中華民國第52屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

第一名

040413

數形合一

學校名稱：國立南科國際實驗高級中學

作者：	指導老師：
高一 許毓芳	林盈宏 王志誦

關鍵詞：等差級數、不定方程、多角數

得獎感言

初試啼聲

這次自己第一次參加科展，這趟旅程的一切都讓我非常新奇，也深深觸動了內心的科學之魂。

在這五個月的光陰，我接受了科學的洗鍊。研究的艱辛，讓我了解鍥而不捨的探索才是摘取成功碩果的秘訣；失敗的沮喪，讓我領悟接受挫折與困難的策勵是科學研究的必經之路。從熟悉佩爾方程等相關資料到證明一道難題與歸納出雙重多角數的模式與情形，著實花了我不少的心思。但在研究的過程中，成功解決難題的喜悅，也使我的生活充滿歡欣與成就，在平凡的高中生涯，也因準備科展而更加充實。

這次的科展中，我發表了幾個月辛勤研究的結果，也接受了評審們的指教。評審們首先指出作品中一些較不嚴謹的地方，並詢問我一些問題。教授們的問題深深啟發我一件事：你解決了一個問題，將會多出無數個新問題，科學就是這樣不斷探索下去。爾後，聽到教授肯定我的作品後，更激發了我繼續研究的動力。

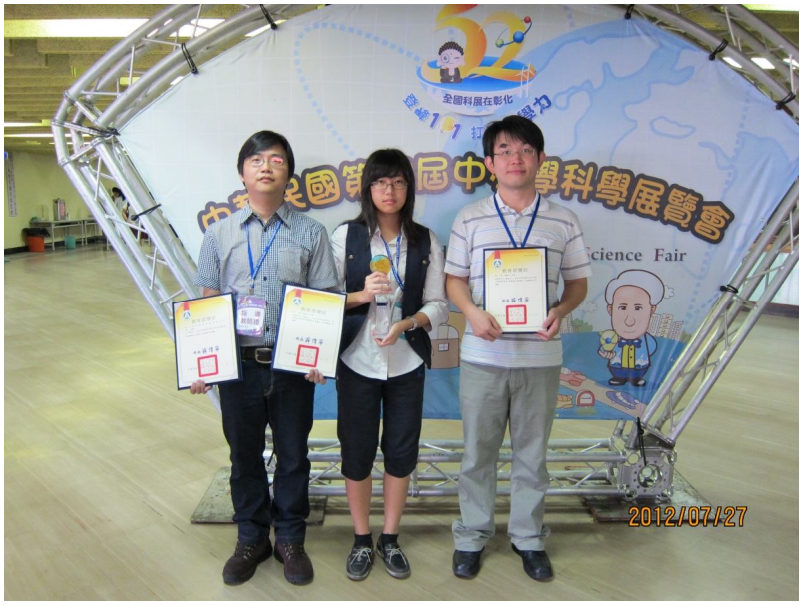
「第一名—數形合一！」我永遠也忘不了大會宣布我們獲得第一名的情況，那時我的心真的有說不出的喜悅，我的臉也不知不覺露出滿意的笑容。被評審們肯定、讚賞的快樂，只有親身體驗過，才能領略。而會場中，五花八門、創意十足的研究，也讓我認知到知識的廣闊無邊，拓展我的視野。其中有一組雙渦輪式的發電機，更讓我嘆為觀止，驚豔於他們精巧的技術及嶄新的創意。當我在向同學解釋作品時，他們對科學熱忱的態度也讓我深深的感到：我找到了志同道合的朋友！

這次的科學之旅真是不虛此行，獲獎的美好回憶，早已刻鏤在心版上，怎忘得了呢？

期望接下來的，學弟妹還能夠擺脫一切為了升學的功利主義，盡情享受研究科學、找出答案的喜悅。

頒獎暨閉幕典
教育部、行政院國家科學委員會
國立臺灣科學教育館
彰化縣政府
財團法人TDK文教基金會
財團法人崇友文教基金會
臺灣康寧顯示玻璃股份有限公司
博通基金會Broadcom Foundation
2012/07/27

數形合一
作者證
2012/07/26


全國科展在彰化
Science Fair
2012/07/27

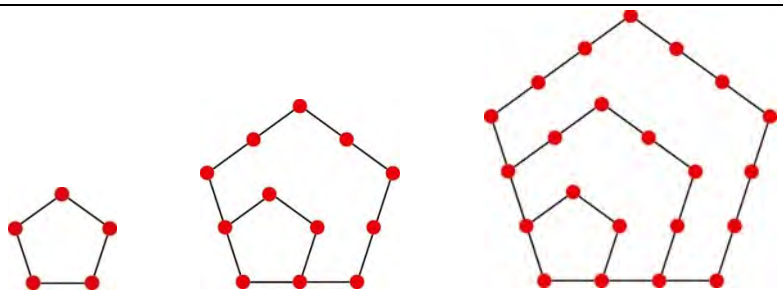
數形合一

壹、 摘要

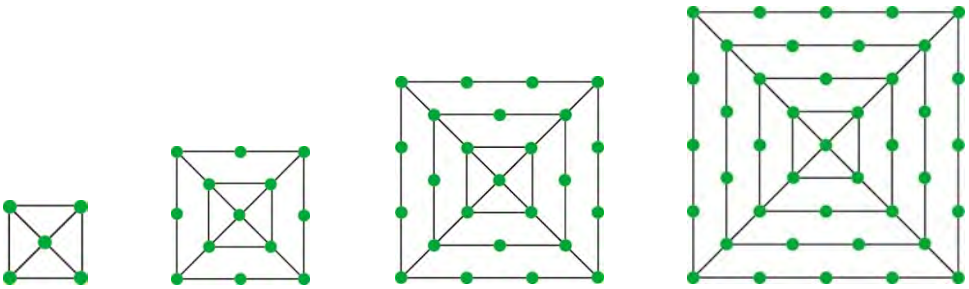
這份研究是關於一個「數形合一」的問題，研究的主要目的是找出同時具有兩種圖形數身分以上的數(我稱之為多重數)。主要是研究多重多角數、雙重中心多角數和探討同時具有多角數和中心多角數身分的數，研究這些多重圖形數並尋找即使手算也可快速算出的辦法。

貳、 研究動機

在啦啦隊比賽中常有隊形變換，如隊形常有三角形和正方形方陣，我對多少人可以同時排出兩種陣形以上感到好奇，聯想到在數學課本裡面看到的三、四、五角數圖形，我發現了它迷人的規律，並對此產生了濃厚的興趣。我翻閱了相關書籍與網站，像許志農教授的網站《算術講義》，還有一些翻譯書籍等，但在某些網站中，我發現他們使用的方法繁雜，有些文章內容有錯，因此我想要藉著這次科展的機會，利用遞推關係、佩爾方程式(含推廣型)和同餘定理，快速找出這種數，對這個問題做深入的研究和探討，還有找出中心多角數的規律和解法，並證明了一個文獻上關於三重多角數的猜想。



圖（一）南一課本 P.17 習題 1-1 五角數



圖（二）南一課本第一章 P.4 中心四角數

參、研究目的

一、尋找**多角數**的通式。
二、是否有 3-4 角數(同時是三角數又是四角數的數)、4-5 角數、3-5 角數？這種數有多少個？模式為何?如何求出 3-4 角數、4-5 角數、3-5 角數？如何改進求出 3-4 角數、4-5 角數、3-5 角數的速度？
三、三角 K 角數、四角 K 角數、五角 K 角數的存在性和個數與模式為何？
四、任意**雙重(a-k)多角數**的存在性和個數與模式為何？
五、**三重多角數**的存在性和個數與模式為何？
六、尋找**中心多角數**的通式。
七、**中心三角四角數**的存在性和個數與模式為何？
八、**中心三角五角數**的存在性和個數與模式為何？
九、**中心四角五角數**的存在性和個數與模式為何？
十、**中心三角 K 角數**的存在性和個數與模式為何？
十一、**中心四角 K 角數**的存在性和個數與模式為何？
十二、**中心五角 K 角數**的存在性和個數與模式為何？
十三、**雙重中心多角數(即同時是中心 m 角數和中心 n 角數的數)**的存在性與模式為何？
十四、同時是**多角數和中心多角數的數**的存在性與模式為何？

