ}=\vec{0}$



定理 1：

令三個衍生形重心分別爲 A_1 、 B_1 、 C_1 ；三個正方形的重心分別爲 A_2 、 B_2 、 C_2 ； ΔABC 的重心爲 G 、 $\Delta A_1B_1C_1$ 的重心爲 G_1 、 $\Delta A_2B_2C_2$ 的重心爲 G_2 、 ΔIJE 的重心爲 G_3 、 ΔDHF 的重心爲 G_4 ；則 $G=G_1=G_2=G_3=G_4$ ，如圖 1 所示。

[1]p.65 第 331 題

證明：

將原三角形放置在座標平面上，並令原點爲 O

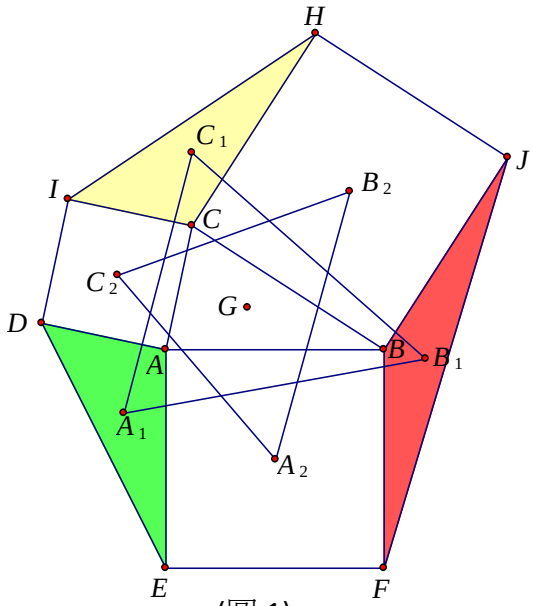
$$\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1})$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1})$$

$$=\overrightarrow{OG}+\frac{1}{9}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{CH})$$

$$=\overrightarrow{OG}+\frac{2}{9}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CH})$$

$$=\overrightarrow{OG}$$



(圖 1)

$G_1 = G$

$$\overrightarrow{OG_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2})$$
$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{BB_2} + \overrightarrow{CC_2})$$
$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{CA})$$
$$= \overrightarrow{OG} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CI})$$
$$= \overrightarrow{OG}$$

$G_2 = G$

$$\overrightarrow{OG_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OI})$$
$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CI})$$
$$= \overrightarrow{OG}$$

$G_3 = G$

$$\overrightarrow{OG_4} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OH})$$
$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CH})$$
$$= \overrightarrow{OG}$$

$G_4 = G$

故 $G = G_1 = G_2 = G_3 = G_4$ 得證

引理 1-2-1：設 $A_1A_2A_3...A_n$ 爲一個正 n 邊形，向正 n 邊形內做正方形 $A_1A_2B_2B_1$，則

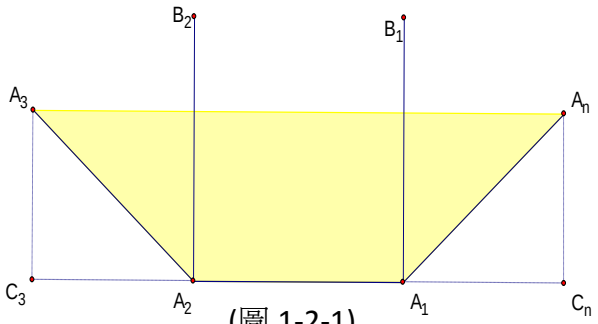
$$\overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_1A_n} = 2\sin\frac{360°}{n}\overrightarrow{A_2B_2}$$

證明：分別做過 A_3, A_n 且垂直 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 的兩條直線，交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於 C_3, C_n 兩點 (如圖 1-2-1 所示)

$$\overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_1A_n} = 2\overrightarrow{C_3}$$

$\because \overline{C_3A_3} // \overline{A_2B_2}$ 且 $\left|\overline{C_3A_3}\right| = \sin\frac{360°}{n}\left|\overline{A_2B_2}\right|$

$$\therefore \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_1A_n} = 2\sin\frac{360°}{n}\overrightarrow{A_2B_2}$$



(圖 1-2-1)

引理 1-2-2：設 $A_1A_2A_3...A_n$ 爲一個正 n 邊形，其重心爲 G，$\overline{A_1A_2}$ 的中點爲 M_1，並向正 n 邊形內做正方形 $A_1A_2B_2B_1$，則 $\overline{GM_1}=\frac{1}{2}\tan\frac{(n-2)\times 90^\circ}{n}\overline{B_1A_1}$ (如圖 1-2-2 所示)

證明：∵正 n 邊形的重心及內心爲同一點

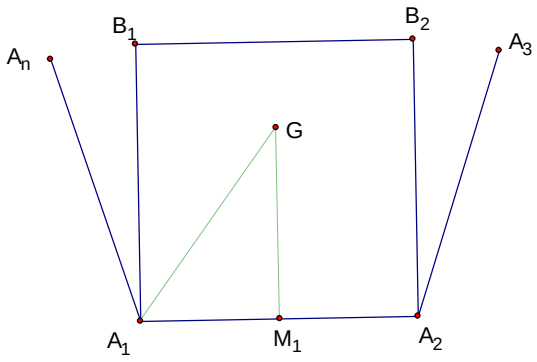
$\therefore \overline{GM_1}\perp\overline{A_1A_2}$ 且 $\overline{GA_1}$ 平分 $\angle A_nA_1A_2$

$$\left|\overline{GM_1}\right|=\tan\frac{(n-2)\times 180^\circ}{2n}\left|\overline{A_1M_1}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\tan\frac{(n-2)\times 90^\circ}{n}\left|\overline{B_1A_1}\right|$$

又 $\overline{GM_1}\,//\,\overline{B_1A_1}$

故 $\overline{GM_1}=\frac{1}{2}\tan\frac{(n-2)\times 90^\circ}{n}\overline{B_1A_1}$



(圖 1-2-2)

定理 1.2：

令三個衍生形重心分別爲 A_1、B_1、C_1；三個正 n 邊形的重心分別爲 A_2、B_2、C_2；ΔABC 的重心爲 G、$\Delta A_1B_1C_1$ 的重心爲 G_1、$\Delta A_2B_2C_2$ 的重心爲 G_2，則 $G=G_1=G_2$

證明：設 K,M,D,F,H,J 分別是以原三角形三邊向外做正 n 邊形的頂點，且 O 爲任意一點(如圖 1.2.1 所示)

$$\overline{OG_1}=\frac{1}{3}(\overline{OA_1}+\overline{OB_1}+\overline{OC_1})$$

$$=\frac{1}{3}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})+\frac{1}{3}(\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1})$$

$$=\overline{OG}+\frac{1}{9}(\overline{AM}+\overline{CK}+\overline{AD}+\overline{BF}+\overline{GJ})$$

$$\overline{CK}+\overline{AM}=2\sin\frac{360^\circ}{n}\overline{AD'}\text{—(1)}$$

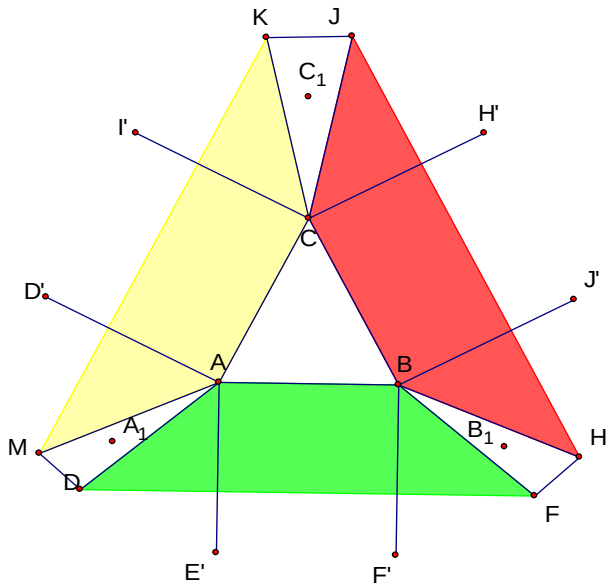
$$\overline{AD}+\overline{BF}=2\sin\frac{360^\circ}{n}\overline{BF'}\text{—(2)}$$

$$\overline{CJ}+\overline{BH}=2\sin\frac{360^\circ}{n}\overline{CH'}\text{—(3)}$$

由(1)、(2)、(3)式帶回原式

$$\overline{OG_1}=\overline{OG}+\frac{2}{9}\sin\frac{360^\circ}{n}(\overline{AD'}+\overline{BF'}+\overline{CH'})=\overline{OG_1}$$

$$G_1=G$$



(圖 1.2.1)

令 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 三邊中點分別爲 C'、A'、B'，如圖 1.2.2 所示。

A_2'、B_2'、C_2' 分別爲正 n 邊形的重心，則對於任意點 O

$\overline{OG}=\frac{1}{3}(\overline{OA'}+\overline{OB'}+\overline{OC'})$ 恆成立

$\overline{OG}=\frac{1}{3}(\overline{OA'}+\overline{OB'}+\overline{OC'})$

$=\frac{1}{3}(\overline{OA'_2}+\overline{A'_2A'}+\overline{OB'_2}+\overline{B'_2B'}+\overline{OC'_2}+\overline{C'_2C'})$

