中華民國第52屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040411

圓錐曲線內接三角形的定點與包絡線

學校名稱：國立大里高級中學

作者：	指導老師：
高一 施俊良 高一 蔡國仁	邱繼輝

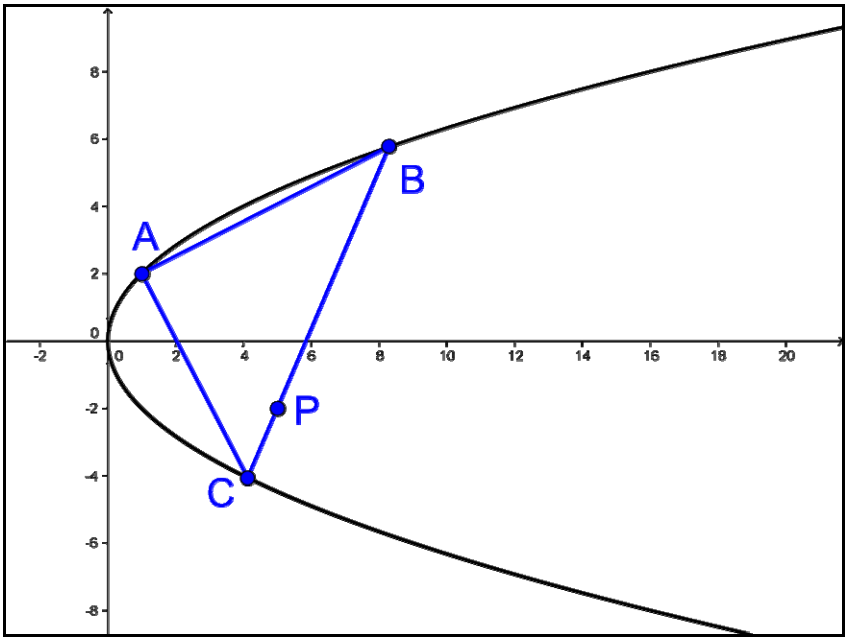
關鍵詞：圓錐曲線、定點、包絡線

摘要

本文主要在探索圓錐曲線上，以某點 A 為固定頂點的內接三角形，所具有的特殊性質。當 A 點的兩夾邊斜率相乘為固定數時，我們用了一個較為簡潔的方法證明之前文獻已有的結論：『 A 點的對應邊必通過一定點。』另外，本文證明出 A 點的兩夾邊斜率相加為固定數時，若為圓、橢圓與雙曲線， A 點的對應邊必通過一定點；但在拋物線的情況下， A 點的對應邊則會產生一系列的平行直線。本文也針對一些相乘或相加的特殊固定值作了詳細的分析。此外，若角 A 為固定角度的情形下，我們也利用了 GeoGebra 繪出其包絡線的圖形。

壹、 研究動機

老師在專題課中出了此題：

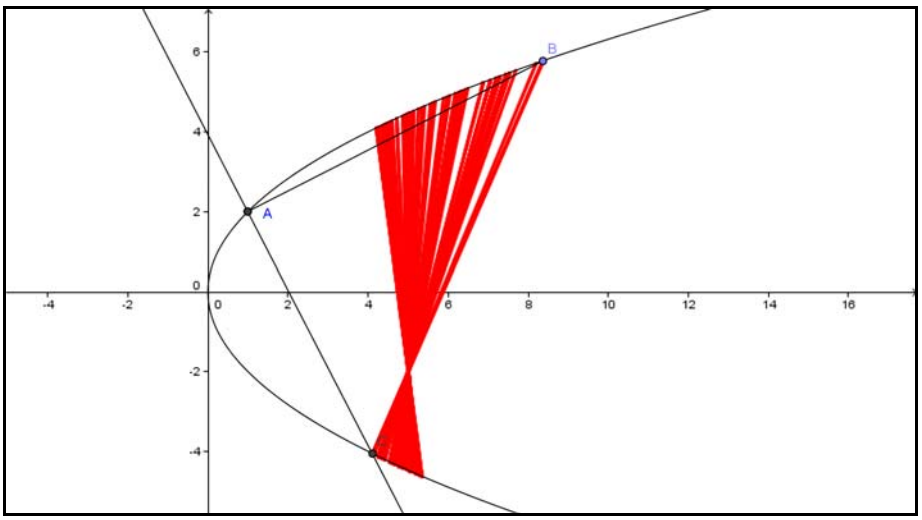


題目：在拋物線 Γ：$y^2 = 4x$ 上有一點 $A(1,2)$ ，通過 $P(5,-2)$ 的一條直線交拋物線於 B,C 兩點，試問 ΔABC 的形狀？

(A) 銳角 Δ (B) 鈍角 Δ (C)直角 Δ (D)不確定

此題答案為(C) 直角 Δ。

老師並說：「以 A 為直角的所有拋物線內接直角三角形都會通過 $P(5,-2)$ 。」於是我們利用剛剛學到的 Geogebra 展開驗證，如下圖所示：



這讓我們想到：是否在 A 為定點、角 A 為直角的狀態下，任意移動 B、C 兩點，使得 $\overline{BC}$ 通過一定點 P？同時，是否所有圓錐曲線(拋物線、橢圓、雙曲線)都有類似之性質？因此，我們利用課堂上所學的 GeoGebra 數學繪圖軟體，開始研究圓錐曲線上，在各種條件下的三角形特定邊是否交於一點。其中我們發現大多數的狀況下會交於一點，少部分是例外，於是開始了我們一連串的探討與證明。

在我們研究的過程中，發現中華民國第四十五屆中小學科學展覽會高中組數學科有一件得獎的作品『圓錐曲線-探討圓中隱藏的點』，已經對這一系列的問題加以探索，我們除了以不同的方法得到同樣的結論，並以這個證明的方法得知圓、橢圓與雙曲線，在斜率相加為固定數時，第三邊也會通過某個定點；而拋物線的第三邊則會是一系列的平行線。對於這樣的擴充結果，我們感到雀躍不已。

分區科展之後，我們在評審委員、指導老師以及他組參賽同學的建議以及幫助之下，又完成了此固定數為『特殊常數』時的證明，讓本文的結論又更加地完備。

貳、 研究目的

一、探討各種圓錐曲線內接三角形移動時的特殊關係。
二、利用動態幾何軟體 Geogebra 找出二次曲線的幾何性質，並利用數學知識完成其證明。

參、 研究工具

Geogebra(動態幾何繪圖軟體)、電腦、紙、筆

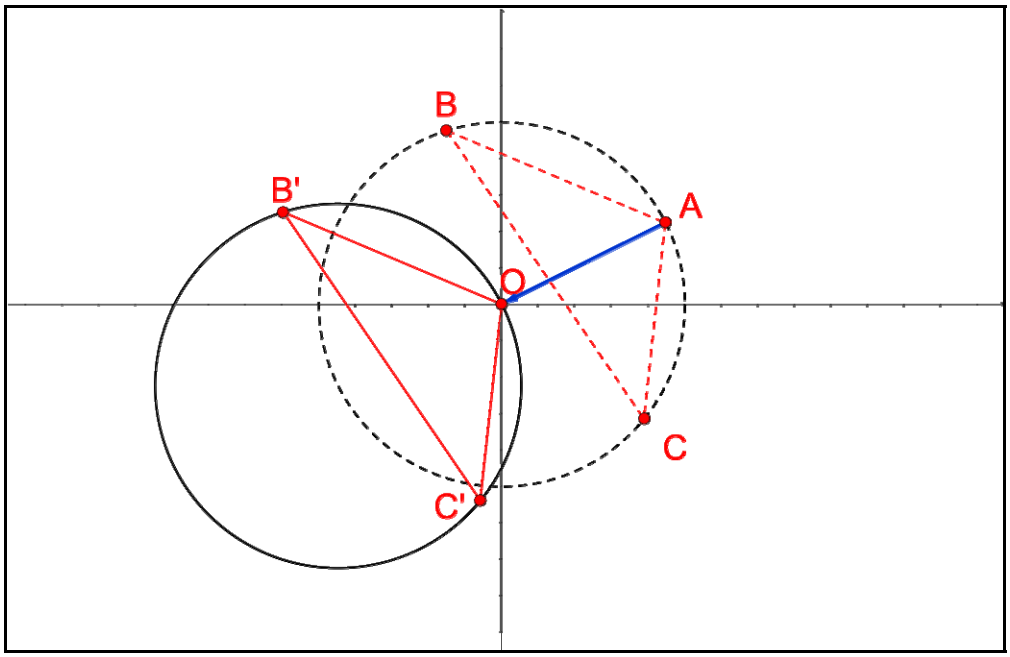
肆、 研究過程或方法

併入研究結果。

伍、 研究結果

一、 證明方法：

我們利用平移的方法，將圓錐曲線上任意點 A 平移至 $O(0,0)$，使得證明過程簡化許多。如下圖(以圓為例)：



二、 圓

(一) 斜率相加為固定值 k ：

設有一圓 $x^2+y^2=r^2$

圓上一定點 $A(x_0,y_0)$，動點 $B(x_1,y_1)$

$C(x_2,y_2)$ 跟著 B 點移動

則 ${x_0}^2+{y_0}^2=r^2$

令 $\overline{\mathrm{AB}}$ 斜率為 m_1 ， $\overline{\mathrm{AC}}$ 斜率為 m_2

設直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 的方程式為: $mx+ny=1\left(m\neq 0,n\neq 0\right)$

將 A 點平移至 $O\left(0,0\right)$，B 點平移至 B′，C 點平移至 C′

則圓方程式變成 $(x+x_0)^2+(y+y_0)^2=r^2$

$x^2+2x_0x+x_0^2+y^2+2y_0y+y_0^2=r^2$

$\because {x_0}^2+{y_0}^2=r^2$

$\Rightarrow x^2+2x_0x+y^2+2y_0y=0$

1. 討論斜率相加為固定值 k 時：

令 $m_1+m_2=k$

$\because mx+ny=1$

$$\left(x^2+y^2\right)+\left(2x_0x+2y_0y\right)\left(mx+ny\right)=0$$

$$\left(1+2mx_0\right)x^2+\left(1+2ny_0\right)y^2+\left(2nx_0+2my_0\right)xy=0$$

將左右式同除以 x^2

$$\left(1+2ny_0\right)\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(2nx_0+2my_0\right)\left(\frac{y}{x}\right)+\left(1+2mx_0\right)=0$$

$\frac{y}{x}$ 的解即為 $\overline{OB'}$ 的斜率 m_1 及 $\overline{OC'}$ 的斜率 m_2

利用根與係數的關係，可得：

$$\frac{-\left(2nx_0+2my_0\right)}{1+2ny_0}=k$$

$$-\left(2nx_0+2my_0\right)=k\left(1+2ny_0\right)$$

$$-2nx_0-2my_0=k+2nky_0$$

$$\left(\frac{2y_0}{-k}\right)m+\left(\frac{2ky_0+2x_0}{-k}\right)n=1$$

將此式與 $mx+ny=1$ 比較

$$\begin{cases} mx+ny=1 \\ \left(\frac{2y_0}{-k}\right)m+\left(\frac{2ky_0+2x_0}{-k}\right)n=1 \end{cases}$$