我們希望用個簡潔快速的方法，迅速知道一個數可以是幾種圖形數，又當一個數是多重圖形數時，它有哪些相同的變化或不規則變化，這些都是我們討論的題目。

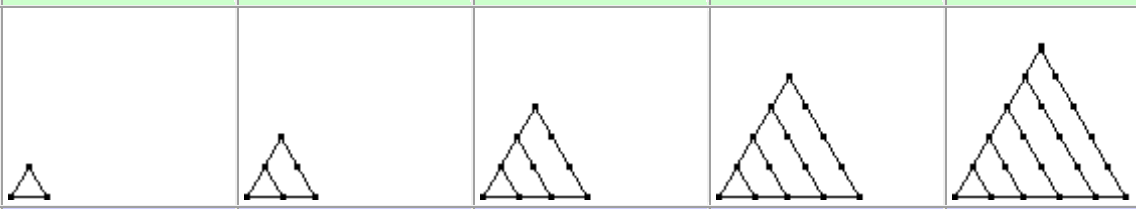
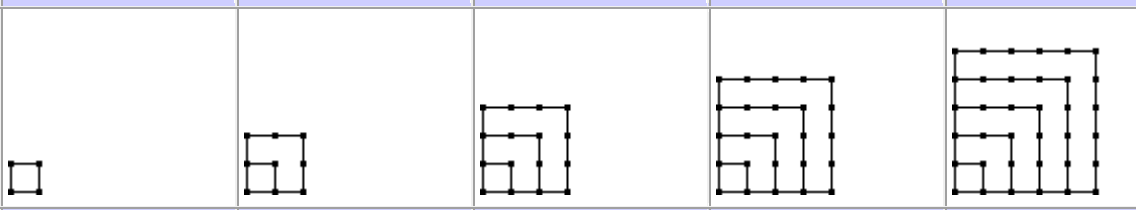
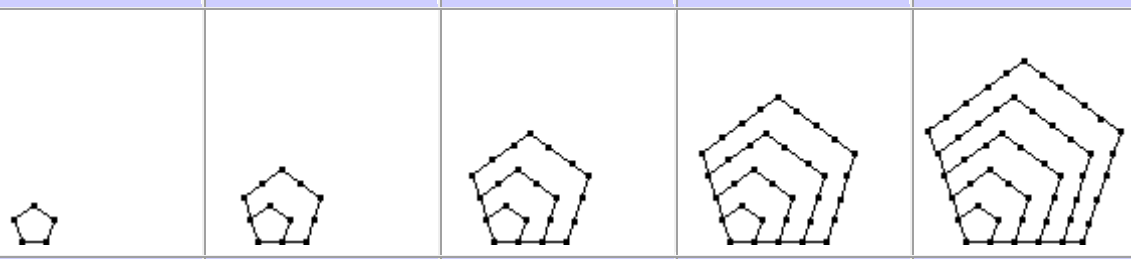
肆、研究設備及器材

一、電腦、紙、筆
二、Word、Office Excel

伍、研究過程和方法

一、尋找多角數的通式

圖形數

Type	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
三角數	•					
Value	1	3	6	10	15	21
四角數	•					
Value	1	4	9	16	25	36
五角數	•					
Value	1	5	12	22	35	51

圖取自昌爸工作坊 圖形數

（一）定義：如上圖中，邊長為 n 的正 K 邊形陣列數我們稱之為**第 n 個 K 角數**。

（二）**第 n 個三角數**$=1+2+3+.....+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

（三）**第 n 個四角數(平方數)**$=1+3+5+.....+(2n-1)=n^2$

（四）**第 n 個五角數**＝ 1+4+7+...+(3n-2) $=\dfrac{n(1+3n-2)}{2}=\dfrac{n(3n-1)}{2}$

（五）我發現本質上，**第 n 個 K 角數**為一「等差級數」，公差為(k-2)，項數共 n 項，

所以**第 n 個 K 角數**＝1+(k-1)+....+(1+(n-1)(k-2))$=\dfrac{n(2+(n-1)(k-2))}{2}$

二、　三角四角數問題

以下過程之中，「佩爾方程」為使用工具，所以先簡略介紹一些「佩爾方程」及其相關知識。

(一)佩爾方程

1. 佩爾方程的定義：型如 $x^2-dy^2=1$，其中 d 為非完全平方數的正整數，稱這樣的不定方程為佩爾方程。

2. 定理 1：佩爾方程 $x^2-dy^2=1$ 的正整數解一定存在且有無限多組，若最小的正整數解為 (x_1,y_1)，則所有的正整數解 (x,y) 為 $x+y\sqrt{d}=\left(x_1+y_1\sqrt{d}\right)^n$，其中 n 為正整數。

(二) 三角四角數(三角平方數)的存在性和個數問題：

假設第 n 個三角數=第 m 個四角數（平方數），則 $\dfrac{n(n+1)}{2}=m^2$

$$\Rightarrow (2n+1)^2-2(2m)^2=1$$

令 $x=2n+1$，$y=2m$

則 $x^2-2y^2=1$ 為一佩爾方程必有無限多組正整數解，

又 $x^2=1+2y^2$ 必為奇數，所以 x 必為奇數，若 $x=2n+1$ 則

$2y^2=(x+1)(x-1)=2(n+1)\times 2n \Rightarrow y^2=2n(n+1)$ 為偶數，所以 y 必為偶數，所以(m,n)也有無限多組正整數解。因此**三角平方數存在，且有無限多個。**

(三) 佩爾方程的進一步探討：

1.佩爾方程 $x^2-dy^2=1$ 的「顯然解」和「基本解(最小解)」：

定理 1：佩爾方程 $x^2-dy^2=1$ 的正整數解一定存在且有無限多組，若最小的正整數解為 (x_1,y_1)，則所有的正整數解 (x,y) 為 $x+y\sqrt{d}=\left(x_1+y_1\sqrt{d}\right)^n$，其中 n 為正整數。以下我們將 (x,y) ＝(1,0) 稱為佩爾方程 $x^2-dy^2=1$ 的「顯然解」，最小的正整數解為 (x_1,y_1) 稱為佩爾方程 $x^2-dy^2=1$ 的「基本解」或「最小解」。

2. 佩爾方程 $x^2-dy^2=1$ 的正整數解的通式：

由 1.知若佩爾方程 $x^2-dy^2=1$ 的基本解為 (x_1,y_1)，則所有的正整數解 (x,y) 為 $x+y\sqrt{d}=\left(x_1+y_1\sqrt{d}\right)^n$，其中 n 為正整數。

設 $x+y\sqrt{d}=\left(x_1+y_1\sqrt{d}\right)^n=A+B\sqrt{d}$，其中 A 和 B 為正整數

則 $x-y\sqrt{d}=\left(x_1-y_1\sqrt{d}\right)^n=A-B\sqrt{d}$

兩式相加除以 2 和兩式相減除以 $2\sqrt{d}$，可以分別得到

$$x=\frac{\left(x_1+y_1\sqrt{d}\right)^n+\left(x_1-y_1\sqrt{d}\right)^n}{2}\text{，}\ y=\frac{\left(x_1+y_1\sqrt{d}\right)^n-\left(x_1-y_1\sqrt{d}\right)^n}{2\sqrt{d}}\text{———————（※）}$$

3. **佩爾方程$x^2-dy^2=1$的正整數解的遞推式：**

設$\left(x_n,y_n\right)$和$\left(x_{n+1},y_{n+1}\right)$分別是佩爾方程$x^2-dy^2=1$的第 n 和第 n+1 組正整數解

則$x_n+y_n\sqrt{d}=\left(x_1+y_1\sqrt{d}\right)^n$且$x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{d}=\left(x_1+y_1\sqrt{d}\right)^{n+1}$

所以$x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{d}=\left(x_1+y_1\sqrt{d}\right)^{n+1}=\left(x_1+y_1\sqrt{d}\right)\left(x_n+y_n\sqrt{d}\right)$

$=\left(x_1x_n+dy_1y_n\right)+\left(y_1x_n+x_1y_n\right)\sqrt{d}$

因此得到遞推式：$x_{n+1}=x_1x_n+dy_1y_n$———（1） 且 $y_{n+1}=y_1x_n+x_1y_n$———（2）

即遞推式：$\begin{cases}x_{n+1}=x_1x_n+dy_1y_n\\ y_{n+1}=y_1x_n+x_1y_n\end{cases}$ ——————————————（※※）

進一步得到獨立的遞推式，做出以下的推導：

因為$x_{n+1}=x_1x_n+dy_1y_n$

$\Rightarrow y_n=\frac{x_{n+1}-x_1x_n}{dy_1}$，以 n+1 置換 n 可得 $y_{n+1}=\frac{x_{n+2}-x_1x_{n+1}}{dy_1}$代入（2）可得

$$\frac{x_{n+2}-x_1x_{n+1}}{dy_1}=y_1x_n+x_1\left(\frac{x_{n+1}-x_1x_n}{dy_1}\right)$$

$\Rightarrow\quad x_{n+2}=2x_1x_{n+1}+dy_1^{\,2}x_n-x_1^{\,2}x_n$

$\Rightarrow\quad x_{n+2}=2x_1x_{n+1}+x_n\left(dy_1^{\,2}-x_1^{\,2}\right)$ ，又$\left(x_1,y_1\right)$為$x^2-dy^2=1$之解，所以

$dy_1^2-x_1^2=-1$

$\Rightarrow\quad x_{n+2}=2x_1x_{n+1}-x_n$ ——————————————（3）

同理可得$y_{n+2}=2x_1y_{n+1}-y_n$ ——————————————（4）

所以得到獨立的遞推式（3）（4）

即$\begin{cases}x_{n+2}=2x_1x_{n+1}-x_n\\ y_{n+2}=2x_1y_{n+1}-y_n\end{cases}$ ——————————————（※※※）

以下回到想要**尋找出三角平方數的通式**，以及尋找**簡易的計算方式**，以期**可以快速求出任意第 n 個三角平方數**的問題，我們**使用遞推式來簡化計算**。

(四) 三角四角數(三角平方數)的進一步討論：

由二(二)知假設第 n 個三角數=第 m 個四角數（平方數），

則 $\frac{n(n+1)}{2}=m^2 \Rightarrow (2n+1)^2-2(2m)^2=1$

令 $x=2n+1$ ， $y=2m$

則 $x^2-2y^2=1$ 而此方程的基本解 (x_1,y_1)=(3,2)

