中華民國第52屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040410

心心相印

學校名稱：國立臺灣師範大學附屬高級中學

作者：	指導老師：
高二 林哲佑 高二 朱柏翰 高二 李沛宸	翁立衛

關鍵詞：特殊點的特定點三角形、心的共用與推遞性質

摘要

在平面上取一ΔABC及一點P，連接$\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$形成△ BPC、△ CPA和△ APB，同時作△ BCP、 △ ACP和△ ABP的內心、外心、重心或垂心，得D、E、F三點，當ΔDEF存在時討論：

一、 P和△ DEF有何關係？

二、△ ABC和△ DEF有何關係？

三、若對新三角形重複上述的「步驟」，一連串新形成的三角形有何性質？

在整個研究的流程中，我們一開始藉操作數學軟體的方法，將每一個對應的情況找出來並加以證明，接著更進一步觀察圖形中豐富的幾何性質，使我們除了心的對應關係之外，又看到了更深更廣泛的關係，我們也使用三角函數來幫助我們精確地算出其邊、角、面積關係。當我們討論完四心的情況之後，接著我們更嘗試作出兩點推廣:(1)疊代討論極限(2)內部點推廣到平面上的任一點，這些都使得我們的題目更加多元。

壹、研究動機

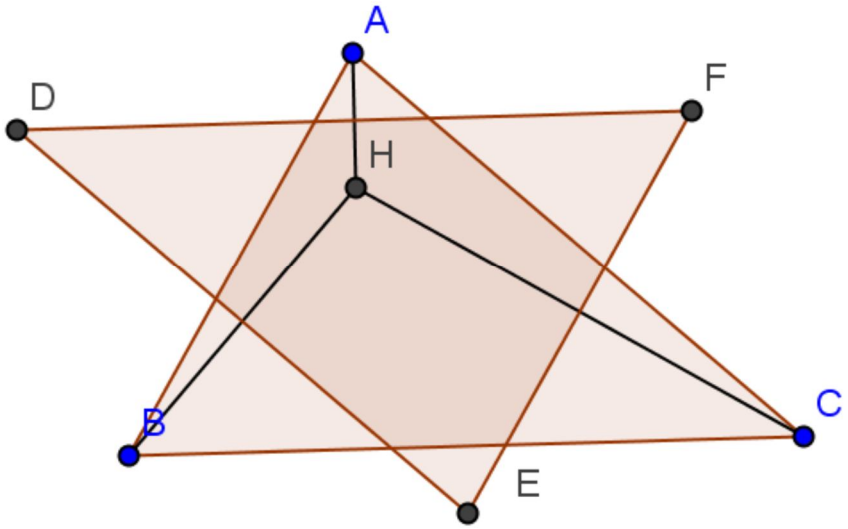
發想於98年能力競賽第三區的筆試一第二題(可見下【圖一】)。題目中提到兩個三角形，一個三角形的垂心卻可以對應到另一個三角形的外心，而且兩個三角形全等。如此的結果開啟我們探討類似方式建構出來的三角形，並尋找是否有類似的性質，這便開啟了我們的研究。

我們這次的研究靈活的使用了幾何圖形豐富的性質證明了心的對應關係，並配合高中所學到的「遞迴關係」、「三角函數」和「平面向量」的知識，幫助我們計算複雜的面積關係以便釐清這一系列的問題。

問題二：設 H 為 ΔABC 的垂心，且 D, E, F 三點分別為 ΔABH, ΔBCH 與 ΔCAH 的外心。

(1) 試證： H 為 ΔDEF 的外心。 (10 分)

(2) 試證： ΔABC 與 ΔDEF 全等。 (6 分)



(註：原題目並無附圖，僅為示意圖)

【圖一】

貳、研究目的與問題

平面上一△ ABC，作它的內心、外心、重心或垂心P，連接$\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$，形成△ BCP、△ ACP和△ ABP，再作△ BCP、△ ACP和△ ABP的內心、外心、重心或垂心D、E、F。

一、名詞定義：

本研究中，有兩個主要的名詞：特定點、特殊點特定點三角形，如下：

【定義一】 **特定點** 本研究的特定點是指三角形的重心、內心、外心、垂心或費馬點，這些點皆可由尺規作圖唯一決定。
【定義二】 **原三角形**與**特殊點特定點三角形** 取平面上一△ ABC，稱之為**原三角形**，找一**特殊點P**並連接$\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$，如此可得三個三角形△ BCP、△ ACP和△ ABP，分別作△ BCP、△ ACP和△ ABP的**特定點**D、E、F，在不共線不共點的情況下可得一△ DEF，而△ DEF是「由特定點形成的三角形」，我們稱之為**特定點三角形**，例如：若特殊點為重心、特定點為重心時則稱△ DEF為重心的重心三角形。

二、研究問題：

（一）△ ABC以及△ DEF兩個三角形之間的討論 ：

１、共用重心的性質：△ ABC各邊中點D、E、F之連線所決定的三角形共用重心

２、心的遞移性質：△ ABC的垂心是垂足△ DEF的內心

３、△ ABC的內心是各邊切點所形成之△ DEF的外心

４、△ ABC的外心是各邊中點所形成之△ DEF 的垂心

５、△ ABC與△ DEF之間的心，有「垂⇒內⇒外⇒垂」的推遞關係

因此，我們想在本研究中針對原三角形與特殊點特定點三角形之間：

「共用心」及「心的推遞」性質深入探討，並研究這兩個三角形之間的關係。

兩個三角形之間有什麼關係？就我們所學的幾何知識來看,兩個三角形之間可能有:「全等」、「相似或縮放」、「等積」、「共用特殊心」、「共圓」等性質，在本研究也將聚焦於這兩個三角形之間的上述關係。

（二）彙整研究問題如下：

１、原三角形與新三角形是否全等、相似或等積。

２、原三角形與新三角形是否共用尤拉線、圓或共用九點圓圓心。

３、原三角形與新三角形是否有鏡射、縮放或旋轉的關係。

４、探討三角形內一點特殊點，將原三角形分為三個三角形，探討此三個三角形的特定點所連成的三角形的四心與原三角形的四心是否有對應關係。

參、 研究設備及器材

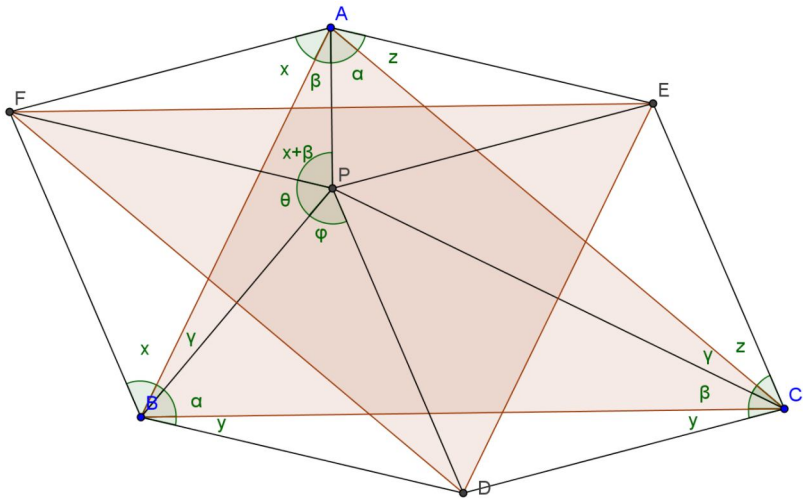
一、 電腦、Geogebra軟體、GSP數學繪圖軟體

二、紙、筆

肆、 研究過程或方法

在接下來的第一、二點，先從我們的研究發想點——98年能力競賽第三區的筆試一第二題，開始研究，及其相關的性質。

一、特殊點P為原三角形△ ABC之垂心，特定點選外心，△ DEF為垂心的外心三角形 則 P 點為 △ DEF 的外心，且 △ ABC ≅△ DEF。



【圖二】

(一) 證明：(P 為 △ DEF 的外心)：

1、 令$\angle CAP = \angle CBP = \alpha$ 、$\angle BAP = \angle BCP = \beta$、$\angle ABP = \angle ACP = \gamma$

$\angle FAB = \angle FBA = x$、$\angle FPB = \theta = x + \gamma$、$\angle BPD = \varphi$

$\because \angle APB = \angle APF + \angle PBF = x + \beta + x + \gamma = \angle CAP + \angle CBP + \angle ACB$

$= \alpha + \alpha + \beta + \gamma$

$\therefore x = \alpha$，同理有 $y = \gamma$、$z = \beta$

2、 △ BPF 和 △ BPD 中，$\overline{BP} = \overline{BP}$、$\angle FBP = \angle FPB = \angle DBP = \angle DPB$

$= \alpha + \gamma$， $\therefore$△ BPF ≅△ BPD(ASA)

$\therefore \overline{PF} = \overline{PD}$(對應邊相等)，同理有$\overline{PD} = \overline{PE}$、$\overline{PE} = \overline{PF}$，

故$\overline{PD} = \overline{PE} = \overline{PF}$， ∴ P 為 △ DEF 的外心

且$\because$ $\overline{DF}$為$\overline{PB}$中垂線$\overline{PF} = \overline{FB}$、$\overline{DB} = \overline{PD}$，綜合上點，同理可得

$\overline{FB} = \overline{BD} = \overline{DC} = \overline{CE} = \overline{EA} = \overline{AF}$

(二) 證明：(△ ABC ≅△ DEF)：

1、 由三角形內角和180°，在 △ ABC 得 $2(\alpha + \beta + \gamma) = 180^\circ$

$\angle AFB = 180^\circ - 2x = 180^\circ - 2\alpha = 2(\alpha + \beta + \gamma) - 2\alpha = 2(\beta + \gamma)$