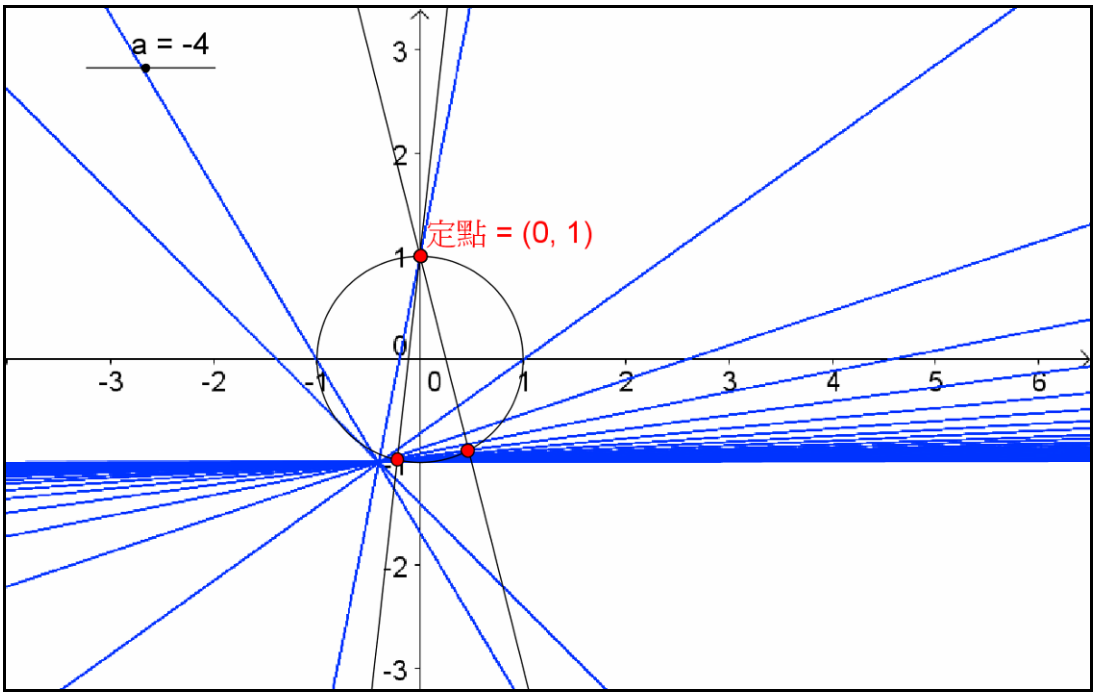
$\because m\neq 0\cap n\neq 0$

$$\Rightarrow x=\frac{2y_0}{-k},y=\frac{2ky_0+2x_0}{-k}$$

$\therefore$ 移動前的 $\overline{\mathrm{BC}}$ 必通過

$$\left(x+\mathrm{x}_0,y+\mathrm{y}_0\right)=\left(\frac{2y_0}{-k}+x_0,\frac{2ky_0+2x_0}{-k}+y_0\right)=\left(\frac{2y_0-kx_0}{-k},\frac{ky_0+2x_0}{-k}\right)$$

其中，k 不為 0。



(圖：圓方程式 $x^2+y^2=1$，定點 $(0,1)$，斜率相加=5。)

2. 討論固定值 $k=0$ 時：

設 $\overleftrightarrow{OB'}$ 的方程式: $y=tx$，則 $m_1=t$，$m_2=-t$

將 $y=tx$ 代入平移後的圓方程式 $x^2+2x_0x+y^2+2y_0y=0$，可得：

$$x^2+2x_0x+(tx)^2+2y_0(tx)=0 \Rightarrow (t^2+1)x^2+(2x_0+2ty_0)x=0$$

利用根與係數的關係，可得兩根之和 $=\dfrac{-2x_0-2ty_0}{t^2+1}$

$\because$ 移動後的 A 點 x 坐標為 0

$\therefore$ B′ 的 x 座標即為 $\dfrac{-2x_0-2ty_0}{t^2+1}$

接下來討論 $\overline{OC'}$: $y=-tx$，代入

$x^2+2x_0x+y^2+2y_0y=0$，可得：

$$x^2+2x_0x+(-tx)^2+2y_0(-tx)=0$$

$$(t^2+1)x^2+(2x_0-2ty_0)x=0$$

利用根與係數的關係

$\Rightarrow$ 兩根之和 $=\dfrac{-2x_0+2ty_0}{t^2+1}$

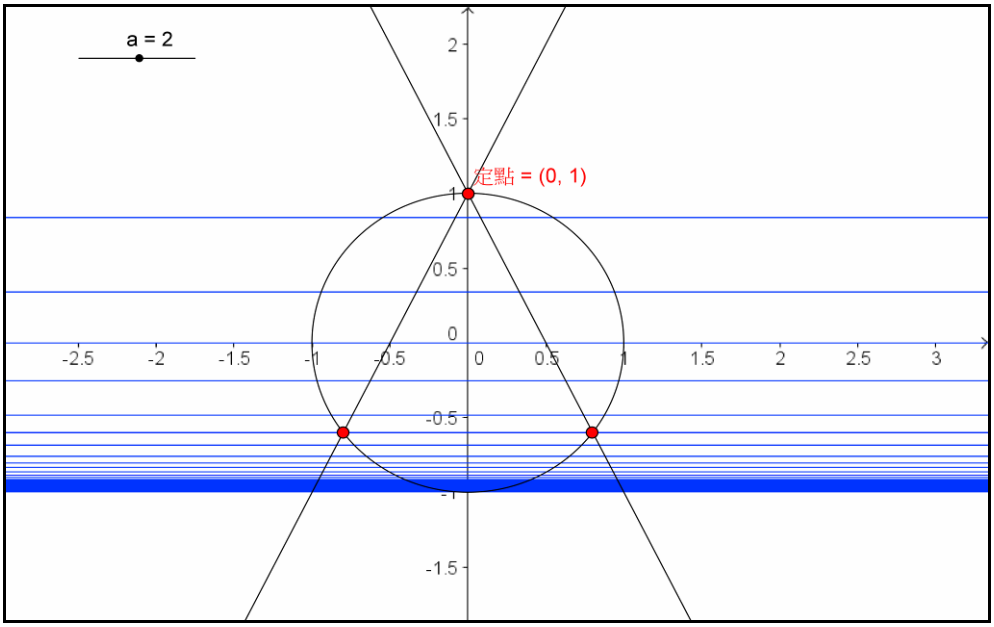
$\because$ 移動後的 A 點 x 坐標為 0

$\therefore$ C′ 的 x 坐標即為 $\dfrac{-2x_0+2ty_0}{t^2+1}$

$\overline{\mathrm{B'C'}}$ 斜率即為

$$\frac{-t\left(\dfrac{-2x_0+2ty_0}{t^2+1}\right)-t\left(\dfrac{-2x_0-2ty_0}{t^2+1}\right)}{\dfrac{-2x_0+2ty_0}{t^2+1}-\dfrac{-2x_0-2ty_0}{t^2+1}}=\frac{4tx_0}{4ty_0}=\frac{x_0}{y_0}$$

$\because \dfrac{x_0}{y_0}$ 是一個固定數　$\therefore \overline{BC}$ 是一系列的平行線。



(圖：圓方程式 $x^2+y^2=1$，定點 $(0,1)$，斜率相加=0。)

(二) 斜率相乘為固定值 k ：

設有一圓 $x^2+y^2=r^2$

圓上一定點 $A(x_0,y_0)$，動點 $B(x_1,y_1)$

$C(x_2,y_2)$ 跟著 B 點移動

則 ${x_0}^2+{y_0}^2=r^2$

令 $\overline{\mathrm{AB}}$ 斜率為 m_1，$\overline{\mathrm{AC}}$ 斜率為 m_2

設直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 的方程式為: $mx+ny=1\ (m\neq 0, n\neq 0)$

將 A 點平移至 $O(0,0)$，B 點平移至 B′，C 點平移至 C′

則圓方程式變成 $(x+x_0)^2+(y+y_0)^2=r^2$

$$x^2+2x_0x+x_0^2+y^2+2y_0y+y_0^2=r^2$$

$$\because x_0{}^2+y_0{}^2=r^2$$

$$\Rightarrow x^2+2x_0x+y^2+2y_0y=0$$

1. 討論斜率相乘為固定值 k 時：

令 $m_1m_2=k$

$\because mx+ny=1$

$$\left(x^2+y^2\right)+\left(2x_0x+2y_0y\right)\left(mx+ny\right)=0$$

$$\left(1+2mx_0\right)x^2+\left(1+2ny_0\right)y^2+\left(2nx_0+2my_0\right)xy=0$$

將左右式同除以 x^2

$$\left(1+2ny_0\right)\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(2nx_0+2my_0\right)\left(\frac{y}{x}\right)+\left(1+2mx_0\right)=0$$

$\frac{y}{x}$ 的解即為 $\overline{OB'}$ 的斜率 m_1 及 $\overline{OC'}$ 的斜率 m_2

利用根與係數的關係，可得：

$$\frac{1+2mx_0}{1+2ny_0}=k$$

$$1+2mx_0=k\left(1+2ny_0\right)$$

$$1+2mx_0=k+2nky_0$$

$$\left(\frac{2x_0}{k-1}\right)m+\left(\frac{-2ky_0}{k-1}\right)n=1$$

將此式與 $mx+ny=1$ 比較

$$\begin{cases} mx+ny=1 \\ \left(\frac{2x_0}{k-1}\right)m+\left(\frac{-2ky_0}{k-1}\right)n=1 \end{cases}$$

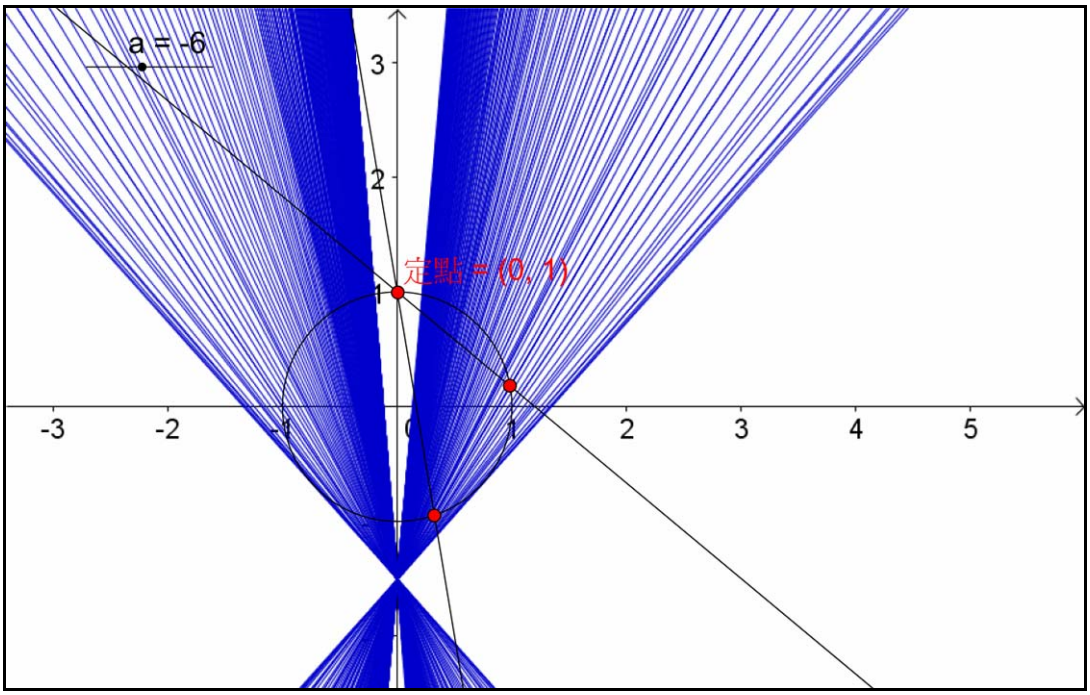
$\because m\neq 0\cap n\neq 0$

$$\Rightarrow \mathrm{x}=\frac{2x_0}{k-1},\mathrm{y}=\frac{-2ky_0}{k-1}$$

$\therefore$ 移動前的 $\overline{\mathrm{BC}}$ 必通過

$$\left(x+x_0,y+y_0\right)=\left(\frac{2x_0}{k-1}+x_0,\frac{-2ky_0}{k-1}+y_0\right)=\left(\frac{kx_0+x_0}{k-1},\frac{-ky_0-y_0}{k-1}\right)$$