由二(三)2.之（※）知

$x=\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^n+\left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{2}$ ， $y=\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^n-\left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}$ ，其中 n 為正整數。

但我發現這在計算上十分的不方便，這也是我之前想去探討遞推式的原因

由二(三)3.之（※※） 因為基本解 (x_1,y_1)=(3,2) 又 d =2

所以**可得二元遞推式** $\begin{cases} x_{k+1}=3x_k+4y_k \\ y_{k+1}=2x_k+3y_k \end{cases}$

此以足夠讓我快速算出其解，利用 excel 的遞推公式功能可得下表

x=2n+1	y=2m	n	m	3-4角數
3	2	1	1	1
17	12	8	6	36
99	70	49	35	1225
577	408	288	204	41616
3363	2378	1681	1189	1413721
19601	13860	9800	6930	48024900

一元遞推式: 將基本解 (x_1,y_1)=(3,2)代入（※※※）式，可得 $\begin{cases} x_{k+2}=6x_{k+1}-x_k \\ y_{k+2}=6y_{k+1}-y_k \end{cases}$

及初始條件 y_1=2， $y_2=12$

y=2m	m	3-4 角數
2	1	1
12	6	36
70	35	1225
408	204	41616
2378	1189	1413721
13860	6930	48024900

心得：這樣計算會比原來的快了一點，但需多一個初始條件。

m,n 的遞推式：

設第 n 個三角數=第 m 個四角數（平方數）

稱此組解為(m，n)，下一組解為(m'，n')

則$\begin{cases} x_k = 2n+1 \\ y_k = 2m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{k+1} = 2n'+1 \\ y_{k+1} = 2m' \end{cases}$ 代入遞推式 $\begin{cases} x_{k+1} = 3x_k + 4y_k \\ y_{k+1} = 2x_k + 3y_k \end{cases}$

得 **m,n 的遞推式**$\begin{cases} n' = 3n + 4m + 1 \\ m' = 2n + 3m + 1 \end{cases}$

可得下表

n	m	3-4 角數
1	1	1
8	6	36
49	35	1225
288	204	41616
1681	1189	1413721
9800	6930	48024900

m 或 n 的一元遞推式:

若要獨立的 m 或 n 遞推式 可以設正整數解(m_k, n_k)的下一組解為(m_{k+1}, n_{k+1})，

下二組解為(m_{k+2}, n_{k+2})

代入

$\begin{cases} x_{k+2} = 6x_{k+1} - x_k \\ y_{k+2} = 6y_{k+1} - y_k \end{cases}$ 其中 $\begin{cases} x_i = 2n_i + 1 \\ y_i = 2m_i \end{cases}$，$i = k, k+1, k+2$

得$\begin{cases} 2n_{k+2} + 1 = 6(2n_{k+1} + 1) - (2n_k + 1) \\ 2m_{k+2} = 6(2m_{k+1}) - (2m_k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_{k+2} = 6n_{k+1} - n_k + 2 \\ m_{k+2} = 6m_{k+1} - m_k \end{cases}$，

以 m 為例，由遞推式$m_{k+2} = 6m_{k+1} - m_k$和$m_1 = 1$，$m_2 = 6$的初始條件可以做出下表

M	3-4 角數
1	1
6	36
35	1225
204	41616
1189	1413721
6930	48024900

心得：這樣計算會比原來的又更快了一點，但需多一個初始條件。

三、四角五角數(五角平方數)：

假設第 n 個四角數=第 m 個五角數

則 $n^2=\dfrac{3m^2-m}{2}$

$\Rightarrow (6m-1)^2-6(2n)^2=1$

令 $x=6m-1$ ， $y=2n$

則 $x^2-6y^2=1$ 其基本解 (x_1,y_1)=(5,2)

仿上可得　遞推式 $\begin{cases} x_{k+1}=5x_k+12y_k \\ y_{k+1}=2x_k+5y_k \end{cases}$

由此可推得下表

原始表格（有些不合）

x=6m-1	y=2n	m	n	4-5 角數
5	2	1	1	1
49	20	8.333333333	10	100
485	198	81	99	9801
4801	1960	800.3333333	980	960400
47525	19402	7921	9701	94109401
470449	192060	78408.33333	96030	9221760900
4656965	1901198	776161	950599	903638458801

我發現由 x 和 y 反推回去 m 會有跳組的現象，研究後得知可以用同餘理論來得到解決：

因為 $\begin{cases} x_{k+2}=10x_{k+1}-x_k \\ y_{k+2}=10y_{k+1}-y_k \end{cases}$

又 $x_1=5\equiv -1 \bmod(6)$ ， $x_2=49\equiv 1 \bmod(6)$ ，

由遞推式 $x_{k+2}=10x_{k+1}-x_k\equiv -2x_{k+1}-x_k \bmod(6)$ ，
可知 若 k 是奇數則 $x_k\equiv -1 \bmod(6)$ 且 若 k 是偶數則 $x_k\equiv 1 \bmod(6)$
而 x=6m-1 所以 k 是奇數時方有解，

又 $y_{k+2}=10y_{k+1}-y_k\equiv y_k \bmod(2)$ 又 $y_1=2$ ，所以由 y 反推 n 恆為整數。

經上討論證明了觀察到的規律，由遞推式$\begin{cases} x_{k+1}=5x_k+12y_k \\ y_{k+1}=2x_k+5y_k \end{cases}$ 代入 $\begin{cases} x_{k+2}=5x_{k+1}+12y_{k+1} \\ y_{k+2}=2x_{k+1}+5y_{k+1} \end{cases}$ 得

$$\begin{cases} x_{k+2}=49x_k+120y_k \\ y_{k+2}=20x_k+49y_k \end{cases}$$

設正整數解(m，n)的下一組正確整數解為$(m'，n')$

令 $x_k=6m-1$，$y_k=2n$ 且 $x_{k+2}=6m'-1$，$y_k=2n'$ 代入遞推式$\begin{cases} x_{k+2}=49x_k+120y_k \\ y_{k+2}=20x_k+49y_k \end{cases}$

得 $\begin{cases} 6m'-1=49x_k+120y_k=49(6m-1)+120(2n) \\ 2n'=20x_k+49y_k=20(6m-1)+49(2n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m'=49m+40n-8 \\ n'=60m+49n-10 \end{cases}$

所以可以重新製出下列的表：

4-5 角數(2)					
	x=6m-1	y=2n	m	n	4-5 角數
	5	2	1	1	1
	485	198	81	99	9801
	47525	19402	7921	9701	94109401
	4656965	1901198	776161	950599	903638458801

結論：四角五角數有無限多個，且可以由改良的遞推式和初始條件求出來。

四、三角五角數（同時是三角數也是五角數的數）

在研究三角五角數的過程之中，我遇到了所謂的「廣義佩爾方程」，我原先在一些網站、書籍和論文中找到相關知識，但我在研究時**發現一些文獻有錯，大抵皆是作者事實上只找到「廣義佩爾方程」的一些無窮解就誤以為找到所有的解，但事實上這並非是其完整的所有解。**後來，我在《談談不定方程》中找到一些正確的相關知識，那就是**「廣義佩爾方程」並不一定有解，若有解則必有無窮多組解但是這些無窮多組解並不一定是由一組基本解產生其完整的所有解。**

我**對柯召、孫琦《談談不定方程》書中的一些結果並做了一些改進**，底下先簡略介紹一些「廣義佩爾方程」及其相關知識。

（一） 廣義佩爾方程

1. 廣義佩爾方程的定義：型如 $x^2-dy^2=c$，其中 d 為非完全平方數的正整數，c 為整數，稱這樣的不定方程為廣義佩爾方程。

2. 定理 1：廣義佩爾方程 $x^2-dy^2=c$ ，其中 d 為非完全平方數的正整數，c 為整數不一定有整數解，但若有解則為無限多組解。

3. 定理 2：廣義佩爾方程 $x^2-dy^2=c$ ，其中 d 為非完全平方數的正整數，c 為整數不一定有整數解，但若有解則為無限多組解，其解可以由 $x^2-dy^2=1$ 和 $x^2-dy^2=c$ 的基本解，共同決定。若 $x^2-dy^2=1$ 的基本解為 (u,v) ，

$x^2-dy^2=c$ 的基本解為 (x_1,y_1)（基本解可能不只一組），

則 $x+y\sqrt{d}=\left(x_1+y_1\sqrt{d}\right)\left(u+v\sqrt{d}\right)^n$ 。

註：我仿之前的佩爾方程之法，得到了遞推式：$\begin{cases} x_{n+1}=ux_n+dvy_n \\ y_{n+1}=vx_n+uy_n \end{cases}$ 而初始條件為 (x_1,y_1)

4. 定理 3：若佩爾方程 $x^2-dy^2=1$ 的基本解為 (u,v) ，而若 N 為正整數的廣義佩爾方程

$x^2-dy^2=N$ ，的基本解為 (x_1,y_1) ，其中 (x_1,y_1) 為整數序對，

則 $\sqrt{N}\le|x_1|\le\sqrt{\dfrac{(u+1)N}{2}}$ 且 $0\le y_1\le\left(\sqrt{\dfrac{N}{2(u+1)}}\right)v$ ，

