

中華民國第 52 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

佳作

最佳(鄉土)教材獎

040412

圓盤在彈性碰撞下覆蓋面積之探討

學校名稱：國立新竹女子高級中學

| | |
|-------------------------|--------------|
| 作者： 高二 黃于軒 高二 呂曉佳 | 指導老師： 張寶文 |
|-------------------------|--------------|

關鍵詞：對稱面積、斜率、彈性碰撞次數

摘要

觀看掃地機器人的運作後，發現其效能不彰，促使我們欲瞭解並模擬其可能的最佳行進路線。

本作品將掃地機改成圓盤，假定其以彈性碰撞運動方式行走於矩形區域內，並利用對稱路徑的方式推導出圓盤在不同形狀的區域以不同角度及位置出發的覆蓋面積公式，藉此探討其行進路徑及覆蓋面積；此外，我們為避免路徑重疊而推導出對出發斜率的限制。

最後，我們分析數據以瞭解實際運作的情形，從數據中發現，面積覆蓋率和出發角度並沒有絕對關係，而是與碰撞次數關係密切，這樣的結果令人有些出乎意料，卻進一步讓我們瞭解真正影響面積覆蓋率的因子。然而，我們知道面積覆蓋率與運作效能不可兼得，於是我們對這部分做了探討，試圖找出令人滿意的行進路線。

壹、研究動機

首次得知時下熱門的家用清潔幫手---機器人掃地機(如圖 1.)便對這科技產品心生好奇，仔細觀察其運作方式後發現：掃地機經過的區域大抵皆能達清潔之效，但遇障礙物時用以引導方向的前端需要轉向才能繼續清掃，因而不盡然能打掃到每一塊區域，也很容易重複清掃到相同的地方，因此清掃一次的經濟成本較一般吸塵器為高。

之後有次看 DVD 時，其待機畫面為一橢圓形圖示(如圖 2.)在螢幕上不停地進行彈性碰撞運動，其路徑看似也能佈滿整個螢幕。這讓我們聯想到：既然掃地機行經區域大抵皆能達清潔之效，那麼是否可藉由彈性碰撞運動的方式來清掃房間，以節省遇到障礙物時必須轉向再前進的時間？



圖 1.



圖 2.

於是，我們想要瞭解若掃地機以彈性碰撞運動方式行進時，不同的出發角度對於清掃面積的影響；其次，我們也留意到房間內的插座位置會影響掃地機的起始狀況，因而導致路徑不同，所以我們想進一步瞭解倘若改變起始位置對於清掃面積又有何影響？

貳、文獻回顧

1. 楊天立、蔡逸帆、曾韋中(2002)將不同形狀的撞球檯視為一個「格子」，將球的路徑藉由格子四邊對稱為一直線，進而找出球進洞前所需的碰撞次數。以矩形撞球檯為例，將坐標平面以矩形格子作為單位，球於原點以有理數斜率 $\frac{q}{p}$ ($p, q \in N, (p, q) = 1$) 出發，其對稱路徑所在的直線為 $L: y = \frac{q}{p}x$ ，藉 L 由對角線與格線的交點數可知球進洞前所需的碰撞次數為 $(p+q-2)$ 次。下頁圖 3. 為斜率 $\frac{2}{3}$ 的情形，其中黑色實線的矩形即代表原來的矩形撞球檯。

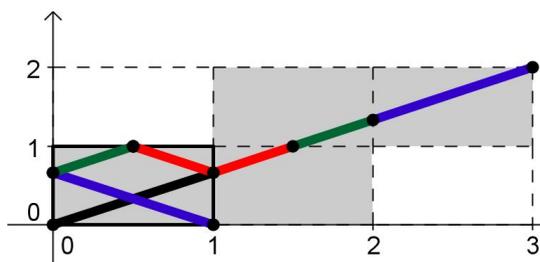


圖 3.

2. 徐邦焱、龔哲白(2008)也曾針對 GSP 軟體所設計的 5×8 方格撞球檯遊戲進行觀察，針對以角度四十五度在底邊的不同位置上擊球後，球的落袋位置、路徑長短進行觀察結果的歸納，但並沒有再深入驗證及探討。

3. 潘建綱(2008)利用 $m \times n$ ($m, n \in N$) 方格圖的對角線與水平線及鉛直線的交點數推導出對角線所經過的格子數(如圖 3. 的灰底部分)，並將結果推廣至 $m, n \in R^+$ 、或將對角線改為有寬度的線以及立體方格圖中對角線所經過的方格數。

上述的內容讓我們對於原有的問題有了更明確的想法。在考量行彈性碰撞運動下，我們將掃地機視為圓盤並以房間格局常見的矩形為彈性碰撞運動的區域，探討掃地機在矩形區域內彈性碰撞運動的覆蓋情形，並沿用楊天立、蔡逸帆、曾韋中(2002)的想法，將軌跡對稱為單一的長條帶狀以計算覆蓋面積並進而探討相關問題。此外，我們僅考處理想的彈性碰撞情形，意即不考慮能量消耗等造成碰撞停止的因素。

參、研究目的

- 一、探討圓盤在正方形區域內以不同角度出發進行彈性碰撞運動的面積覆蓋情形。
- 二、探討圓盤在長方形區域內以不同角度出發進行彈性碰撞運動的面積覆蓋情形。
- 三、探討在相同面積的矩形區域內，圓盤以同一角度出發進行彈性碰撞運動的面積覆蓋情形。
- 四、探討在相同區域內，改變圓盤起始位置，以同一角度出發進行彈性碰撞運動對面積覆蓋的影響。

肆、研究設備及器材

紙、筆、直尺、圓規、方格紙、電腦、Excel、GeoGebra。

伍、研究過程

一、基本設計

(一) 對稱圓盤軌跡

由於圓盤本身的對稱性，我們藉助圓盤中心點(此後簡稱為圓心)的軌跡作為對稱的考量基準。圖 4.中，半徑為 r ($r > 0$) 的圓盤於虛線矩形內進行彈性碰撞運動，圓心軌跡便自然落入各邊長皆縮短 $2r$ 的實線矩形內，我們將實線矩形視為一個「格子」(楊天立、蔡逸帆、曾韋中(2002))，以其四邊做為對稱軸，將圓盤軌跡對稱為一長條帶狀，圖中的紅色部分即為碰撞一次的對稱情形。為進一步討論，我們以格子為單位將其坐標化。

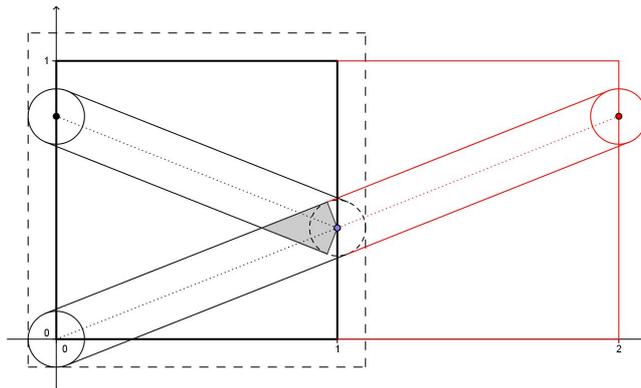


圖 4.

(二) 起始條件與終止條件

由於矩形格子的對稱性，我們設定圓心的起始位置僅在 x 軸上移動，出發角度則以斜率 m ($m > 0$) 表示。由對稱後的圓心軌跡可知：當圓心自原點以有理數斜率 $m = \frac{q}{p}$ ($p, q \in N$ 且 $(p, q) = 1$) 出發至第一個格子點 (p, q) 時，圖形會每隔 $p \times q$ 個格子圖便相同(如圖 5.的實線部分)，這是由於當圓心行至格子點 (p, q) 時表示圓盤落入矩形區域的角落而與相鄰兩邊相切，根據彈性碰撞原理，此時圓盤會循原路徑返回，而重複路徑並不會增加覆蓋面積，因而可以推算出覆蓋面積；但若 $m \notin Q$ ，由反證法可得知圓心軌跡無法經過格子點，這表示圓盤會不重複且無止盡地行進，如此便無法估算覆蓋面積。

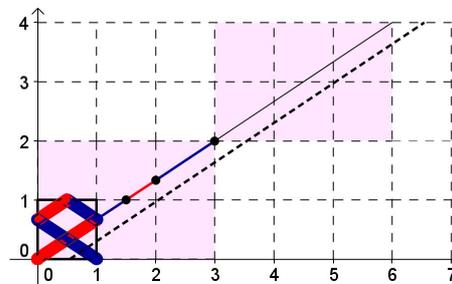


圖 5. $m = \frac{2}{3}$

因此，我們僅考慮出發斜率為有理數，即 $m = \frac{q}{p}$ ，其中 $p, q \in \mathbb{N}$ 且 $(p, q) = 1$ ，而終止條件為路徑重複之前。

(三) 避免路徑重疊性的原則

除彈性碰撞運動不可避免的重疊區域，如：前頁圖 4. 灰色四邊形區域及圖 5. 圓心軌跡交叉的菱形區域，路徑不可出現如圖 6. 的重疊，意即不會發生平行路徑重疊的情形，但這似乎得藉由限制出發斜率來控制，我們將於推導覆蓋面積公式時一併討論。

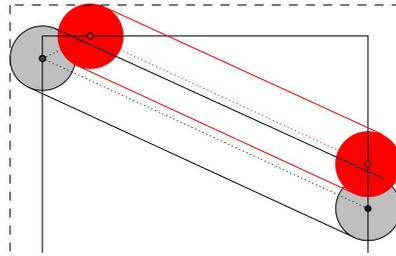


圖 6.