$=\frac{1}{3}(\overline{OA'_2}+\overline{OB'_2}+\overline{OC'_2})+\frac{1}{3}(\overline{A'_2A'}+\overline{B'_2B'}+\overline{C'_2C'})$

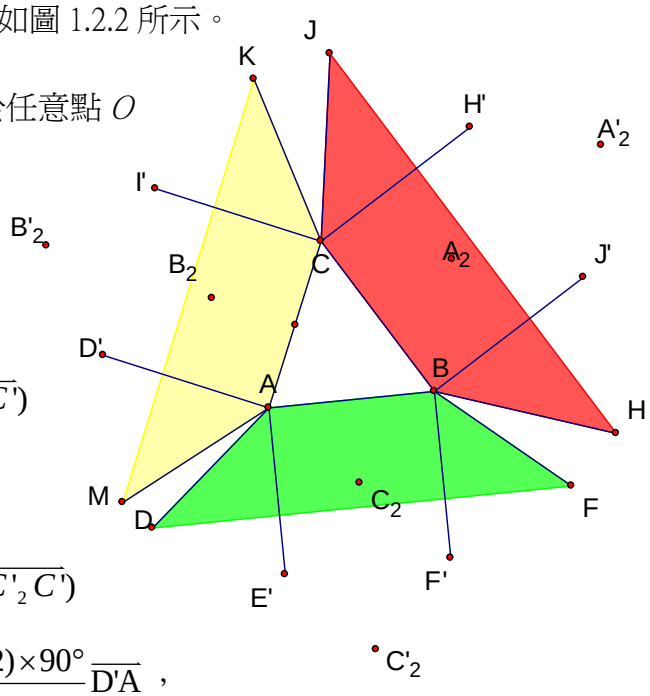
$\overline{A'_2A'}=\frac{1}{2}\tan\frac{(n-2)\times 90^\circ}{n}\overline{H'C}$，$\overline{B'_2B'}=\frac{1}{2}\tan\frac{(n-2)\times 90^\circ}{n}\overline{D'A}$，

$\overline{C'_2C'}=\frac{1}{2}\tan\frac{(n-2)\times 90^\circ}{n}\overline{F'B}$

$\overline{OG}=\frac{1}{3}(\overline{OA_2}+\overline{OB_2}+\overline{OC_2})=\overline{OG_2}$

$G=G_2$

故 $G=G_1=G_2$ 得證



(圖 1.2.2)

爲了推廣至這項定理在 n 層衍生形皆成立，必須先證明以下兩項引理

引理 1-3-1：每一層衍生形皆爲梯形且同層梯形上下底的長度比值相等。

證明：

1.證明第二層衍生形爲梯形(圖 1-3-1-1)

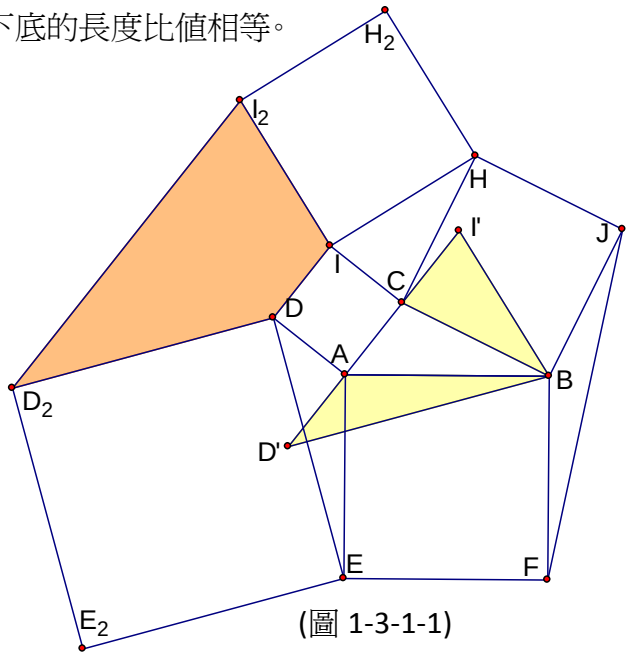
以 $\overline{AC}$ 向兩邊各延長一倍，得兩點 I',D'，且

$\overline{AC}=\overline{I'C}=\overline{AD'}$

$\therefore \overline{I'D'}=3\overline{CA}=3\overline{ID}$

$\overline{BC}=\overline{HC},\overline{I'C}=\overline{IC},\angle I'CB=\angle ICH$

故 $\Delta ICH\cong\Delta I'CB$



(圖 1-3-1-1)

同理 $\Delta DAE \cong \Delta D'AB$

$\because \overleftrightarrow{I'B} \perp \overline{IH} \perp \overline{II_2}$ 且 $\left|\overline{I'B}\right| = \left|\overline{HI}\right| = \left|\overline{II_2}\right| \therefore \overline{I'B} = \overline{I_2I}$

$\because \overleftrightarrow{BD'} \perp \overline{DE} \perp \overline{DD_2}$ 且 $\left|\overline{BD'}\right| = \left|\overline{DE}\right| = \left|\overline{DD_2}\right| \therefore \overline{BD'} = \overline{DD_2}$

$\overline{I_2D_2} = \overline{I_2I} + \overline{ID} + \overline{DD_2}$

$= \overline{ID} + \overline{I'B} + \overline{BD'}$

$= \overline{ID} + \overline{I'D'}$

$= \overline{ID} + 3\overline{ID} = 4\overline{ID}$

所以 $\overline{ID} // \overline{I_2D_2}$ ，又 $\overline{II_2}$ 不平行 $\overline{DD_2}$ $\therefore$ IDD_2I_2 爲梯形。

同理可證，另兩邊衍生形亦爲梯形，且上下底長度比值相等。

2.證明第三層衍生形亦爲梯形(圖 1-3-1-2)

$\because \overline{AD} \perp \overline{ID}$ 且 $\overline{I_2D_2} \perp \overline{D_2D_3}$ ，又 $\overline{ID} // \overline{I_2D_2}$

$\therefore \overline{AD} // \overline{D_2D_3}$

$\because \overline{AE} \perp \overline{EF}$ 且 $\overline{E_2F_2} \perp \overline{E_2E_3}$,又 $\overline{EF} // \overline{E_2F_2}$

$\therefore \overline{AE} // \overline{E_2E_3}$

$$\frac{\left|\overline{D_2D_3}\right|}{\left|\overline{AD}\right|} = \frac{\left|\overline{I_2D_2}\right|}{\left|\overline{ID}\right|} = 4$$

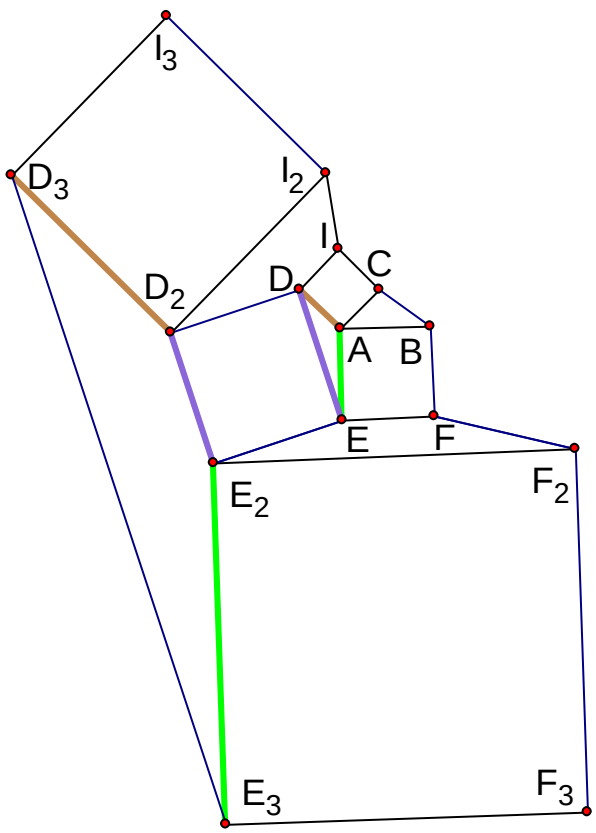
$$\frac{\left|\overline{E_2E_3}\right|}{\left|\overline{AE}\right|} = \frac{\left|\overline{E_2F_2}\right|}{\left|\overline{EF}\right|} = 4$$

$$\frac{\left|\overline{D_2D_3}\right|}{\left|\overline{AD}\right|} = \frac{\left|\overline{E_2E_3}\right|}{\left|\overline{AE}\right|}$$

$$\overline{AD} = \frac{1}{4}\overline{D_2D_3}$$

$$\overline{AE} = \frac{1}{4}\overline{E_2E_3}$$

$$\overline{DA} + \overline{AE} = \overline{DE} = \overline{D_2E_2}$$



(圖 1-3-1-2)

$4\overrightarrow{DA}+4\overrightarrow{AE}=4\overrightarrow{D_2E_2}$

$4\overrightarrow{DA}+4\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{D_2E_2}=5\overrightarrow{D_2E_2}=\overrightarrow{D_3E_3}$

$\because \overrightarrow{D_2E_2}//\overrightarrow{D_3E_3}$，又 $\overrightarrow{D_2D_3}$ 與 $\overrightarrow{E_2E_3}$ 不平行