註：我改進了《談談不定方程》書中，$0\le|x_1|\le\sqrt{\dfrac{(u+1)N}{2}}$ 的估計，我發現 $x_1^2-dy_1^2=N$ ，可以得到 $x_1^2=N+dy_1^2\ge N$ 之故。

5. 定理 4：若佩爾方程 $x^2-dy^2=1$ 的基本解為 (u,v) ，而若 N 為正整數的廣義佩爾方程

$x^2-dy^2=-N$ ，的基本解為 (x_1,y_1) ，其中 (x_1,y_1) 為整數序對，

則 $0\le|x_1|\le\sqrt{\dfrac{(u-1)N}{2}}$ 且 $\sqrt{\dfrac{N}{d}}\le y_1\le\left(\sqrt{\dfrac{N}{2(u-1)}}\right)v$ ，

註：我改進了《談談不定方程》書中，$0\le y_1\le\left(\sqrt{\dfrac{N}{2(u-1)}}\right)v$ 的估計，因為我發現 $x_1^2-dy_1^2=-N$ ，可以得到 $dy_1^2=x_1^2+N\ge N$ 之故。

6.解雙重多角數所產生的廣義佩爾方程的解的存在性問題：

既然廣義佩爾方程不一定有解，我們就需注意以下的雙重多角數若轉化後變成廣義佩爾方程是否會有解的問題，**答案是肯定的，這是因為無論如何雙重多角數至少有一個，那就是 1 這個數**，1 可以排成任意正多邊形邊長 1 的陣列。

(二) 三角五角數

假設第 n 個三角數=第 m 個五角數，

則 $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{3m^2-m}{2}\Rightarrow(6m-1)^2-3(2n+1)^2=-2$

令 $x=6m-1$ ， $y=2n+1$

則 $x^2-3y^2=-2$

此為廣義佩爾方程，可以運用到上述的討論

因為 $x^2-3y^2=-2$ 最小解(1,1)，而 $x^2-3y^2=1$ 的基本解只有(2,1)

所以解的遞推式為 $\begin{cases}x_{k+1}=2x_k+3y_k\\ y_{k+1}=x_k+2y_k\end{cases}$ ，其中 $(x_1,y_1)=(1,1)$

得出下表（有些不合）

$x=6m+1$	$y=2n+1$	n	m	3-5 角數
5	3	1	1	1
19	11	5	**3.33333333**	15
71	41	20	12	210
265	153	76	**44.3333333**	2926
989	571	285	165	40755
3691	2131	1065	**615.333333**	567645
13775	7953	3976	2296	7906276
51409	29681	14840	**8568.33333**	110120220

仿之前解決 4-5 角數跳組問題的同餘理論方法， $\begin{cases}x_{k+2}=7x_k+12y_k\\ y_{k+2}=4x_k+7y_k\end{cases}$

設正整數解為 (m,n) 的下一組正確整數解為 (m',n')

$\begin{cases}x_k=6m-1\\ y_k=2n+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_{k+2}=6m'-1\\ y_{k+2}=2n'+1\end{cases}$ 代入 $\begin{cases}x_{k+2}=7x_k+12y_k\\ y_{k+2}=4x_k+7y_k\end{cases}$

得

$\begin{cases}6m'-1=7(6m-1)+12(2n+1)\\ 2n'+1=4(6m-1)+7(2n+1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m'=7m+4n+1\\ n'=12m+7n+1\end{cases}$

正確的 3-5 角數表

$x=6m+1$	$y=2n+1$	n	m	3-5 角數
5	3	1	1	1
71	41	20	12	210
989	571	285	165	40755
13775	7953	3976	2296	7906276
191861	110771	55385	31977	1533776805
2672279	1542841	771420	445380	297544793910
37220045	21489003	10744501	6203341	57722156241751

至此我已經完整討論了哪些數同時是三角數、四角數、五角數其中的兩種圖形數。

以下我們利用上述的方法進一步找出所有的三角任意角數、四角任意角數、五角任意角數，以下研究中我**又發現了雙重多角數並不一定是無窮多個，就算是也不一定能轉化成佩爾方程**，以下為了方便起見，我們直接討論並稱之為三角 k 角數、四角 k 角數、五角 k 角數（其中 k 為正整數），討論出通則之後，我們再以一些特定的 k 值做為例子。

五、 三角 k 角數 (k＞3)：

假設第 m 個三角數=第 n 個 k 角數(k＞3)

則 $\dfrac{m(m+1)}{2}=\dfrac{n\left[2+(n-1)(k-2)\right]}{2}$

$$\Rightarrow (2m+1)^2=(k-2)\left[n+\frac{(4-k)}{2(k-2)}\right]^2+1-\frac{(4-k)^2}{(k-2)}$$

$$\Rightarrow \left[2(k-2)n+(4-k)\right]^2-(k-2)(2m+1)^2=(k-3)(k-6)$$

1. 三角平方數和三角五角數：k=4,5 的情形已於之前討論過，即前面的三角平方數和三角五角數。

2. 3-6 角數：我們觀察到「**上式的左式為 0⇔ k=6**」(因為 k＞3)，所以我們先討論 3-6 角數

設第 m 個三角數=第 n 個 k 角數(k＞3)

當 k=6 時，代入 $\left[2(k-2)n+(4-k)\right]^2-(k-2)(2m+1)^2=(k-3)(k-6)$

$$\Rightarrow (4n-1)^2-(2m+1)^2=0 \quad \Rightarrow (4n-1+2m+1)(4n-1-2m-1)=0$$

$$\Rightarrow m=2n-1$$

所以，**第 n 個六角數恆等於第（2n-1）個三角數，而六角數一定是三角數，但三角數卻不一定是六角數。**

※第 n 個 3-6 角數為 $\dfrac{(2n-1)\left[2n-1+1\right]}{2}=n(2n+1)=2n^2+n$

3. 當 k-2 為完全平方數且 $k \neq 6$ 的時候：

當 k-2 為完全平方數時，$\left[2(k-2)n+(4-k)\right]^2-(k-2)(2m+1)^2=(k-3)(k-6)$ 式的左式必可因式分解，但右式又不為 0，所以此種 3-k 角數必只有有限多個。

例子：3-11 角數: 假設第 m 個三角數=第 n 個十一角數(k＞3)

代入 $\left[2(k-2)n+(4-k)\right]^2-(k-2)(2m+1)^2=(k-3)(k-6)$

得 $(18n-7)^2-9(2m+1)^2=40 \quad \Rightarrow (9n+3m-2)(9n-3m-5)=10$ 只有一組解 $(m,n)=1$

所以唯一的一個 3-11 角數是 1。

4. 當 k-2 不為完全平方數：

$\left[2(k-2)n+(4-k)\right]^2-(k-2)(2m+1)^2=(k-3)(k-6)$ 必可轉化為佩爾方程或廣義佩爾方程，

又至少 m＝n＝1 時，一定會有解，所以此種 3-k 角數必有無限多個。

例：3-9 角數：

設第 n 個三角數=第 m 個九角數

則 $\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{7m^2-5m}{2} \quad \Rightarrow (14m-5)^2-7(2n+1)^2=18$

令 $x=14m-5$ ， $y=2n+1$

則 $x^2-7y^2=18$ ，其基本解(9,3)，而 $x^2-7y^2=1$ 的基本解為(8,3)

所以解的遞推式為 $\begin{cases} x_{k+1}=8x_k+21y_k \\ y_{k+1}=3x_k+8y_k \end{cases}$ 其中 $(x_1,y_1)=(9,3)$

x=14m-5	y=2n+1	n	M	3-9 角數
9	3	1	1	1
135	51	25	10	325
2151	813	406	154	82621
34281	12957	6478	2449	20985481
546345	206499	103249	39025	5330229625
8707239	3291027	1645513	621946	1353857339341
138769479	52449933	26224966	9912106	343874433963061

六、 四角 k 角數 （k 角平方數）

設第 n 個四角數=第 m 個 k 角數，k＞4

則 $n^2=\dfrac{m[2\times 1+(m-1)(k-2)]}{2} \quad \Rightarrow [2m(k-2)+(4-k)]^2-2(k-2)(2n)^2=(4-k)^2$

1. 當 $2(k-2)$ 為完全平方數的時候：因為 k＞4，所以此時

$[2m(k-2)+(4-k)]^2-2(k-2)(2n)^2=(4-k)^2$ 的左式可因式分解且右式不為 0，所以此種 4-k 角數必為有限個，例如 k=10。

2. 當 $2(k-2)$ 不為完全平方數的時候：因為 k＞4，所以此時

$[2m(k-2)+(4-k)]^2-2(k-2)(2n)^2=(4-k)^2$ 的右式不為 0，必可轉化為佩爾方程或廣義佩爾方程，又至少 m＝n＝1 時，一定會有解，所以此種 4-k 角數必有無限多組。

例：4-6 角數：

假設第 n 個四角數=第 m 個六角數

則 $n^2=2m^2-m \quad \Rightarrow (4m-1)^2-2(2n)^2=1$

令 $x=4m-1$， $y=2n$

則 $x^2-2y^2=1$ 其基本解 $(x_1,y_1)=(3,2)$ 　　所以遞推式為 $\begin{cases} x_{k+1}=3x_k+4y_k \\ y_{k+1}=2x_k+3y_k \end{cases}$