接下來，我們將就圓心起點是否在原點分別推導以不同斜率出發時在正方形及長方形區域內覆蓋面積的公式。

二、圓心起點為原點

(一) 正方形區域

設正方形區域邊長為 $a + 2r$ (其中 $a, r \in \mathbb{R}^+$ ， r 為圓盤半徑；此時一個格子為邊長為 a 的正方形)，圓心出發斜率為 m ($m \in \mathbb{Q}^+$)。當 $m = 1$ 時，圓盤在產生彈性碰撞前便達到終止條件，故不加以討論；由於正方形區域的對稱性， $m > 1$ 的情形等同於 $\frac{1}{m}$ 的情形，所以我們僅討論 $0 < m < 1$ 的情形。

為進一步討論，我們假設斜率 $m = \frac{q}{p}$ ，其中 $p, q \in \mathbb{N}$ ， $p > q$ 且 $(p, q) = 1$ 。由實際作圖的經驗，我們發現 $q = 1$ 時，圓盤僅在正方形區域內左右來回碰撞，其路徑較為單純，且重疊狀況也與其他情形不同，故我們先就 $q = 1$ 的情形推導出圓盤軌跡的覆蓋面積公式，再進而處理 $q > 1$ 的情形。

1. 斜率 $m = \frac{1}{p}$ ($p \in N, p > 1$)

此時，圓心對稱軌跡為 $p \times 1$ 格子圖之對角線，而該對角線與 $p \times 1$ 格子圖僅相交於各鉛直格線，這表示在終止條件前，圓盤僅在正方形區域內左右來回碰撞(如圖 7. 的實線部分)，因此面積重疊的情況僅有每次碰撞後產生的重疊區域；而每次碰撞後路徑方向會由先前的斜率改變為相反的斜率，故區域內約莫有一半的路徑斜率為 $\frac{1}{p}$ ，另一半為 $-\frac{1}{p}$ ，在避免路徑重疊的原則下，區域內圓心軌跡形成的相鄰平行線之間的距離須至少為 $2r$ 。

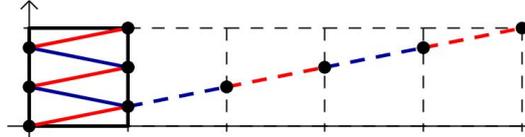


圖 7. $m = \frac{1}{5}$

然而，在此種碰撞方式之下，兩相鄰平行線與格子邊界截出的距離皆為 $\frac{2}{p}a$ ，

兩相鄰平行線的距離則為 $\frac{2}{p}a \cdot \cos \theta$ ，其中 θ 滿足 $\tan \theta = \frac{1}{p}$ ，又

$$\frac{2a}{p} \cdot \cos \theta \geq 2r \Rightarrow \frac{2a}{p} \cdot \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} \geq 2r \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{p^2+1}} \geq r \Rightarrow \sqrt{p^2+1} \leq \frac{a}{r}$$

因此，為使平行路徑不重疊，斜率 $\frac{1}{p}$ 須滿足 $\sqrt{p^2+1} \leq \frac{a}{r}$ 。

【公式一】：半徑為 r 的圓盤在邊長為 $a+2r$ 的正方形區域內，其圓心在原點以斜率

$m = \frac{1}{p}$ ($p \in N, p > 1, \sqrt{p^2+1} \leq \frac{a}{r}$) 出發進行彈性碰撞運動至終止條件

時，軌跡的覆蓋面積為

$$\sqrt{p^2+1} \cdot 2ar + \pi r^2 - (p-1) \left[pr^2 - \frac{1}{2}r^2(\pi - 2\theta) \right], \text{ 其中 } \theta = \tan^{-1} \frac{1}{p}$$

【證明】：

圓盤軌跡對稱後所形成的長條帶狀，是由一個長為 $a\sqrt{p^2+1}$ 、寬為 $2r$ 的長方形，及二個半徑為 r 的半圓所組成。

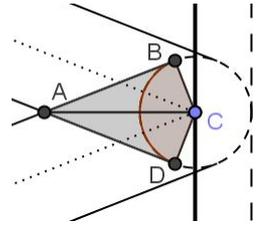
而每次碰撞後產生的四邊形重疊區域可視為兩個直角三角形再扣除一個扇形，如下頁圖：

$$\text{令 } \tan \theta = \tan \angle BAC = m = \frac{1}{p}, \theta \in R$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{BC} \cdot \cot \theta = pr$$

$$\text{又扇形 } BCD = \frac{1}{2} r^2 (\pi - 2\theta)$$

$$\therefore \text{四邊形 } ABCD \text{ 的面積為 } 2 \cdot \frac{1}{2} pr \cdot r - \frac{1}{2} r^2 (\pi - 2\theta) = pr^2 - \frac{1}{2} r^2 (\pi - 2\theta)。$$



又終止前共產生 $(p-1)$ 次碰撞，因而重疊區域共有 $(p-1)$ 處，故圓盤軌跡的覆

蓋面積為 $\sqrt{p^2 + 1} \cdot 2ar + \pi r^2 - (p-1) \left[pr^2 - \frac{1}{2} r^2 (\pi - 2\theta) \right]$ ，其中 $\theta = \tan^{-1} \frac{1}{p}$ 。



2. 斜率 $m = \frac{q}{p}$ ($p, q \in N, p > q > 1, (p, q) = 1$)

圓心軌跡即為 $p \times q$ 格子圖的對角線。因 $q > 1$ ，表示圓盤不僅只有左右來回碰撞，也會碰撞至上下邊界，而碰撞後改變路徑的方向使得區域內同樣有約莫一半的路徑斜率為 $\frac{q}{p}$ ，另一半為 $-\frac{q}{p}$ ，且斜率相反的路徑會交疊成菱形區域。圖 8. 為 $m = \frac{3}{5}$ 的情形。為避免路徑重疊，我們仍須限制區域內圓心軌跡形成的相鄰平行線之間的距離須至少為 $2r$ 。

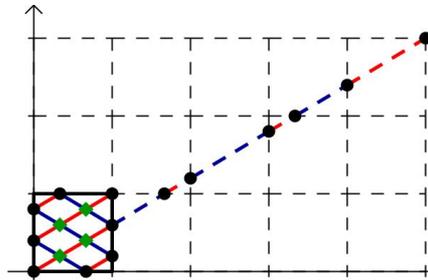


圖 8.

然而此種碰撞方式較難掌握兩相鄰平行線與格子邊界截出的距離，但經觀察後發現這距離似乎與 $m = \frac{1}{p}$ 的情況相同，一樣為 $\frac{2}{p} a$ ，於是我們嘗試驗證這發現。

我們先介紹潘建綱(2008)曾證明的引理，而其條件似有遺落，且為配合符號使用，我們將其重述為【引理一】。

【引理一】：設 $p, q \in N$ 且 $(p, q) = 1$ ，

若 $\forall k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ ， $k \cdot q = p \cdot u_k + v_k$ ，其中 $u_k \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ 且 $0 \leq v_k < p$ ，

則 $\{v_0, v_1, \dots, v_{p-1}\} = \{0, 1, \dots, p-1\}$ 。

【引理二】：設 $p, q \in N$ 且 $(p, q) = 1$ ， $\forall i, j \in \{1, \dots, p-1\}$ 滿足

$$i \cdot q = p \cdot u_i + v_i, \text{ 其中 } u_i \in \{0, 1, \dots, q-1\} \text{ 且 } u_i \text{ 為偶數, } v_i \in N$$

$$\text{且 } j \cdot q = p \cdot u_j - v_j, \text{ 其中 } u_j \in \{0, 1, \dots, q-1\} \text{ 且 } u_j \text{ 為偶數, } v_j \in N,$$

(1) 若 i, j 為不相等的偶數，則 $v_i \neq v_j$ ； (2) 若 i, j 為不相等的奇數，則 $v_i \neq v_j$ 。

【證明】：

(1) 假設 $v_i = v_j$ ，則 $(i + j) \cdot q = p \cdot (u_i + u_j)$ 。

再令 $i = 2s_1, j = 2s_2, u_i = 2t_1, u_j = 2t_2$ ，其中 $s_1, s_2, t_1, t_2 \in N$

$$\because i, j \in \{1, 2, \dots, p-1\}, u_i, u_j \in \{0, 1, \dots, q-1\}$$

$$\therefore i + j = 2(s_1 + s_2) \leq 2(p-1) \Rightarrow (s_1 + s_2) \leq (p-1)$$

$$u_i + u_j = 2(t_1 + t_2) \leq 2(q-1) \Rightarrow (t_1 + t_2) \leq (q-1)$$

又 $(p, q) = 1$

若 p 為奇數，則 $p \mid (i + j) \Rightarrow p \mid 2(s_1 + s_2) \Rightarrow p \mid (s_1 + s_2) \dots$ 此為矛盾