$\angle ECD = y + \beta + y + z = 2(\beta + \gamma) = \angle AFB$

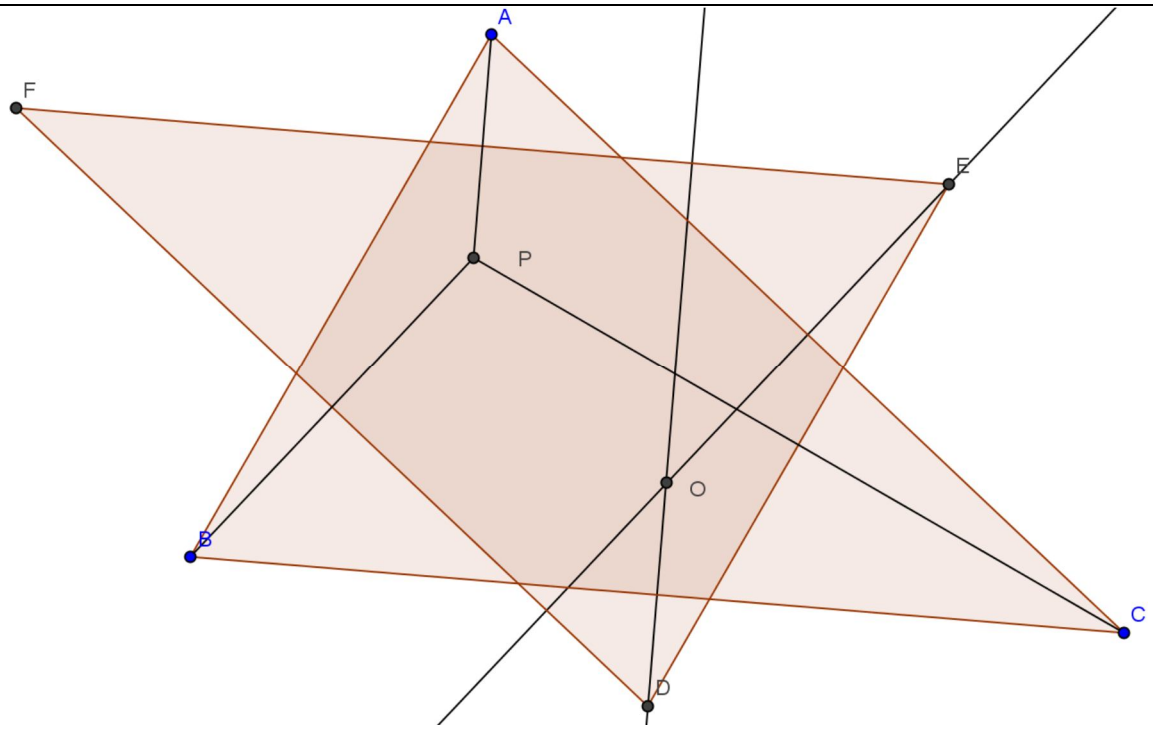
2、 △ ABF 和 △ DCE 中，$\angle AFB + \angle ECD$，$\overline{AF} = \overline{FB} = \overline{DC} = \overline{CE}$

△ ABF ≅△ DEC(SAS)，故$\overline{AB} = \overline{DE}$(對應邊相等)

3、 同理，$\overline{BC} = \overline{EF}$、$\overline{CA} = \overline{FD}$， ∴△ ABC ≅△ DEF(SSS)

【小結一】垂心的外心三角形的外心是原三角形的垂心且 △ ABC ≅△ DEF

二、△ABC 之垂心為 P、外心為 O， △DEF為垂心的外心三角形，則 O 點為 △DEF 的垂心。



【圖三】

證明：

△ODE 中，$\overline{FE} \perp \overline{AP}$($\overleftrightarrow{FE}$為$\overline{AP}$中垂線)，$\overline{AP} \perp \overline{BC}$(P 為 △ODE 垂心)，

又$\overline{OD} \perp \overline{BC}$($\overline{OD}$為$\overline{BC}$中垂線)，故$\overline{AP} \parallel \overline{OD}$，$\overline{FE} \perp \overline{OD}$。

同理可得$\overline{DF} \perp \overline{OE}$，即 F 為△ODE之垂心，由三角形的三頂點加上其垂心（Orthocentric system），「任一點皆為其餘三點所構成的三角形的垂心」性質可知，F為△ODE之垂心，所以O亦為△DEF之垂心，故得證。

【小結二】垂心的外心三角形的垂心是原三角形的外心

綜合**【小結一】垂心的外心三角形的外心是原三角形的垂心且 △ABC ≅△DEF可知：**

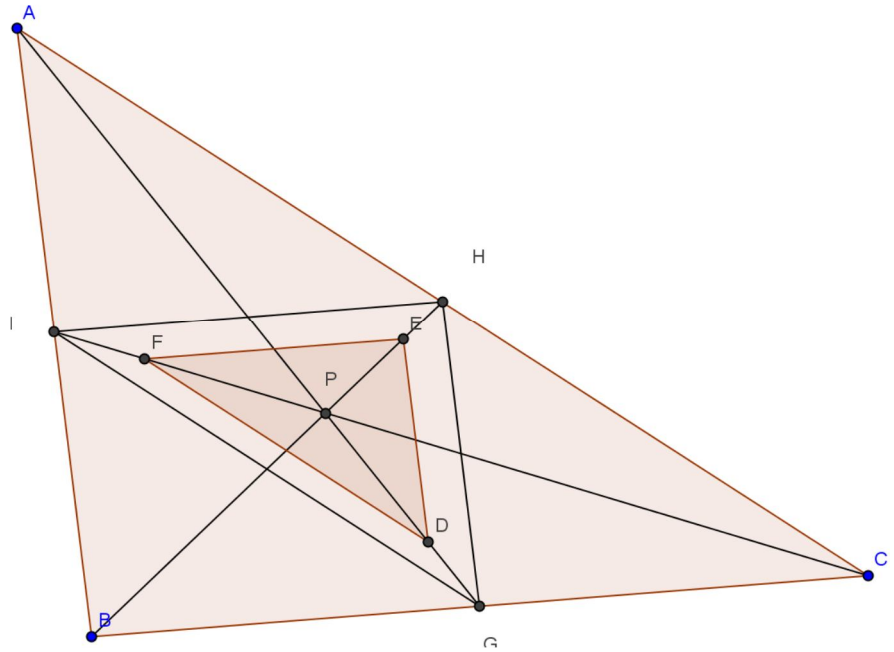
（一）垂心的外心三角形與原三角形的外心和垂心互換

（二）兩者共用尤拉線，且共用九點圓及其圓心

（三）垂心的外心三角形是以九點圓圓心(外心和垂心中點)當縮放中心，將原三角形旋轉180°所得

三、 特殊點P點為原三角形△ ABC的重心，特定點選重心，三角形△ DEF為重心的重心三角形。

觀察P點與重心三角形△ DEF的關係，猜測P點為重心三角形△ DEF的重心。



【圖四】

(一) 證明：

1、 G、H、I 為$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$中點，$\frac{\overline{HG}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{IH}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{IG}}{\overline{AC}}=\frac{1}{2}\cdots(1)$

D、E、F為△ PBC、△ PAC、△ PAB的重心。

利用比例關係推得 $\frac{\overline{PD}}{\overline{PG}}=\frac{\overline{PE}}{\overline{PH}}=\frac{\overline{PF}}{\overline{PI}}=\frac{2}{3}$，故$\frac{\overline{DE}}{\overline{HG}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{HI}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{GI}}=\frac{2}{3}\cdots(2)$

又$\overline{FE}\parallel\overline{IH}\parallel\overline{BC}$、$\overline{DE}\parallel\overline{GH}\parallel\overline{AB}$、$\overline{DF}\parallel\overline{GI}\parallel\overline{AC}$

2、 綜合上述(1)(2)，得$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{AC}}=\frac{1}{3}$

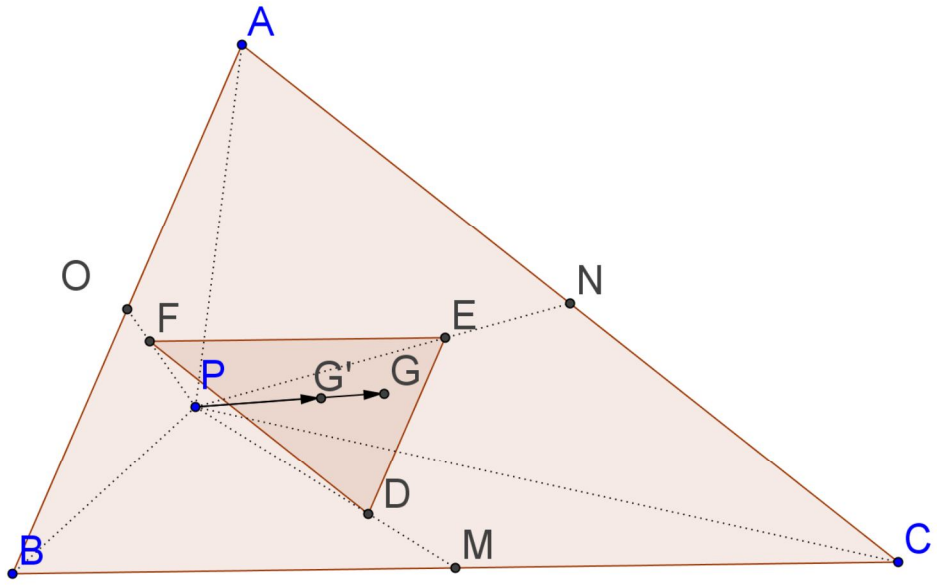
事實上，可把 △ DEF 看作是 △ ABC 以 P 點為中心，旋轉 180°後縮放$\frac{1}{3}$倍

，故兩個三角形共用重心，亦可說是△ GIH以P點內縮 $\frac{2}{3}$。

(二) 觀察：由上述過程可發現，不論P點是否為原三角形的重心，△ DEF皆可視為 △ GIH以P點縮放成 $\frac{2}{3}$，也可視為△ ABC以某個「縮放中心」，旋轉180°後縮放$\frac{1}{3}$倍。