所以可得下表（有些不合）

$x=4m-1$	$y=2n$	m	n	4-6 角數
3	2	1	1	1
17	12	4.5	6	36
99	70	25	35	1225
577	408	144.5	204	41616
3363	2378	841	1189	1413721
19601	13860	4900.5	6930	48024900
114243	80782	28561	40391	1631432881
665857	470832	166464.5	235416	55420693056
3880899	2744210	970225	1372105	1882672131025

用同餘理論調整後

設解(m，n)的下一組正確解為(m'，n')

令 $\begin{cases} x_k=4m-1 \\ y_k=2n \end{cases}$ ， $\begin{cases} x_{k+1}=3x_k+4y_k \\ y_{k+1}=2x_k+3y_k \end{cases}$ 　又 $\begin{cases} x_{k+1}=3x_k+4y_k \\ y_{k+1}=2x_k+3y_k \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} x_{k+2}=3x_{k+1}+4y_{k+1} \\ y_{k+2}=2x_{k+1}+3y_{k+1} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{k+2}=3(3x_k+4y_k)+4(2x_k+3y_k) \\ y_{k+2}=2(3x_k+4y_k)+3(2x_k+3y_k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4m'-1=17(4m-1)+24(2n) \\ 2n'=12(4m-1)+17(2n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m'=17m+12n-4 \\ n'=24m+17n-6 \end{cases}$$

得正確的 4-6 角數

$x=4m-1$	$y=2n$	m	n	4-6 角數
3	2	1	1	1
99	70	25	35	1225
3363	2378	841	1189	1413721
114243	80782	28561	40391	1631432881
3880899	2744210	970225	1372105	1882672131025

七、五角 k 角數 (k＞5)：

假設第 n 個 5 角數=第 m 個 k 角數 ，k＞5 則 $\frac{3n^2-n}{2}=\frac{m\left[2+(k-2)(m-1)\right]}{2}$

$\Rightarrow\left[6m(k-2)-3(k-4)\right]^2-3(k-2)(6n-1)^2=9(k-4)^2-3(k-2)$

1.當 3(k-2) 為完全平方數的時候：

因為 k＞4，所以此時 $\left[6m(k-2)-3(k-4)\right]^2-3(k-2)(6n-1)^2=9(k-4)^2-3(k-2)$ 式的左式可因式分解且右式不為 0，所以此種 5-k 角數必只會有有限多個。

例：5-14 角數:

假設第 n 個 5 角數=第 m 個十四角數

得 $\left[6m(k-2)-3(k-4)\right]^2-3(k-2)(6n-1)^2=9(k-4)^2-3(k-2)$ ，k=14 代入

得 $(72m-30)^2-36(6n-1)^2=864 \quad \Rightarrow(2m+n-1)(6m-3n-2)=2$

只有一組解 $(m,n)=1$，所以唯一的一個 5-14 角數是 1。

2.當 3(k-2) 不為完全平方數的時候：

因 k>5，且 k 是整數，所以 $9(k-4)^2-3(k-2)$ 不可能為零，所以

$\left[6m(k-2)-3(k-4)\right]^2-3(k-2)(6n-1)^2=9(k-4)^2-3(k-2)$ 的右式不為 0，必可轉化為佩爾方程或廣義佩爾方程，又至少 m＝n＝1 時，一定會有解，所以此種 5-k 角數必有無限多組。

例如：5-6 角數

仿上可以做出很多任意雙重多角數，在分區賽後，我直接探討任意雙重多角數的一般情形

八、任意雙重多角數:a-k 角數(同時 a 角數和 k 角數的數(k>a)):

設第 m 個 a 角數=第 n 個 K 角數

$$\frac{m\left[(m-1)(a-2)+2\right]}{2}=\frac{n\left[(n-1)k-2)+2\right]}{2}$$

$$\Rightarrow(a-2)\left[m-\frac{a-4}{2(a-2)}\right]^2-(k-2)\left[n-\frac{k-4}{2(k-2)}\right]^2=\frac{(a-4)^2}{4(a-2)}-\frac{(k-4)^2}{4(k-2)}$$

$$\Rightarrow\left\{(k-2)\left[2(a-2)m-a+4\right]\right\}^2-(a-2)(k-2)\left[2(k-2)n-k+4\right]^2=$$

$$(k-2)\left[(k-2)(a-4)^2-(a-2)(k-4)^2\right]$$

1. $(a-2)(k-2)$ 為完全平方數的時候:

(1) 當 $(k-2)\left[(k-2)(a-4)^2-(a-2)(k-4)^2\right]=0$，即 $(a,k)=(6,3)$ 的時候:

因為 $(k-2)\left[(k-2)(a-4)^2-(a-2)(k-4)^2\right]=0$ 又 $(a-2)(k-2)$ 為完全平方數

，所以$\{(k-2)[2(a-2)m-a+4]\}^2-(a-2)(k-2)[2(k-2)n-k+4]^2$可因式分解，

而$(k-2)\left[(k-2)(a-4)^2-(a-2)(k-4)^2\right]=0$，因此此種 a-k 角數有無限多個，

又$(k-2)\left[(k-2)(a-4)^2-(a-2)(k-4)^2\right]=0 \Leftrightarrow (a,k)=(3,6)$或$(6,3)$但 k>a, 所以

$(a,k)=(3,6)$，所以即 3-6 角數，**此種 a-k 角數(即 3-6 角數)有無限多個。**

(2) $(k-2)\left[(k-2)(a-4)^2-(a-2)(k-4)^2\right]\neq 0$

因為$(k-2)\left[(k-2)(a-4)^2-(a-2)(k-4)^2\right]\neq 0$且$(a-2)(k-2)$為完全平方數，

所以$\{(k-2)[2(a-2)m-a+4]\}^2-(a-2)(k-2)[2(k-2)n-k+4]^2$可以因式分解，

所以只有有限組解，所以**此種 a-k 角數為有限多個。**

2. $(a-2)(k-2)$不為完全平方數的時候:

此時$\{(k-2)[2(a-2)m-a+4]\}^2-(a-2)(k-2)[2(k-2)n-k+4]^2$無法因式分解，

可以轉化為佩爾方程式，且 (m,n)必有初始解(1,1)，所以有無限多組解，**此種 a-k 角數有無限多個。**

九、三重多角數的存在性和個數與模式為何？

我打算先證明一個普遍在文獻中的猜想，關於同時是三角數又是四角數和五角數的三重多角數存在嗎?有多少個?一般的文獻只有猜測其可能是一個且這個數就是 1，但我並未發現其證明，大部分都宣稱由電腦檢驗發現一億以內的數只找到 1 這個數,但是**數學和其他科學最大的不同就在於對的事情應該可以被證明**，原先嘗試了很多種證明方法都功虧一簣。後來我先擱置此問題,先去研究中心多角數的問題，有一天回頭在看此問題時，終於發現一條道路可以證明出此結果，這應該是這研究我花最多時間才解出來的問題，我用了一些巧妙的轉換和一個不定高次方程總算證明出了這個猜想，**經查應該是至少目前為止沒有文獻有此解法**，以下是我的解法：

證明:假設第 m 個三角數=第 n 個四角數（平方數）=第 k 個五角數

則 $\dfrac{m(m+1)}{2}=n^2=\dfrac{3k^2-k}{2}\Rightarrow\begin{cases}(2m+1)^2-2(2n)^2=1\\(6k-1)^2-6(2n)^2=1\end{cases}$,令$x=2m+1, y=2n, z=6k-1$

，則$\begin{cases}x^2-2y^2=1\\z^2-6y^2=1\end{cases}\Rightarrow x^2+4y^2=z^2\Rightarrow x^2+(2y)^2=z^2$，因為$x$為奇數，$2y$為偶數，又$x$和$2y$互

質，由畢氏數設$\begin{cases} x = s^2 - t^2 \\ 2y = 2st \\ z = s^2 + t^2 \end{cases}$，其中 s 和 t 為互質整數　　代回 $x^2 - 2y^2 = 1$

得$\left(s^2 - t^2\right)^2 - 2\left(st\right)^2 = 1 \Rightarrow s^4 - 4s^2t^2 + t^4 = 1 \Rightarrow \left(s^2 - 2t^2\right)^2 - 3t^4 = 1$ 令$u = s^2 - 2t^2, v = t$

$\Rightarrow u^2 - 3v^4 = 1$ 再由挪威數學家 **Wilhelm Ljunggren** 的 **1942** 年研究成果知此種高次不定方程至多有兩組正整數解，我們找出了兩組正整數解 $\begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases}$和$\begin{cases} u = 7 \\ v = 2 \end{cases}$所以這必是其兩組正整數解，反推得

$\begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \end{cases}$和$\begin{cases} m = 3 \\ n = 1 \end{cases}$其中 $\begin{cases} m = 3 \\ n = 1 \end{cases}$代回$\dfrac{m\left(m+1\right)}{2} = n^2 = \dfrac{3k^2 - k}{2}$