若 p 為偶數，則 q 為奇數，且 $q \mid (u_i + u_j) \Rightarrow q \mid (t_1 + t_2) \dots$ 此亦矛盾

故可知 $v_i \neq v_j$ 。

同理可知：若 i, j 為不相等的奇數，則 $v_i \neq v_j$ 。

■

【定理一】：半徑為 r 的圓盤在邊長為 $a + 2r$ 的正方形區域內，其圓心在原點以斜率

$$m = \frac{q}{p} (p, q \in N, p > q > 1, (p, q) = 1) \text{ 出發進行彈性碰撞運動至終止條件}$$

時，區域內圓心軌跡形成的相鄰平行線與格子邊界截出的距離皆為 $\frac{2}{p}a$ 。

【證明】：

以斜率 $m = \frac{q}{p}$ 由原點出發之圓心對稱軌跡所在的直線方程式為 $L: y = \frac{q}{p}x$ ，即

x 坐標每增加 k 個單位時， y 坐標便增加 $\frac{kq}{p}$ 個單位，而 k 為偶數時表示圓心在

左邊界， k 為奇數時表示圓心在右邊界。

為求邊界上點的 y 坐標，我們利用【引理一】改寫 y 坐標：

$$\frac{kq}{p} = \frac{p \cdot u_k + v_k}{p}, k = 1, 2, \dots, p-1 \text{ 且 } v_k \in \{1, \dots, p-1\}。$$

我們先找左邊界上點的 y 坐標，即 k 為偶數時：

(1) 若 k 為偶數， u_k 為偶數，則 y 坐標為 $\frac{v_k}{p}$ ，此時 $v_k = kq - p \cdot u_k$ 為一偶數。

(2) 若 k' 為偶數， u_k 為奇數， $k'q = p \cdot (u_k + 1) - v'_k$ ，其中 $v'_k = (p - v_k) \in N$ ，則 y

坐標為 $\frac{v'_k}{p}$ ，此時 $v'_k = p \cdot (u_k + 1) - k'q$ 亦為一偶數。

由【引理二】可知上述 $v_k \neq v'_k$ ，故左邊界上點的 y 坐標為 $\frac{v}{p}$ ，其中 v 為偶數且 $v \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ 。又左邊界上共有 $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$ 個點，故 v 為 1 至 $(p-1)$ 的所有偶數，因此邊界上兩相鄰點間的距離便為 $\frac{2}{p}$ 個單位，即 $\frac{2}{p}a$ 。

同理，右邊界上兩相鄰點的距離亦為 $\frac{2}{p}a$ 。



由【定理一】我們已知在此種碰撞方式之下，兩相鄰平行線與格子邊界截出的距離皆為 $\frac{2}{p}a$ ，故兩相鄰平行線的距離為 $\frac{2}{p}a \cdot \cos\theta$ ，其中 θ 滿足 $\tan\theta = \frac{q}{p}$ ，又

$$\frac{2a}{p} \cdot \cos\theta \geq 2r \Rightarrow \frac{2a}{p} \cdot \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} \geq 2r \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{p^2+q^2}} \geq r \Rightarrow \sqrt{p^2+q^2} \leq \frac{a}{r}$$

因此，為使平行路徑不重疊，斜率 $\frac{q}{p}$ 須滿足 $\sqrt{p^2+q^2} \leq \frac{a}{r}$ 。

此外，計算覆蓋面積時需扣除斜率相反的路徑交疊而成的菱形區域，故緊接著的首要任務便是找出這些菱形區域的個數。我們嘗試過許多方法，但成效皆不彰；最後我們注意到這些菱形區域發生的位置有一定的規律性，因而利用圓心的原始軌跡搭配其對稱軌跡推導出菱形區域的個數。

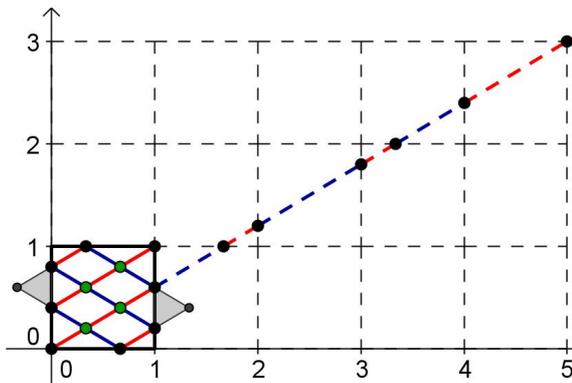


圖 9.

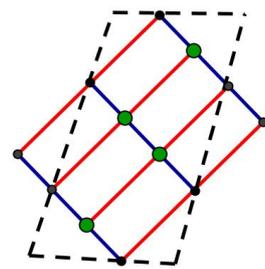


圖 10.

以 $m = \frac{3}{5}$ 的圓心軌跡為例(見圖 9.)，我們大膽延伸這些線段使其等長(扣除剛出發及結束前的部分線段)，則原區域線段看來像是延伸後的圖形被格子邊界所截而來；其次，由圓心對稱軌跡與 5×3 格子圖相交的水平與鉛直格線個數可得知圓心原軌跡與格子的各邊界交點個數：上邊界 1 個，下邊界 1 個，左邊界 2 個，右邊界 2 個，我們藉此得知如何截出格子邊界進而扣除不需要的交點個數(如圖 10.)，因此格子內的交點個數為 $4 \times 3 - (1) - (1) - (1+2) - (1+2) = 4$ 個。

所以，我們可藉由延伸圖形之交點個數再扣除不需要的交點個數得知菱形區域個數。

【定理二】：當圓盤圓心自原點以斜率 $m = \frac{q}{p}$ ($p, q \in N, p > q > 1, (p, q) = 1$) 出發在矩形區域內行彈性碰撞運動至終止條件時，在避免路徑重疊的原則下，帶狀軌跡交錯產生的菱形區域個數為 $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$ 。

【證明】：

當圓盤圓心以斜率 $m = \frac{q}{p}$ 出發在矩形區域內行彈性碰撞運動至終止條件時會在格子內產生 $p+q-1$ 條線段，我們就 $p+q-1$ 的奇偶分為以下二種情況討論：

Case1. $p+q-1$ 為偶數

此時 $p+q$ 為一奇數，我們針對 p, q 的奇偶再細分為二種情況：

(1) p 為偶數且 q 為奇數

令 $p = 2s$ ， $q = 2t+1$ ，其中 $s, t \in N, s > t$

此時格子內斜率為 m 及 $-m$ 的線段各有 $(s+t)$ 條，故交點共有 $(s+t)^2$ 個；而邊界上點的個數為上、下邊界各有 t 個，左邊有 $s-1$ 個，右邊界有 s 個。故菱形區域個數為

$$\begin{aligned} & (s+t)^2 - \sum_{i=0}^t i - \sum_{j=0}^t j - \sum_{k=0}^{s-1} k - \sum_{l=0}^s l \\ &= (s+t)^2 - \frac{t(t+1)}{2} - \frac{t(t+1)}{2} - \frac{s(s-1)}{2} - \frac{s(s+1)}{2} \\ &= (s^2 + 2st + t^2) - (t^2 + t + s^2) \\ &= (2s-1)t \\ &= \frac{(p-1)(q-1)}{2} \end{aligned}$$

(2) p 為奇數且 q 為偶數

令 $p = 2s'+1$ ， $q = 2t'$ ，其中 $s', t' \in N, s' > t'$

此時格子內斜率為 m 及 $-m$ 的線段各有 $(s'+t')$ 條，故交點共有 $(s'+t')^2$ 個；而邊界上點的個數為上邊界有 t' 個、下邊界有 $(t'-1)$ 個，左、右邊界各有 s' 個。

故菱形區域個數為

$$\begin{aligned} & (s'+t')^2 - \sum_{i=0}^{t'} i - \sum_{j=0}^{t'-1} j - \sum_{k=0}^{s'} k - \sum_{l=0}^{s'} l \\ &= (s'+t')^2 - \frac{t'(t'+1)}{2} - \frac{t'(t'-1)}{2} - \frac{s'(s'+1)}{2} - \frac{s'(s'+1)}{2} \\ &= (s'^2 + 2s't' + t'^2) - (t'^2 + s'^2 + s') \\ &= s'(2t'-1) \\ &= \frac{(p-1)(q-1)}{2} \end{aligned}$$

Case2. $p+q-1$ 為奇數

此時 $p+q$ 為偶數，又 $(p,q)=1$ ，故 p, q 皆為奇數。

令 $p=2u+1$ ， $q=2v+1$ ，其中 $u, v \in N, u > v$

此時格子內斜率為 m 的線段有 $(u+v+1)$ 條，斜率為 $-m$ 的線段有 $(u+v)$ 條，故交點共有 $(u+v+1)(u+v)$ 個；而邊界上點的個數為上、下邊界各有 v 個，左、右邊界各有 u 個。

故菱形區域個數為

$$\begin{aligned} & (u+v+1)(u+v) - \sum_{i=0}^v i - \sum_{j=0}^v j - \sum_{k=0}^u k - \sum_{l=0}^u l \\ &= (u+v+1)(u+v) - \frac{v(v+1)}{2} - \frac{v(v+1)}{2} - \frac{u(u-1)}{2} - \frac{u(u+1)}{2} \\ &= (u^2 + 2uv + v^2 + u + v) - (v^2 + v + u^2 + u) \\ &= 2uv \\ &= \frac{(p-1)(q-1)}{2} \end{aligned}$$