其中，k 不為 1。



(圖：圓方程式 $x^2+y^2=1$，定點 $(0,1)$，斜率相乘=5。)

2. 討論固定值 $k=1$ 時：

設 $\overleftrightarrow{OB'}$ 的方程式: $y=tx$，則 $m_1=t$，$m_2=\dfrac{1}{t}$

將 $y=tx$ 代入平移後的圓方程式 $x^2+2x_0x+y^2+2y_0y=0$，可得：

$$x^2+2x_0x+(tx)^2+2y_0(tx)=0$$

$$(t^2+1)x^2+(2x_0+2ty_0)x=0$$

利用根與係數的關係 $\Rightarrow$ 兩根之和 $=\dfrac{-2x_0-2ty_0}{t^2+1}$

$\because$ 移動後的 A 點 x 坐標為 0

$\therefore$ B′ 的 x 坐標即為 $\dfrac{-2x_0-2ty_0}{t^2+1}$

討論 $\overline{OC'}$: $y=\dfrac{x}{t}$

$$x^2+2x_0x+\left(\frac{x}{t}\right)^2+2y_0\left(\frac{x}{t}\right)=0$$

$$\left(\frac{1}{t^2}+1\right)x^2+\left(2x_0+\frac{2y_0}{t}\right)x=0$$

$$(t^2+1)x^2+(2t^2x_0+2ty_0)x=0$$

利用根與係數的關係

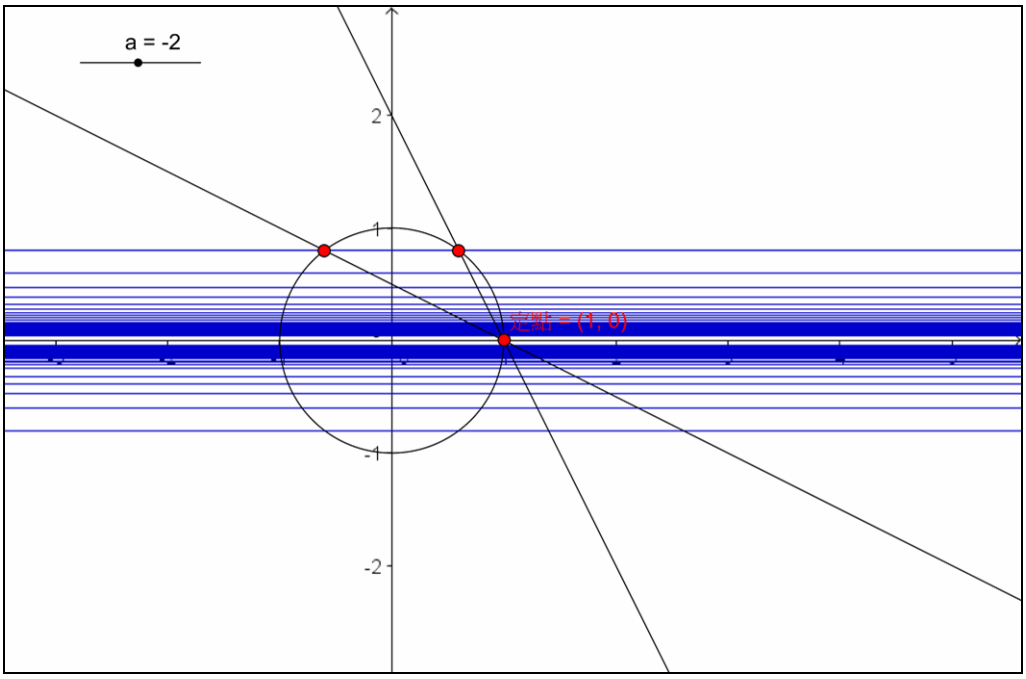
$\Rightarrow$ 兩根之和 $=\dfrac{-2t^2x_0-2ty_0}{t^2+1}$

$\because$ 移動後的 A 點 x 坐標為 0 $\therefore$ C′ 的 x 坐標即為 $\dfrac{-2t^2x_0-2ty_0}{t^2+1}$

$\overline{\mathrm{B'C'}}$ 的斜率即為

$$\frac{\frac{1}{t}\left(\frac{-2t^2x_0-2ty_0}{t^2+1}\right)-t\left(\frac{-2x_0-2ty_0}{t^2+1}\right)}{\frac{-2t^2x_0-2ty_0}{t^2+1}-\frac{-2x_0-2ty_0}{t^2+1}}=\frac{2t^2y_0-2y_0}{-2t^2x_0+2x_0}=\frac{\left(2t^2-2\right)y_0}{-\left(2t^2-2\right)x_0}=-\frac{y_0}{x_0}$$

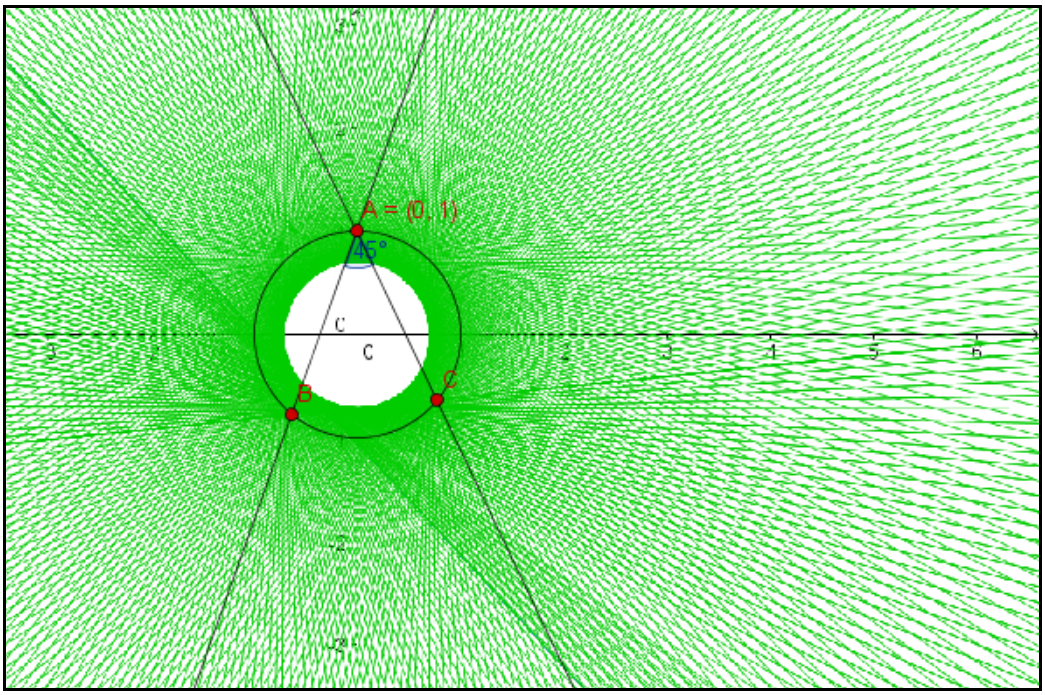
$\because -\dfrac{y_0}{x_0}$ 是一個固定數 $\therefore \overleftrightarrow{BC}$ 是一系列的平行線。



(圖：圓方程式 $x^2+y^2=1$，定點 $(1,0)$，斜率相乘=1。)

(三) $\angle BAC$ 固定

角度固定時，形成包絡線



(圖：圓方程式 $x^2+y^2=1$，定點 A，$\angle BAC=45°$。)

三、 橢圓

(一) 斜率相加為固定值 k：

設有一橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

橢圓上一定點 $A(x_0,y_0)$，動點 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$ 跟著 B 點移動，

則 $\dfrac{{x_0}^2}{a^2}+\dfrac{{y_0}^2}{b^2}=1$

令 $\overline{\mathrm{AB}}$ 斜率為 m_1，$\overline{\mathrm{AC}}$ 斜率為 m_2

設直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 的方程式為: $mx+ny=1\left(m\neq 0,n\neq 0\right)$

將 A 點平移至 $O\left(0,0\right)$，B 點平移至 B′，C 點平移至 C′

則橢圓方程式變成 $\dfrac{(x+x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y+y_0)^2}{b^2}=1$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{2x_0x}{a^2}+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{2y_0y}{b^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$$

$$\because \frac{{x_0}^2}{a^2}+\frac{{y_0}^2}{b^2}=1\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{2x_0x}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{2y_0y}{b^2}=0$$

1. 討論斜率相加為固定值 k 時：

   令 $m_1+m_2=k$

$\because mx+ny=1$

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)+\left(\frac{2x_0x}{a^2}+\frac{2y_0y}{b^2}\right)(mx+ny)=0$$

$$\left(\frac{1+2mx_0}{a^2}\right)x^2+\left(\frac{1+2ny_0}{b^2}\right)y^2+\left(\frac{2nx_0}{a^2}+\frac{2my_0}{b^2}\right)xy=0$$

將左右式同除以 x^2

$$\left(\frac{1+2ny_0}{b^2}\right)\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{2nx_0}{a^2}+\frac{2my_0}{b^2}\right)\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{1+2mx_0}{a^2}\right)=0$$

$\frac{y}{x}$ 的解即為 $\overline{OB'}$ 的斜率 m_1 及 $\overline{OC'}$ 的斜率 m_2

利用根與係數的關係，可得：

$$\frac{-\left(\frac{2nx_0}{a^2}+\frac{2my_0}{b^2}\right)}{\left(\frac{1+2ny_0}{b^2}\right)}=k$$

$$-\left(\frac{2nx_0}{a^2}+\frac{2my_0}{b^2}\right)=k\left(\frac{1+2ny_0}{b^2}\right)$$

$$-\frac{2nx_0}{a^2}-\frac{2my_0}{b^2}=\frac{k+2nky_0}{b^2}$$

$$a^2k+2a^2nky_0+2a^2my_0+2b^2nx_0=0$$

$$\left(\frac{2y_0}{-k}\right)m+\left(\frac{2a^2ky_0+2b^2x_0}{-a^2k}\right)n=1$$

將此式與 $mx+ny=1$ 比較

$$\begin{cases} mx+ny=1 \\ \left(\frac{2y_0}{-k}\right)m+\left(\frac{2a^2ky_0+2b^2x_0}{-a^2k}\right)n=1 \end{cases}$$