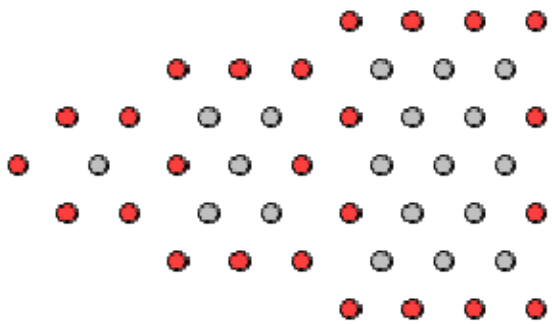
只有$\begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \end{cases}$，代回符合,且得此三重多角數為1

至此我證明了同時是三角數又是四角數和五角數的這種三重多角數只有 **1**。

此外我們用類似的方法研究了中心多角數

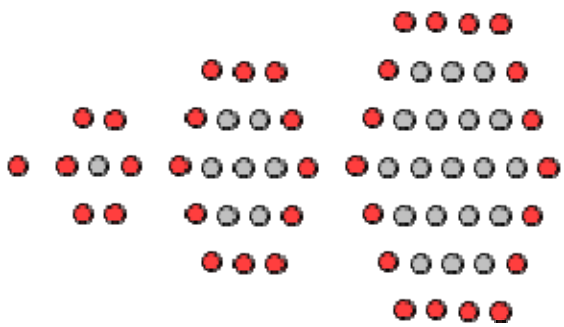
中心つき四角数

1　5　13　25



中心つき六角数

1　7　19　37



圖取自　**http://ja.wikipedia.org/wiki/中心つき多角数**

限於篇幅我僅簡短列出成果

十、中心多角數的通式：

(一)中心 K 角數通式:**第 n 個中心 k 角數** $a_n=\dfrac{k\left(n^2-n\right)}{2}+1$

十一、中心三角四角數問題

假設第 n 個三角數=第 m 個四角數，

則 $\dfrac{3n^2-3n+2}{2}=2m^2-2m+1$

$\Rightarrow(4m-2)^2-3(2n-1)^2=1$

令$x=4m-2$, $y=2n-1$

則 $x^2-3y^2=1$ 為一佩爾方程基本解為(2,1)必有無限多組正整數解

$x^2-3y^2=1$ 的初始解$(x_k,y_k)=(2,1)$ $\Rightarrow\begin{cases}x_{n+1}=2x_n+3y_n\\ y_{n+1}=x_n+2y_n\end{cases}$

十二、中心三角五角數

假設第 n 個三角數=第 m 個五角數，則$\dfrac{3n^2-3n+2}{2}=\dfrac{5m^2-5m+2}{2}$

$\Rightarrow(10m-5)^2-15(2n-1)^2=10$ 令x=$10m-5, y=2n-1$，$x^2-15y^2=10$ 為一廣義佩爾方程，又 m＝n＝1 時，一定會有解，所以必有無限多組正整數解

$x^2-15y^2=10$ 初始解(4,1) 遞推式$\begin{cases}x_{k+1}=4x_k+15y_k\\ y_{k+1}=x_k+4y_k\end{cases}$

中心 3-5	x	y	m	n	數
	5	1	1	1	1
	35	9	4	5	31
	275	71	28	36	1891
	2165	559	217	280	117181
	17045	4401	1705	2201	7263301

十三、中心四角五角數

假設第 n 個四角數=第 m 個五角數，則$\dfrac{4n^2-4n+2}{2}=\dfrac{5m^2-5m+2}{2}$

$\Rightarrow(4n-2)^2-4=5(2m-1)^2=-1$ 令x=$4n-2, y=2m-1$，則 $x^2-5y^2=-1$ 為一佩爾方程，又 m＝n＝1 時，一定會有解，所以必有無限多組正整數解。

$x^2-5y^2=-1$ 的初始解(x_k,y_k)=(9,4) $\Rightarrow \begin{cases} x_{k+1}=9x_k+20y_k \\ y_{k+1}=4x_k+9y_k \end{cases}$

中心 4-5	x	y	m	n	數
	2	1	1	1	1
	38	17	9	10	181
	682	305	153	171	58141
	12238	5473	2737	3060	18721081

十四、中心三角 K 角數

(一)中心三角 K 角數的存在性和個數問題

假設第 n 個三角數=第 m 個 K 角數，則$\frac{3n^2-3n+2}{2}=\frac{km^2-km+2}{2}$

$\Rightarrow 3(2n-1)^2-k(2m-1)^2=3-k$

$\Rightarrow (6n-3)^2-3k(2m-1)^2=9-3k$

1. **若 3k 為完全平方數，$(6n-3)^2-3k(2m-1)^2$可以被因式分解，所以只有有限組解，因此此種中心三角 K 角數為有限多個。例子:中心三角十二角數**

(一)中心三角十二角數的存在性和個數問題

假設第 n 個三角數=第 m 個十二角數，則$\frac{3n^2-3n+2}{2}=\frac{12m^2-12m+2}{2}$

$\Rightarrow (6n-3)^2-(12m-6)^2=-27 \Rightarrow (2n+4m-3)(2n-4m+3)=-3$有限組解

2.若 3k 不為完全平方數:

因 K>3，所以$(6n-3)^2-3k(2m-1)^2=9-3k<0$可化為佩爾方程又(m,n)必有初始解(1,1)，**因此此種中心三角 K 角數有無限多個**

例子:中心三角六角數

假設第 n 個三角數=第 m 個六角數，則$\frac{3n^2-3n+2}{2}=\frac{6m^2-6m+2}{2}$

$\Rightarrow 3(2n-1)^2-3=6(2m-1)^2-6 \Rightarrow (2n-1)^2-2(2m-1)^2=-1$

令$x=2n-1$, $y=2m-1$得 $x^2-2y^2=-1$ 又 (m,n) 必有初始解 (1,1)，所以有無限多組 正整數解 ，

$x^2-2y^2=1$ 初始解 $(x_0,y_0)=(3,2)$ 遞推式為 $\begin{cases} x_{k+1}=3x_k+4y_k \\ y_{k+1}=2x_k+3y_k \end{cases}$

十五、中心四角 K 角數

假設第 n 個四角數=第 m 個 K 角數，則 $\frac{4n^2-4n+2}{2}=\frac{km^2-km+2}{2}$

$\Rightarrow (4n-2)^2-k(2m-1)^2=4-k$

1. 若 k 為完全平方數，$(4n-2)^2-k(2m-1)^2$ 可以被因式分解，所以只有有限組解，因此此種中心四角 K 角數為有限多個。

例子: 中心四角九角數

假設第 n 個四角數=第 m 個六角數，則 $\frac{4n^2-4n+2}{2}=\frac{9m^2-9m+2}{2}$

$\Rightarrow (4n-2)^2-9(2m-1)^2=-5 \Rightarrow (4n+6m-5)(4n-6m+1)=-5$ 為有限組解

2.若 k 不為完全平方數，因 k>4

$(4n-2)^2-k(2m-1)^2=4-k<0$ 可化為佩爾方程又(m,n)必有初始解(1,1)，所以有無限多組解，

因此此種中心四角 K 角數為無限多個。

例子:中心四角六角數:

假設第 n 個四角數=第 m 個六角數，則 $\frac{4n^2-4n+2}{2}=\frac{6m^2-6m+2}{2}$

$\Rightarrow (4n-2)^2-4=6(2m-1)^2-6$ 令 x=4n-2,y=2m-1 則 $x^2-6y^2=-2$ 為一佩爾方程又(m,n)必有初始解(1,1)，所以必有無限多組正整數解。

$x^2-6y^2=1$ 初始解 $(5,2)$ 而遞推式: $\begin{cases} x_{k+1}=5x_k+12y_k \\ y_{k+1}=2x_k+5y_k \end{cases}$

十六、中心五角 K 角數

假設第 n 個五角數=第 m 個 K 角數，則 $\frac{5n^2-5n+2}{2}=\frac{kn^2-kn+2}{2}$

$\Rightarrow 5(2n-1)^2-k(2m-1)^2=5-k \Rightarrow (10n-5)^2-5k(2m-1)^2=25-5k$

1.若 5k 為完全平方數，$(10n-5)^2-5k(2m-1)^2$ 可以被因式分解，所以只有有限組解，因此此種中心五角 K 角數為有限多個。

2.若 5k 不為完全平方數，因 k>5

$(10n-5)^2-5k(2m-1)^2=25-5k<0$ 可化為佩爾方程 又 (m,n) 必有初始解 $(1,1)$ ，所以**有無限多組解，因此此種中心五角 K 角數有無限多個。**

例子:中心五角六角數

假設第 n 個五角數=第 m 個六角數，則 $\frac{5n^2-5n+2}{2}=\frac{6m^2-6m+2}{2}$

$\Rightarrow 5(2n-1)^2-6(2m-1)^2=-1$

令x=$12m-6, y=2n-1$

$x^2-30y^2=6$ 為一有初始解之佩爾方程又(m,n)必有初始解(1,1) , 所以必有無限多組正整數解

遞推式: $\begin{cases} x_{k+1}=11x_k+60y_k \\ y_{k+1}=2x_k+11y_k \end{cases}$

十七、中心 a 角 k 角數

假設第 n 個 a 角數=第 m 個 K 角數，則 $\frac{an^2-an+2}{2}=\frac{km^2-km+2}{2}$

$\Rightarrow (2an-a)^2-ak(2m-1)^2=a^2-ak$

1.若 ak 為完全平方數，$(2an-a)^2-ak(2m-1)^2$ 可以被因式分解，所以只有有限組解 , 因此此類中心 a 角 k 角數為有限多個。

2.若 ak 不為完全平方數

因 k>a， $(2an-a)^2-ak(2m-1)^2=a^2-ak<0$ 為一佩爾方程又(m,n)必有初始解(1,1)，所以**有無限多組解，因此此類中心 a 角 k 角數為無限多個。**