△ DEF 和 △ ABC 共用重心的情形，算是縮放時的「特例」。這引起我們想找出這個「縮放中心」有何特別之處。

（三）在此換個角度，從向量的觀點出發



【圖五】

P為△ ABC內一點、G為△ ABC重心、G′ 為△ DEF重心，M、N、O為△ ABC各邊中點。

1. 由重心的向量性質可知：$\begin{cases} 3\overrightarrow{QG}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC} \\ 3\overrightarrow{QG'}=\overrightarrow{QD}+\overrightarrow{QE}+\overrightarrow{QF} \end{cases}$，Q為平面上一點。

2. 又因D為△ PBC重心，在其中線$\overline{DM}$上$\frac{\overline{PD}}{\overline{DM}}=2$處，故$\overrightarrow{QD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{QM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{QP}$，同理可得

$$\begin{cases} \overrightarrow{QD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{QM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{QP} \\ \overrightarrow{QE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{QN}+\frac{1}{3}\overrightarrow{QP} \\ \overrightarrow{QF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{QO}+\frac{1}{3}\overrightarrow{QP} \end{cases}$$ Q為平面上一點。

3. 且因M、N、O為△ ABC各邊中點，$\begin{cases} \overrightarrow{QM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{QB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{QC} \\ \overrightarrow{QN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{QC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{QA} \\ \overrightarrow{QO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{QA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{QB} \end{cases}$ Q為平面上一點。

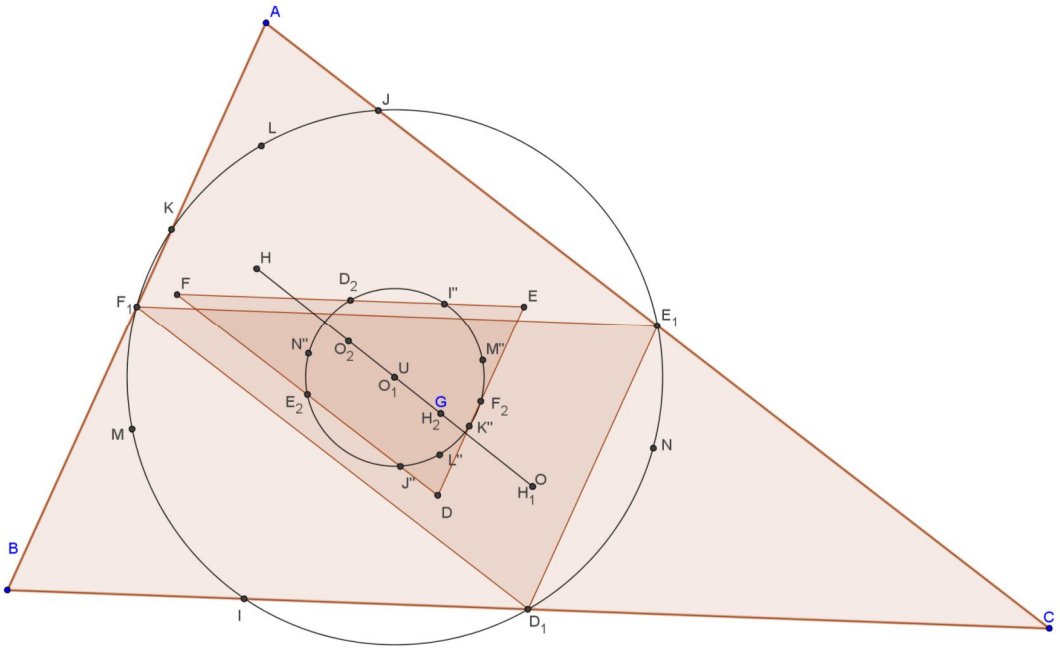
4. 綜合以上可得$3\overrightarrow{QG'}=\overrightarrow{QP}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{QN}+\overrightarrow{QO}\right)=\overrightarrow{QP}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}\right)$

$$=\overrightarrow{QP}+2\overrightarrow{QG}$$

故$\overrightarrow{QG'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{QP}+\frac{2}{3}\overrightarrow{QG}$，所以$P-G'-G$共線，且$\frac{\overline{PG'}}{\overline{G'G}}=2$。

5. 也就是任意點P在G時，$\overrightarrow{QG'}=\overrightarrow{QG}$，即 $G=G'$， △ ABC和△ DEF共用重心。

（四）P點是垂心時，發現此時**縮放中心是原三角形的九點圓圓心。**



【圖六】

1、 令△ ABC的垂心為H、重心為G、外心為O、九點圓圓心為U，由尤拉線比例性質可知$\overline{HG}$：$\overline{GO}$=2：1，而九點圓的圓心U為垂心H和外心O的中點，即

$\overline{HU}:\overline{UG}:\overline{GO}$ = 3：1：2。又U可表示成O以G旋轉180度並縮放$\frac{1}{2}$，定義為O_1(因為△ DEF為△ ABC以G旋轉180度再縮放 $\frac{1}{2}$)

2、 因為△ DEF為△ $D_1E_1F_1$以H縮放 $\frac{2}{3}$得到的，所以其外心也從O_1變成O_2，$\overline{HO_2}$：$\overline{O_1O_2}$=2：1，及$\overline{HO_2}$：$\overline{O_2U}$=2：1

3、 綜合「垂心的重心三角形的垂心是原三角形的重心」(後面討論會再加以說明）後知道原重心G為△ DEF的垂心H_2後，即可推出$\overline{HO_2}$：$\overline{O_2U}$：$\overline{UH_2}$：$\overline{H_2O}$= 2：1：1：2

4、 也就是說對垂心H_2和外心O_2而言，是以垂心H和外心O以U旋轉180°再縮放 $\frac{1}{3}$，

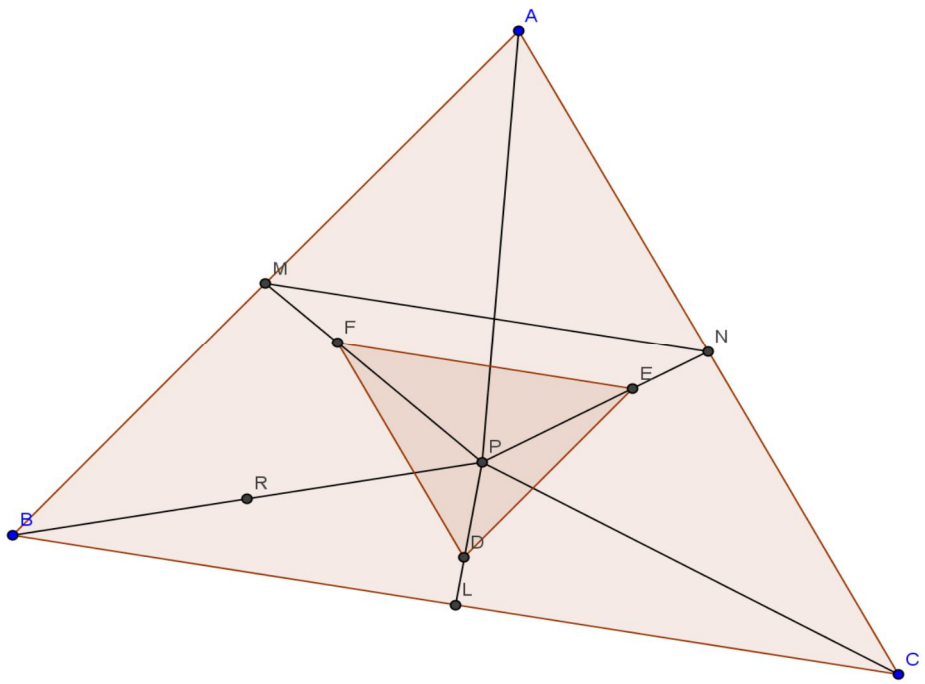
這樣也就可以說明△ DEF是△ ABC以U旋轉180°再縮放 $\frac{1}{3}$倍。

由此，我們可以得到以下結果：

【小結五】重心的重心三角形的重心是原三角形的重心

【小結六】垂心的重心三角形即原三角形以原三角形之九點圓圓心當縮放中心後旋轉180°，再縮放 $\frac{1}{3}$倍。

四、 特殊點P為原三角形△ ABC 之外心，特定點選重心， △ DEF 為外心的重心三角形則 P 點為 △ DEF 的垂心



【圖七】

證明：

擬證：D 在 EF 上的垂直線過 P

1、 M、N分別為$\overline{AB}$、$\overline{AC}$邊上的中點，故$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$

$\frac{\overline{PE}}{\overline{PN}} = \frac{\overline{PF}}{\overline{PM}} = \frac{2}{3}$，故 △ PMN ≈△ PFE，又$\overline{MN} \parallel \overline{EF}$