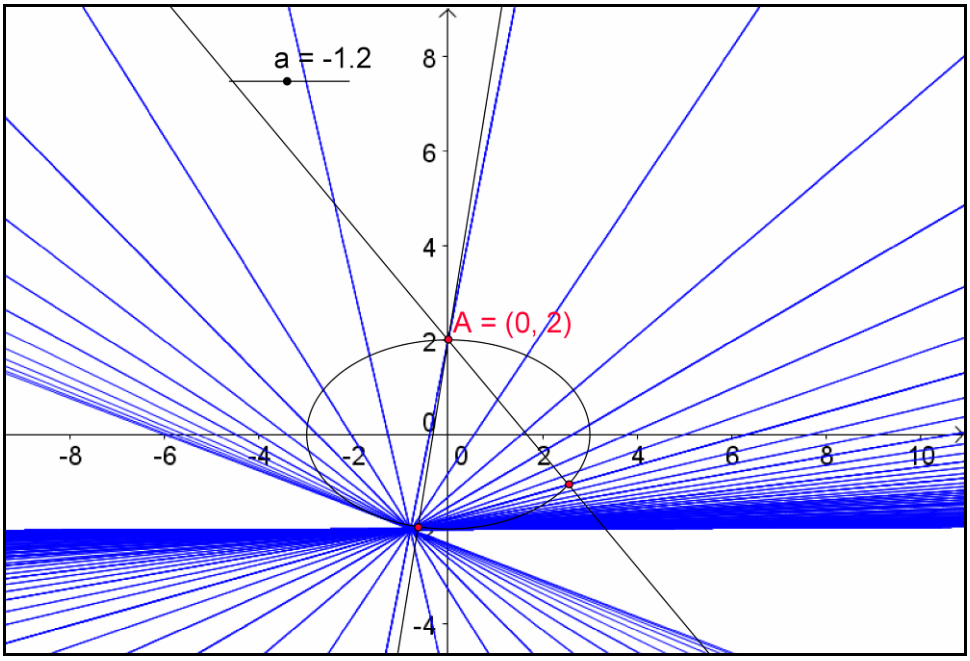
$\because m\neq 0\cap n\neq 0$

$$\Rightarrow x=\frac{2y_0}{-k},y=\frac{2a^2ky_0+2b^2x_0}{-a^2k}$$

$\therefore$ 移動前的 $\overline{\mathrm{BC}}$ 必通過

$$(x+x_0,y+y_0)=\left(\frac{2y_0}{-k}+x_0,\frac{2a^2ky_0+2b^2x_0}{-a^2k}+y_0\right)=\left(\frac{2y_0-kx_0}{-k},\frac{a^2ky_0+2b^2x_0}{-a^2k}\right)$$

，其中 k 不為 0。



(圖：橢圓方程式$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，定點$(0,2)$，斜率相加=5。)

2. 討論固定值$k=0$時：

設$\overleftrightarrow{OB'}$的方程式: $y=tx$，則$m_1=t$，$m_2=-t$

將$y=tx$代入平移後的橢圓方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{2x_0x}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{2y_0y}{b^2}=0$，可得：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{2x_0x}{a^2}+\frac{(tx)^2}{b^2}+\frac{2y_0(tx)}{b^2}=0$$

$$\left(a^2t^2+b^2\right)x^2+\left(2b^2x_0+2a^2ty_0\right)x=0$$

利用根與係數的關係

$\Rightarrow$兩根之和$=\frac{-2b^2x_0-2a^2ty_0}{a^2t^2+b^2}$

$\because$移動後的 A 點x坐標為 0

$\therefore$ B′的x坐標即為$\frac{-2b^2x_0-2a^2ty_0}{a^2t^2+b^2}$

討論$\overline{OC'}$: $y=-tx$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{2x_0x}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{2y_0y}{b^2}=0\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{2x_0x}{a^2}+\frac{(-tx)^2}{b^2}+\frac{2y_0(-tx)}{b^2}=0$$

$$\left(a^2t^2+b^2\right)x^2+\left(2b^2x_0-2a^2ty_0\right)x=0$$

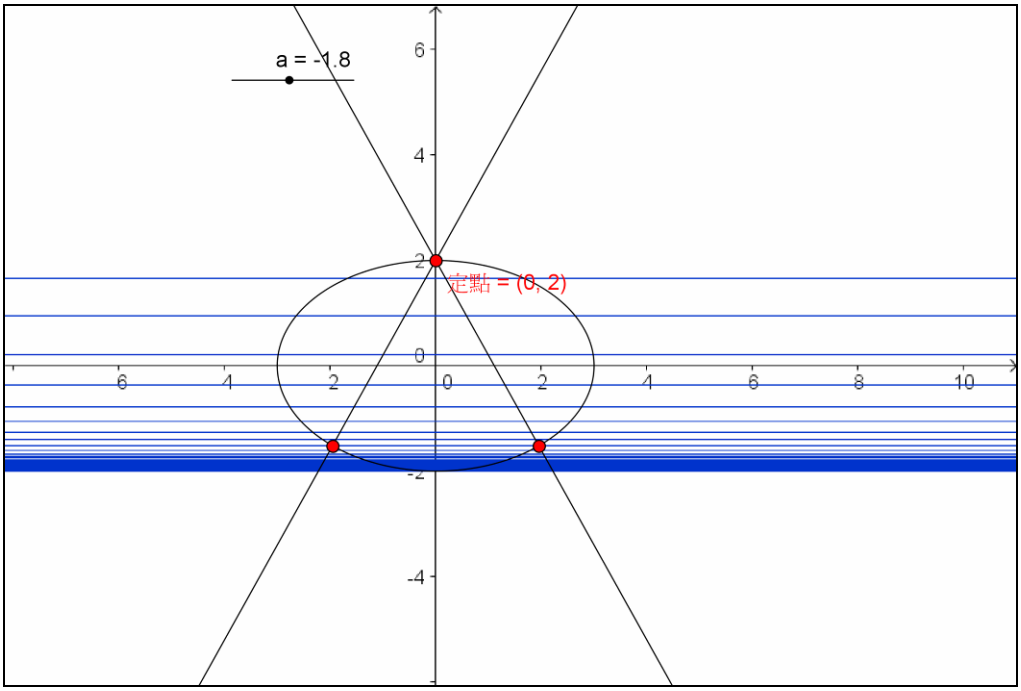
利用根與係數的關係$\Rightarrow$兩根之和$=\dfrac{-2b^2x_0+2a^2ty_0}{a^2t^2+b^2}$

$\because$移動後的 A 點 x 坐標為 0　$\therefore$ C′ 的 x 坐標即為$\dfrac{-2b^2x_0+2a^2ty_0}{a^2t^2+b^2}$

$\overline{\mathrm{B'C'}}$ 的斜率即為

$$\frac{-t\left(\dfrac{-2b^2x_0+2a^2ty_0}{a^2t^2+b^2}\right)-t\left(\dfrac{-2b^2x_0-2a^2ty_0}{a^2t^2+b^2}\right)}{\dfrac{-2b^2x_0+2a^2ty_0}{a^2t^2+b^2}-\dfrac{-2b^2x_0-2a^2ty_0}{a^2t^2+b^2}}=\frac{4b^2tx_0}{4a^2ty_0}=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

$\because \dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$ 是一個固定數　$\therefore \overleftrightarrow{BC}$ 是一系列的平行線。



(圖：橢圓方程式$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，定點$(0,2)$，斜率相加=0。)

(二) 斜率相乘為固定值 k ：

設有一橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

橢圓上一定點 $A(x_0,y_0)$，動點 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$ 跟著 B 點移動，

則$\dfrac{{x_0}^2}{a^2}+\dfrac{{y_0}^2}{b^2}=1$。

令 $\overline{\mathrm{AB}}$ 斜率為 m_1，$\overline{\mathrm{AC}}$ 斜率為 m_2

設直線 $\overline{BC}$ 的方程式為: $mx+ny=1\left(m\neq 0,n\neq 0\right)$

將 A 點平移至 $O\left(0,0\right)$ ，B 點平移至 B′ ，C 點平移至 C′

則橢圓方程式變成 $\dfrac{(x+x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y+y_0)^2}{b^2}=1$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{2x_0x}{a^2}+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{2y_0y}{b^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$$

$$\because \frac{{x_0}^2}{a^2}+\frac{{y_0}^2}{b^2}=1\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{2x_0x}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{2y_0y}{b^2}=0$$

1. 討論斜率相乘為固定值 k 時：

   令 $m_1m_2=k$

   $\because mx+ny=1$ ，$\therefore \left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)+\left(\dfrac{2x_0x}{a^2}+\dfrac{2y_0y}{b^2}\right)\left(mx+ny\right)=0$ ，

   $$\left(\frac{1+2mx_0}{a^2}\right)x^2+\left(\frac{1+2ny_0}{b^2}\right)y^2+\left(\frac{2nx_0}{a^2}+\frac{2my_0}{b^2}\right)xy=0$$

   將左右式同除以 x^2

   $$\left(\frac{1+2ny_0}{b^2}\right)\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{2nx_0}{a^2}+\frac{2my_0}{b^2}\right)\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{1+2mx_0}{a^2}\right)=0$$

   $\dfrac{y}{x}$ 的解即為 $\overline{OB'}$ 的斜率 m_1 及 $\overline{OC'}$ 的斜率 m_2

   利用根與係數的關係，可得： $\dfrac{\dfrac{1+2mx_0}{a^2}}{\dfrac{1+2ny_0}{b^2}}=k$

   $$b^2+\left(2b^2x_0\right)m=ka^2+\left(2ka^2y_0\right)n$$

   $$\left(\frac{2b^2x_0}{ka^2\text{-}b^2}\right)m+\left(\frac{\text{-}2ka^2y_0}{ka^2\text{-}b^2}\right)n=1$$

   將此式與 $mx+ny=1$ 比較

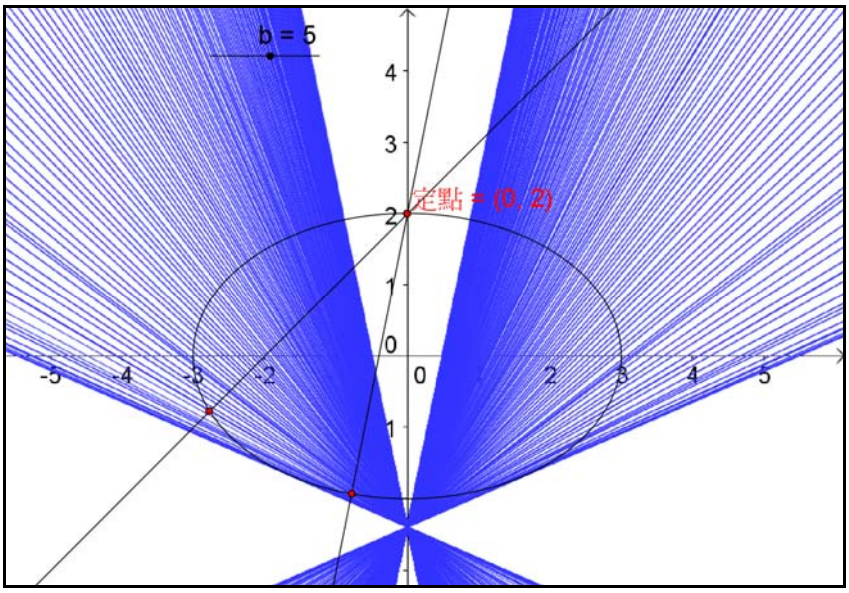
   $$\begin{cases} mx+ny=1 \\ \left(\dfrac{2b^2x_0}{ka^2\text{-}b^2}\right)m+\left(\dfrac{\text{-}2ka^2y_0}{ka^2\text{-}b^2}\right)n=1 \end{cases}$$

   $$\because m\neq 0\cap n\neq 0\Rightarrow x=\frac{2b^2x_0}{ka^2\text{-}b^2},y=\frac{\text{-}2ka^2y_0}{ka^2\text{-}b^2}$$