$\therefore$四邊形$D_2E_2D_3E_3$爲梯形

另外兩邊，同理可證。

3.證明第二層後的衍生形皆爲梯形

設第 $n+1$ 層衍生形爲梯形，且 $\dfrac{\text{第}n+1\text{層下底長}}{\text{第}n+1\text{層上底長}}=f(n)$ （$n\geq 1$）

已知 $n=2$，$n=3$ 時成立(由 1.2.得知 $f(2)=4$，$f(3)=5$ 成立)。

當 $n=k-2$，$k-1$ 成立時($k\in$奇數)，則 $f(k-2)\overrightarrow{I_{k-2}D_{k-2}}=\overrightarrow{I_{k-1}D_{k-1}}$

$$f(k-2)\overrightarrow{I_{k-2}D_{k-2}}=\overrightarrow{I_{k-1}I_{k-2}}+\overrightarrow{I_{k-2}D_{k-2}}+\overrightarrow{D_{k-2}D_{k-1}}$$

$$(f(k-2)-1)\overrightarrow{I_{k-2}D_{k-2}}=\overrightarrow{I_{k-1}I_{k-2}}+\overrightarrow{D_{k-2}D_{k-1}}$$

$$\frac{(f(k-2)-1)}{f(k-2)}\overrightarrow{I_{k-1}D_{k-1}}=\overrightarrow{I_{k-1}I_{k-2}}+\overrightarrow{D_{k-2}D_{k-1}}$$

$$\frac{(f(k-2)-1)}{f(k-2)}\overrightarrow{I_kD_k}=\overrightarrow{I_{k-1}I_{k-2}}+\overrightarrow{D_{k-2}D_{k-1}}$$

$$f(k-1)\overrightarrow{D_{k-1}E_{k-1}}=\overrightarrow{D_kE_k}$$

$$f(k-1)\overrightarrow{D_{k-1}D_{k-2}}=\overrightarrow{D_{k+1}D_k}$$ (同乘虛數 $-i$)

同理 $f(k-1)\overrightarrow{I_{k-1}I_{k-2}}=\overrightarrow{I_{k+1}I_k}$

$$\overrightarrow{I_{k+1}D_{k+1}}=\overrightarrow{I_{k+1}I_k}+\overrightarrow{I_kD_k}+\overrightarrow{D_kD_{k+1}}$$

$$=f(k-1)(\overrightarrow{I_{k-1}I_{k-2}}+\overrightarrow{D_{k-2}D_{k-1}})+\overrightarrow{I_kD_k}$$

$$=f(k-1)(\frac{(f(k-2)-1)}{f(k-2)}\overrightarrow{I_kD_k})+\overrightarrow{I_kD_k}$$

$$=\frac{(f(k-1)f(k-2)-f(k-1)+f(k-2))}{f(k-2)}\overrightarrow{I_kD_k}$$

$\because \overrightarrow{I_{k+1}D_{k+1}}//\overrightarrow{I_kD_k}$

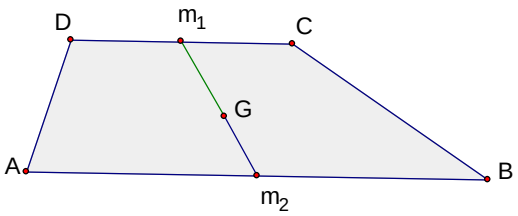
$\therefore I_{k+1}D_{k+1}D_kI_k$爲梯形

同理： $H_{k+1}J_{k+1}J_kH_k$、$E_{k+1}F_{k+1}F_kE_k$亦爲梯形

同理：當 $k \in$ 偶數 ，假設亦成立

由數學歸納法得知：每一層衍生形皆爲梯形，且同層梯形上下底比值相等

引理 1-3-2：令梯形 $ABCD$的重心爲 G，上下底中點分別爲 m_1, m_2 ，上下底長度分別爲 a, b ($a < b$)，則 $\overrightarrow{Gm_1} = \dfrac{a+2b}{3(a+b)}\overrightarrow{m_2m_1}$(圖1-3-2-1)



(圖 1-3-2-1)

證明：

延長 AD,BC，使之交於一點 E

作$\overrightarrow{Em_1}$ ，交$\overline{AB}$於F

$$\because \frac{\overline{ED}}{\overline{EA}} = \frac{a}{b} = \frac{\overline{Dm_1}}{\overline{AF}} = \frac{a/2}{b/2}$$

$\therefore F = m_2$

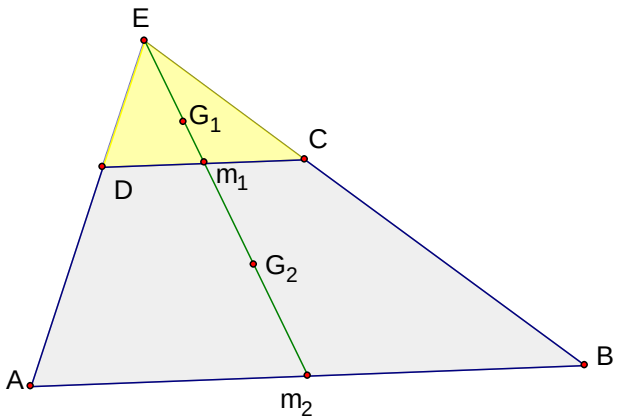
$$\frac{area\Delta EDC}{areaABCD} = \frac{a^2}{b^2 - a^2}$$

設$\overline{Em_1} = ar$,則$\overline{m_1m_2} = (b-a)r$

令ΔEDC的重心爲G_1, ΔEAB的重心爲G_2

$$\overline{G_1G_2} = \frac{ar + 2br - 3ar}{3} = \frac{2r(b-a)}{3}$$

設$\overline{GG_2} = x$



(圖 1-3-2-2)

根據重心定義，可得知 G 點必在$\overline{G_1G_2}$ 上

且 $\dfrac{b^2 - a^2}{a^2} = \dfrac{2r(b-a)/3}{x}$,解得 $x = \dfrac{2a^2r}{3(b+a)}$

$$\frac{\overline{Gm_1}}{\overline{m_2m_1}} = \frac{\overline{GG_2} + \overline{G_2m_1}}{(b-a)r} = \frac{[2a^2r + (2br - 3ar)(a+b)]/3(a+b)}{(b-a)r} = \frac{a+2b}{3(a+b)}$$

故$\overrightarrow{Gm_1} = \dfrac{a+2b}{3(a+b)}\overrightarrow{m_2m_1}$ 得證

定理 1.3：

令第 n 層的三個衍生形之重心分別爲 A_n, B_n, C_n，相鄰的三個正方形的重心分別爲 A_n^2, B_n^2, C_n^2，設原三角形的重心爲 G、$\Delta A_n B_n C_n$ 的重心爲 G_1、$\Delta A_n^2 B_n^2 C_n^2$ 的重心爲 G_2、$\Delta I_n J_n E_n$ 的重心爲 G_3、$\Delta D_n H_n F_n$ 的重心爲 G_4；則 $G = G_1 = G_2 = G_3 = G_4$

證明：

設第 n 層衍生形的上底中點分別爲 m_{nA}, m_{nB}, m_{nC}，下底中點分別爲 m_{na}, m_{nb}, m_{nc}

下底長=r 上底長 (r>1)，上底向量分別爲 $\overrightarrow{X_n}, \overrightarrow{Y_n}, \overrightarrow{Z_n}$，且 $\overrightarrow{X_n} + \overrightarrow{Y_n} + \overrightarrow{Z_n} = \vec{0}$

下底向量分別爲 $\overrightarrow{x_n}, \overrightarrow{y_n}, \overrightarrow{z_n}$，且 $\overrightarrow{x_n} + \overrightarrow{y_n} + \overrightarrow{z_n} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_n} + \overrightarrow{OB_n} + \overrightarrow{OC_n})$$

$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{Om_{nA}} + \overrightarrow{Om_{nB}} + \overrightarrow{Om_{nC}}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{m_{nA}A_n} + \overrightarrow{m_{nB}B_n} + \overrightarrow{m_{nC}C_n})$$

$$= \overrightarrow{OG} + \frac{1+2r}{9+3r}(\overrightarrow{m_{nA}m_{na}} + \overrightarrow{m_{nB}m_{nb}} + \overrightarrow{m_{nC}m_{nc}})$$

$$= \overrightarrow{OG} + \frac{1+2r}{9+3r}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{x_n} + i\overrightarrow{x_{n-1}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{X_n} + \frac{1}{2}\overrightarrow{y_n} + i\overrightarrow{y_{n-1}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{Y_n} + \frac{1}{2}\overrightarrow{z_n} + i\overrightarrow{z_{n-1}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{Z_n}\right)$$

$$= \overrightarrow{OG} + \frac{1+2r}{18+6}(\overrightarrow{x_n} + \overrightarrow{y_n} + \overrightarrow{z_n}) + \frac{(1+2r)i}{9+3r}(\overrightarrow{x_{n-1}} + \overrightarrow{y_{n-1}} + \overrightarrow{z_{n-1}}) + \frac{1+2r}{18+6}(\overrightarrow{X_n} + \overrightarrow{Y_n}$$

$$= \overrightarrow{OG}$$

$$G_1 = G$$

$$\overrightarrow{OG_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_n^2} + \overrightarrow{OB_n^2} + \overrightarrow{OC_n^2})$$