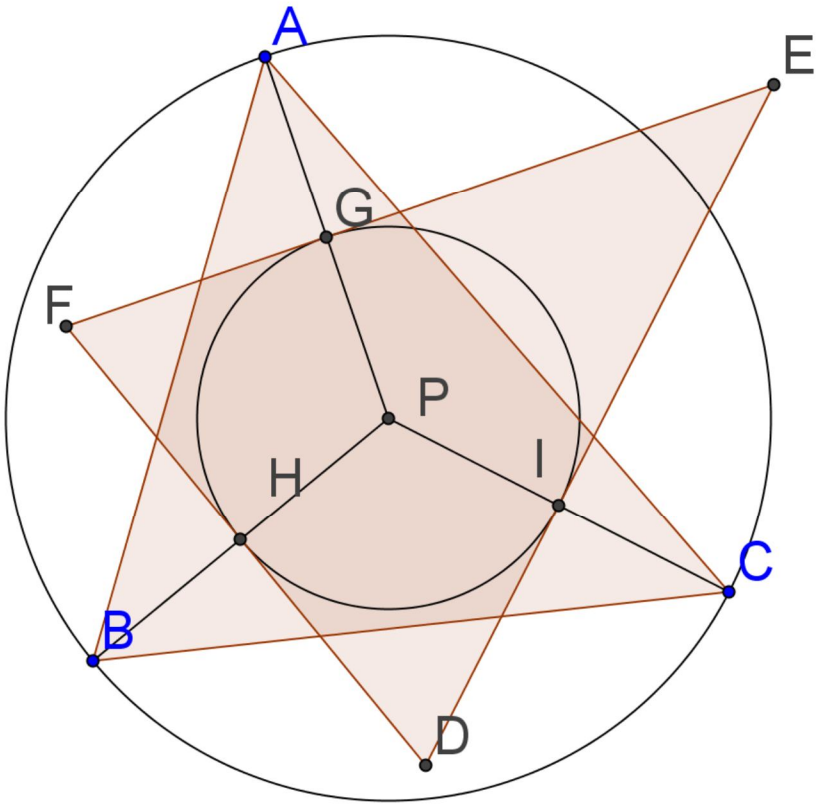
2、 綜合上述可知$\overline{MN} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{EF}$，又$\overline{PL} \perp \overline{BC}$，故$\overline{PL} \perp \overline{EF}$

3、 ∵ D 在$\overline{PL}$上(重心在中線上)，故$\overline{DP} \perp \overline{EF}$，同理可得$\overline{EP} \perp \overline{DF}$，$\overline{FP} \perp \overline{DE}$

∴ P 為 △ DEF 的垂心

【小結七】外心的重心三角形的垂心是原三角形的外心

五、特殊點P為原銳角三角形△ ABC之外心，特定點選外心，△ DEF為外心的外心三角形，則P為△ DEF的內心



【圖八】

證明：

∵ P 為 △ ABC 的外心，故$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC} = R$。

1、 ∵ $\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FD}$分別為$\overline{PB}$、$\overline{PA}$、$\overline{PC}$的中垂線。

在 △ PGE 和 △ PIE 中：

(1)$\angle GPE = \angle PIE = 90^{\circ}$

(2)$\overline{PE} = \overline{PE}$

(3)$\overline{GP} = \overline{PI} = \frac{1}{2}R$。

∴△ PGE ≅△ PIE(RHS 全等)

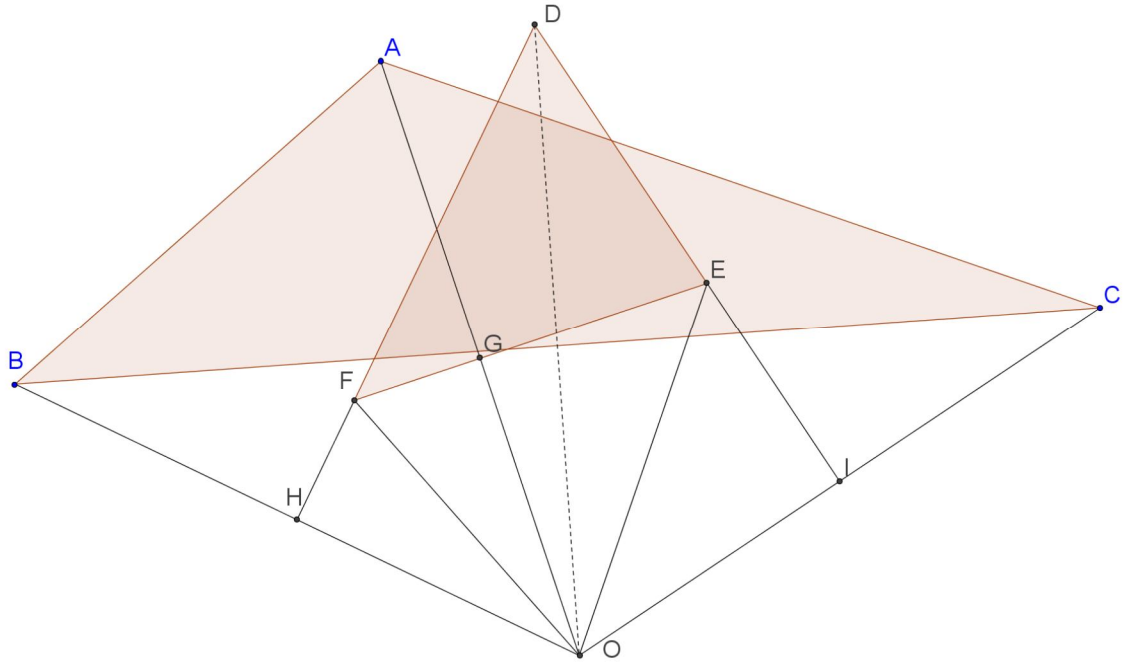
2、 $\angle PEG = \angle PEI$(對應角相等) ∴ $\overline{EP}$為∠FED 的角平分線，

同理有$\overline{FP}$為∠EFD 的角平分線、$\overline{DP}$為∠EDF 的角平分線。

∴ P 為 △ DEF 的內心

【小結八】在銳角三角形中，外心的外心三角形的內心是原三角形的外心

六、特殊點P為原鈍角三角形△ ABC之外心，特定點選外心，△ DEF為外心的外心三角形，則P為△ DEF的傍心



【圖九】

證明：

1、　在圓內接四邊形 $OHFG$ 中

$\because \angle OHF = \angle OGF = 90^\circ$，$\overline{OH} = \overline{OG} = \frac{1}{2}R$，$\overline{OF} = \overline{OF}$　$\therefore$ △ OHF ≅△ OGF

2、　同理可得△ OGE ≅△ OIE, △ OHD ≅△ OID

$\Rightarrow \overline{FO}$ 為 $\angle HFG$ 的角平分線、$\overline{EO}$ 為 $\angle GEI$ 的角平分線、$\overline{DO}$ 為 $\angle HDI$ 的角平分線

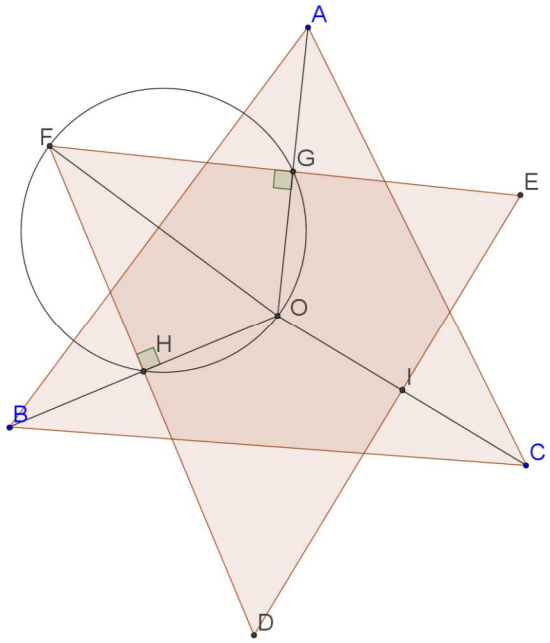
$\Rightarrow O$ 為△ DEF的傍心

【小結九】在鈍角三角形中，**外心的外心三角形的傍心是原三角形的外心**

綜合【小結八】和【小結九】可知三角形由銳角變成鈍角，其外心也會跟著從三角形內部跑到外部，而此時外心的外心三角形則會從內心轉變成傍心

七、 跳脫一對一的圖形，進一步對三角形重複做外心的外心三角形，我們試著找出新三角形的面積與原三角形的面積的關係：

(一) 當原三角形為銳角三角形時



【圖十】

1、 首先把△ DEF分成三個圓內接四邊形做觀察

在圓內接四邊形 $OHFG$ 中，$\angle GOH = 2\angle C$

$\because \overline{OG}=\overline{OH}=\frac{1}{2}R$ ，$\angle OGF=\angle \mathrm{OHF}=90^{\circ}$ ，$\overline{OF}=\overline{OF}$

$\therefore$△ OGF ≅△ OHF(RHS 全等)

$\Rightarrow \angle GOF=\angle HOF=\angle C$

$\Rightarrow \overline{FG}=\overline{FH}=\frac{1}{2}R\tan C$

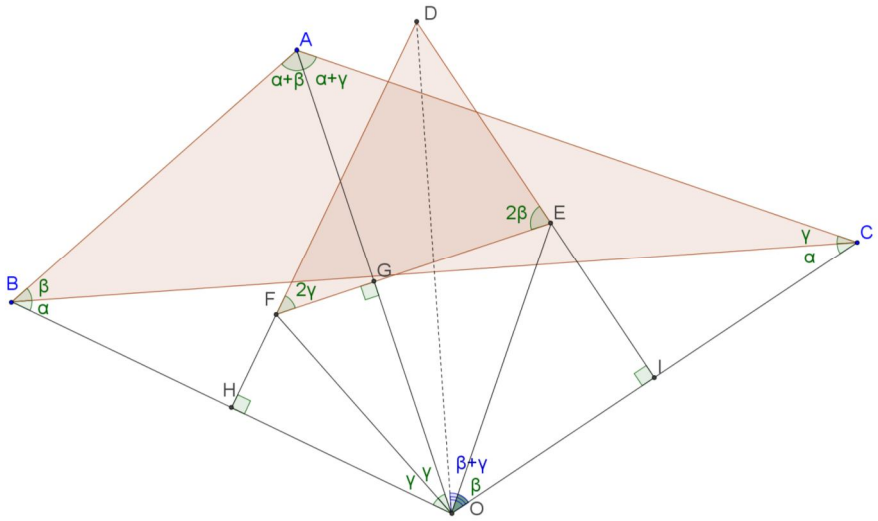
同理可得 $\overline{EG}=\overline{EI}=\frac{1}{2}R\tan B$ 、$\overline{DI}=\overline{DH}=\frac{1}{2}R\tan A$