$\therefore$ 移動前的 $\overline{BC}$ 必通過

$$\left(x+x_0,y+y_0\right)=\left(\frac{2b^2x_0}{ka^2\text{-}b^2}+x_0,\frac{\text{-}2ka^2y_0}{ka^2\text{-}b^2}+y_0\right)=\left(\frac{\left(ka^2+b^2\right)x_0}{ka^2\text{-}b^2},\frac{\text{-}\left(ka^2+b^2\right)y_0}{ka^2\text{-}b^2}\right)$$

其中，$k\neq\dfrac{b^2}{a^2}$ 。



(圖：橢圓方程式 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ ，定點 $(0,2)$ ，斜率相乘=5。)

2. 討論固定值 $k=\dfrac{b^2}{a^2}$ 時：

設 $\overleftrightarrow{OB'}$ 的方程式: $y=b^2tx$ ，則 $m_1=b^2t$ ， $m_2=\dfrac{1}{a^2t}$

將 $y=b^2tx$ 代入平移後的橢圓方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{2x_0x}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{2y_0y}{b^2}=0$ ，可得：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{2x_0x}{a^2}+\frac{\left(b^2tx\right)^2}{b^2}+\frac{2y_0\left(b^2tx\right)}{b^2}=0$$

$$\left(a^2b^2t^2+1\right)x^2+\left(2x_0+2a^2ty_0\right)x=0$$

利用根與係數的關係 $\Rightarrow$ 兩根之和 $=\dfrac{\text{-}2x_0-2a^2ty_0}{a^2b^2t^2+1}$

$\because$ 移動後的 A 點 x 坐標為 0 $\therefore$ B′ 的 x 坐標即為 $\dfrac{\text{-}2x_0-2a^2ty_0}{a^2b^2t^2+1}$

討論 $\overline{OC'}$: $y=\dfrac{1}{a^2t}x$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{2x_0x}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{2y_0y}{b^2}=0$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{2x_0x}{a^2}+\frac{\left(\frac{1}{a^2t}x\right)^2}{b^2}+\frac{2y_0\left(\frac{1}{a^2t}x\right)}{b^2}=0$$

$$\left(a^2b^2t^2+1\right)x^2+\left(2a^2b^2t^2x_0+2a^2ty_0\right)x=0$$

利用根與係數的關係

$\Rightarrow$ 兩根之和 $=\dfrac{-2a^2b^2t^2x_0-2a^2ty_0}{a^2b^2t^2+1}$

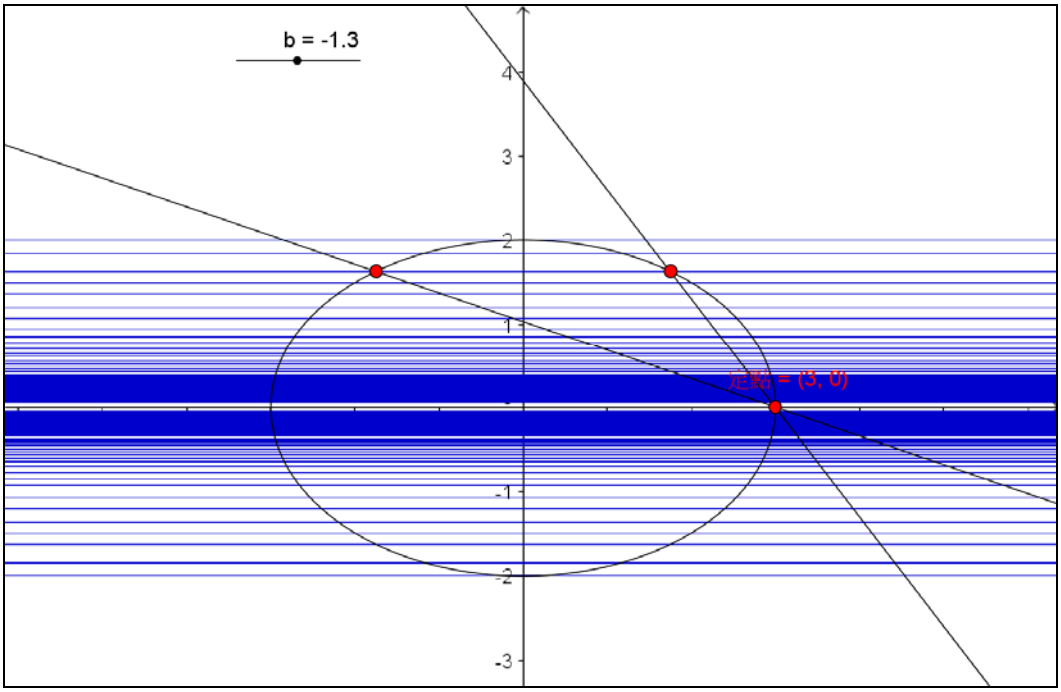
$\because$ 移動後的 A 點 x 坐標為 0

$\therefore$ C′ 的 x 坐標即為 $\dfrac{-2a^2b^2t^2x_0-2a^2ty_0}{a^2b^2t^2+1}$

$\overline{\mathrm{B'C'}}$ 的斜率即為

$$\frac{\frac{1}{a^2t}\left(\frac{-2a^2b^2t^2x_0-2a^2ty_0}{a^2b^2t^2+1}\right)-b^2t\left(\frac{-2x_0-2a^2ty_0}{a^2b^2t^2+1}\right)}{\frac{-2a^2b^2t^2x_0-2a^2ty_0}{a^2b^2t^2+1}-\frac{-2x_0-2a^2ty_0}{a^2b^2t^2+1}}=\frac{2y_0\left(a^2b^2t^2-1\right)}{-2x_0\left(a^2b^2t^2-1\right)}=-\frac{y_0}{x_0}$$

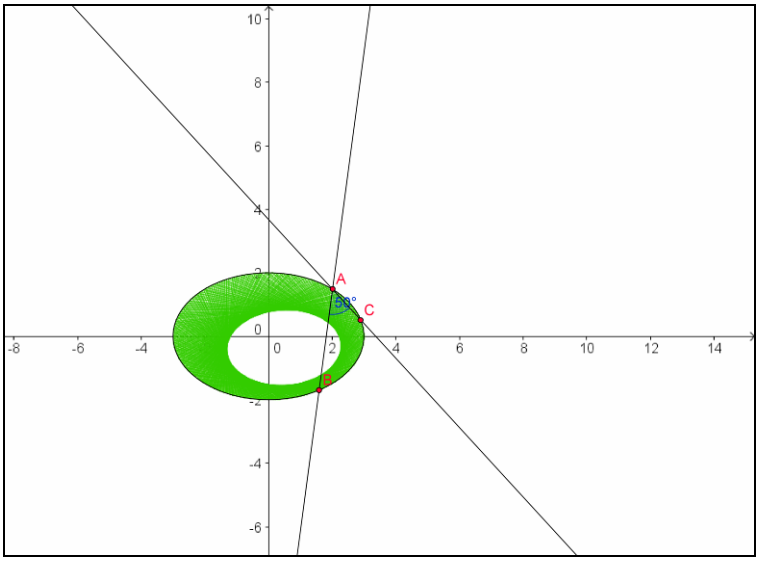
$\because -\dfrac{y_0}{x_0}$ 是一個固定數 $\therefore \overline{\mathrm{BC}}$ 是一系列的平行線



(圖：橢圓方程式 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，定點 $(3,0)$，斜率相乘= $\dfrac{4}{9}$ 。)

(三) $\angle BAC$ 固定

角度固定時，形成包絡線



(圖：橢圓方程式$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，定點 A，$\angle BAC=50^\circ$。)

四、 雙曲線

(一) 斜率相加為固定值k：

設有一雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

曲線上一定點$A(x_0,y_0)$，動點$B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$跟著 B 點移動，

則$\frac{{x_0}^2}{a^2}-\frac{{y_0}^2}{b^2}=1$。令$\overline{\mathrm{AB}}$斜率為$\mathrm{m}_1$，$\overline{\mathrm{AC}}$斜率為$\mathrm{m}_2$，

設直線$\overleftrightarrow{BC}$的方程式為:$mx+ny=1\ (\mathrm{m}\neq 0,\mathrm{n}\neq 0)$

將 A 點平移至$O(0,0)$，B 點平移至B'，C 點平移至C'

則雙曲線方程式變成$\frac{(x+x_0)^2}{a^2}-\frac{(y+y_0)^2}{b^2}=1$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{2x_0}{a^2}x+\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{2y_0}{b^2}y-\frac{y_0^2}{b^2}=1$$

$$\because \frac{{x_0}^2}{a^2}-\frac{{y_0}^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{2x_0}{a^2}x-\frac{y^2}{b^2}-\frac{2y_0}{b^2}y=0$$

1. 討論斜率相加為固定值 k 時：

令$m_1+m_2=k$　　$\because mx+ny=1$，　可得

$$\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)+\left(\frac{2x_0}{a^2}x-\frac{2y_0}{b^2}y\right)(mx+ny)=0$$

$$\left(\frac{1+2mx_0}{a^2}\right)x^2+\left(\frac{-1-2ny_0}{b^2}\right)y^2+\left(\frac{2nx_0}{a^2}-\frac{2my_0}{b^2}\right)xy=0$$

將左右式同除以 x^2

$$\left(\frac{-1-2ny_0}{b^2}\right)\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{2nx_0}{a^2}-\frac{2my_0}{b^2}\right)\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{1+2mx_0}{a^2}\right)=0$$