$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{Om_{(n-1a)}} + \overrightarrow{Om_{n-(b1)}} + \overrightarrow{Om_{n-c)}}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{m_{n-a}A_{n(1)}^2} + \overrightarrow{m_{n-b}B_{n(1)}^2} + \overrightarrow{m_{1n)-c}C_{n}^2})$$

$$= \overrightarrow{OG} + \frac{i}{6}(\overrightarrow{x_{n-1}} + \overrightarrow{y_{n-1}} + \overrightarrow{z_{n-1}})$$

$$= \overrightarrow{OG}$$

$$G_2 = G$$

$$\overrightarrow{OG_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OI_n} + \overrightarrow{OJ_n} + \overrightarrow{OE_n})$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OI_{n-1}}+\overrightarrow{OJ_{n-1}}+\overrightarrow{OE_{n-1}})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{I_{n-1}I_n}+\overrightarrow{J_{n-1}J_n}+\overrightarrow{E_{n-1}E_n})$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OI_{n-1}}+\overrightarrow{OJ_{n-1}}+\overrightarrow{OE_{n-1}})+\frac{i}{3}(\overrightarrow{x_{n-1}}+\overrightarrow{y_{n-1}}+\overrightarrow{z_{n-1}})$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OI_{n-1}}+\overrightarrow{OJ_{n-1}}+\overrightarrow{OE_{n-1}})$$

$$\vdots$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OE})$$

$\overrightarrow{OG_3}=\overrightarrow{OG}$

$G_3=G$

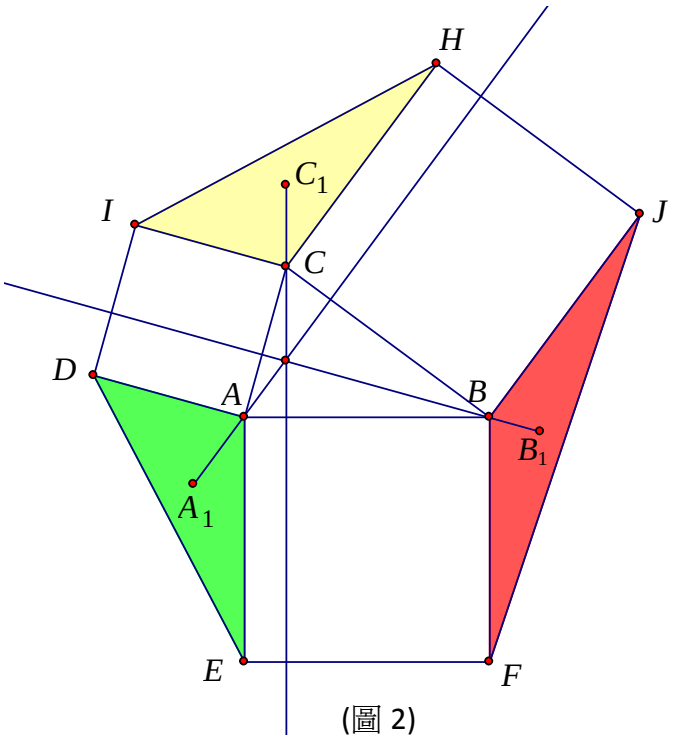
同理可證 $G_4=G$

故 $G=G_1=G_2=G_3=G_4$

定理 2：

直線 C_1C 與直線 B_1B 與直線 A_1A 相交於一點，此點爲 ΔABC 的垂心，如圖 2 所示。

[1]p.65 第 327,328 題



(圖 2)

證明：

利用引理 1：$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$

$\overrightarrow{A_1A}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CH}$，得 $\overline{A_1A}//\overline{CH}$，且 $\overline{A_1A}\perp\overline{BC}$。

$\overrightarrow{B_1B}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{JB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，得 $\overline{B_1B}//\overline{CI}$，且 $\overline{B_1B}\perp\overline{CA}$。

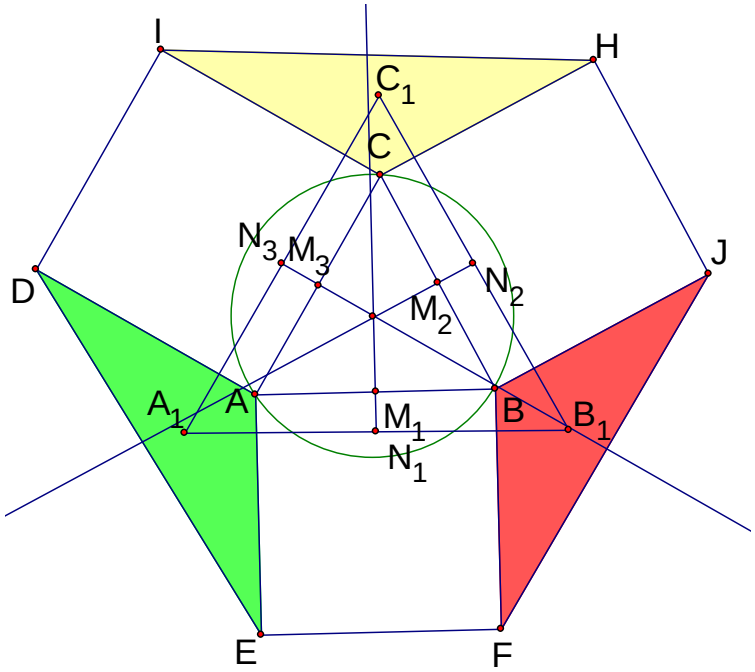
$\overrightarrow{C_1C}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$，得 $\overline{C_1C}//\overline{AE}$，且 $\overline{C_1C}\perp\overline{BA}$。

故直線 C_1C 與直線 B_1B 與直線 A_1A 相交於 ΔABC 的垂心。

定理 3：

令 ΔABC 的中點分別爲 M_1, M_2, M_3 、令 $\Delta A_1B_1C_1$ 的中點分別爲 N_1, N_2, N_3 ，則直線

M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 交於一點，且此點爲 ΔABC 的外心，如圖 3 所示。



(圖 3)

證明：

$$\overline{M_1N_1}\cdot\overline{AB}=(\frac{1}{2}\overline{B_1A_1}+\overline{BB_1}+\frac{1}{2}\overline{AB})\cdot\overline{AB}$$

$$=(\frac{1}{2}\overline{AA_1}+\frac{1}{2}\overline{BB_1})\cdot\overline{AB}=(\frac{1}{6}\overline{AD}+\frac{1}{6}\overline{AE}+\frac{1}{6}\overline{BF}+\frac{1}{6}\overline{BJ})\cdot\overline{AB}$$

$$=\frac{1}{6}(\overline{AD}\cdot\overline{AB}+\overline{AE}\cdot\overline{AB}+\overline{BF}\cdot\overline{AB}+\overline{BJ}\cdot\overline{AB})=\frac{1}{6}(\overline{AD}\cdot\overline{AB}+\overline{BJ}\cdot\overline{AB})=\frac{1}{6}\overline{AB}\cdot(\overline{AD}+\overline{BJ})$$

$$=\frac{1}{6}\overline{AB}\cdot(\overline{CI}+\overline{CH})=\frac{1}{6}\overline{AB}\cdot 3\overline{CC_1}\ (\text{根據定理 2 得知}\ \overline{C_1C}\cdot\overline{AB}=0)=0$$

所以 $\overline{M_1N_1}\perp\overline{AB}$ ，故 $\overline{M_1N_1}$ 爲 $\overline{AB}$ 的中垂線

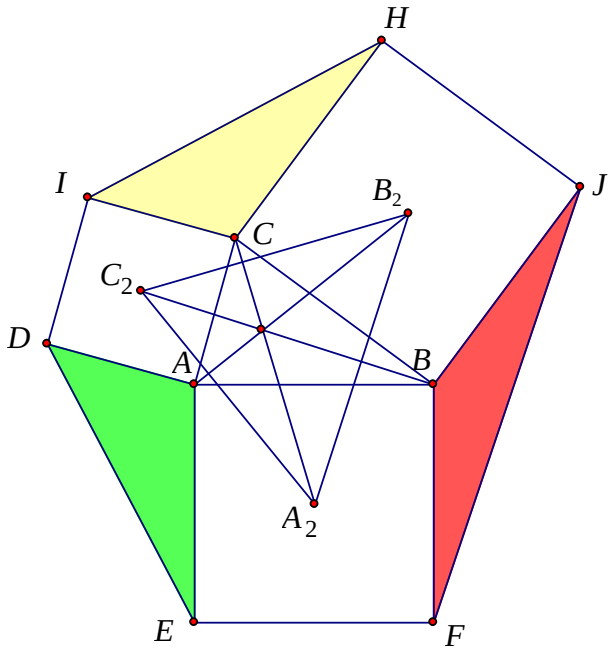
同理可證：

$\overline{M_2N_2}\perp\overline{BC}$ ， $\overline{M_2N_2}$ 爲 $\overline{BC}$ 的中垂線 ； $\overline{M_3N_3}\perp\overline{AC}$ ， $\overline{M_3N_3}$ 爲 $\overline{AC}$ 的中垂線。

故 M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 交 ΔABC 於一點，且此點爲 ΔABC 的外心。

定理 4：

直線 C_2B 與直線 A_2C 與直線 B_2A 相交於一點，此點爲 $\Delta A_2B_2C_2$ 的垂心，如圖 4 所示。



(圖 4)

證明：

$$\overrightarrow{A_2C}\cdot\overrightarrow{B_2C_2}$$

$$=(\overrightarrow{A_2A}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{B_2C}+\overrightarrow{CC_2})$$

$$=(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC})\cdot(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CI}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA})$$

$$=(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})\cdot(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CI})$$