2、 由 $\frac{1}{2}$ 底×高即知△DEF 得的面積=

$$\frac{1}{4}\mathrm{R}^2(\tan \mathrm{A}+\tan \mathrm{B}+\tan \mathrm{C})=\frac{1}{4}\mathrm{R}^2\tan \mathrm{A}\tan \mathrm{B}\tan \mathrm{C}$$

$$\therefore \frac{\triangle \mathrm{DEF}}{\triangle \mathrm{ABC}}=\frac{\frac{1}{4}\mathrm{R}^2\tan \mathrm{A}\tan \mathrm{B}\tan \mathrm{C}}{2\mathrm{R}^2\sin \mathrm{A}\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C}}=\frac{1}{8\cos \mathrm{A}\cos \mathrm{B}\cos \mathrm{C}}$$

（二）當原三角形為鈍角三角形時



【圖十二】

3、　如圖所示，令 $\angle OBC=\angle OCB=\alpha$ 、 $\angle ABC=\beta$ 、 $\angle ACB=\gamma$

$\triangle$ DEF面積

$=OHDI-OHFG-OGEI$

$=2\left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}R\times\frac{1}{2}R\tan(\beta+\gamma)\right]-2\left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}R\times\frac{1}{2}R\tan\gamma\right]-2\left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}R\times\frac{1}{2}R\tan\beta\right]$

$=\frac{1}{4}R^2\left[\tan(\beta+\gamma)-\tan\beta-\tan\gamma\right]$

$=\frac{1}{4}R^2\left(\frac{\tan\beta+\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma}-\tan\beta-\tan\gamma\right)$

$=\frac{1}{4}R^2(\tan\beta+\tan\gamma)\left(\frac{\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma}\right)$

$=\frac{1}{4}R^2\tan(\beta+\gamma)\tan\beta\tan\lambda$

$=-\frac{1}{4}R^2\tan A\tan B\tan C$ （$\because$ $\beta=\angle B$ 且 $\gamma=\angle C$）

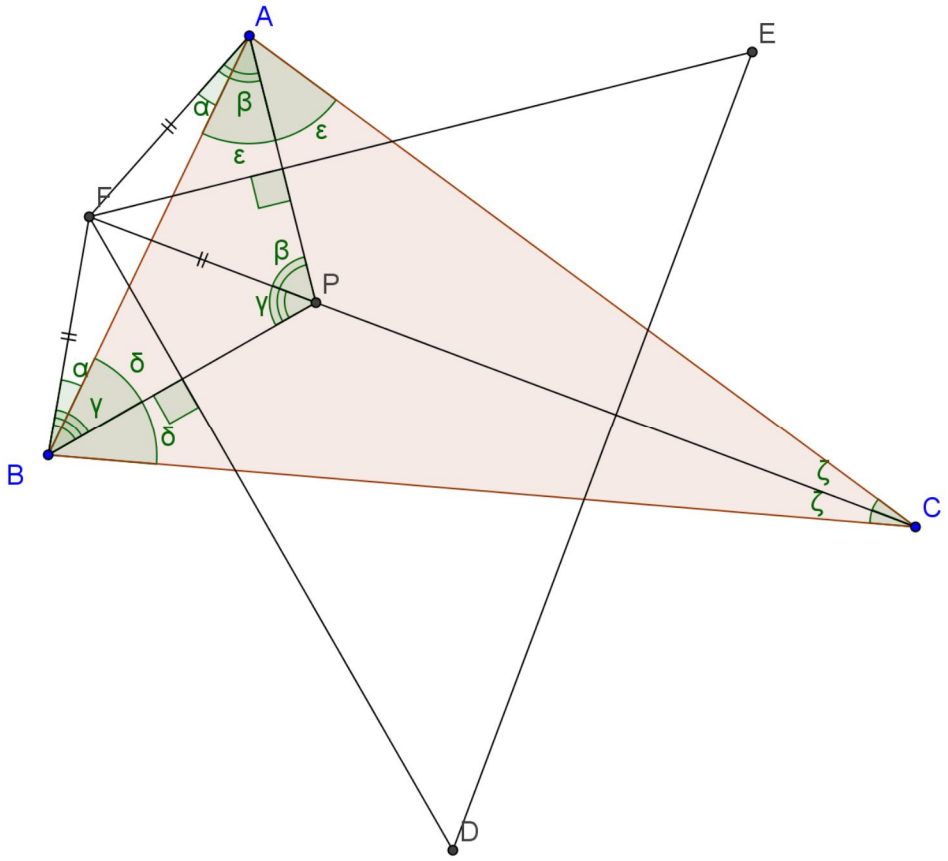
$$\therefore\frac{\triangle\text{DEF}}{\triangle\text{ABC}}=\frac{-\frac{1}{4}\text{R}^2\tan\text{A}\tan\text{B}\tan\text{C}}{2\text{R}^2\sin\text{A}\sin\text{B}\sin\text{C}}=\frac{-1}{8\cos\text{A}\cos\text{B}\cos\text{C}}$$

綜合以上兩種情形，可得

【小結十一】新三角形與原三角形的面積的比值為 $\left|\frac{1}{8\cos A\cos B\cos C}\right|$ ，

且 $-8<8\cos A\cos B\cos C\le 1$

八、特殊點 P 為原三角形△ ABC 之內心，特定點選外心，△ DEF 為內心的外心三角形 則P 點為 △ DEF 的垂心



【圖十三】

證明：

已知$\overline{CP} \perp \overline{DE}$，今欲證明P為△ DEF的垂心，代表$C-P-F$共線，且$B-P-E$共線

1、 首先證明$C-P-F$共線：

$\angle APB = \angle PAC + \angle PBC + \angle ACB = \angle PAC + \angle PBC + 2\angle ACP$ (1)

$= \angle APF + \angle FPB$

$= \angle PAF + \angle PBF$

$= \angle PAB + \angle FAB + \angle PBA + \angle FBA$

$= \angle PAB + \angle PBA + 2\angle FAB = \angle PAC + \angle PBC + 2\angle FAB$

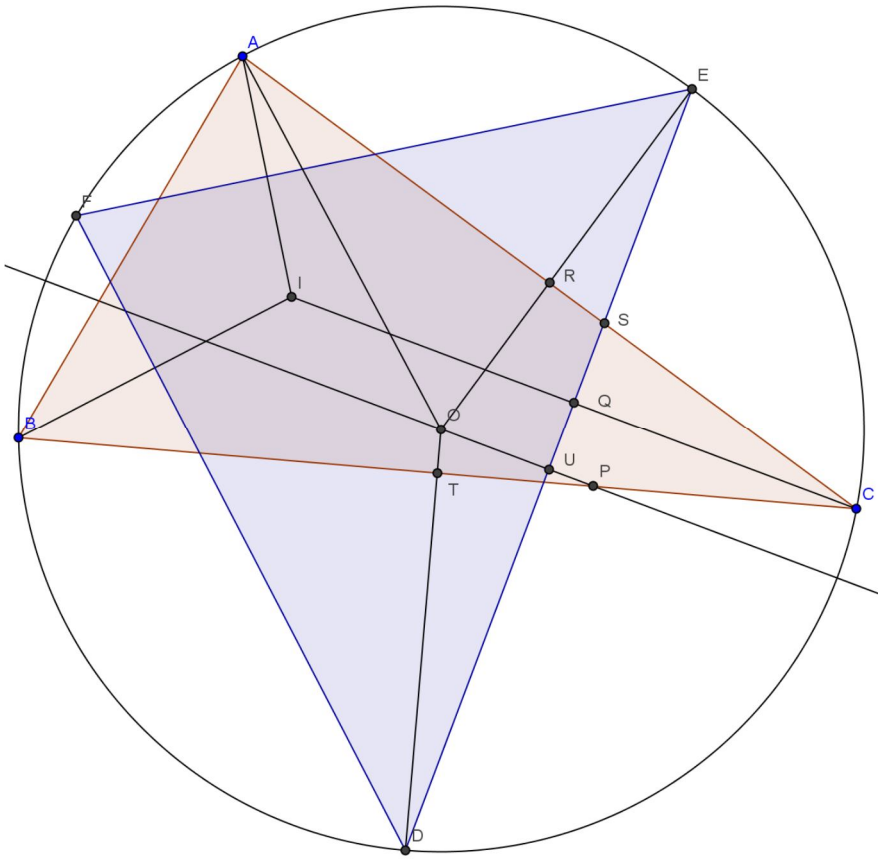
2、 由最後一式和(1)式可得$\angle FAB = \angle ACP$

$\angle APF = \angle FAB + \angle PAB = \angle ACP + \angle PAC$

$\angle APF + \angle APC = \angle ACP + \angle PAC + (\pi - \angle ACP + \angle PAC) = \pi$，即得證

【小結十二】內心的外心三角形的垂心是原三角形的內心

九、I 為 $\triangle ABC$ 的內心、O 為 $\triangle ABC$ 的外心，$\triangle DEF$為內心的外心三角形
$\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$共用外心且共圓。



【圖十四】

(一) 證明：共用外心

1、 作過 O 點垂直$\overline{DE}$的直線$\overleftrightarrow{OP}$，$\overline{CI} \perp \overline{DE}$（$\overline{DE}$為$\overline{CI}$中垂線），故$\overline{CI} \parallel \overline{OP}$。

2、 $\angle ACI = \angle ICB$(角平分線)，$\angle ICB = \angle OPB(\overline{CI} \parallel \overline{OP})$

$\angle QSC = 180^\circ - \angle CSQ - \angle CQS = 180^\circ - \angle ESR - \angle ERS = \angle RES$

($\angle CSQ$ 與$\angle ESR$ 對頂角相等，$\angle CQS = \angle ERS = 90^\circ$)

$\angle OPT = 180^\circ - \angle POT - \angle OTP = 180^\circ - \angle DOU - \angle DUO$

$= \angle ODU$($\angle POT = \angle DOU$，$\angle OTP = \angle DUO = 90^\circ$)