在分區賽後，我好奇多角數與雙重多角數之間的關係，所以我又研究了同時是多角數和中心多角數的數。

十八、三角數&中心三角數

設第 m 個三角數=第 n 個中心三角數

$$\frac{m(m+1)}{2}=\frac{3n^2-3n+2}{2}$$

$$\Rightarrow (2m+1)^2-3(2n-1)^2=6$$

令 x=2m+1,y=2n-1

$$\Rightarrow x^2-3y^2=6$$

其初始解$(x_1,y_1)=(3,1)$

3-中心 3	x	y	m	n	數
	3	1	1	1	1
	9	5	4	3	10
	33	19	16	10	136
	123	71	61	36	1891
	459	265	229	133	26335
	1713	989	856	495	366796
	6393	3691	3196	1846	5108806

$x^2-3y^2=1$初始解$(x_1,y_1)=(2,1)$ 其遞推式為 $\begin{cases} x_{k+1}=2x_k+3y_k \\ y_{k+1}=x_k+2y_k \end{cases}$

十九、四角數&中心四角數

設第 m 個四角數=第 n 個中心四角數

$$m^2=2n^2-2n+1\Rightarrow (2m)^2-2(2n-1)^2=2$$

令 x=2m,y=2n-1

$$\Rightarrow x^2-2y^2=2$$

其初始解為(2,1)

$x^2-2y^2=1$初始解

$(x_1,y_1)=(3,2)$

4-中心 4	X	y	m	n	數
	2	1	1	1	1
	10	7	5	4	25
	58	41	29	21	841
	338	239	169	120	28561
	1970	1393	985	697	970225
	11482	8119	5741	4060	32959081

其遞推式為

$$\begin{cases} x_{k+1}=3x_k+4y_k \\ y_{k+1}=2x_k+3y_k \end{cases}$$

二十、五角數&中心五角數

設第 m 個五角數=第 n 個中心五角數

$$\frac{m(3m-1)}{2}=\frac{5n^2-5n+2}{2}\Rightarrow (6m-1)^2-15(2n-1)^2=10$$

令 x=6m-1,y=2n-1

原式 $\Rightarrow x^2 - 15y^2 = 10$

其初始解為(5,1)

$x^2 - 15y^2 = 1$ 初始解

5-中心 5	X	y	m	n	數
	5	1	1	1	1
	35	9	6	5	51
	275	71	46	36	3151
	2165	559	361	280	195301
	17045	4401	2841	2201	12105501

$(x_1,y_1) = (4,1)$ 其遞推式為 $\begin{cases} x_{k+1} = 4x_k + 15y_k \\ y_{k+1} = x_k + 4y_k \end{cases}$

二十一、K 角數&中心 K 角數

設第 m 個 K 角數=第 n 個中心 K 角數

$$\frac{m\left[(m+1)(k-2)+2\right]}{2} = \frac{kn^2 - kn = 2}{2}$$

$$\Rightarrow (k-2)m^2 - (k-4)m = k(n-\frac{1}{2})^2 + 2 - \frac{k}{4}$$

$$\Rightarrow (k-2)\left[m - \frac{k-4}{2(k-2)}\right]^2 - \frac{(4-k)^2}{4(k-2)} = k(n-\frac{1}{2})^2 + 2 - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left[2(k-2)m - k + 4\right]^2 - k(k-2)(2n-1)^2 = 2k$$

因為 $k(k-2) = (k-1)^2 - 1$ 又 $k \geq 3$

所以 k(k-2)不為完全平方數。因為 $3 \leq k$，所以 k(k-2)不為完全平方數，為一佩爾方程，又因又(m,n)必有初始解(1,1)，因此有無限多組正整數解，所以**同時是 K 角數和中心 K 角數的數皆是無限多個**

陸、研究結果

一、第 n 個正多角數的通式為 $\dfrac{n\left[2+(n-1)(k-2)\right]}{2}$。

二、假設第 n 個三角數=第 m 個四角數（平方數），

令 $x = 2n+1$，$y = 2m$ 則 $x^2 - 2y^2 = 1$ 而此方程的基本解 (x_1, y_1)=(3,2)

$$x = \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^n + \left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{2}，y = \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^n - \left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}$$，其中 n 為正整數。

可得遞推式 $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 4y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n \end{cases}$ 此以足夠快速算出其解

一元遞推式:將基本解(x_1, y_1)=(3,2)代入(※※※)式可得$\begin{cases} x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n \\ y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n \end{cases}$ 及初始條件 y_1=2，

$y_2 = 12$

y=2m	m	3-4 角數
2	1	1
12	6	36
70	35	1225
408	204	41616
2378	1189	1413721
13860	6930	48024900

m 或 n 的一元遞推式:

若要獨立的 m 或 n 遞推式 可以設正整數解(m_k, n_k)的下一組解為(m_{k+1}, n_{k+1})，

$$\Rightarrow \begin{cases} n_{k+2} = 6n_{k+1} - n_k + 2 \\ m_{k+2} = 6m_{k+1} - m_k \end{cases}$$

三、四角五角數：

X=6m-1	Y=2n	m	n	4-5 角數
5	2	1	1	1
485	198	81	99	9801
47525	19402	7921	9701	94109401
4656965	1901198	776161	950599	903638458801

結論：仿上，四角五角數有無限多個，且可以由改良的遞推式和初始條件求出來。

四、三角五角數：

X=6m-1	Y=2n+1	n	m	3-5 角數
5	3	1	1	1
71	41	20	12	210
989	571	285	165	40755
13775	7953	3976	2296	7906276
191861	110771	55385	31977	1533776805
2672279	1542841	771420	445380	297544793910
37220045	21489003	10744501	6203341	57722156241751

結論：三角五角數有無限多個，利用到了廣義佩爾方程且可以由改良的遞推式和初始條件改良速度快速求出來。

五、三角 k 角數 (k＞3)：假設第 m 個三角數=第 n 個 k 角數(k＞3)，

則 $\frac{m(m+1)}{2}=\frac{n\left[2+(n-1)(k-2)\right]}{2}\Rightarrow\left[2(k-2)n+(4-k)\right]^2-(k-2)(2m+1)^2=(k-3)(k-6)$

（1）k=6： $m=2n-1$

所以，**第 n 個六角數恆等於第（2n-1）個三角數，所以六角數一定是三角數，但三角數卻不一定是六角數。**而第 n 個 3-6 角數為 $n(2n+1)=2n^2+n$

（2）當 k-2 為完全平方數 (k＞3) 且 $k\neq 6$ 的時候：因當 k-2 為完全平方數的時候，

$\left[2(k-2)n+(4-k)\right]^2-(k-2)(2m+1)^2=(k-3)(k-6)$ 式的左式必可因式分解，但右式又不為 0，

所以此種 **3-k 角數必只會有有限多個**。例如 k=11...等

（3）當 k-2 不為完全平方數：

$\left[2(k-2)n+(4-k)\right]^2-(k-2)(2m+1)^2=(k-3)(k-6)$ 必可轉化為佩爾方程或廣義佩爾方程，

又至少 m＝n＝1 時，一定會有解，所以**此種 3-k 角數必有無限多個**。

六、四角 k 角數 （k 角平方數）：(因為 k=3 已在三角平方數討論過，所以只討論 k＞4)：

假設第 n 個四角數=第 m 個 k 角數（k＞4），

則 $n^2=\frac{m[2\times 1+(m-1)(k-2)]}{2}\Rightarrow[2m(k-2)+(4-k)]^2-2(k-2)(2n)^2=(4-k)^2$

（1）當 $2(k-2)$ 為完全平方數的時候：

因為 k≠4，所以**此種 4-k 角數必為有限個**，例如 k=10..等。

（2）當 $2(k-2)$ 不為完全平方數的時候：

因為 k≠4，**此種 3-k 角數必有無限多個**，例如 k=3,5,6.....，（方法如之前所敘述）

七、五角 k 角數 (k＞5)：(因為 k=3,4 已在三角多角數和四角多角數討論過，所以只討論 k＞5)：

假設第 n 個 5 角數=第 m 個 k 角數 ，k＞5

則 $\frac{3n^2-n}{2}=\frac{m\left[2+(k-2)(m-1)\right]}{2}\Rightarrow\left[6m(k-2)-3(k-4)\right]^2-3(k-2)(6n-1)^2=9(k-4)^2-3(k-2)$

1.當 3(k-2) 為完全平方數的時候：因為 k＞4，**此種 5-k 角數必只會有有限多個**。例如 k=14。

2.當 3(k-2) 不為完全平方數的時候： 因為 k>5，**此種 5-k 角數必有無限多個**，例如 k=6。

八、任意雙重多角數:a-k 角數(同時 a 角數和 k 角數的數(k>a)):