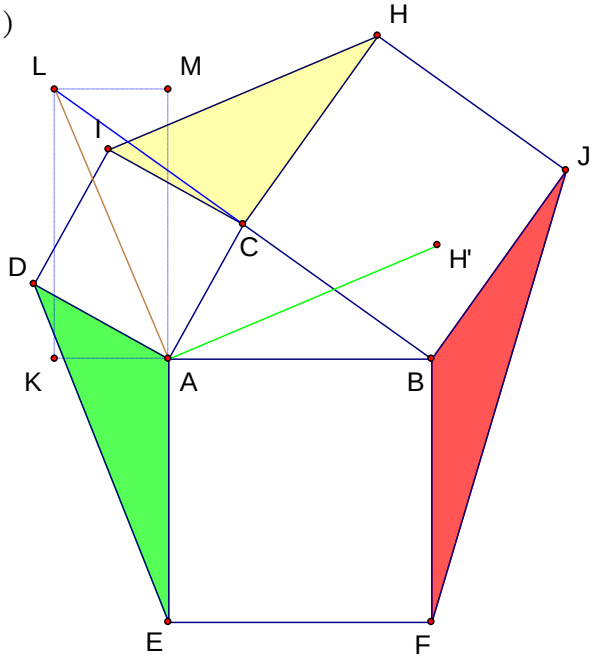
$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CI})$$

$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{CI})$$

$$=\frac{1}{4}[\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{EA}\cdot(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CI})+\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AC}]$$

$$=\frac{1}{4}[\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC})-\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{HI}]$$

(以 $\overline{BC}$ 方向延伸兩倍得 $\overline{BL}=2\overline{BC}$，如圖 4-1 所示。)



(圖 4-1)

$$=\frac{1}{4}[\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BL})-\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{HI}]$$

$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{HI})$$

$\angle LCA=180^\circ-\angle BCA=\angle HCI$

$\overline{LC}=\overline{BC}=\overline{HC}$

$\overline{AC}=\overline{IC}$

$\Delta LCA\cong\Delta HCI\,(SAS全等)$

又 $\overline{LC}\perp\overline{HC}$，故 ΔLCA 可視爲 ΔHCI 以 C 爲頂點，逆時針旋轉 90° 的三角形。

因此 $\overline{HI}\perp\overline{LA}$。

將 $\overline{HI}$ 平移使 IA 兩點重合得 H' 點，且 $\overline{AH'}\perp\overline{AL}$ (逆時針 90° 重合)。又 $\overline{EA}\perp\overline{BA}$ (逆時針 90° 重合)，

故 $\angle LAB=\angle EAH'$—(1)

$\overline{EA}=\overline{BA}$，$\overline{AH'}=\overline{IH}=\overline{AL}$—(2)

(1)、(2)得知 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{HI}$ $\overrightarrow{A_2C}\cdot\overrightarrow{B_2C_2}=\vec{0}$

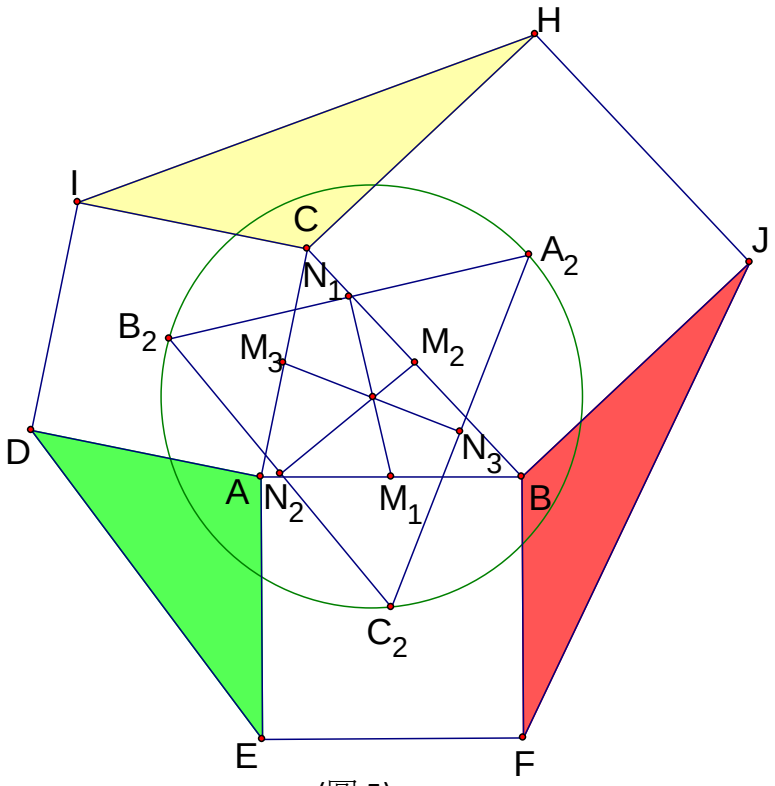
$\overrightarrow{A_2C}\perp\overrightarrow{B_2C_2}$，同理可證 $\overrightarrow{AB_2}\perp\overrightarrow{A_2C_2}$，$\overrightarrow{BC_2}\perp\overrightarrow{A_2B_2}$。

故直線 C_2B 與直線 B_2A 與直線 B_2A 相交於一點，此點爲 $\Delta A_2B_2C_2$ 的垂心。

定理 5：

令 ΔABC 的中點分別爲 M_1, M_2, M_3 、令 $\Delta A_2B_2C_2$ 的中點分別爲 N_1, N_2, N_3 ，則線段

M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 交於一點，且此點爲 $\Delta A_2B_2C_2$ 的外心，如圖 5 所示。



(圖 5)

證明：

$$\overrightarrow{M_1N_1} = (\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_2} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B_2C_2}) = (\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BJ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B_2C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CC_2})$$

$$= (\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BJ} + \frac{1}{4}\overrightarrow{HC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CI} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CA})$$

$$= (\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CH} + \frac{1}{4}\overrightarrow{HC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CI}) = (\frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CH} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CI})$$

$$= (\frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{EA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_2C}$$

(由定理 4 得知) $\overrightarrow{B_2C_2} \cdot \overrightarrow{A_2C} = \vec{0}$

$\overrightarrow{B_2C_2} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{A_2C} = \vec{0}$ $\overrightarrow{B_2C_2} \cdot \overrightarrow{M_1N_1} = \vec{0}$ $\overrightarrow{B_2C_2} \perp \overrightarrow{M_1N_1}$ $\overleftrightarrow{M_1N_1}$ 爲 $\overleftrightarrow{B_2C_2}$ 之中垂線。

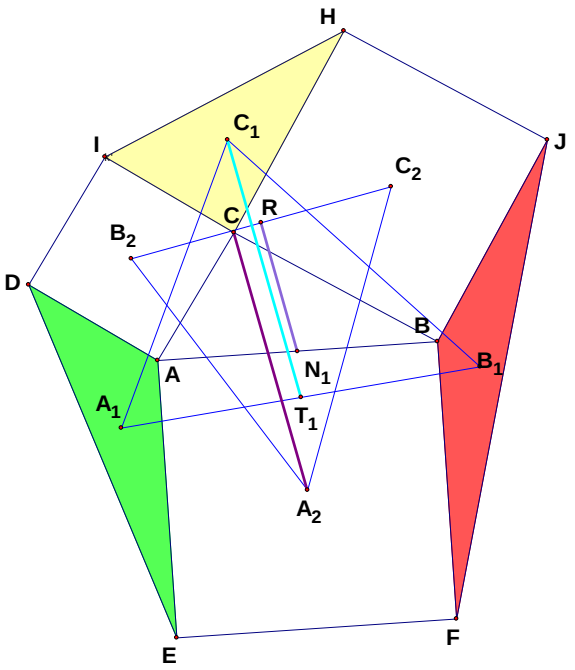
同理可證 $\overrightarrow{A_2C_2} \perp \overrightarrow{M_2N_2}$ $\overrightarrow{A_2B_2} \perp \overrightarrow{M_3N_3}$ $\overleftrightarrow{M_2N_2}$ 爲 $\overleftrightarrow{A_2C_2}$ 之中垂線。

$\overleftrightarrow{M_3N_3}$ 爲 $\overleftrightarrow{A_2B_2}$ 之中垂線。

因三角形三中垂線交於一點，且此交點爲外心，故得證。

定理 6：

設 ΔABC 與 $\Delta A_2B_2C_2$ 之相對頂角連線段爲 $\overline{A_2C}$ 、對邊中點連線段爲 $\overline{RN_1}$ 與 $\Delta A_1B_1C_1$ 之中線 $\overline{C_1T_1}$ ，則 $\overline{A_2C}//\overline{RN_1}//\overline{C_1T_1}$ 且 $\overline{A_2C}=\overline{C_1T_1}=2\overline{RN_1}$ ，如圖 6 所示。



(圖 6)

證明：

由定理 4 得知 $\overrightarrow{A_2C}\perp\overrightarrow{B_2C_2}$ ，由定理 5 得知 $\overrightarrow{RN_1}\perp\overrightarrow{B_2C_2}$ ，因此 $\overrightarrow{A_2C}//\overrightarrow{RN_1}$ 。

$$\overrightarrow{C_1T_1}-\overrightarrow{CA_2}=\overrightarrow{C_1T_1}+\overrightarrow{A_2C}=\overrightarrow{C_1A_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2A}+\overrightarrow{AC}$$

$$=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{6}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{EA}$$

$$+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BJ}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{1}{6}\overrightarrow{HC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{IC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\vec{0}$$