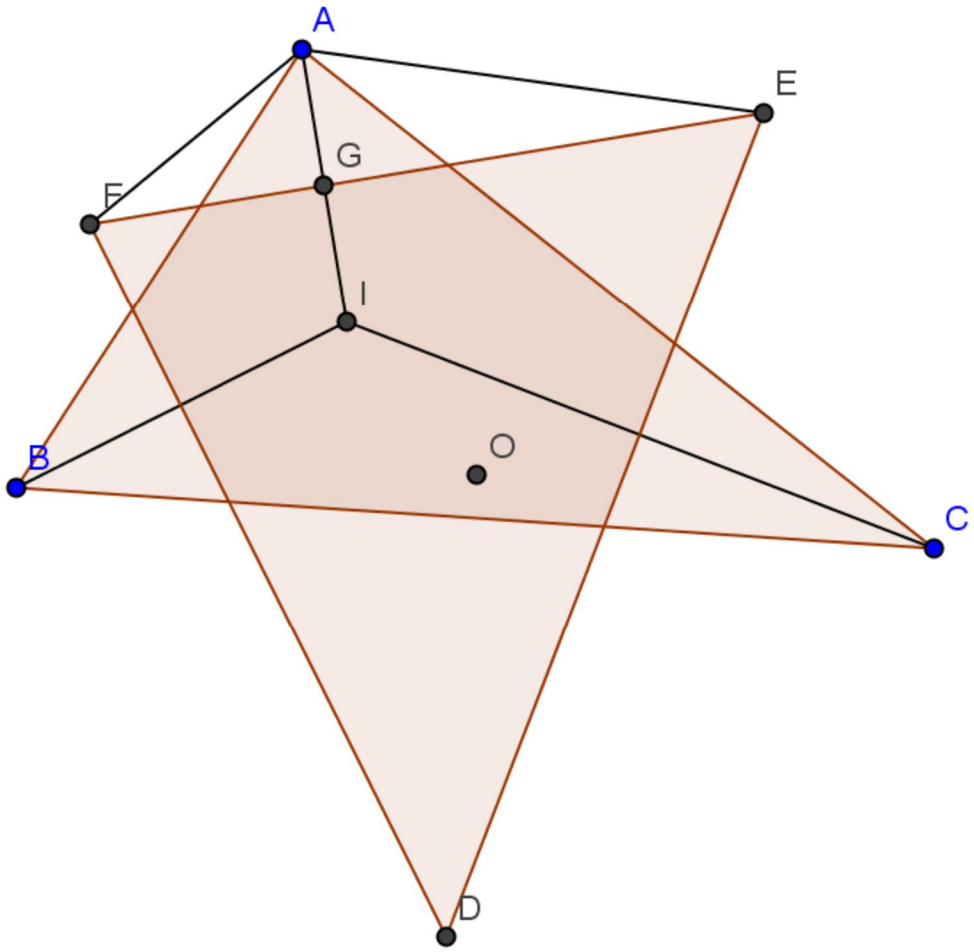
3、 連接$\overline{OD}$與$\overline{OE}$，在ΔDOU 與ΔEOU中：

(1)$\overline{OU} = \overline{OU}$ (2)$\angle OUE = \angle OUD$ (3)$\angle ODU = \angle OEU$

故$\Delta DOU \cong \Delta EOU$(AAS)，$\overline{OD} = \overline{OE}$，O在$\overline{DE}$的中垂線上

4、 同理可證，O也在$\overline{EF}$、$\overline{DF}$的中垂線上，故O為ΔDEF 的外心

由此可知，ΔABC與ΔDEF 共用外心



【圖十五】

(二) 證明：A、B、C、D、E、F共圓

1、 這裡先用到前面第十五頁**【小結十二】內心的外心三角形的垂心是原三角形的內心**中的性質：$B-I-E$與$C-I-F$會共線

由於$\overline{AI}\perp\overline{EF}$(中垂線)，故四邊形AFIE為箏形，$\angle FIE=\angle FAE$。

2、 $\angle FDE=180^{\circ}-\angle BIC=180^{\circ}-\angle FIE=180^{\circ}-\angle FAE$。

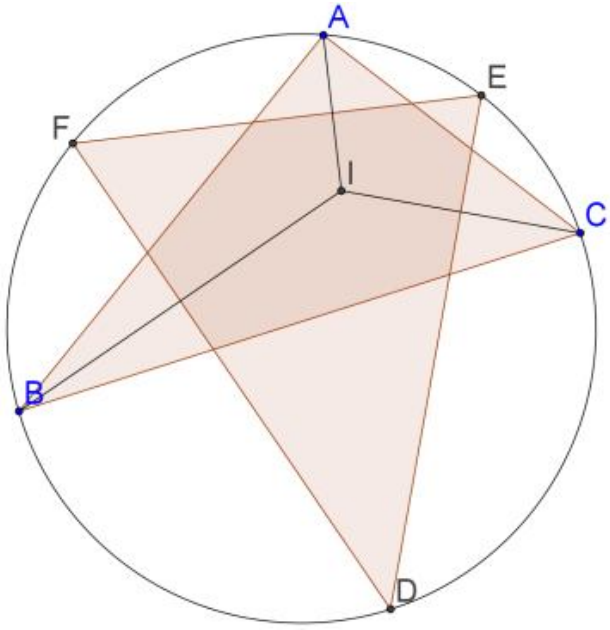
3、 四邊形AFDE內，$\angle FAE+\angle FDE=\angle FAE+180^{\circ}-\angle FAE=180^{\circ}$，對角互補，故四邊形AFDE為圓內接四邊形。

4、 同理可證，四邊形BDEF與四邊形CEFD也為圓內接四邊形，故A、B、C、D、E、F六點共圓。

【小結十三】內心的外心三角形的外心是原三角形的外心，且原三角形與內心的外心三角形頂點共圓。

十、共圓關係的深入討論：

在**【小結十三】原三角形與其內心的外心三角形共圓**的推導中，可知不停作其內心的外心三角形，其所得三角形都會共圓，因此我們想研究這一系列的三角形：



【圖十六】

(一)由遞迴式討論三角形的角度：

從先前證明中可知：I為△ ABC的內心，△ DEF為外心三角形且由先前的推導可知

$$\angle D = 90^{\circ} - \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C$$

為研究方便，我們將原三角形定義為△ $A_0\,B_0C_0$，設$\angle A_0 = \alpha$、$\angle B_0 = \beta$、$\angle C_0 = \gamma$，△ $A_n\,B_nC_n$為作 n 次內心的外心三角形。

設$\angle A_0 = a_n \times \alpha + b_n \times \beta + c_n \times \gamma$我們將其一連串生成的三角形角度寫成一個數列的話可得下表

	a_n	b_n	c_n
$\angle A_0$	1	0	0
$\angle A_1$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\angle A_2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\angle A_3$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
$\angle A_4$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$

將「α的係數」表成一個數列稱之為數列$\{a_n\}$，則我們發現恆有$2a_{n+1} = 1 - a_n$，利用此關係

式可推得此數列的一般項：$a_{n+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}$，$n\geq 0$ 且 $n\epsilon N$，同理推得$\{b_n\}$及$\{c_n\}$的一般項：

$b_{n+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，$n\geq 0$ 且 $n\epsilon\mathbb{N}$， $c_{n+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，$n\geq 0$ 且 $n\epsilon\mathbb{N}$

由此可知$\angle A_n=a_n\times\alpha+b_n\times\beta+c_n\times\gamma$ 且$\lim_{n\to\infty}\angle A_n=\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)=60°$

同理可證 n趨近於無限大時，$\angle A=\angle B=\angle C=60^{\circ}$，$\triangle ABC$ 為正三角形。

(二) 利用三角學證明面積嚴格遞增：

由於此一系列的三角形皆共用外接圓，由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$與三角形面積公式$\Delta=\frac{abc}{4R}$可知三角形面積$\Delta=2R^2\sin A\sin B\sin C$，因此原三角形$\Delta ABC$和新產生的三角形$\Delta A'B'C'$的面積關係為：

$$\frac{\Delta A'B'C'\text{面積}}{\Delta ABC\text{ 面積}}=\frac{\left(\sin\frac{A+B}{2}\right)\left(\sin\frac{B+C}{2}\right)\left(\sin\frac{C+A}{2}\right)}{\sin A\sin B\sin C}=\frac{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin A\sin B\sin C}=\frac{1}{8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

再利用半周長s, a, b, c的半角關係，可得$\frac{abc}{8(s-a)(s-b)(s-c)}$

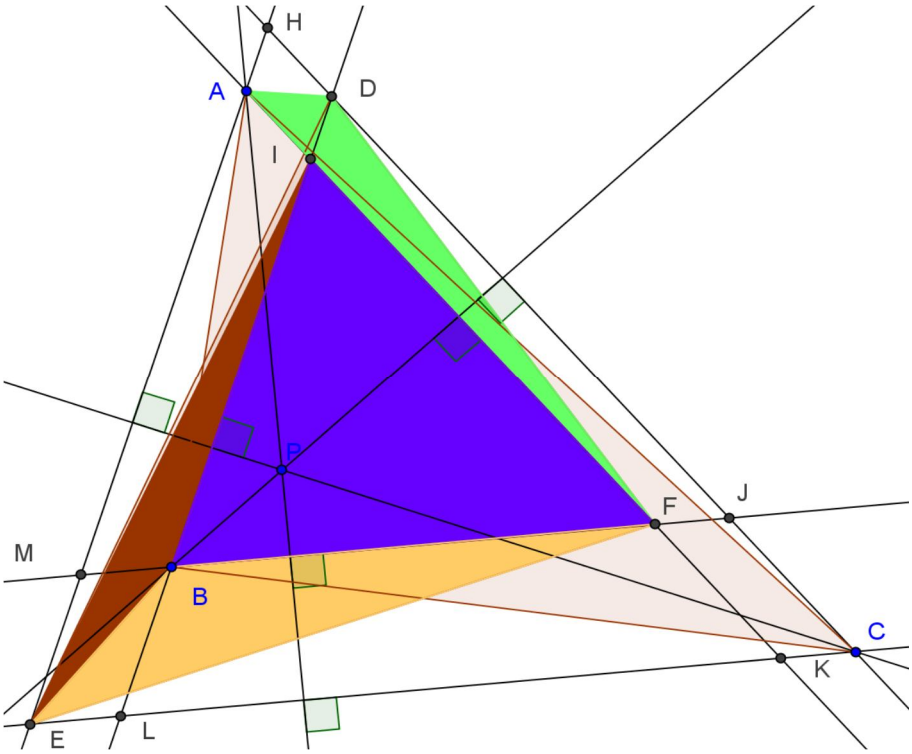
再利用算幾不等式可知：

$$2b=(a+b-c)+(b+c-a)\geq 2\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}$$
$$2c=(b+c-a)+(c+a-b)\geq 2\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}$$
$$2a=(c+a-b)+(a+b-c)\geq 2\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}$$