故帶狀軌跡交錯產生的菱形區域個數為 $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$ 。

■

【公式二】：半徑為 r 的圓盤在邊長為 $a+2r$ 的正方形區域內，其圓心自原點以斜率

$m = \frac{q}{p}$ 出發進行彈性碰撞運動，其中 $p, q \in N, p > q > 1, (p, q) = 1$ 且

$\sqrt{p^2 + q^2} \leq \frac{a}{r}$ ，則至終止條件時，其軌跡的覆蓋面積為

$$\sqrt{p^2 + q^2} \cdot 2ar + \pi r^2 - (p-1) \left[\frac{p}{q} r^2 - \frac{1}{2} r^2 (\pi - 2\theta) \right] - (q-1) \left[\frac{q}{p} r^2 - r^2 \theta \right] - \frac{r^2 (p-1)(q-1)(p^2 + q^2)}{pq}$$

，其中 $\theta = \tan^{-1} \frac{q}{p}$ 。

【證明】：

圓盤軌跡對稱後所形成的長條帶狀是由一個長為 $a\sqrt{p^2 + q^2}$ 、寬為 $2r$ 的長方形，及二個半徑為 r 的半圓所組成；而重疊的情況除了每次碰撞所產生的四邊形外，尚有帶狀軌跡交錯出的菱形區域。

每次碰撞後產生的四邊形重疊區域有兩種：一種發生在左右邊界，如下頁圖中四邊形 $ABCD$ ，共有 $(p-1)$ 處；另一種發生在上下邊界，如下頁圖中四邊形 $EFGH$ ，共有 $(q-1)$ 處。兩者皆可視為兩個直角三角形再扣除一個扇形：

$$\Rightarrow \tan \theta = \tan \angle BAC = m = \frac{q}{p}, \theta \in R$$

$$\Rightarrow \angle FEH = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{BC} \cdot \cot \theta = \frac{p}{q} r$$

$$\overline{EH} = \overline{EF} \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{q}{p} r$$

$$\text{又扇形} BCD = \frac{1}{2} r^2 (\pi - 2\theta),$$

$$\text{扇形} EFG = \frac{1}{2} r^2 \cdot 2\theta$$

$$\therefore \text{四邊形 } ABCD \text{ 的面積為 } 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{pr}{q} \cdot r - \frac{1}{2} r^2 (\pi - 2\theta) = \frac{p}{q} r^2 - \frac{1}{2} r^2 (\pi - 2\theta)$$

$$\text{四邊形 } EFGH \text{ 的面積為 } 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{qr}{p} \cdot r - \frac{1}{2} r^2 \cdot 2\theta = \frac{q}{p} r^2 - r^2 \theta$$

而菱形區域部分，如右圖菱形 $PQRS$ ：

$$\therefore \angle QPR = \theta, \angle QSR = \frac{\pi}{2} - \theta$$

\therefore 菱形 $PQRS$ 的面積為

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \overline{PR} \cdot \overline{QS} &= \frac{1}{2} \cdot 2r \csc \theta \cdot 2r \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= 2r^2 \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{q} \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{p} = \frac{2r^2(p^2 + q^2)}{pq} \end{aligned}$$

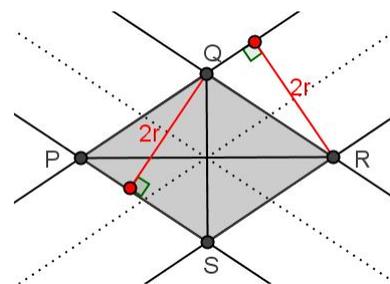
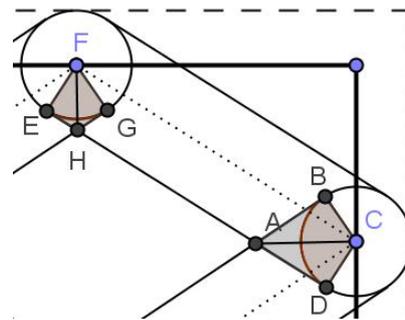
而菱形重疊區域共有 $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$ 處。

故圓盤軌跡的覆蓋面積為

$$\sqrt{p^2 + q^2} \cdot 2ar + \pi r^2 - (p-1) \left[\frac{p}{q} r^2 - \frac{1}{2} r^2 (\pi - 2\theta) \right] - (q-1) \left[\frac{q}{p} r^2 - r^2 \theta \right] - \frac{r^2 (p-1)(q-1)(p^2 + q^2)}{pq}$$

$$\text{，其中 } \theta = \tan^{-1} \frac{q}{p} \text{。}$$

■



討論完正方形區域的情形，我們進一步改變長寬的比例。我們留意到【公式二】中的 $q=1$ 時即為【公式一】，故討論長方形區域時可不必再區分為二種情形。

(二) 長方形區域

設長方形區域長為 $a+2r$ 、寬為 $b+2r$ (其中 $a, b, r \in R^+$, r 為圓盤半徑；此時一個格子為長為 a 、寬為 b 的長方形)，圓心出發斜率為 m' ($m' \in Q^+$)。此處斜率 m' 是以 $a:b$ 的坐標平面來衡量。長方形與正方形的情形相仿，唯推導覆蓋面積時需修正斜率為 $m = \frac{b}{a} m'$ 。

為進一步討論，我們假設斜率 $m' = \frac{q}{p}$ ，其中 $p, q \in N$ 且 $(p, q) = 1$ ，圓心對稱軌跡便為 $p \times q$ 格子圖之對角線，而斜率應修正為 $m = \frac{b}{a} m' = \frac{bq}{ap}$ 。圖 11. 為斜率 m' 互為倒數的對稱軌跡。

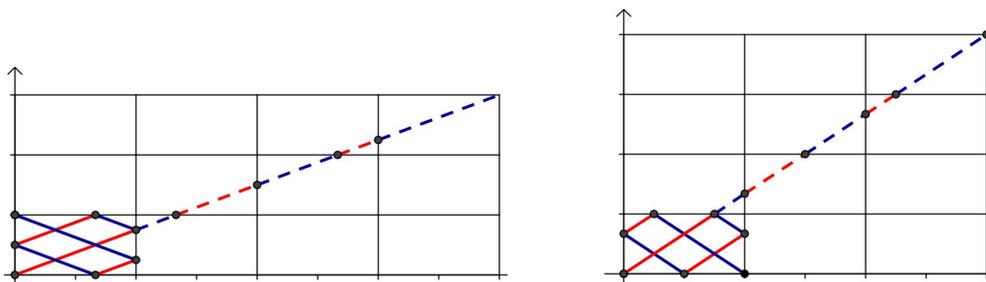


圖 11. 左圖為 $m' = \frac{3}{4}$ ，右圖為 $m' = \frac{4}{3}$

此時，原區域內圓心軌跡形成的相鄰平行線與格子左右邊界截出的距離為 $\frac{2}{p}b$ ，避免路徑重疊的原則下，仍需限制 $\frac{2}{p}b \cdot \cos \theta \geq 2r$ ，其中 θ 滿足 $\tan \theta = \frac{bq}{ap}$ ，又

$$\frac{2b}{p} \cdot \cos \theta \geq 2r \Rightarrow \frac{2b}{p} \cdot \frac{ap}{\sqrt{a^2 p^2 + b^2 q^2}} \geq 2r \Rightarrow \frac{ab}{\sqrt{a^2 p^2 + b^2 q^2}} \geq r \Rightarrow \sqrt{a^2 p^2 + b^2 q^2} \leq \frac{ab}{r}$$

因此，為使平行路徑不重疊， p, q 須滿足 $\sqrt{a^2 p^2 + b^2 q^2} \leq \frac{ab}{r}$ 。

【公式三】：半徑為 r 的圓盤在長為 $a+2r$ 、寬為 $b+2r$ 的長方形區域內，其圓心自原

點以斜率 $m = \frac{bq}{ap}$ 出發進行彈性碰撞運動，其中 $p, q \in N$ ， $(p, q) = 1$ 且

$\sqrt{a^2 p^2 + b^2 q^2} \leq \frac{ab}{r}$ ，則至終止條件時，其軌跡的覆蓋面積為

$$\sqrt{a^2 p^2 + b^2 q^2} \cdot 2r + \pi r^2 - (p-1) \left[\frac{ap}{bq} r^2 - \frac{1}{2} r^2 (\pi - 2\theta) \right] - (q-1) \left[\frac{bq}{ap} r^2 - r^2 \theta \right] - \frac{r^2 (p-1)(q-1)(a^2 p^2 + b^2 q^2)}{abpq}$$

，其中 $\theta = \tan^{-1} \frac{bq}{ap}$

【證明】：

圓盤軌跡對稱後所形成的長條帶狀是由一個長為 $\sqrt{a^2 p^2 + b^2 q^2}$ 、寬為 $2r$ 的長方形，及二個半徑為 r 的半圓所組成；而重疊的情況除了每次碰撞所產生的四邊形外，尚有帶狀軌跡交錯出的菱形區域。