$\therefore \overrightarrow{C_1T_1} = \overrightarrow{CA_2}$ ，故得 $\overline{C_1T_1} // \overline{CA_2}$ 且 $\overline{C_1T_1} = \overline{CA_2}$ 。

$$\overrightarrow{N_1R} = \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{B_2B} + \overrightarrow{N_1B_2}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{JB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_2B_2}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{JB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CH} + \frac{1}{4}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{JB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{JB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{IC}$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{HC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{IC}$$

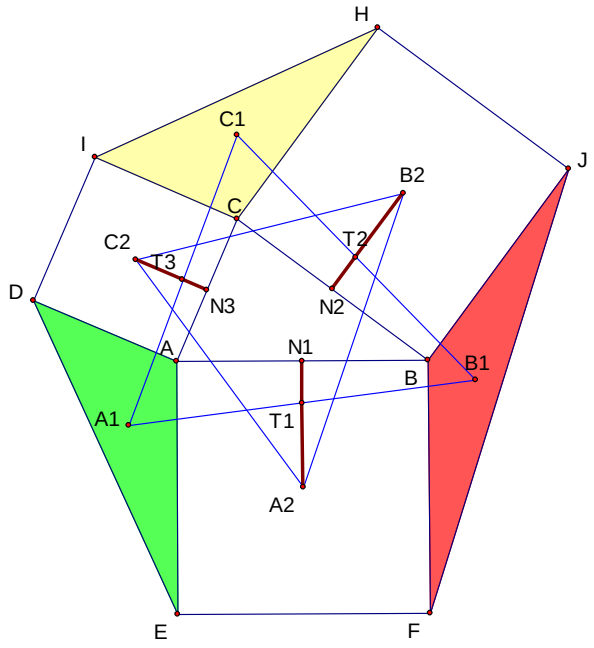
$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + (\frac{1}{4}\overrightarrow{HC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{EA}) - \frac{1}{4}\overrightarrow{EA}$$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$ ，又 $\overrightarrow{CA_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

即 $\overrightarrow{C_1T_1} = 2\overrightarrow{N_1R}$ ，故 $\overline{C_1T_1} // \overline{RN_1}$ 且 $\overline{C_1T_1} = 2\overline{RN_1}$ 。

定理 7：

令 ΔABC 之中點分別爲 N_1, N_2, N_3，連接 $\overline{A_2N_1}, \overline{B_2N_2}, \overline{C_2N_3}$，設此三線段分別交 $\Delta A_1B_1C_1$ 之三邊於 T_1, T_2, T_3，則 T_1, T_2, T_3 爲 $\Delta A_1B_1C_1$ 三邊之中點、且被截成 $\frac{\overline{A_2T_1}}{\overline{N_1T_1}} = \frac{\overline{B_2T_2}}{\overline{N_2T_2}} = \frac{\overline{C_2T_3}}{\overline{N_3T_3}} = 2$，如圖 7 所示。



(圖 7)

證明：

設 T_A、T_C、T_E 分爲 $\overline{A_1B_1}$、$\overline{C_1B_1}$、$\overline{C_1A_1}$ 之中點；T_B、T_D、T_F 分爲 ΔABA_2、ΔBCB_2、ΔCAC_2 之重心。因

$$\overrightarrow{A_2T_A} = \overrightarrow{A_2A_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2A} + \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{6}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BF} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BJ}$$

$$= \frac{1}{6}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{CH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EA}$$

$$\overrightarrow{A_2T_B} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A_2A} + \frac{1}{3}\overrightarrow{A_2B} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{EA}$$

得 T_A 在 $\overline{A_1B_1}$ 線段上、T_B 在 $\overline{A_2N_1}$ 線段上，故兩點爲同一點，即在 $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2N_1}$ 交點 T_1 上。

即 $T_A = T_B = T_1$，所以 T_1 爲線段 $\overline{A_1B_1}$ 的中點，且爲 $\Delta\overline{ABA_2}$ 之重心，得 $\frac{\overline{A_2T_1}}{\overline{N_1T_1}} = 2$。

同理可證

得T_C在$\overline{C_1B_1}$線段上、T_D在$\overline{B_2N_2}$線段上，故兩點爲同一點，即在$\overline{C_1B_1}, \overline{B_2N_2}$交點$T_2$上。

即$T_C = T_D = T_2$，所以 T_2 爲線段$\overline{C_1B_1}$的中點，且爲$\Delta\overline{BCB_2}$之重心，得$\dfrac{\overline{B_2T_2}}{\overline{N_2T_2}} = 2$。

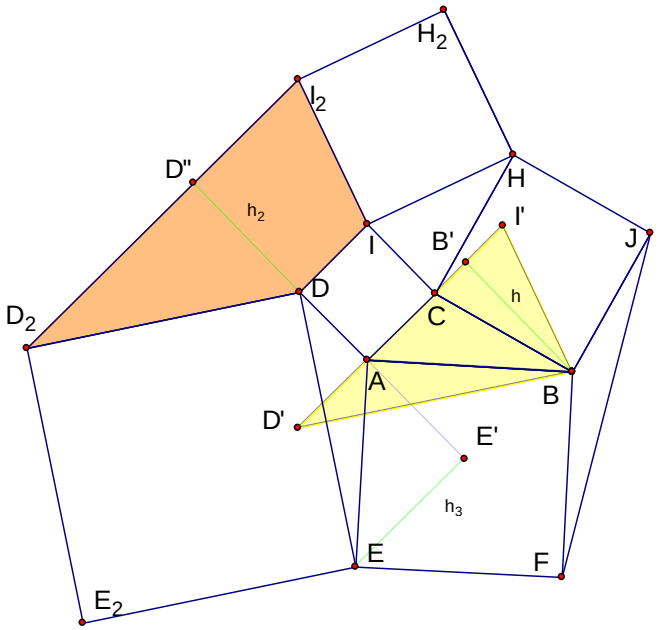
得T_E在$\overline{C_1A_1}$線段上、T_F在$\overline{C_3N_3}$線段上，兩點爲同一點，即在$\overline{C_1A_1}$、$\overline{C_3N_3}$交點T_3上

即$T_R = T_F = T_3$，所以 T_3 爲線段$\overline{C_1A_1}$的中點，且爲$\Delta\overline{CAC_2}$之重心，得$\dfrac{\overline{C_2T_3}}{\overline{N_3T_3}} = 2$。

(三)、探討第 n 層衍生形與原三角形的面積關係

定理 9.1：

第二層三個衍生形面積相等，且爲原三角形的五倍，如圖 9-1 所示。



(圖 9-1)

令 ΔABC 、 ΔADE 、梯形 IDD_2I_2 的高分別爲 h_1 、 h_2 、 h_3 ，垂足分別爲 B' 、 E' 、 D' 。

$\because \overline{BD'}=\overline{DE}=\overline{DD_2}$ ， $\angle BD'I'=\angle EDE'=180^\circ-\angle IDD_2=\angle DD_2D''$

$\angle BB'D'=\angle DE'E=\angle DD''D_2=90^\circ \therefore \Delta BD'B'\cong\Delta EDE'\cong\Delta DD_2D''$ ，故 $h_1=h_2=h_3$

梯形 IDI_2H_2 面積 $=\dfrac{(\overline{ID}+\overline{H_2I_2})h_2}{2}=\dfrac{(\overline{ID}+4\overline{ID})h_1}{2}=5\times\dfrac{\overline{ID}h_1}{2}=5\Delta ABC$

另外兩邊梯形，同理可證。

定理 10：

令 a_n 爲第 n 層梯形與 ΔABC 面積的比值，則 $\begin{cases} a_1 = 1，a_2 = 5 \\ a_n = 5a_{n-1} - a_{n-2}，n \geq 3 \end{cases}$。

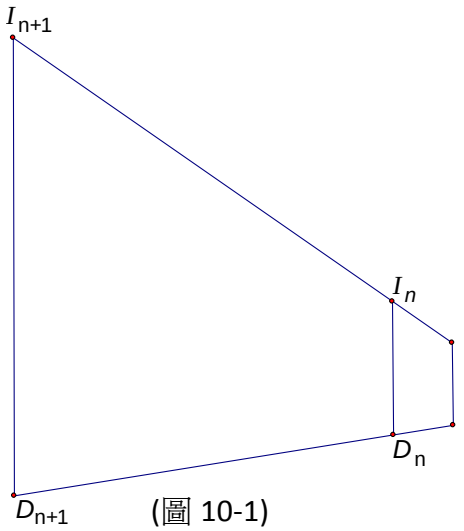
令 a_n 爲第 $n(n \geq 3)$ 層梯形與 ΔABC 面積比值，其中 $a_1 = 1, a_2 = 5$。