三式相乘即得$\frac{abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}\geq 1$

因此$\frac{\Delta A'B'C'}{\Delta ABC}\geq 1$ 表示面積遞增，又由角度的遞迴式可知，形狀會趨於正三角形。不停作其內心的外心三角形時，且面積會嚴格遞增，最後形狀會趨近正三角形，其面積為$\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$。

十一、P點為原三角形 △ ABC內外任意一點，特定點選垂心，則 △ ABC 與 △ DEF 面積相等



【圖十七】

證明分兩部分，P在內部及P在外部的情形，為方便起見，在求垂心時，不以ΔABC的邊當底邊作高求垂心。如在作ΔPBC的垂心時，分別作B、C在底邊 $\overline{PC}$ 、 $\overline{PB}$ 的高，交於垂心D

(一) 【證明】P在內部，參考【圖十七】

1、 考慮頂點輪換，故在不失一般性的情形下只證明其中一種形式

2、 ΔABC

=ΔBIA+ΔACF+ΔBIF+ΔBCF(將ΔABC分成四個三角形)

=ΔBIE($\overline{AE}$平行$\overline{IB}$)+ ΔADF($\overline{CD}$平行$\overline{AF}$)+ ΔBIF+ΔBEF($\overline{CE}$平行$\overline{BF}$)

3、 ΔDEF

=ΔBDE+ΔDFI+ΔBIF+ΔBEF

=(ΔBIE+ΔIDE)+ ΔDFI+ΔBIF+ΔBEF

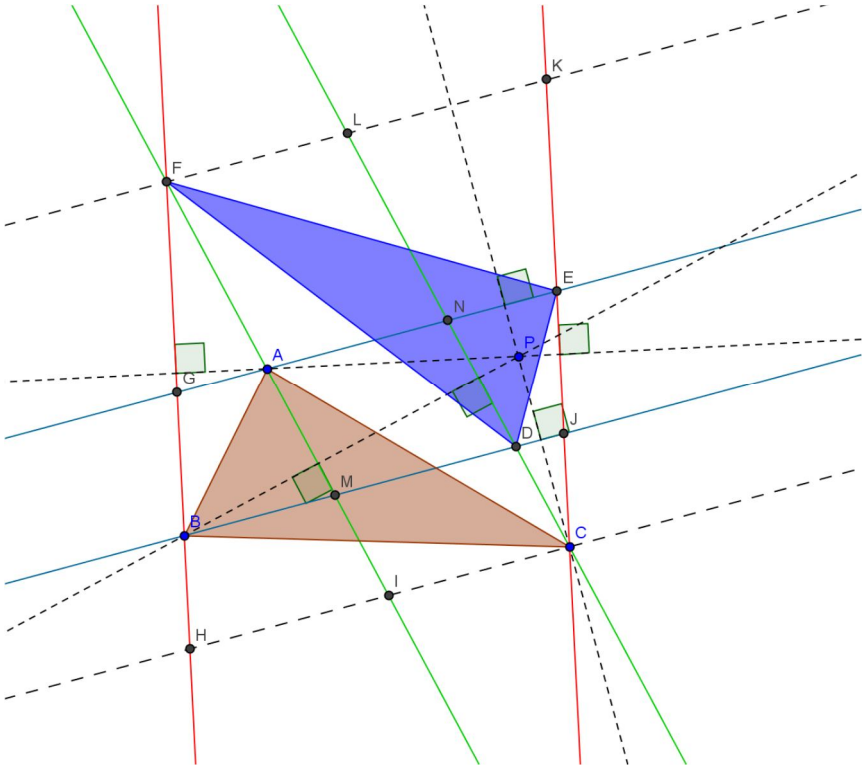
=ΔBIE+ΔIDA+ΔDFI+ΔBIF+ΔBEF

=ΔBIE+(ΔIDA+ΔDFI)+ ΔBIF+ΔBEF

=ΔBIE+ΔADF+ΔBIF+ΔBEF=ΔABC

4、 故當P在內部時，△ ABC 與 △ DEF 面積相等

(二) 【證明】P在外部，參考【圖十八】

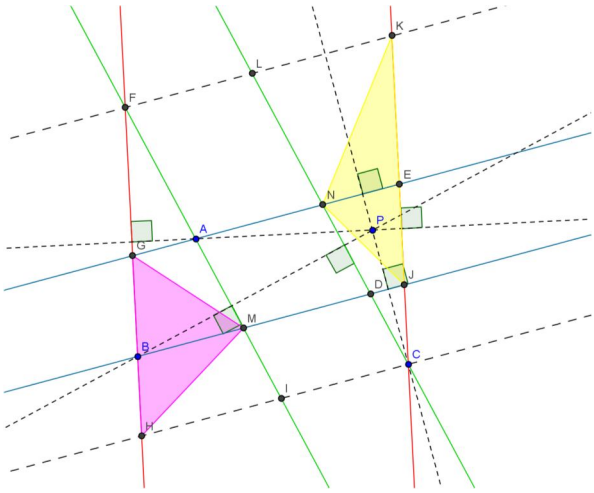


【圖十八】

1、 ΔABC
=ΔMBA+ΔMBC+ΔMAC
=ΔMBG+ΔMBH+ΔMAD
=ΔMGH+ΔMAD

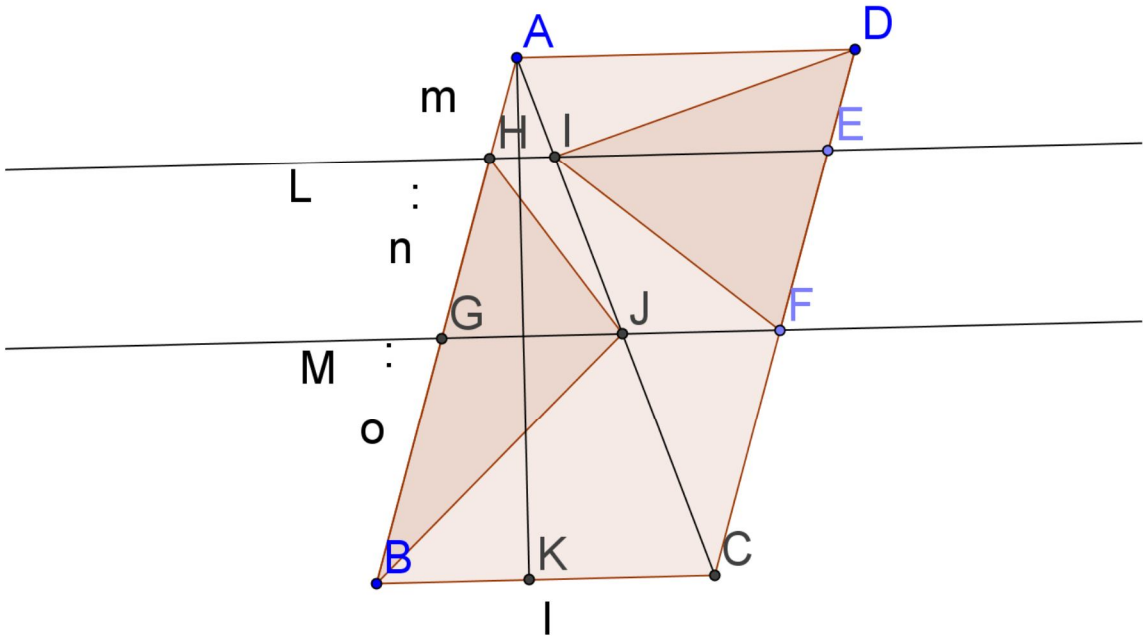
2、 ΔDEF
=ΔNED+ΔNEF+ΔNDF
=ΔNEJ+ΔNEK+ΔNDA
=ΔNJK+ΔNDA

3、 由於藍、綠兩組平行線形成平行四邊形，ΔMAD=ΔNDA，剩下要證明ΔMGH=ΔNJK



【圖十九】

4、 事實上可以將ΔFHI 和ΔCKL合起來形成平行四邊形，原題即等價證明：一平行四邊形ＡＢＣＤ被兩平行於其中一組對邊的直線L、M相交另一組對邊於E、F、G、H，交對邊於I、J，試證：
ΔBHJ與ΔDFI面積相等



【圖二十】

5、 設$\overline{AH}:\overline{HG}:\overline{GB}=\overline{DE}:\overline{EF}:\overline{FC}=m:n:o$，$\overline{BC}=l$，$\overline{AK}=h$

6、 ΔBHJ

$$=\frac{1}{2}\overline{GJ}\times\frac{n+o}{m+n+o}h=\frac{1}{2}\frac{m+n}{m+n+o}l\times\frac{n+o}{m+n+o}h$$

7、 ΔDFI

$$=\frac{1}{2}\overline{IE}\times\frac{m+n}{m+n+o}h=\frac{1}{2}\frac{n+o}{m+n+o}l\times\frac{n+o}{m+n+o}h=\Delta BHJ\text{得證}$$