每次碰撞後產生的四邊形重疊區域有兩種：一種發生在左右邊界，如下圖中四邊形 $ABCD$ ，共有 $(p-1)$ 處；另一種發生在上下邊界，如圖中四邊形 $EFGH$ ，共有 $(q-1)$ 處。兩者皆可視為兩個直角三角形再扣除一個扇形：

$$\text{令 } \tan \theta = \tan \angle BAC = m = \frac{bq}{ap}, \theta \in R$$

$$\Rightarrow \angle FEH = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{BC} \cdot \cot \theta = \frac{ap}{bq} r, \quad \overline{EH} = \overline{EF} \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{bq}{ap} r$$

$$\text{又扇形 } BCD = \frac{1}{2} r^2 (\pi - 2\theta), \quad \text{扇形 } EFG = \frac{1}{2} r^2 \cdot 2\theta$$

$$\therefore \text{四邊形 } ABCD \text{ 的面積為 } 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{ap}{bq} \cdot r - \frac{1}{2} r^2 (\pi - 2\theta) = \frac{ap}{bq} r^2 - \frac{1}{2} r^2 (\pi - 2\theta)$$

$$\text{四邊形 } EFGH \text{ 的面積為 } 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{bq}{ap} \cdot r - \frac{1}{2} r^2 \cdot 2\theta = \frac{bq}{ap} r^2 - r^2 \theta$$

而菱形區域部分，如右圖菱形 $PQRS$ ：

$$\therefore \angle QPR = \theta, \angle QSR = \frac{\pi}{2} - \theta$$

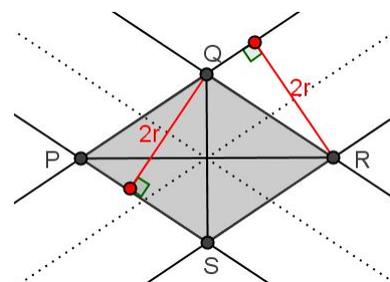
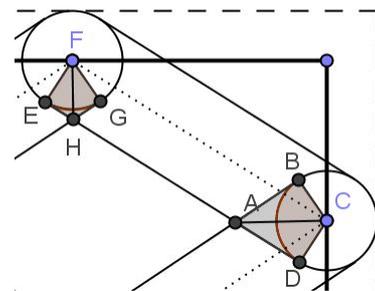
\therefore 菱形 $PQRS$ 的面積為

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \overline{PR} \cdot \overline{QS} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2r \csc \theta \cdot 2r \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= 2r^2 \frac{\sqrt{a^2 p^2 + b^2 q^2}}{bq} \frac{\sqrt{a^2 p^2 + b^2 q^2}}{ap} \\ &= \frac{2r^2 (a^2 p^2 + b^2 q^2)}{abpq} \end{aligned}$$

而菱形重疊區域共有 $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$ 處。故圓盤軌跡的覆蓋面積為

$$\sqrt{a^2 p^2 + b^2 q^2} \cdot 2r + \pi r^2 - (p-1) \left[\frac{ap}{bq} r^2 - \frac{1}{2} r^2 (\pi - 2\theta) \right] - (q-1) \left[\frac{bq}{ap} r^2 - r^2 \theta \right] - \frac{r^2 (p-1)(q-1)(a^2 p^2 + b^2 q^2)}{abpq}$$

$$\text{，其中 } \theta = \tan^{-1} \frac{bq}{ap} \text{。}$$



推導出圓盤圓心以不同斜率出發在矩形區域內的覆蓋面積的公式後，我們進一步改變圓心起始點的位置，希望可以知道若以相同斜率出發在不同起始位置下覆蓋面積的差異。

三、圓心起點為 $(\frac{\beta}{\alpha}, 0)$ ，其中 $\alpha, \beta \in N, \alpha > \beta$ 且 $(\alpha, \beta) = 1$

我們仍視圓心軌跡所在的矩形為一個格子，且以此為單位劃分平面，將圓盤軌跡對稱為一長條帶狀，並令圓心出發斜率為 $\frac{q}{p}$ ($p, q \in N, (p, q) = 1$)。

改變起始位置後的圓心對稱軌跡 L' 可視為原對稱軌跡 L 之平移，故軌跡圖形依然每隔 $p \times q$ 個格子圖便重複。直觀上， L' 不見得會經過格子點，但軌跡圖形的重複性讓我們認定圓盤仍會回到原出發點而形成迴路，因而可以確定其覆蓋面積。由實際作圖的經驗中也驗證了我們的想法，同時也發現 L' 會經過格子點的情形，而這現象其實與貝祖定理(最大公因數表現定理)有關。

【引理三】：若圓盤圓心的起點為 $(\frac{\beta}{\alpha}, 0)$ ($\alpha, \beta \in N, \alpha > \beta, (\alpha, \beta) = 1$)，出發斜率為 $\frac{q}{p}$ ，其中 $p, q \in N, (p, q) = 1$ ，則圓心對稱軌跡會通過格子點的充要條件為 $\alpha | q$ 。

【證明】：

圓心對稱軌跡所在的直線方程式為 $L': y = \frac{q}{p}(x - \frac{\beta}{\alpha})$ 。

而圓心對稱軌跡通過格子點，意即 $L': qx - py = \frac{q\beta}{\alpha}$ 有整數解。

又 $\because p, q \in N$ 且 $(p, q) = 1$

\therefore 由貝祖定理(最大公因數表現定理)可知： $qx - py = 1$ 有無限多組整數解。

故 L' 有整數解 $\Leftrightarrow \frac{q\beta}{\alpha} \in Z \Leftrightarrow \alpha | q$ ($\because (\alpha, \beta) = 1$)

■

接下來，我們將依圓心對稱軌跡是否通過格子點分別探究其面積覆蓋的情形。

(一) 圓心對稱軌跡行至格子點，即 $\alpha | q$

由於改變起始位置後的圓心對稱軌跡可視為原對稱軌跡之平移，故圓心對稱軌跡由起始點 $(\frac{\beta}{\alpha}, 0)$ 至格子點僅為原對稱軌跡一部分的平移(如圖 12.)，因此其覆蓋面積自然較原點出發的為少，故不再深入討論。

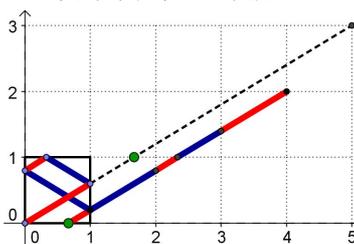


圖 12. 出發斜率 $\frac{3}{5}$ ，起始點 $(\frac{2}{3}, 0)$

(二) 圓心對稱軌跡不通過格子點，即 $\alpha \nmid q$

圓心對稱軌跡的圖形依然會每隔 $p \times q$ 個格子圖便重複，因而形成迴路。因為 $(p, q) = 1$ ，故 p, q 至少有一個為奇數，但若想使圓心回到原出發點 $(\frac{\beta}{\alpha}, 0)$ ，則圓心對稱軌跡需經過偶數條水平格線及偶數條鉛直格線，因此我們得知路徑應是我們原先認定的兩倍，即終止條件為圓心行至格子點 $(2p + \frac{\beta}{\alpha}, 2q)$ (以圖 13. 為例)。而這發現著實令我們驚喜。

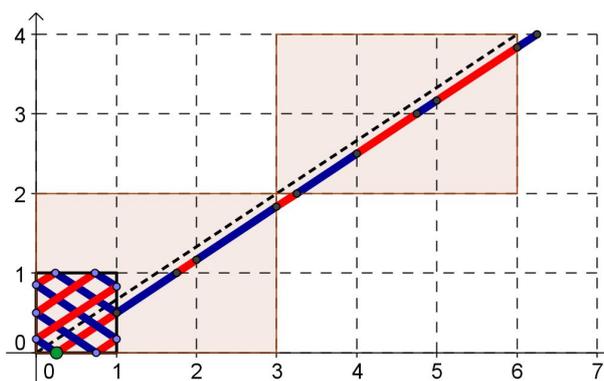


圖 13. 出發斜率 $\frac{2}{3}$ ，起始點 $(\frac{1}{4}, 0)$

得知終止條件後，我們仿照先前的推導過程得知此種情形在矩形區域內的覆蓋面積。而在避免路徑重疊的原則下，仍需限制兩相鄰平行線間的距離至少為 $2r$ ，唯因路徑變為兩倍，圓心於邊界上落點個數增加，其兩相鄰點距離自然變短，斜率的限制應得更為嚴格，而由實際作圖經驗中我們亦可發現這兩倍的路徑事實上可視為緊貼著的兩部分，故更為嚴格的斜率限制的確是必須的。

在推導覆蓋面積前，我們還得先找出圓盤帶狀軌跡交錯出的菱形區域個數。

【定理三】：當圓盤圓心自起始點為 $(\frac{\beta}{\alpha}, 0)$ ($\alpha, \beta \in N, \alpha > \beta, (\alpha, \beta) = 1$) 以斜率

$$m = \frac{q}{p} \quad (p, q \in N, (p, q) = 1)$$

出發在矩形區域內行彈性碰撞運動至終止條件時，在避免路徑重疊的原則下，帶狀軌跡交錯產生的菱形區域個數為 $2pq - p - q$ 。

【證明】：

終止條件為圓心對稱軌跡行至格子點 $(2p + \frac{\beta}{\alpha}, 2q)$ ，此時軌跡被格線截成

$2(p+q)$ 個線段，故在原矩形格子內會有斜率為 m 及 $-m$ 的線段各有 $(p+q)$ 條，其交點共有 $(p+q)^2$ 個；而上、下邊界各有 q 個點，左、右邊界各有 p 個點。