設 $\angle ADE = \theta$，並只考慮左方衍生出的梯形，可列出以下表格：

層數	上底	斜邊	下底	高	面積	面積比值
1(ΔADE)	無	$\overline{ID}$	$\overline{D_2E_2}$	$\overline{ID}\sin\theta$	$\dfrac{\overline{ID}\times\overline{D_2E_2}\sin\theta}{2}$	1
2	$\overline{ID}$	$\overline{D_2E_2}$	$4\overline{ID}$	$\overline{D_2E_2}\sin\theta$	$\dfrac{(1+4)\overline{ID}\times\overline{D_2E_2}\sin\theta}{2}$	5
3	$\overline{D_2E_2}$	$4\overline{ID}$	$5\overline{D_2E_2}$	$4\overline{ID}\sin\theta$	$\dfrac{(1+5)\overline{D_2E_2}\times 4\overline{ID}\sin\theta}{2}$	24
⋮	⋮				⋮	⋮
n-1(奇數)	$a\overline{D_2E_2}$	$k\overline{ID}$	$b\overline{D_2E_2}$	$k\overline{ID}\sin\theta$	$\dfrac{(a+b)\overline{D_2E_2}\times k\overline{ID}\sin\theta}{2}$	$k(a+b)$
n(偶數)	$c\overline{ID}$	$j\overline{D_2E_2}$	$d\overline{ID}$	$j\overline{D_2E_2}\sin\theta$	$\dfrac{(c+d)\overline{ID}\times j\overline{D_2E_2}\sin\theta}{2}$	$j(c+d)$

根據以上表格，我們可以得知欲求面積比值只與 $\overline{ID}\times\overline{D_2E_2}$ 前的常數有關，

又因爲從每一層梯形的下底衍生出正方形的關係，使得第任意 k 層的下底=k+1 層的斜邊=k+2 層的上底，即上表中的(k=c 且 b=j)。



(圖 10-1)

令第 k 層的下底=b_{k+1} ($k \geq 0$)

由於第任意 k 層的下底=k+2 層的上底

且任意兩層梯形斜邊平行，故可以將第 k 層

梯形與第 k+2 層合併如圖 10-1 所示。

根據梯形中位線的推廣定理：

1、當 k 爲奇數

$(b_k - b_{k-2})$:$(b_{k+2} - b_k)$=b_{k-1}: b_{k+1}

$b_k b_{k+1} - b_{k-2} b_{k+1}$=$b_{k-1} b_{k+2} - b_k b_{k-1}$

$b_k b_{k+1} = b_{k-1} b_{k+2} + b_{k-2} b_{k+1} - b_k b_{k-1}$

$= b_{k-1} b_{k+2} + b_{k-2} b_{k+1} - (b_{k-2} b_{k+1} + b_{k-3} b_{k+2} - b_{k-3} b_{k-1})$

$= b_{k-1} b_{k+2} - b_{k-3} b_{k+2} + b_{k-3} b_{k+1} - b_{k-4} b_{k-1} - b_{k-3} b_{k-1}$

$\vdots$

$\vdots$

$= b_{k-1} b_{k+2} + b_1 b_4 - b_2 b_3 \Rightarrow b_k b_{k+1} = b_{k-1} b_{k+2} + 1 \times 5 - 4 \Rightarrow b_k b_{k+1} = b_{k-1} b_{k+2} + 1$

2、當 k 爲偶數

$(b_k - b_{k-2}) : (b_{k+2} - b_k) = b_{k-1} : b_{k+1}$

$b_k b_{k+1} - b_{k-2} b_{k+1} = b_{k-1} b_{k+2} - b_k b_{k-1}$

$b_k b_{k+1} = b_{k-1} b_{k+2} + b_{k-2} b_{k+1} - b_k b_{k-1}$

$= b_{k-1} b_{k+2} + b_{k-2} b_{k+1} - (b_{k-2} b_{k+1} + b_{k-3} b_{k+2} - b_{k-3} b_{k-1})$

$= b_{k-1} b_{k+2} - b_{k-3} b_{k+2} + b_{k-3} b_{k+1} - b_{k-4} b_{k-1} - b_{k-3} b_{k-1}$

$\vdots$

$\vdots$

$= b_{k-1} b_{k+2} + b_1 b_4 - b_2 b_3 \Rightarrow b_k b_{k+1} = b_{k-1} b_{k+2} - 1 \times 5 + 4 \Rightarrow b_k b_{k+1} = b_{k-1} b_{k+2} - 1$

小結：當 k 爲奇數時，$b_k b_{k+1} = b_{k-1} b_{k+2} + 1$，當 k 爲偶數時，$b_k b_{k+1} = b_{k-1} b_{k+2} - 1$

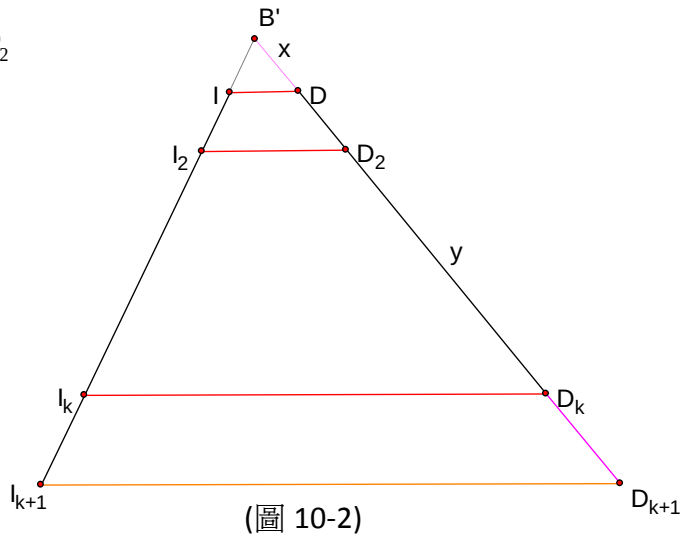
3、將偶數層梯形合併，如圖 10-2 所示，並以兩斜邊作延長線交於一點 B' 。

設 $\overline{B'D} = x$ 、 $\overline{DD_k} = y \because \Delta B'ID \sim \Delta B'I_2D_2$

$\therefore \quad \dfrac{x}{x + \overline{DD_2}} = \dfrac{\overline{ID}}{\overline{I_2D_2}} \Rightarrow \dfrac{x}{x + \overline{I_2D_2}} = \dfrac{\overline{ID}}{4\overline{ID}}$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{4}(x + \overline{D_2E_2})$ 得 $x = \dfrac{1}{3}\overline{D_2E_2}$

$\because \Delta B'ID \sim \Delta B'I_{k+1}D_{k+1}$



(圖 10-2)

$$\therefore \frac{\frac{1}{3}\overline{D_2E_2}}{\frac{1}{3}\overline{D_2E_2}+y+b_{k+1}\overline{D_2E_2}}=\frac{b_1\overline{ID}}{b_{k+2}\overline{ID}} \Rightarrow \frac{1}{3}b_{k+2}\overline{D_2E_2}=b_1(\frac{1}{3}\overline{D_2E_2}+y+b_{k+1}\overline{D_2E_2})$$

$$\Rightarrow b_{k+2}=\frac{(\frac{1}{3}\overline{D_2E_2}+y+b_{k+1}\overline{D_2E_2})}{\frac{1}{3}\overline{D_2E_2}} \Rightarrow b_{k+2}=\frac{(\overline{D_2E_2}+3y)}{\overline{D_2E_2}}+3b_{k+1}$$

$$\because \Delta B'ID \sim \Delta B'I_kD_k \therefore \frac{\frac{1}{3}\overline{D_2E_2}}{\frac{1}{3}\overline{D_2E_2}+y}=\frac{b_1\overline{ID}}{b_k\overline{ID}} \Rightarrow b_k\frac{1}{3}\overline{D_2E_2}=b_1(\frac{1}{3}\overline{D_2E_2}+y) \quad \Rightarrow b_k=\frac{(\overline{D_2E_2}+3y)}{\overline{D_2E_2}}$$

故得 $b_k+3b_{k+1}=b_{k+2}$ (當 k 爲奇數時)。

4、將奇數層梯形合併，如圖 10-3 所示，並以兩斜邊作延長線交於一點 A' 。

設 $\overline{A'D_2}=x$ 、 $\overline{D_2D_k}=y$ ，$\because \Delta A'ED_2 \sim \Delta A'I_{k+1}D_{k+1}$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+\overline{D_2D_3}}=\frac{\overline{E_2D_2}}{\overline{E_3D_3}} \Rightarrow \frac{x}{x+\overline{D_2D_3}}=\frac{\overline{E_2D_2}}{5\overline{E_2D_2}}$$

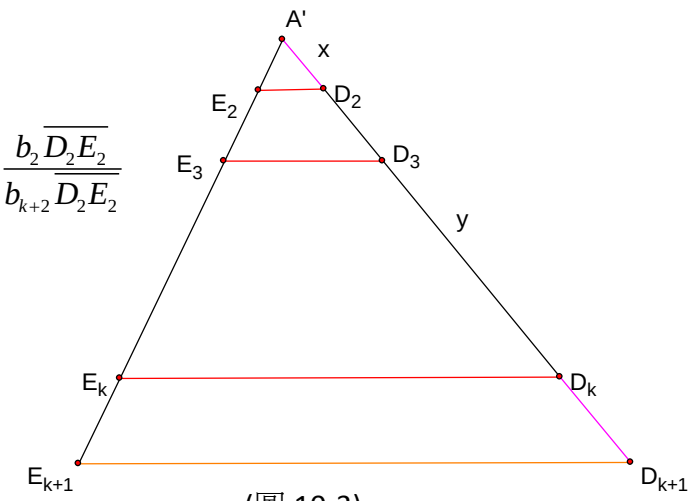
$$\Rightarrow x=\frac{1}{5}(x+\overline{D_2D_3}) \Rightarrow x=\frac{1}{4}\overline{D_2D_3} \text{ 得 } \quad x=\overline{ID}$$

$$\because \Delta A'E_2D_2 \sim \Delta A'E_{k+1}D_{k+1} \therefore \frac{\overline{ID}}{\overline{ID}+y+b_{k+1}\overline{ID}}=\frac{b_2\overline{D_2E_2}}{b_{k+2}\overline{D_2E_2}}$$

$$\Rightarrow b_{k+2}\overline{ID}=b_2(\overline{ID}+y+b_{k+1}\overline{ID}) \text{ 得}$$

$$b_{k+2}=\frac{(\overline{ID}+y+b_{k+1}\overline{ID})}{\overline{ID}}$$

$$\Rightarrow b_{k+2}=\frac{(\overline{ID}+y)}{\overline{ID}}+b_{k+1} \text{—(1)}$$