設第 m 個 a 角數=第 n 個 K 角數

$$\Rightarrow\left\{(k-2)\left[2(a-2)m-a+4\right]\right\}^2-(a-2)(k-2)\left[2(k-2)n-k+4\right]^2=$$

$$(k-2)\left[(k-2)(a-4)^2-(a-2)(k-4)^2\right]$$

1. $(a-2)(k-2)$ 為完全平方數的時候：

(1) 當 $(k-2)\left[(k-2)(a-4)^2-(a-2)(k-4)^2\right]=0$ ，即 $(a,k)=(6,3)$

，**此種 a-k 角數(即 3-6 角數)有無限多個。**

(2) $(k-2)\left[(k-2)(a-4)^2-(a-2)(k-4)^2\right]\neq 0$ 且 $(a-2)(k-2)$ 為完全平方數的時候: **此種 a-k 角數為有限多個。**

2. $(a-2)(k-2)$ 不為完全平方數的時候：**此種 a-k 角數有無限多個。**

九、證明了同時是三角數又是四角數和五角數的這種三重多角數只有一個，此數為 **1**

十、中心多角數的通式：第 **n** 個中心 **k** 角數 $a_n=\dfrac{k\left(n^2-n\right)}{2}+1$

十一、中心三角四角數、中心三角五角數、中心四角五角數有無限多個

十二、中心三角 K 角數

假設第 n 個三角數=第 m 個 K 角數，則 $\dfrac{3n^2-3n+2}{2}=\dfrac{km^2-km+2}{2}$

$$\Rightarrow 3(2n-1)^2-k(2m-1)^2=3-k \Rightarrow (6n-3)^2-3k(2m-1)^2=9-3k$$

1. 若 3k 為完全平方數，此種中心三角 K 角數只有有限個。例子:中心三角十二角數

2. 若 3k 不為完全平方數: 因 K>3，此種中心三角 K 角數有無限多個:例子:中心三角六角數

十三、中心四角 K 角數

假設第 n 個四角數=第 m 個 K 角數，則 $\dfrac{4n^2-4n+2}{2}=\dfrac{km^2-km+2}{2}$

$$\Rightarrow (4n-2)^2-k(2m-1)^2=4-k$$

1. 若 k 為完全平方數，此種中心四角 K 角數只有有限個:例子:中心四角九角數

2. 若 k 不為完全平方數，因 k>4 此種中心四角 K 角數有無限多個:例子:中心四角六角數

十四、中心五角 K 角數

假設第 n 個五角數=第 m 個 K 角數，則 $\frac{5n^2-5n+2}{2}=\frac{kn^2-kn+2}{2}$

$\Rightarrow 5(2n-1)^2-k(2m-1)^2=5-k \Rightarrow (10n-5)^2-5k(2m-1)^2=25-5k$

1.若 5k 為完全平方數，此種中心五角 K 角數只有有限個:
2.若 5k 不為完全平方數，因 k>5 此種中心五角 K 角數有無限多個:例子:中心五角六角數

十五、中心 a 角 k 角數

$(2an-a)^2-ak(2m-1)^2=a^2-ak$

1.若 **ak** 為完全平方數， $(2an-a)^2-ak(2m-1)^2$ 可以被因式分解，所以此類中心 **a** 角 **k** 角數只有有限多個

2.若 **ak** 不為完全平方數

因 k>a，$(2an-a)^2-ak(2m-1)^2=a^2-ak<0$ 可轉化為佩爾方程又(m,n)必有初始解(1,1)，所以有無限多組解，所以此類中心 **a** 角 **k** 角數有無限多個

十六、**K** 角數**&**中心 **K** 角數

$\Rightarrow \left[2(k-2)m-k+4\right]^2-k(k-2)(2n-1)^2=2k$

因為 $k(k-2)=(k-1)^2-1$ 又 $k\geq 3$

所以 k(k-2)不為完全平方數。因為 $3\leq k$，所以 k(k-2)不為完全平方數，可轉化為佩爾方程，又 (m,n)必有初始解(1,1)，因此有無限多組解，所以**同時是 K 角數和中心 K 角數的數皆是無限多個.**

柒、討論

一、文獻比較

我們**完成研究後發現**文獻(十二)、(十三)有類似的結果。我們比較了我們和(十二)、(十三)的差異並歸納如下：

文獻(十二)、(十三)在下列方面較不完善：

1. 需解很多聯立佩爾方程式，事實上該文中的聯立佩爾方程式是十分不易解的
2. 只解決存在性但未解決唯一性的問題，很多內容只是猜測
3. 計算過程中有很多分數，不易計算，也用到分數的平移，更是加深計算的難度，也不易在 EXCEL 上呈現
4. 只能用反推刪去非正確解，較耗時
5. 引用的網站資料較不完善，致他們誤以為他們的方法較佳
6. 他們只探討了多角數

我的研究成果和文獻(十二)、(十三)比較如下：

1. 我們的研究結果包含了文獻(十二)、(十三)的所有結果。
2. 我們的方法不需解聯立佩爾方程,計算容易
3. 我們的內容不是猜測,也經過證明
4. 計算過程中未用到平移,也未用到分數計算容易
5. 用同餘理論解決跳組不用每次都反推
6. 不盡信網站資料和參考文獻,有進行考究和驗證
7. 我比文獻除了研究多重多角數尚多研究了中心多角數、同時是多角數與中心多角數的數並具體找出了這些數

二、過程與心得

我在解決三角平方數時發現要用到佩爾方程，找出了通式並運用遞推式大幅簡化求值的計算難度，在解五角平方數時**遇到跳組的問題**，又**利用了同餘理論解決此一問題**，在解三角五角數時**遇到了廣義佩爾方程時，發現很多文獻和參考資料都有錯誤**，體會到**盡信書不如無書**，要有**科學求真的精神**，我並更正了一些文獻的錯誤和改良了一些文獻的結論並大幅改進求出雙重多角數的速度和探討關於由佩爾方程回推多角數時會有不合的原因。

我解決了多重多角數，雙重中心多角數和同時是多角數與中心多角數的數的存在性和模試問題，研究結果發現**雙重多角數必定存在，但個數可能有限個也可能無限多個**，我對其模式進行了探究並加以具體分類，並說明原因，並用**簡潔快速的做法**求出雙重多角數。**有些可以轉化為佩爾方程或廣義佩爾方程但也有些完全與佩爾方程無關**；**有些雙重中心多角數是有限多個，有些雙重中心多角數是無限多個**，**但同時是 K 角數和中心 K 角數的數卻皆是永遠是無限多個**，研究過程中發現**遞推關係可以大大簡化計算的步驟，比解的通式還好用**。我也**證明了同時是三、四、五角數的數只有 1**。此外**解佩爾方程的整數解相當於解出了一些雙曲線上的格子點**。

捌、結論

在這份研究中我綜合了高中所學的等比級數、因式分解、配方法、遞推關係以及查找資料學來的佩爾方程、推廣型佩爾方程、聯立佩爾方程及高次不定方程、同餘理論等相關知識，來解決**雙重多角數**、**雙重中心多角數**、**同時是 K 角數和中心 K 角數的數**這個「數形合一」的問題，並用簡潔快速的做法求出這些數，我也證明了一個三重多角數的猜想。此研究的結果可實際應用在啦啦隊的隊形變換等。

玖、參考資料及其他

一、高中數學 第二冊課本 林福來 教授 主編 南一出版社

二、昌爸工作坊 圖形數 http://www.mathland.idv.tw/fun/gonal.htm

三、許志農《算術講義》37. 佩爾方程式
http://math.ntnu.edu.tw/~maco/macobook/arith/arith37.pdf

四、許志農《算術講義》38.再談佩爾方程式
http://math.ntnu.edu.tw/~maco/macobook/arith/arith38.pdf

五、Diophantus Quadraticus: X^2 - dY^2 = 1
http://unafold.math.rpi.edu/dq.html

六、李佳奇 雄中學報《論 Pell 方程式及其推廣》
http://lib.kshs.kh.edu.tw/lib/journals/journals-94/P211.pdf

七、柯召、孫琦《談談不定方程》上海教育出版社

八、日本 WIKI http://ja.wikipedia.org/wiki/中心つき多角数

九、單墫、余紅兵《不定方程》九章出版社

十、Wilhelm Ljunggren http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Ljunggren.html

十一、單墫《趣味數論》九章出版社

十二、**初探多邊形數**. 李政豐. 洪有情. 陳昭地 教育部高中數學學科中心電子報線上系統
http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/Resources/Ctrl/ePaper/ePaperOpenFileX.ashx?autoKey=526

十三、**續探多邊形數** 李政豐. 洪有情. 陳昭地 教育部高中數學學科中心電子報線上系統
http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/Resources/Ctrl/ePaper/ePaperOpenFileX.ashx?autoKey=532

【評語】040413

本篇作品主要的貢獻在於任意a角數可以同時R角數的定性描述，特別是有無窮多解或有限組解的情形分類。作者雖觀察出解未必能轉化成廣義佩爾方程式，卻沒有說明失敗的主因並嘗試提出修正補救之方法，使得作品的層次停留在一個初等的形式。作者宣稱証明可以同時三角、四角、五角數的猜想，但因証明過程不斷經過非線性變換去化簡方程式，需要更仔細去檢查是否導致增/減根的可能性，整個作品尚有改進之空間。但仍是一個難得的作品。