菱形區域個數為上述相反斜率線段的交點個數扣除不需要的交點個數，即

$$\begin{aligned}
& (p+q)^2 - \sum_{i=0}^q i - \sum_{j=0}^q j - \sum_{k=0}^p k - \sum_{l=0}^p l \\
&= (p+q)^2 - \frac{q(q+1)}{2} - \frac{q(q+1)}{2} - \frac{p(p-1)}{2} - \frac{p(p+1)}{2} \\
&= (p+q)^2 - (q^2 + q + p^2 + p) \\
&= 2pq - p - q
\end{aligned}$$

【公式四】：半徑為 r 的圓盤在邊長為 $a+2r$ 的正方形區域內，其圓心自起始點為

$(\frac{\beta}{\alpha}, 0)$ ($\alpha, \beta \in N, \alpha > \beta, (\alpha, \beta) = 1$) 以斜率 $m = \frac{q}{p}$ 出發，進行彈性碰撞運動，其中 $p, q \in N, (p, q) = 1$ 且 $\alpha \nmid q$ ，在避免路徑重疊的原則下，至終止條件時，其軌跡的覆蓋面積為

$$\sqrt{p^2 + q^2} \cdot 4ar + \pi r^2 - 2p \left[\frac{p}{q} r^2 - \frac{1}{2} r^2 (\pi - 2\theta) \right] - (2q-1) \left[\frac{q}{p} r^2 - r^2 \theta \right] - (2pq - p - q) \frac{2r^2 (p^2 + q^2)}{pq}$$

，其中 $\theta = \tan^{-1} \frac{q}{p}$ 。

【證明】：

此時，終止條件為圓心對稱軌跡行至格子點 $(2p + \frac{\beta}{\alpha}, 2q)$ ，故圓盤軌跡對稱

後所形成的長條帶狀是由一個長為 $2a\sqrt{p^2 + q^2}$ 、寬為 $2r$ 的長方形，及二個半徑為 r 的半圓所組成；而重疊的情況除了每次碰撞所產生的四邊形外，尚有帶狀軌跡交錯出的菱形區域，由【公式二】可知其面積，唯發生的次數不同。

每次碰撞後產生的四邊形重疊區域有兩種：

一種發生在左右邊界，如右圖中四邊形 $ABCD$ ，其面積為 $\frac{p}{q} r^2 - \frac{1}{2} r^2 (\pi - 2\theta)$ ，共有 $2p$ 處；

另一種發生在上下邊界，如右圖中四邊形 $EFGH$ ，其面積為 $\frac{q}{p} r^2 - r^2 \theta$ ，共有 $(2q-1)$ 處。

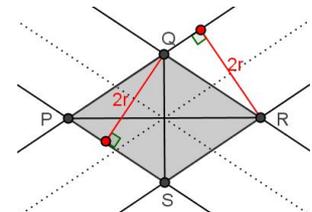
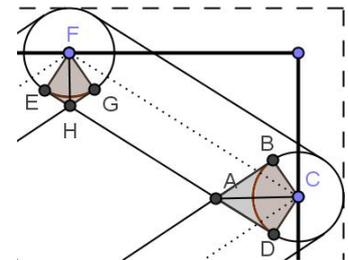
而菱形區域部分，如右圖菱形 $PQRS$ ：

其面積為 $\frac{2r^2 (p^2 + q^2)}{pq}$ ，共有 $(2pq - p - q)$ 處。

故圓盤軌跡的覆蓋面積為

$$\sqrt{p^2 + q^2} \cdot 4ar + \pi r^2 - 2p \left[\frac{p}{q} r^2 - \frac{1}{2} r^2 (\pi - 2\theta) \right] - (2q-1) \left[\frac{q}{p} r^2 - r^2 \theta \right] - (2pq - p - q) \frac{2r^2 (p^2 + q^2)}{pq}$$

，其中 $\theta = \tan^{-1} \frac{q}{p}$ 。



長方形區域的情形，其斜率應修正為 $m = \frac{b}{a} m' = \frac{bq}{ap}$ 。

【公式五】：半徑為 r 的圓盤在長為 $a+2r$ 、寬為 $b+2r$ 的長方形區域內，其圓心自起

始點為 $(\frac{\beta}{\alpha}, 0)$ ($\alpha, \beta \in N, \alpha > \beta, (\alpha, \beta) = 1$) 以斜率 $m = \frac{bq}{ap}$ 出發，進行彈性

碰撞運動，其中 $p, q \in N, (p, q) = 1$ 且 $\alpha \nmid q$ ，在避免路徑重疊的原則下，至終止條件時，其軌跡的覆蓋面積為

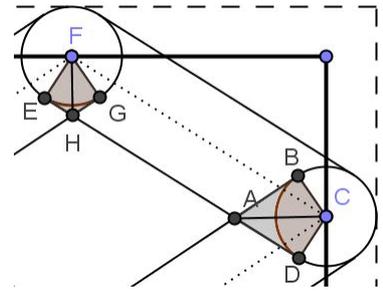
$$\sqrt{a^2 p^2 + b^2 q^2} \cdot 4r + \pi r^2 - 2p \left[\frac{ap}{bq} r^2 - \frac{1}{2} r^2 (\pi - 2\theta) \right] - (2q-1) \left[\frac{bq}{ap} r^2 - r^2 \theta \right] - (2pq - p - q) \frac{2r^2 (a^2 p^2 + b^2 q^2)}{abpq}$$

，其中 $\theta = \tan^{-1} \frac{bq}{ap}$ 。

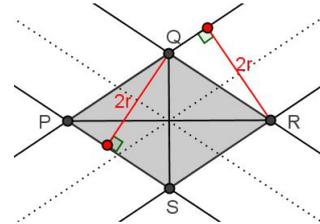
【證明】：

與【公式四】同理。唯圓盤軌跡對稱後所形成的長條帶狀是由一個長為 $2\sqrt{a^2 p^2 + b^2 q^2}$ 、寬為 $2r$ 的長方形，及二個半徑為 r 的半圓所組成；而重疊的情況除了每次碰撞所產生的四邊形外，尚有帶狀軌跡交錯出的菱形區域。

每次碰撞後產生的四邊形重疊區域有兩種：
 一種發生在左右邊界，如右圖中四邊形 $ABCD$ ，其面積為 $\frac{ap}{bq} r^2 - \frac{1}{2} r^2 (\pi - 2\theta)$ ，共有 $(p-1)$ 處；另一種發生在上下邊界，如右圖中四邊形 $EFGH$ ，其面積為 $\frac{bq}{ap} r^2 - r^2 \theta$ ，共有 $(q-1)$ 處。



而菱形區域部分，如右下圖菱形 $PQRS$ ：
 其面積為 $\frac{2r^2 (a^2 p^2 + b^2 q^2)}{abpq}$ ，共有 $(2pq - p - q)$ 處。



故圓盤軌跡的覆蓋面積為

$$\sqrt{a^2 p^2 + b^2 q^2} \cdot 4r + \pi r^2 - 2p \left[\frac{ap}{bq} r^2 - \frac{1}{2} r^2 (\pi - 2\theta) \right] - (2q-1) \left[\frac{bq}{ap} r^2 - r^2 \theta \right] - (2pq - p - q) \frac{2r^2 (a^2 p^2 + b^2 q^2)}{abpq}$$

，其中 $\theta = \tan^{-1} \frac{bq}{ap}$ 。

推導完各種情形的覆蓋面積公式後，我們將以真實數據做進一步分析以求更能比較面積覆蓋率及面積重複率的程度，藉以瞭解此種運作之下的效能。

陸、研究結果

市面上掃地機半徑皆約為 15 cm ，故我們設定圓盤半徑 $r = 15\text{ cm}$ ；而房間面積通常以坪為單位，一坪約 $180 \times 180\text{ cm}^2$ ，且通常床的長度也約 180 cm ，因此我們以 180 cm 為一個基本單位。我們有興趣的問題是出發斜率(角度)是否與面積覆蓋率有關，以及如何減少碰撞次數以降低面積重複率進而達到更好的效能。而以下的圖形為我們考慮斜率限制的條件下，將 excel 所計算的數據轉換到 Geogebra 所繪製而成。由於版面有限，我們僅以部分圖形呈現所觀察的結果。

一、正方形區域

(一) 出發斜率(角度)與面積覆蓋率

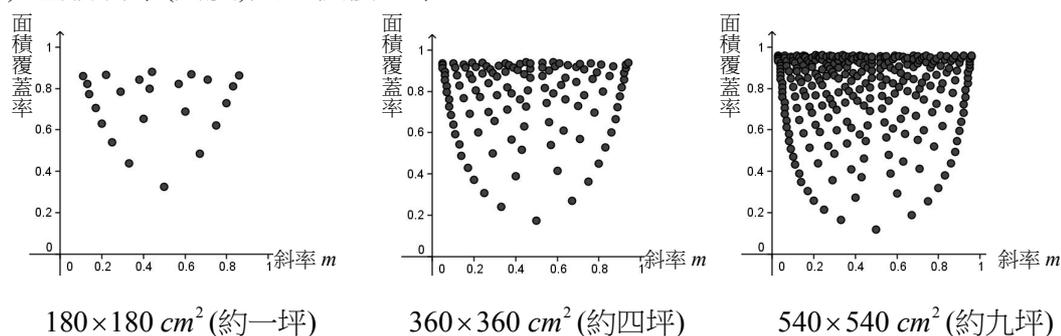


圖 14.