$\frac{y}{x}$ 的解即為 $\overline{OB'}$ 的斜率 m_1 及 $\overline{OC'}$ 的斜率 m_2

利用根與係數的關係，可得：

$$\frac{\left(\frac{-2nx_0}{a^2}+\frac{2my_0}{b^2}\right)}{\left(\frac{-1-2ny_0}{b^2}\right)}=k$$

$$\left(\frac{-2nx_0}{a^2}+\frac{2my_0}{b^2}\right)=k\left(\frac{-1-2ny_0}{b^2}\right)$$

$$\frac{2nx_0}{a^2}-\frac{2my_0}{b^2}=\frac{k+2nky_0}{b^2}\Rightarrow a^2k+2a^2nky_0+2a^2my_0-2b^2nx_0=0$$

$$\left(\frac{2y_0}{-k}\right)m+\left(\frac{2a^2ky_0-2b^2x_0}{-a^2k}\right)n=1$$

將此式與 $mx+ny=1$ 比較

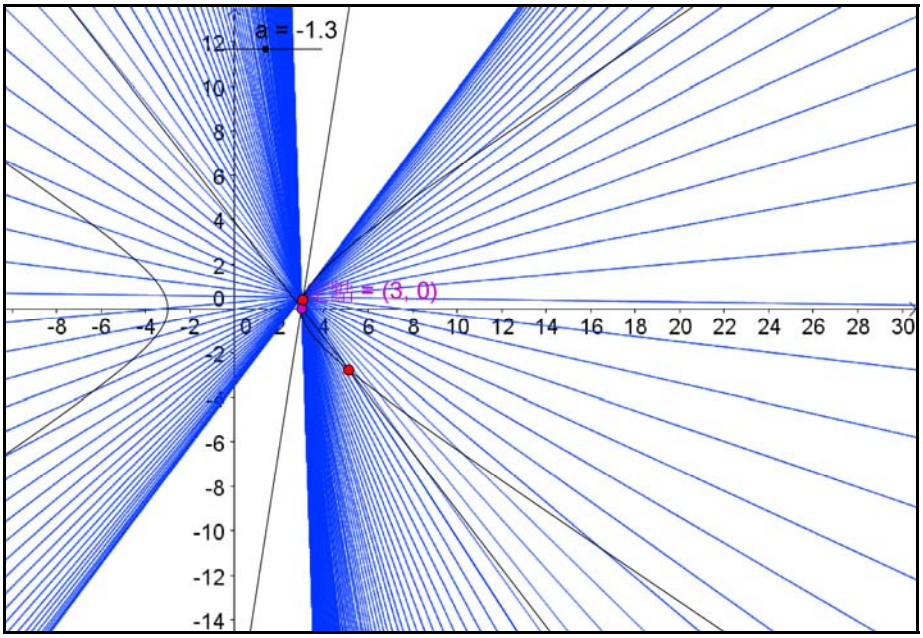
$$\begin{cases} mx+ny=1 \\ \left(\frac{2y_0}{-k}\right)m+\left(\frac{2a^2ky_0-2b^2x_0}{-a^2k}\right)n=1 \end{cases}$$

$$\because m\neq 0\cap n\neq 0\Rightarrow x=\frac{2y_0}{-k},y=\frac{2a^2ky_0-2b^2x_0}{-a^2k}$$

$\therefore$ 移動前的 $\overline{\mathrm{BC}}$ 必通過

$$(x+x_0,y+y_0)=\left(\frac{2y_0}{-k}+x_0,\frac{2a^2ky_0-2b^2x_0}{-a^2k}+y_0\right)=\left(\frac{2y_0-kx_0}{-k},\frac{a^2ky_0-2b^2x_0}{-a^2k}\right)$$

，其中 k 不為 0。



(雙曲線方程式$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ ，定點(3,0) ，斜率相加=5。)

2. 討論固定值$k=0$時：

設$\overleftrightarrow{OB'}$的方程式: $y=tx$，則$m_1=t$ ，$m_2=-t$

將$y=tx$代入平移後的雙曲線方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{2x_0x}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{2y_0y}{b^2}=0$，可得：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{2x_0x}{a^2}-\frac{(tx)^2}{b^2}-\frac{2y_0(tx)}{b^2}=0$$

$$\left(-a^2t^2+b^2\right)x^2+\left(2b^2x_0-2a^2ty_0\right)x=0$$

利用根與係數的關係$\Rightarrow$兩根之和$=\frac{-2b^2x_0+2a^2ty_0}{-a^2t^2+b^2}$

$\because$移動後的 A 點x坐標為 0

$\therefore$ B′的x坐標即為$\frac{-2b^2x_0+2a^2ty_0}{-a^2t^2+b^2}$

討論$\overline{OC'}$: $y=-tx$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{2x_0x}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{2y_0y}{b^2}=0$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{2x_0x}{a^2}-\frac{(-tx)^2}{b^2}-\frac{2y_0(-tx)}{b^2}=0$$

$$\left(-a^2t^2+b^2\right)x^2+\left(2b^2x_0+2a^2ty_0\right)x=0$$

利用根與係數的關係

$\Rightarrow$ 兩根之和 $=\dfrac{-2b^2x_0-2a^2ty_0}{-a^2t^2+b^2}$

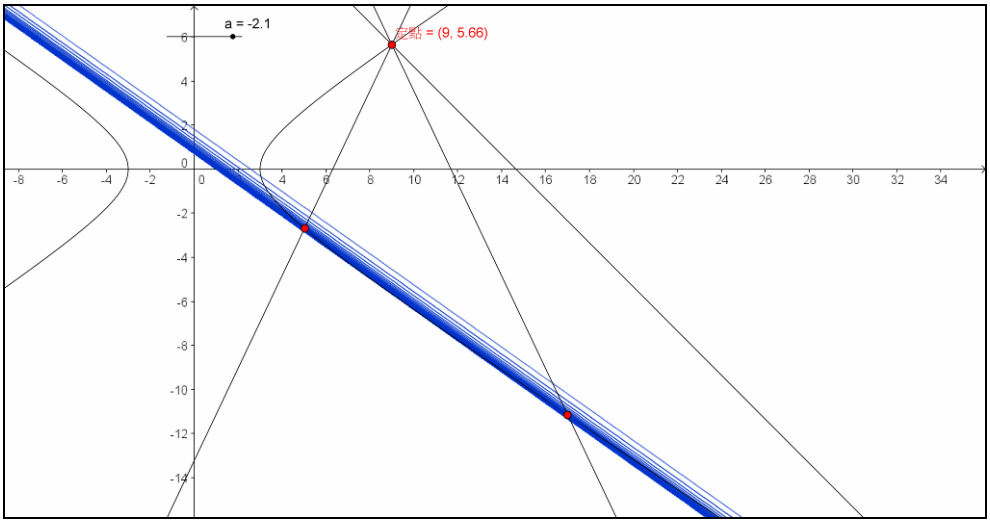
$\because$ 移動後的 A 點 x 坐標為 0

$\therefore$ C′ 的 x 坐標即為 $\dfrac{-2b^2x_0-2a^2ty_0}{-a^2t^2+b^2}$

$\overline{\mathrm{B'C'}}$ 的斜率即為

$$\frac{-t\left(\dfrac{-2b^2x_0-2a^2ty_0}{-a^2t^2+b^2}\right)-t\left(\dfrac{-2b^2x_0+2a^2ty_0}{-a^2t^2+b^2}\right)}{\dfrac{-2b^2x_0-2a^2ty_0}{-a^2t^2+b^2}-\dfrac{-2b^2x_0+2a^2ty_0}{-a^2t^2+b^2}}=\frac{4b^2tx_0}{-4a^2ty_0}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

$\because -\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$ 是一個固定數 $\therefore \overline{\mathrm{BC}}$ 是一系列的平行線



(雙曲線方程式 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ ，定點 $\left(9,4\sqrt{2}\right)$，斜率相加=0。)

(二) 斜率相乘為固定值 k ：

設有一雙曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

曲線上一定點 $A(x_0,y_0)$ ，動點 $B(x_1,y_1)$ ， $C(x_2,y_2)$ 跟著 B 點移動，

則 $\dfrac{{x_0}^2}{a^2}-\dfrac{{y_0}^2}{b^2}=1$ 。

令 $\overline{\mathrm{AB}}$ 斜率為 m_1 ， $\overline{\mathrm{AC}}$ 斜率為 m_2

設直線$\overline{BC}$的方程式為: $mx+ny=1\left(m\neq 0,n\neq 0\right)$

將A點平移至$O\left(0,0\right)$，B點平移至B′，C點平移至C′

原雙曲線方程式變成$\dfrac{(x+x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y+y_0)^2}{b^2}=1$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{2x_0}{a^2}x+\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{2y_0}{b^2}y-\frac{y_0^2}{b^2}=1$$

$$\because \frac{{x_0}^2}{a^2}-\frac{{y_0}^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{2x_0}{a^2}x-\frac{y^2}{b^2}-\frac{2y_0}{b^2}y=0$$

1. 討論斜率相加為固定值k時：

令$m_1m_2=k$

$\because mx+ny=1$

$$\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)+\left(\frac{2x_0}{a^2}x-\frac{2y_0}{b^2}y\right)\left(mx+ny\right)=0$$

$$\left(\frac{1+2mx_0}{a^2}\right)x^2+\left(\frac{-1-2ny_0}{b^2}\right)y^2+\left(-\frac{2nx_0}{a^2}-\frac{2my_0}{b^2}\right)xy=0$$

將左右式同除以x^2

$$\left(\frac{-1-2ny_0}{b^2}\right)\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(-\frac{2nx_0}{a^2}-\frac{2my_0}{b^2}\right)\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{1+2mx_0}{a^2}\right)=0$$

$\dfrac{y}{x}$的解即為$\overline{OB'}$的斜率m_1及$\overline{OC'}$的斜率m_2

利用根與係數的關係，可得：

$$\frac{\dfrac{1+2mx_0}{a^2}}{\dfrac{-1-2ny_0}{b^2}}=k$$

$$b^2+\left(2b^2x_0\right)m=-ka^2-\left(2ka^2y_0\right)n$$

$$\left(\frac{2b^2x_0}{-ka^2-b^2}\right)m+\left(\frac{2ka^2y_0}{-ka^2-b^2}\right)n=1$$

將此式與$mx+ny=1$比較

$$\begin{cases} mx+ny=1 \\ \left(\dfrac{2b^2x_0}{-ka^2\text{-}b^2}\right)m+\left(\dfrac{2ka^2y_0}{-ka^2\text{-}b^2}\right)n=1 \end{cases}$$

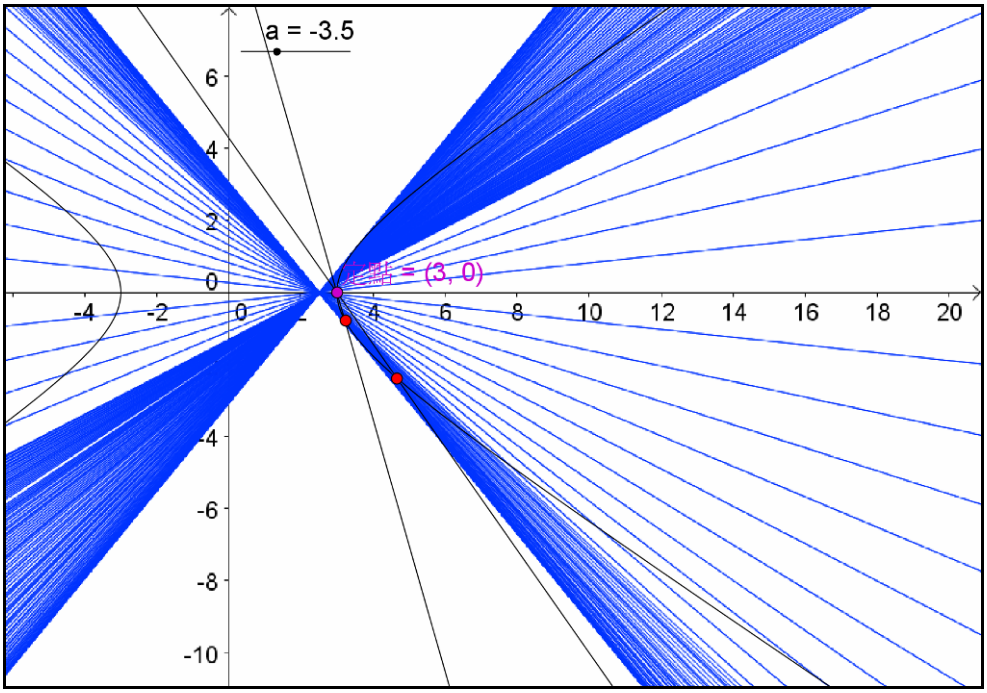
$\because\ m\neq 0\cap n\neq 0$

$\Rightarrow x=\dfrac{2b^2x_0}{-ka^2\text{-}b^2},y=\dfrac{2ka^2y_0}{-ka^2\text{-}b^2}$