(圖 10-3)

$$\because \Delta A'E_2D_2 \sim \Delta A'E_kD_k \therefore \frac{\overline{ID}}{\overline{ID}+y}=\frac{b_1\overline{D_2E_2}}{b_k\overline{D_2E_2}} \text{ 得 } b_k\overline{ID}=b_1(\overline{ID}+y)$$

$$\Rightarrow b_k=\frac{(\overline{ID}+y)}{\overline{ID}} \text{—(2)} \quad \text{將(2)代入(1)}$$

故得 $b_k+b_{k+1}=b_{k+2}$ (當 k 爲偶數時)。

小結：當 k 爲奇數時，$b_k+3b_{k+1}=b_{k+2}$ ，當 k 爲偶數時，$b_k+b_{k+1}=b_{k+2}$

5、當 n 爲奇數時：

$$a_n + a_{n-2} = (b_n + b_{n-2})b_{n-1} + (b_{n-2} + b_{n-4})b_{n-3}$$

$$= b_n b_{n-1} + b_{n-2} b_{n-1} + b_{n-2} b_{n-3} + b_{n-4}$$

$$= b_{n-2}(b_{n-1} + b_{n-3}) + b_n b_{n-1} + b_{n-4}$$

$$= b_{n-2}(b_{n-1} + b_{n-3}) + b_{n-2} b_{n+1-1} + b_{n-5} b_{n-2}$$

$$= b_{n-2}(b_{n+1} + b_{n-1} + b_{n-3} + b_{n-5})$$

$$= b_{n-2}(b_{n-1} + b_n + b_{n-1} + b_{n-3} + b_{n-3} - b_{n-5})$$

$$= b_{n-2}(2b_{n-1} + 2b_{n-3} + b_{n-2} + 3b_{n-1} + 3b_{n-3} - b_{n}$$

$$= b_{n-2}(5b_{n-1} + 5b_{n-3}$$

$$= 5a_{n-1}$$

故 $a_n = 5a_{n-1} - a_{n-2}$

6、當 n 爲偶數時：

$$a_n + a_{n-2} = (b_n + b_{n-2})b_{n-1} + (b_{n-2} + b_{n-4})b_{n-3}$$

$$= b_n b_{n-1} + b_{n-2} b_{n-1} + b_{n-2} b_{n-3} + b_{n-4}$$

$$= b_{n-2}(b_{n-1} + b_{n-3}) + b_n b_{n-1} + b_{n-4}$$

$$= b_{n-2}(b_{n-1} + b_{n-3}) + b_{n-2} b_{n+1-1} + b_{n-5} b_{n-2}$$

$$= b_{n-2}(b_{n+1} + b_{n-1} + b_{n-3} + b_{n-5})$$

$$= b_{n-2}(b_{n-1} + 3b_n + b_{n-1} + b_{n-3} + b_{n-3} - 3b_{n-5}$$

$$= b_{n-2}(2b_{n-1} + 2b_{n-3} + 3b_{n-2} + 3b_{n-1} - 3b_{n-2} + 3b_{n}$$

$$= b_{n-2}(5b_{n-1} + 5b_{n-3}$$

故 $a_n = 5a_{n-1} - a_{n-2}$

故當 $n(n\geq 3)$ 爲任意自然數時，$a_n=5a_{n-1}-a_{n-2}$ 恆成立。

利用同樣的方法，另外兩邊皆可得到同樣的比值及關係式，又三角形面積 $\Delta ADE=\Delta BFJ=\Delta CHI$ 。因此，同一層的衍生形面積相等。

7、$a_n=5a_{n-1}-a_{n-2}\ (n\geq 3)$ ，$a_1=1, a_2=5$ ，一般式推導：

設 $a_n-\beta a_{n-1}=\alpha(a_{n-1}-\beta a_{n-2})$ ，比較原式可得 $\begin{cases}\alpha+\beta=5\\ \alpha\beta=1\end{cases}$

故 α 、β 爲方程式 $x^2-5x+1=0$ 之兩根

且 $a_n-\alpha a_{n-1}=\beta(a_{n-1}-\alpha a_{n-2})$

$$\therefore\begin{cases}a_n-\beta a_{n-1}=\alpha(a_{n-1}-\beta a_{n-2})=\alpha^2(a_{n-2}-\beta a_{n-3})=.....=\alpha^{n-2}(a_2-\beta a_1)\cdots\cdots ①\\ a_n-\alpha a_{n-1}=\beta(a_{n-1}-\beta a_{n-2})=\beta^2(a_{n-2}-\beta a_{n-3})=.....=\beta^{n-2}(a_2-\alpha a_1)\cdots\cdots ②\end{cases}$$

$① - ②\ (\alpha-\beta)a_{n-1}=(a_2-\beta a_1)\cdot\alpha^{n-2}-(a_2-\alpha a_1)\cdot\beta^{n-2}$

$$\Rightarrow a_{n-1}=(\frac{a_2-\beta a_1}{\alpha-\beta})\alpha^{n-2}-(\frac{a_2-\alpha a_1}{\alpha-\beta})\beta^{n-2}$$

$$\Rightarrow a_n=(\frac{a_2-\beta a_1}{\alpha(\alpha-\beta)})\alpha^{n}-(\frac{a_2-\alpha a_1}{\beta(\alpha-\beta)})\beta^{n}$$

令 $\frac{a_2-\beta a_1}{\alpha(\alpha-\beta)}=A$ 、$\frac{a_2-\alpha a_1}{\beta(\alpha-\beta)}=B$

$\therefore a_n=A\cdot\alpha^n-B\beta^n$

由 $x^2-5x+1=0$ ，且令 $\alpha>\beta$

解得 $\alpha=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$ ，$\beta=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$

$\therefore\alpha-\beta=\sqrt{21}$ ，且 $A=\frac{1}{\sqrt{21}}=B$ $\therefore a_n=\frac{1}{\sqrt{21}}\left[\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^n-\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^n\right](n\geq 1)$

陸、結論

一. 三個衍生形重心所形成的三角形的重心及三個正方形重心所形成的三角形的重心與原三角形的重心爲同一點。

二. 衍生形的重心與原三角形頂點兩兩相連，交於原三角形的垂心。

三. 衍生形的重心所形成的三角形三中點，與原三角形三中點兩兩分別連線，交於原三角形的外心。

四. 三個正方形的重心分別與原三角形頂點兩兩相連，交於三正方形的重心所形成的三角形的垂心。

五. 三個正方形的重心所形成的三角形中點與原三角形三中點倆倆連線，交於三個正方形的重心所形成的三角形的外心。

六. 設 ΔABC 與 $\Delta A_2B_2C_2$ 之相對頂角連線段爲 $\overline{RN_1}$ 、對邊中點連線段爲 $\overline{RN_1}$ 與 $\Delta A_1B_1C_1$ 之中線 $\overline{C_1T_1}$ ，則 $\overline{A_2C}//\overline{RN_1}//\overline{C_1T_1}$ 且 $\overline{A_2C}=\overline{C_1T_1}=2\overline{RN_1}$ 。

七. 原三角形三中點分別與正方形重心連線，衍生形三重心所形成的三角形分別與三線交於中點，且分別將三線分割成 2：1 線段長。

八. 第 2 層後的衍生形爲梯形，且同一層衍生形的面積相等。

九. 令 a_n 爲第 n 層梯形與 ΔABC 面積比值，則 $\begin{cases} a_1=1，a_2=5 \\ a_n=5a_{n-1}-a_{n-2}，n\geq 3 \end{cases}$ 。且得

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{21}}\left[\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^n-\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^n\right](n\geq 1)$$ 。

柒、未來展望

一. 若將原三角形改爲特殊四邊形(如梯形、箏形等)會不會有類似的性質呢？還是會有其他未發現的性質？

二. 若將延伸的正方形推廣至正 n 邊形，能不能找到類似於定理 2~7 的結果？

捌、參考資料

1. 笹部貞市郎 幾何學辭典
2. http://www2.chinaedu.com/101resource004/wenjianku/200831/101ktb/lanmu/F20S0961/F20S0961.htm 梯形中位線公式的推廣及其應用--于志洪

【評語】040414

本篇作品討論任意三角形三邊延伸正方形，再接著延伸三角形，再依次延伸正方形,梯形等等相關衍生形。在衍生形的重心性質上，作者有得到具體成果，在某些線段的比值上亦有相關結果。然而總體而言，整份作品成果仍嫌單薄，建議可以再朝三角形其他心的性質再多作探討。