由圖 14.可知：區域面積若愈大，可允許的有理數出發斜率愈多，因此圖上的點也愈多，但圖形大致的輪廓是相似的。然而，出發斜率(角度)相近仍會有不同的面積覆蓋率，顯示出發斜率(角度)與面積覆蓋率並沒有特別的關係。

(二) 碰撞次數與面積覆蓋率

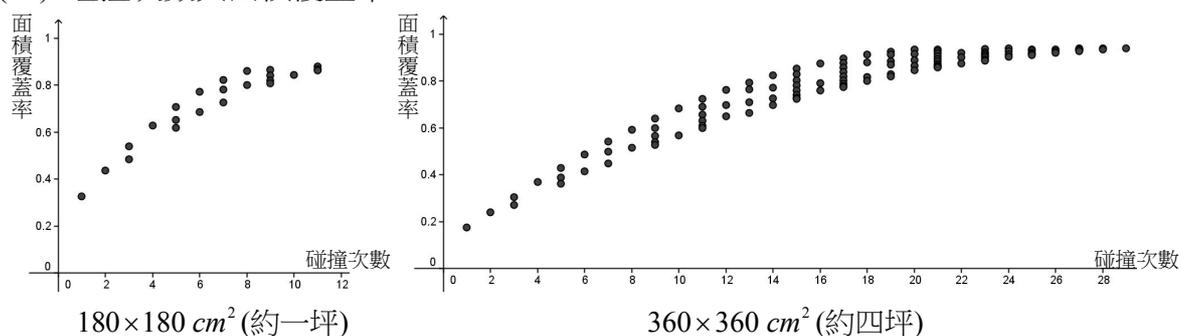


圖 15.

由圖 15.我們可看出碰撞次數愈多面積覆蓋率亦愈高，其關係近似二次曲線，這讓我們頓時明白，事實上是出發角度決定了碰撞次數因而影響覆蓋率，若想使覆蓋率達到一定的程度，得達到一定的碰撞次數。

(三) 碰撞次數與面積重複率

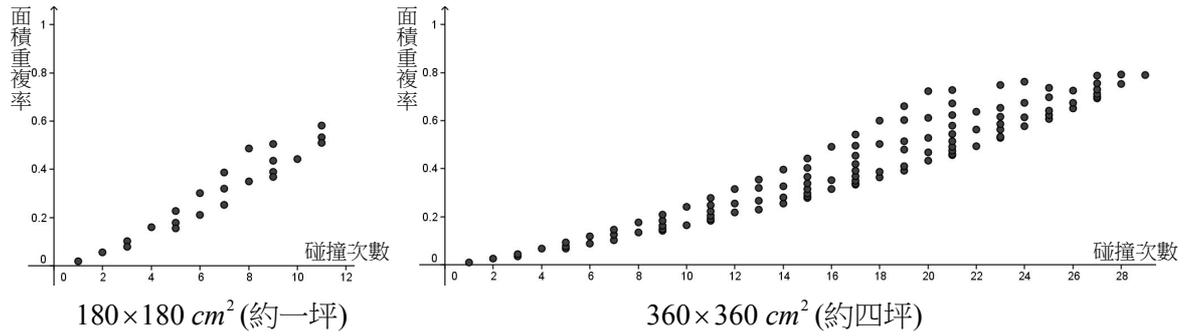


圖 16.

圖 16.呈現面積重複率隨著碰撞次數增加。再回想對稱後的路徑：當碰撞次數愈多，長條帶狀面積愈長，自然覆蓋率增加，但亦會導致重疊區域多，面積重複率高，因而效能也會較差，這與我們觀察的結果一致。

二、長方形區域

我們可以預期長方形區域與正方形區域的結果應相仿，經實際數據分析後也證實我們的預期，意即碰撞次數與面積覆蓋率並不受區域影響。

三、相同面積但不同形狀的矩形區域

我們已經知道是碰撞次數影響了面積覆蓋率，因此針對不同狀形的矩形區域探討其覆蓋率差異時，得以同樣的碰撞形式來考量，故我們固定 p, q 值來做面積覆蓋率的比較。

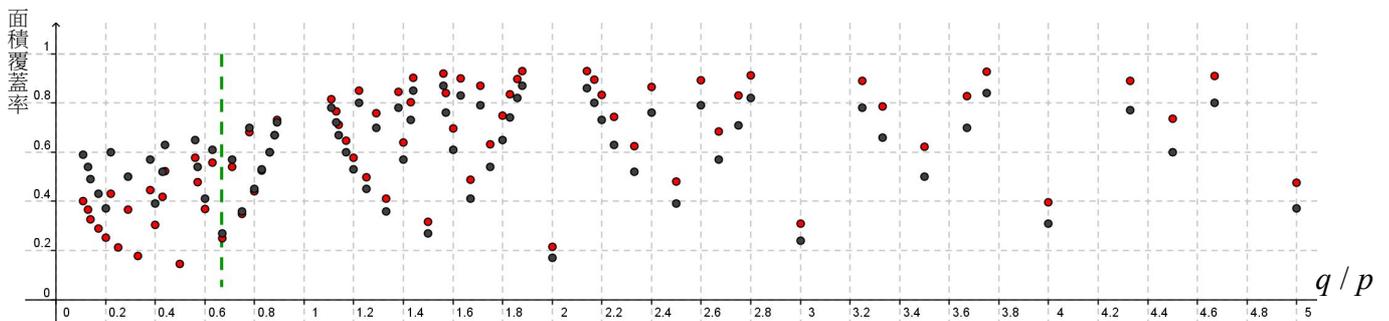


圖 17. 紅色點表示在長方形區域： $240 \times 540 \text{ cm}^2$ 內；黑色點表示在正方形區域內： $360 \times 360 \text{ cm}^2$

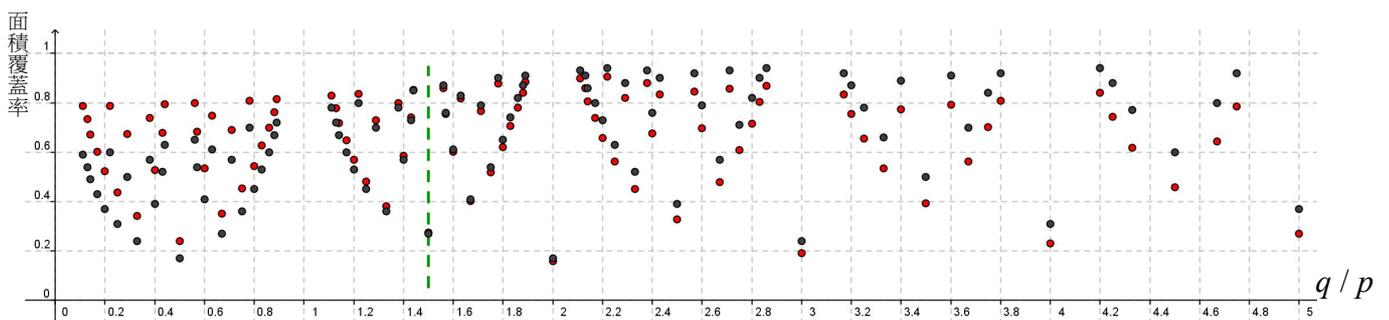


圖 18. 紅色點表示在長方形區域： $540 \times 240 \text{ cm}^2$ 內；黑色點表示在正方形區域內： $360 \times 360 \text{ cm}^2$

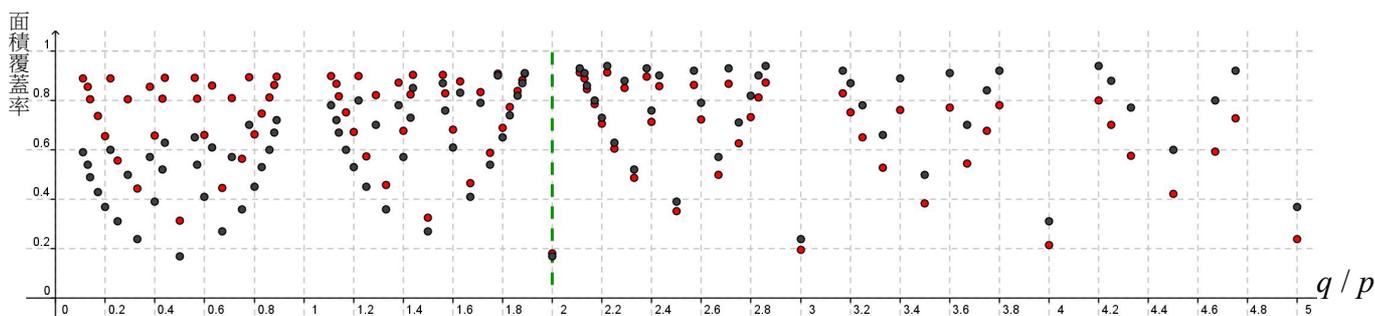


圖 19. 紅色點表示在長方形區域： $720 \times 180 \text{ cm}^2$ 內；黑色點表示在正方形區域內： $360 \times 360 \text{ cm}^2$