$\therefore$ 移動前的 $\overline{\mathrm{BC}}$ 必通過

$$(x+x_0,y+y_0)=\left(\frac{2b^2x_0}{-ka^2\text{-}b^2}+x_0,\frac{2ka^2y_0}{-ka^2\text{-}b^2}+y_0\right)=\left(\frac{\left(ka^2\text{-}b^2\right)x_0}{ka^2+b^2},\frac{\text{-}\left(ka^2\text{-}b^2\right)y_0}{ka^2+b^2}\right)$$

其中，$k\neq\text{-}\dfrac{b^2}{a^2}$ 。



(雙曲線方程式 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ ， 定點(3,0)，斜率相乘=5。)

2. 討論 $k=-\dfrac{b^2}{a^2}$ 時

設 $\overleftrightarrow{OB'}$ 的方程式: $y=b^2tx$ ，則 $m_1=b^2t$ ，則 $m_2=\text{-}\dfrac{1}{a^2t}$

將 $y=b^2tx$ 代入平移後的雙曲線方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{2x_0x}{a^2}\text{-}\dfrac{y^2}{b^2}\text{-}\dfrac{2y_0y}{b^2}=0$ ，可得：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{2x_0x}{a^2}-\frac{\left(b^2tx\right)^2}{b^2}-\frac{2y_0\left(b^2tx\right)}{b^2}=0$$

$$\left(-a^2b^2t^2+1\right)x^2+\left(2x_0-2a^2ty_0\right)x=0$$

利用根與係數的關係，

$\Rightarrow$ 兩根之和 $=\dfrac{-2x_0+2a^2ty_0}{-a^2b^2t^2+1}$

$\because$ 移動後的 A 點 x 坐標為 0

$\therefore$ B′ 的 x 座標即為 $\dfrac{-2x_0+2a^2ty_0}{-a^2b^2t^2+1}$

討論 $\overline{OC'}$: $y=-\dfrac{1}{a^2t}x$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{2x_0x}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{2y_0y}{b^2}=0$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{2x_0x}{a^2}-\frac{\left(-\frac{1}{a^2t}x\right)^2}{b^2}-\frac{2y_0\left(-\frac{1}{a^2t}x\right)}{b^2}=0$$

$$\left(a^2b^2t^2-1\right)x^2+\left(2a^2b^2t^2x_0+2a^2ty_0\right)x=0$$

利用根與係數的關係

$\Rightarrow$ 兩根之和 $=\dfrac{2a^2b^2t^2x_0+2a^2ty_0}{-a^2b^2t^2+1}$

$\because$ 移動後的 A 點 x 坐標為 0

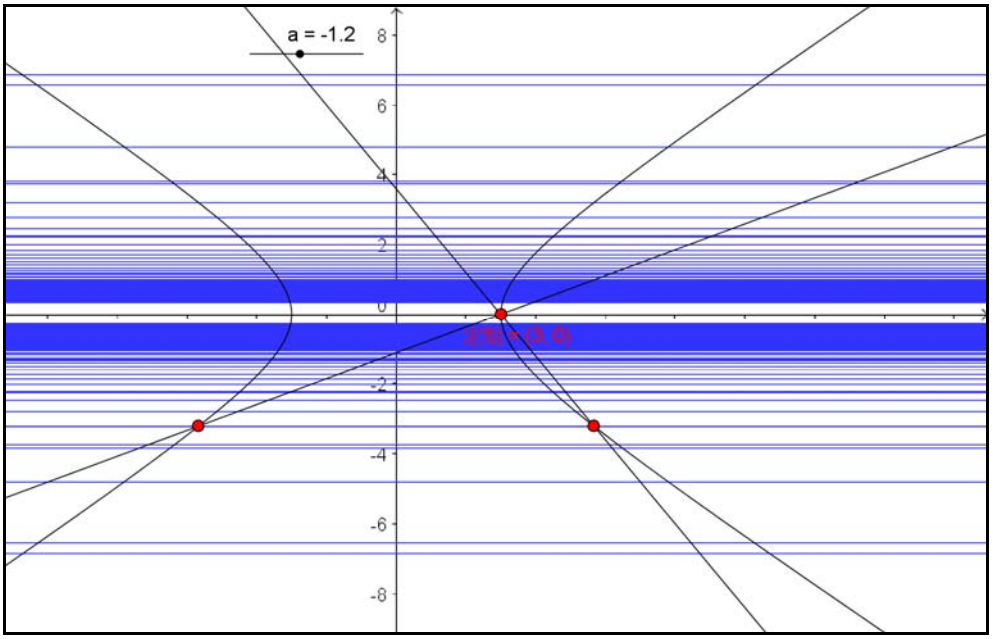
$\therefore$ C′ 的 x 坐標即為 $\dfrac{2a^2b^2t^2x_0+2a^2ty_0}{-a^2b^2t^2+1}$

$\overline{\mathrm{B'C'}}$ 的斜率即為

$$\frac{-\frac{1}{a^2t}\left(\frac{2a^2b^2t^2x_0+2a^2ty_0}{-a^2b^2t^2+1}\right)-b^2t\left(\frac{-2x_0+2a^2ty_0}{-a^2b^2t^2+1}\right)}{\frac{2a^2b^2t^2x_0+2a^2ty_0}{-a^2b^2t^2+1}-\frac{-2x_0+2a^2ty_0}{-a^2b^2t^2+1}}=\frac{-2y_0\left(a^2b^2t^2+1\right)}{2x_0\left(a^2b^2t^2+1\right)}=-\frac{y_0}{x_0}$$

$\because -\dfrac{y_0}{x_0}$ 是一個固定數

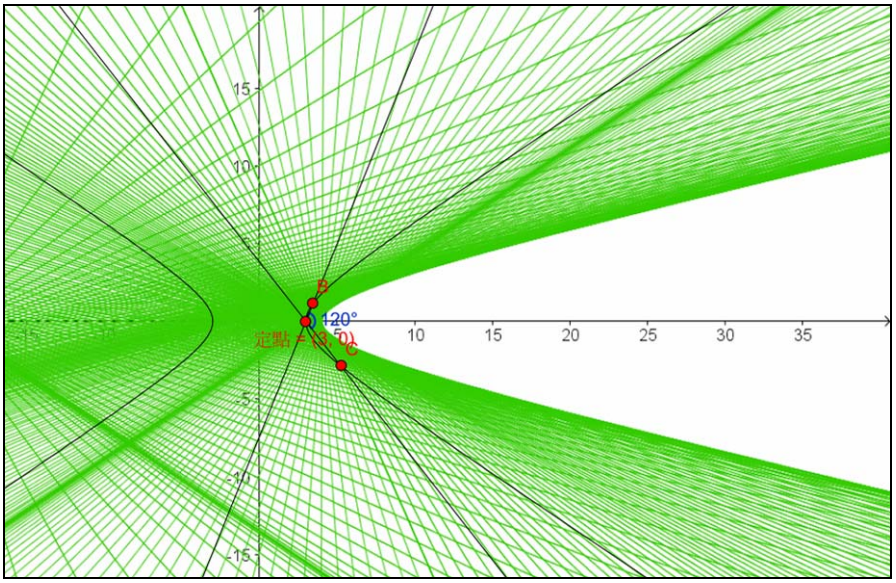
$\therefore$ $\overline{\mathrm{BC}}$ 是一系列的平行線



(雙曲線方程式$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ ， 定點(3,0)，斜率相乘=-$\frac{4}{9}$ 。)

(三) $\angle BAC$ 固定

角度固定時，形成包絡線



(雙曲線方程式$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ ， 定點(3,0)，$\angle BAC=120°$ 。)

五、 拋物線

(一) 斜率相加為固定值 k ：

設有一拋物線 $x^2=4cy$

線上一定點 $A(x_0,y_0)$，動點 $B(x_1,y_1)$ ，$C(x_2,y_2)$ 跟著 B 點移動，

則 ${x_0}^2=4cy_0$ 。

令$\overline{\mathrm{AB}}$斜率為m_1，$\overline{\mathrm{AC}}$斜率為m_2

設直線$\overline{BC}$的方程式為: $mx+ny=1\left(m\neq 0,n\neq 0\right)$

將A點平移至$O\left(0,0\right)$，B點平移至B'，C點平移至C'

原拋物線方程式變成$\left(x+x_0\right)^2=4c\left(y+y_0\right)$

$$x^2+2x_0x+{x_0}^2=4cy+4cy_0$$

$$\because {x_0}^2=4cy_0$$

$$\Rightarrow x^2+2x_0x=4cy$$

討論斜率相加為固定值k時
令$m_1+m_2=k$
$\because mx+ny=1$

$$x^2+\left(2x_0x-4cy\right)\left(mx+ny\right)=0$$

$$\left(1+2mx_0\right)x^2+\left(-4cn\right)y^2+\left(2nx_0-4cm\right)xy=0$$

將左右式同除以x^2

$$4cn\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(4cm-2nx_0\right)\left(\frac{y}{x}\right)+\left(-1-2mx_0\right)=0$$