設兩長方形的大小分別為 $a_1 \times b_1, a_2 \times b_2$ ，其中 a_1, a_2 為長邊， b_1, b_2 為短邊，

且令 $k = \frac{a_1}{a_2} > 1$ 。

由圖 17. 至圖 19. 我們可知當 k 愈大，在碰撞情形 $\frac{q}{p} \leq k$ 時，長邊較長的矩形面積覆蓋率較大，但在碰撞情形 $\frac{q}{p} > k$ 時，長邊較長的面積覆蓋率則較小。意即若在相同面積但不同形狀的矩形區域以相同的碰撞方式行進，面積覆蓋率會受到形狀長寬比的影響。

四、相同區域內，在不同起始位置

由推導出正方形覆蓋面積的【公式四】及長方形覆蓋面積的【公式五】可知覆蓋面積與起始點 $\frac{\beta}{\alpha}$ 無關。故除前述的特殊分點外，基本上面積覆蓋率與起始位置無關。

柒、討論

一、幾何圖形觀點

我們發現若想達到一定的面積覆蓋率勢必需要一定的碰撞次數，若欲同時降低面積重複率，經觀察發現菱形區域個數是個重要關鍵，於是我們將問題轉化為另一種形式來看：在限制斜率的條件下，我們希望能找出盡可能少的碰撞次數及菱形區域個數但又達到一定面積覆蓋率之出發斜率。以下舉正方形及長方形各一例以重新檢視我們先前的結果。

(一) 正方形區域：180cm×180cm (約一坪)

斜率 $m = \frac{q}{p}$ ($p, q \in N, (p, q) = 1$) 的限制：

$$\sqrt{p^2 + q^2} \leq \frac{a}{r} = \frac{180 - 2 \times 15}{15} = 10 \Rightarrow p^2 + q^2 \leq 100 \text{。}$$

目標：減少碰撞次數 $p + q - 2$ 及菱形區域個數 $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$

我們視 p 為坐標橫軸， q 為縱軸，將限制條件及不同的碰撞次數及菱形區域個數繪於坐標平面上，見圖 20。

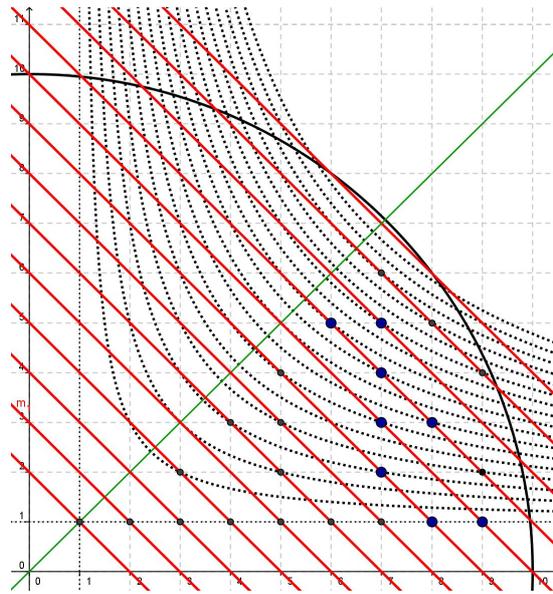


圖 20.

圖 20.中，黑色實線為與坐標軸圍成的四分之一圓為 p, q 的限制，紅色的平行線為各種不同的碰撞次數，黑色虛線為各種不同的菱形區域個數，兩者皆是愈往右上方次數愈多。又正方形為對稱圖形，因此我們僅需找綠色直線 $y = x$ 下方的格子點。

欲達到一定的面積覆蓋率即要求需要一定的碰撞次數，但又希望面積重複率能低即希望菱形區域個數少，如此一來，較佳的選擇便在圖中藍色點附近。回顧這些點的數據發現其面積覆蓋率皆能有八成至八成五左右，而面積的重複率約三成五至四成多。

(二) 長方形區域：180cm×360cm (約二坪)

斜率 $m = \frac{q}{p}$ ($p, q \in N, (p, q) = 1$) 的限制：

$$\sqrt{a^2 p^2 + b^2 q^2} \leq \frac{ab}{r} = \frac{150 \times 330}{15} = 3300 \Rightarrow 150^2 p^2 + 330^2 q^2 \leq 3300^2。$$

目標：減少碰撞次數 $p+q-2$ 及菱形區域個數 $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$

我們視 p 為坐標橫軸， q 為縱軸，將限制條件及不同的碰撞次數及菱形區域個數繪於坐標平面上，見圖 21。

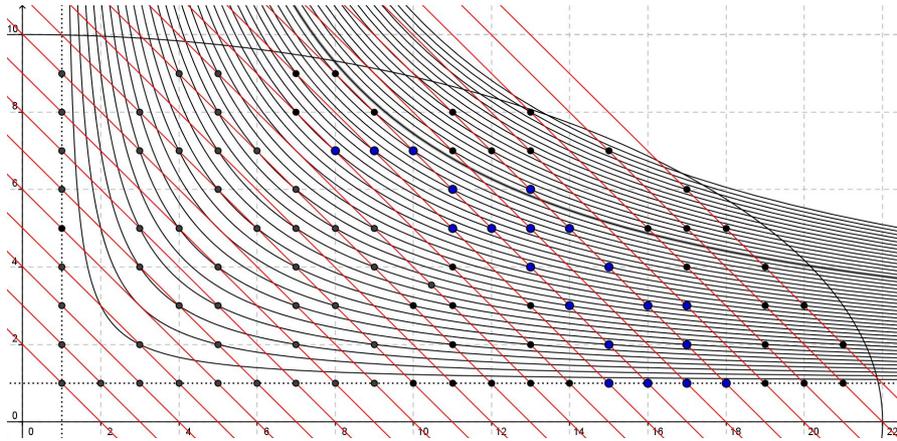


圖 21.

長方形區域的情況與正方形相仿，唯其限制條件為橢圓的一部分。

二、斜率與面積覆蓋率之圖形解釋

在繪製斜率與面積覆蓋率的圖形時，我們發現當斜率小時，點的分佈的似乎有些循環性，再對照數據表現後發現其道理如同圖 22. 所示，同顏色的點代表的斜率 $\frac{q}{p}$ ($p, q \in N, (p, q) = 1$) 之分母 p 值相同，愈接近橫軸的 p 值愈小，而當分子 q 值愈大，碰撞次數增加，面積覆蓋率自然增加。

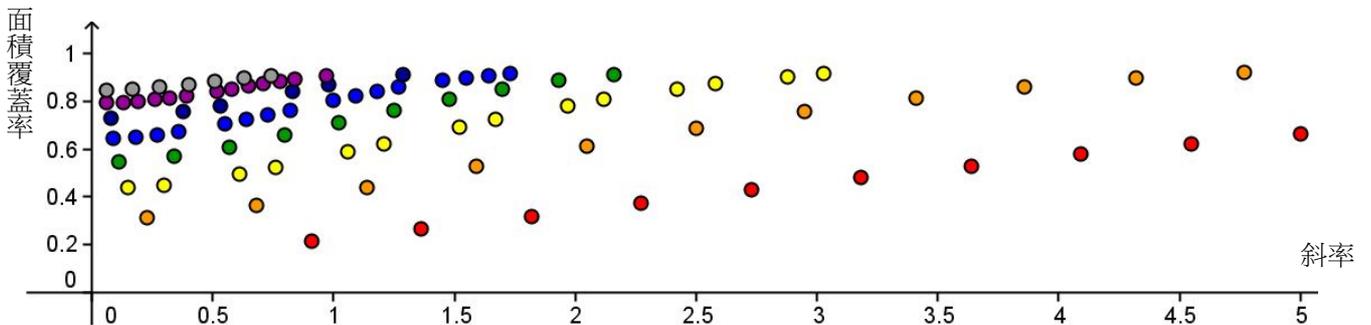


圖 22.

捌、結論與未來展望

1. 我們發現碰撞次數才是影響面積覆蓋率的重要因素，也就是說若想達到一定程度的覆蓋率，也必須達到一定的碰撞次數，且相同面積但不同形狀的區域大小的確會影響面積覆蓋率。
2. 另外，我們將徐邦焱、龔哲白(2008)觀察到某些出發點會形成迴路的現象加以證明與解釋，而其路徑為自角落出發路徑的一部份；除此之外，起始位置並不影響面積覆蓋率，且路徑約為角落的兩倍。
3. 未來希望可以利用障礙物增加碰撞次數，並探討障礙物擺放位置與碰撞次數對於面積覆蓋率的影響，且在控制面積重複率的情況下也提高面積覆蓋率，期望能實際應用於市售的掃地機器人身上。

玖、參考資料

- 一、楊天立、蔡逸帆、曾韋中(2002) 正 N 邊形的撞球路徑。中華民國第 42 屆中小學科展作品。
- 二、徐邦焱、龔哲白(2008) 挑戰司諾克—撞球出口遊戲。高雄市第 48 屆中小學科展作品。
- 三、潘建綱(2008) 颶風來嚕—對角線與方格圖之關係探討與推廣。中華民國第 46 屆中小學科展作品。
- 四、貝祖定理
<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%B4%9D%E7%A5%96%E7%AD%89%E5%BC%8F>

【評語】 040412

本科展作品探討一圓盤在一矩形區域內作彈性碰撞運動後，所能達到的覆蓋面積。也利用導出之公式去探討行進路徑及其覆蓋面積的情形。作者也利用實際數據去了解影響面積覆蓋率的因子。本作品取材新，方法及結果有趣，並且論證完整，並加以實証分析，為一有趣的科展作品。