$\frac{y}{x}$的解即為$\overline{OB'}$的斜率m_1及$\overline{OC'}$的斜率m_2利用根與係數

$$\frac{2nx_0-4cm}{4cn}=k$$

$$\left(4\mathrm{c}\right)m+\left(4ck-2x_0\right)n=0$$

將此式與$mx+ny=1$比較

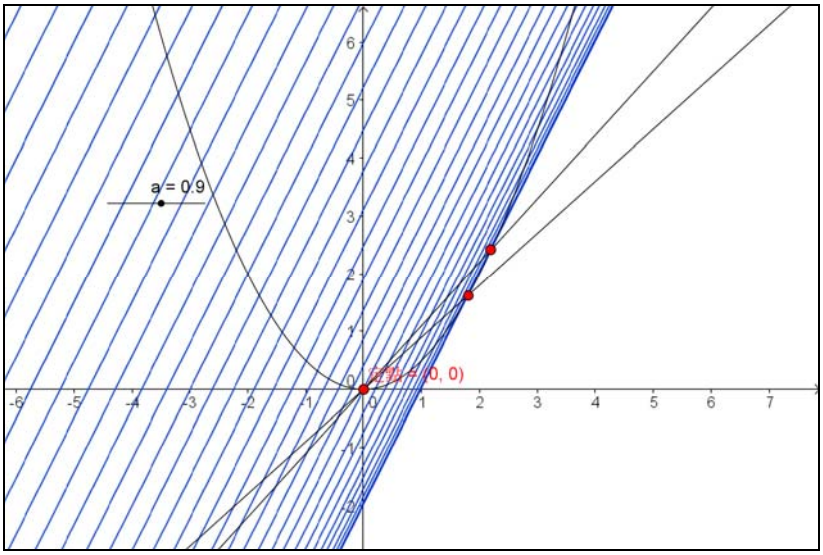
$$\begin{cases} mx+ny=1 \\ (4c)m+(4ck-2x_0)n=0 \end{cases}$$

$$\because m\neq 0\cap n\neq 0$$

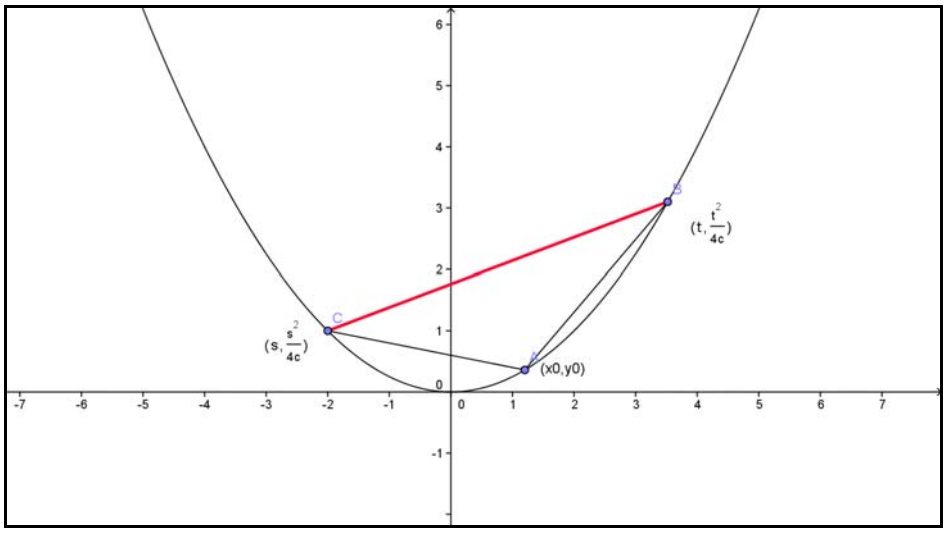
$\therefore$移動前的$\overline{\mathrm{BC}}$無必通過的點

於是我們用 Geogebra 將斜率相加為固定值的圖繪製出來，發現當B點移動

時，$\overline{BC}$ 為一系列的平行線，於是我們開始研究這個結果的證明。



(拋物線方程式 $y=\frac{1}{2}x^2$ ，定點(0,0) ，斜率相加=2。)



設有一拋物線 $x^2=4cy$

線上一定點 $A(x_0,y_0)$，動點 $B\left(t,\frac{t^2}{4c}\right)$

$C\left(s,\frac{s^2}{4c}\right)$ 跟著 B 點動，則 $x_0{}^2=4cy_0 \Rightarrow y_0=\frac{x_0{}^2}{4c}$

令 $\overline{AB}$ 斜率為 m_1 ，$\overline{AC}$ 斜率為 m_2 ， $m_1+m_2=k$ ，

$$m_1=\frac{\frac{t^2}{4c}-y_0}{t-x_0}=\frac{\frac{t^2-x_0{}^2}{4c}}{t-x_0}=\frac{t+x_0}{4c} \text{ ， } m_2=\frac{\frac{s^2}{4c}-y_0}{s-x_0}=\frac{\frac{s^2-x_0{}^2}{4c}}{s-x_0}=\frac{s+x_0}{4c}$$

$$m_1+m_2=\frac{t+s+2x_0}{4c}=k$$

$\overline{\mathrm{BC}}$ 的斜率即為 $\dfrac{\frac{s^2}{4c}-\frac{t^2}{4c}}{s-t}=\dfrac{t+s}{4c}=\dfrac{4ck-2x_0}{4c}$

$\because \dfrac{4ck-2x_0}{4c}$ 是一個固定數 $\therefore \overline{BC}$ 是一系列的平行線。

(二) 斜率相乘為固定值 k ：

設有一拋物線 $x^2=4cy$

線上一定點 $A(x_0,y_0)$ ，動點 $B(x_1,y_1)$ ， $C(x_2,y_2)$ 跟著 B 點移動，

則 $x_0{}^2=4cy_0$ 。令 $\overline{\mathrm{AB}}$ 斜率為 m_1 ， $\overline{\mathrm{AC}}$ 斜率為 m_2 ，

設直線 $\overline{BC}$ 的方程式為: $mx+ny=1\left(m\neq 0,n\neq 0\right)$

將 A 點平移至 $O\left(0,0\right)$ ，B 點平移至 B′ ，C 點平移至 C′

原拋物線方程式變成 $\left(x+x_0\right)^2=4c\left(y+y_0\right)$

$$x^2+2x_0x+x_0{}^2=4cy+4cy_0$$

$$\because x_0{}^2=4cy_0\Rightarrow x^2+2x_0x=4cy$$

討論斜率相乘為固定值 k 時，令 $m_1m_2=k$

$$\because mx+ny=1\Rightarrow x^2+\left(2x_0x-4cy\right)\left(mx+ny\right)=0$$

$$x^2+2mx_0x^2+2nx_0xy-4cmxy-4cny^2=0$$

將左右式同除以 x^2 ，可得： $4cn\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+\left(4cm-2nx_0\right)\left(\dfrac{y}{x}\right)+\left(-1-2mx_0\right)=0$

$\dfrac{y}{x}$ 的解即為 $\overline{OB'}$ 的斜率 m_1 及 $\overline{OC'}$ 的斜率 m_2 。

利用根與係數的關係，可得：

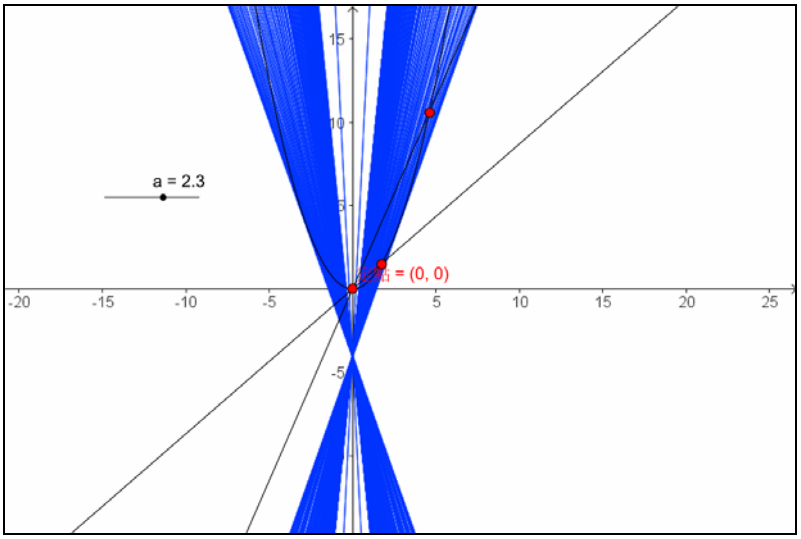
$$\frac{-1-2mx_0}{4cn}=k\Rightarrow\left(-2x_0\right)m+\left(-4ck\right)n=1$$

將此式與 $mx+ny=1$ 比較

$$\begin{cases} mx+ny=1 \\ m\left(-2x_0\right)+n\left(-4ck\right)=1 \end{cases}$$

$\because m \neq 0 \cap n \neq 0 \Rightarrow x = -2x_0, y = -4ck$

$\therefore$ 移動前的 $\overline{BC}$ 必通過 $(x + x_0, y + y_0) = (-2x_0 + x_0, -4ck + y_0) = (-x_0, -4ck + y_0)$



(拋物線方程式 $y = \frac{1}{2}x^2$ ，定點(0,0)，斜率相乘=2。)

陸、 討論

由研究結果發現，$\angle A$ 的兩夾邊斜率相加為固定數以及斜率相乘為固定數時，$\angle A$ 所對應的邊通過一定點或為一系列的平行線；但 $\angle A$ 為固定角時，$\angle A$ 所對應的邊包絡出圓錐曲線的圖形。

柒、 結論

一、 圓錐曲線內三角形兩邊斜率相加為定值，第三邊通過之定點為：

(一) 圓: $\left(\frac{2y_0 - kx_0}{-k}, \frac{ky_0 + 2x_0}{-k}\right)$

$k = 0$ 時：一系列平行線，斜率為 $\frac{x_0}{y_0}$

(二) 橢圓：$\left(\frac{2y_0 - kx_0}{-k}, \frac{a^2ky_0 + 2b^2x_0}{-a^2k}\right)$

$k = 0$ 時：一系列平行線，斜率為 $\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$ 。

(三) 雙曲線：$\left(\frac{2y_0\text{-}kx_0}{\text{-}k},\frac{a^2ky_0\text{-}2b^2x_0}{\text{-}a^2k}\right)$

$k=0$時：一系列平行線，斜率為$-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$ 。

(四) 拋物線：一系列平行線，斜率為 $\frac{4ck-2x_0}{4c}$

二、 圓錐曲線內三角形兩邊斜率相乘為定值，第三邊通過之定點為：

(一) 圓: $\left(\frac{kx_0+x_0}{k-1},\frac{-ky_0-y_0}{k-1}\right)$

$k=1$時：一系列平行線，斜率為$-\frac{y_0}{x_0}$ 。

(二) 橢圓：$\left(\frac{\left(ka^2+b^2\right)x_0}{ka^2\text{-}b^2},\frac{\text{-}\left(ka^2+b^2\right)y_0}{ka^2\text{-}b^2}\right)$

$k=\frac{b^2}{a^2}$時：一系列平行線，斜率為$-\frac{y_0}{x_0}$ 。

(三) 雙曲線：$\left(\frac{\left(ka^2\text{-}b^2\right)x_0}{ka^2+b^2},\frac{\text{-}\left(ka^2\text{-}b^2\right)y_0}{ka^2+b^2}\right)$

$k=-\frac{b^2}{a^2}$時：一系列平行線，斜率為$-\frac{y_0}{x_0}$ 。

(四) 拋物線：$\left(-x_0,-4ck+y_0\right)$

捌、 參考資料

一、南一版出版社。高中數學(四)。林福來等。

二、GeoGebra 使用手冊。

三、中華民國第四十五屆中小學科學展覽會作品說明書『圓錐曲線－探討圓中隱藏的點』。

四、中華民國第五十二屆中小學科學展覽會作品說明書『圓錐曲線內接 n 邊形斜率的研究』。

【評語】040411

本科展作品為一平面幾何的作品。作者探索在圖錐曲線上，以某定點 A 為固定頂點的內接三角形，所具有的特殊性質。並對一些現有結果給簡單的証明。也利用 Geo Gebra 繪出一些幾何圖形。全文構思完整。但在取材與創新上若能加強，則更為完備。