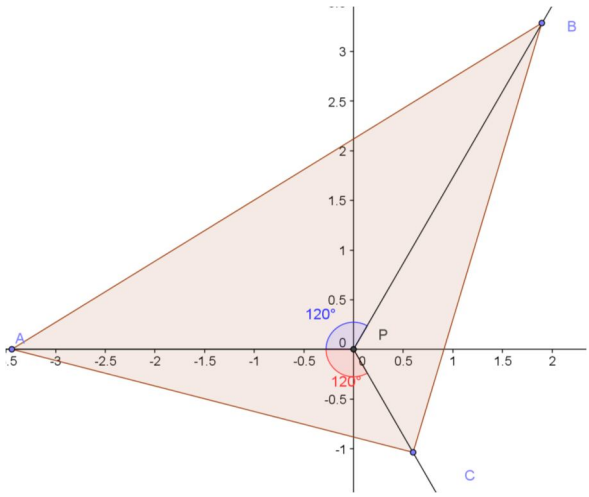
8、 故當P在外部時，**△ ABC與 △ DEF面積相等**

(三) 綜合以上兩點，P點為平面上的一點，特定點選垂心，若其垂心三角形存在則△ ABC 與 △ DEF 面積相等，得證。

【小結十四】平面上任一點的垂心三角形與原三角形面積相等

在這裡討論一個比較特別的點：費馬點。費馬點的定義為「三角形內含周界，到三頂點距離和最小的點」，其中它有一個比較特別的性質，即當三角形三內角皆小於120°時，費馬點與三頂點連線形成的線段，皆夾120°；當三角形三內角有一內角大於等於120°時，費馬點即為該內角的頂點。故利用前項的特殊性質，再加以用解析幾何的方法，得到了下一個特別的性質。

十二、特殊點P為原三角形△ ABC 之費馬點，特定點選垂心，△ DEF費馬點的垂心三角形，則P 點為 △ DEF 的重心



【圖二十一】

證明：

如圖，設$A(-a,0)$、$B(b,\sqrt{3}b)$、$C(c,-\sqrt{3}c)$，其中 a、b、c ≥ 0，則 P(0,0) 為 △ ABC 之費馬點。

1. △ PAB 之垂心$\begin{cases} x=b \\ y=-\frac{a+b}{\sqrt{3}b}x \end{cases}$，得$H_{PAB}\left(b,-\frac{a+b}{\sqrt{3}}\right)$

   △ PAC 之垂心$\begin{cases} x=c \\ y=\frac{a+c}{\sqrt{3}c}x \end{cases}$，得$H_{PAC}\left(c,\frac{a+c}{\sqrt{3}}\right)$

   △ PBC 之垂心$\begin{cases} y+\sqrt{3}c=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-c) \\ y-\sqrt{3}b=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-b) \end{cases}$，得$H_{PBC}\left(-b-c,\frac{b-c}{\sqrt{3}}\right)$

2. $\overrightarrow{PH_{PAB}}+\overrightarrow{PH_{PAB}}+\overrightarrow{PH_{PAB}}=\left(b+c-b-c,-\frac{a+b}{\sqrt{3}}+\frac{a+c}{\sqrt{3}}+\frac{b-c}{\sqrt{3}}\right)=\vec{0}$

   由重心至三頂點向量和 = 0 之性質得 P 為 △ $H_{PAB}H_{PAC}H_{PBC}$之重心

【小結十五】原三角形三內角皆小於120°時，費馬的垂心三角形的重心是原三角形的費馬點

伍、 研究結果

一、經過前面的論證，彙整研究結果如下：

(一) 原三角形與特殊點之特定點三角形有共圓關係：

內心的外心三角形與原三角形

且這一系列的三角形面積遞增而收斂至$\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$，形狀最後會趨近於正三角形。

(二) 原三角形與特殊點之特定點三角形共用尤拉線與九點圓圓心的有：

1、垂心的重心三角形與原三角形共用九點圓圓心

2、垂心的外心三角形與原三角形共用九點圓圓心 (且共用九點圓)

(三) 原三角形與特殊點之特定點三角形全等的是：

1、垂心的垂心三角形與原三角形 (頂點與原三角形重合)

2、垂心的外心三角形與原三角形

(以原三角形的九點圓圓心(外心及垂心的中點)旋轉180°)

(四) 原三角形與特殊點之特定點三角形相似的是：

三角形任意點的重心三角形與原三角形 (縮放$\frac{1}{3}$倍)

(五) 原三角形與特殊點之特定點三角形等面積的是：

三角形任意點的垂心三角形與原三角形等面積

(六) 心和心的對偶性有下列兩組：

1、垂心的外心三角形的外心是原三角形的垂心

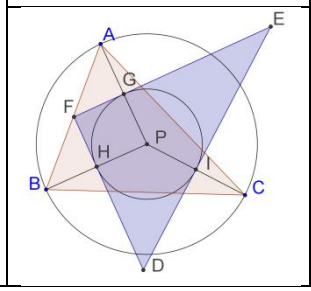
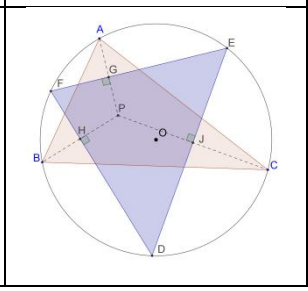
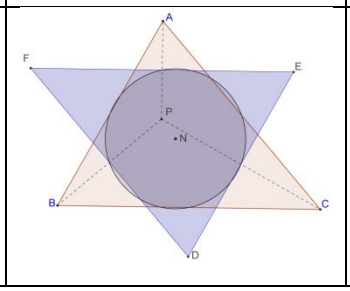
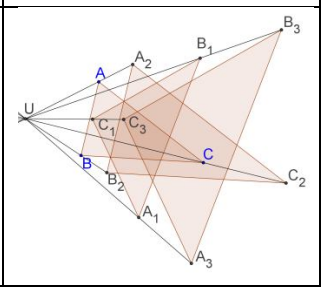
2、垂心的外心三角形的垂心是原三角形的外心

(七) 任一點成立的性質有：

1、任意點的垂心三角形的等積性質

2、任意點的重心三角形與原三角形相似且面積為原三角形的$\frac{1}{9}$倍

二、外心三角形系列

	外心的外心三角形	內心的外心三角形	垂心的外心三角形	重心的外心三角形
性質	1. △DEF的內切圓與△ABC的外接圓共用圓心	1. 共用外接圓	1. △DEF與△ABC的外心和垂心位置互換 2. 共用尤拉線 3. 共用九點圓	1. 有隔代遺傳的味道
新舊面積關係與例圖	△ABC的面積比△DEF的面積為$\lvert 8\cos A\cos B\cos C\rvert$	疊代時面積遞增，其最大值發生於正三角形	△DEF與△ABC全等面積相等	疊代時以相同倍率k遞增
				

三、　從心的對應觀點，將研究結果彙整如下表：

特殊點	特定點	結果	與原三角形全等或相似	面積關係
外心	外心	外心的外心三角形的內心是原三角形的外心	無	
	重心	外心的重心三角形的外心是原三角形的重心 外心的重心三角形的垂心是原三角形的外心	相似	$\frac{1}{9}$倍
	垂心		無	等積
內心	外心	內心的外心三角形的外心是原三角形的外心 內心的外心三角形的垂心是原三角形的內心	無	
	重心	內心的重心三角形的內心是原三角形的重心	相似	$\frac{1}{9}$倍
	垂心		無	等積
重心	外心	重心的外心三角形的重心是原三角形的外心	無	
	重心	重心的重心三角形的重心是原三角形的重心	相似	$\frac{1}{9}$倍
	垂心	重心的垂心三角形的重心是原三角形的垂心	無	等積
垂心	外心	垂心的外心三角形的外心是原三角形的垂心 垂心的外心三角形的垂心是原三角形的外心	全等	
	重心	垂心的重心三角形的垂心是原三角形的重心	相似	$\frac{1}{9}$倍
	垂心	垂心的垂心三角形即原三角形	全等	等積
費馬點	垂心	費馬點的垂心三角形的心是原三角形的重心	無	等積

彙整研究結果，聚焦於下列幾個議題：

（一）垂心的外心三角形ΔDEF與原三角形ΔABC有全等關係，兩三角形的外心與垂心互換，並以九點圓圓心做為鏡射中心且共用九點圓。

（二）內心的外心三角形ΔDEF 與原三角形共圓，如果對三角形重複做內心的外心三角形，其面積嚴格遞增且其極限值發生於正三角形。

（三）平面中不為邊上任一點的垂心三角形與原三角形面積相等。

陸、　討論

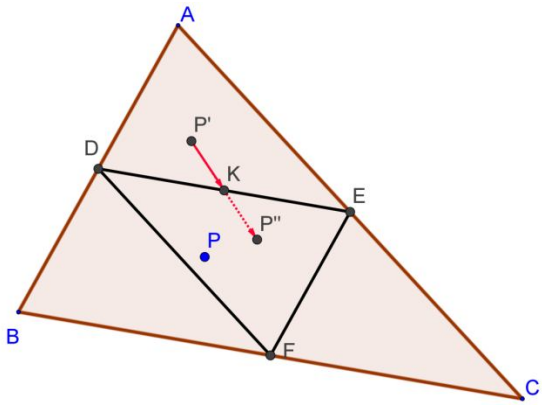
由研究結果的表觀察，發現「X心的重心三角形的X心是原三角形的重心」的性質在特殊點為內、外、重、垂心時皆成立，猜測為一般性的結果。

要推導到一般性的結果，我們先引入兩個引理：

(1)　任意點的重心三角形縮小性質：

由前面提到「重心的重心三角形」所推廣得到的結果，我們可知：任意點P的重心三角形是由P為縮放中心將中點所連成的三角形往P點的方向縮為$\frac{2}{3}$。

(2)　中點三角形心的位置：



【圖二十二】

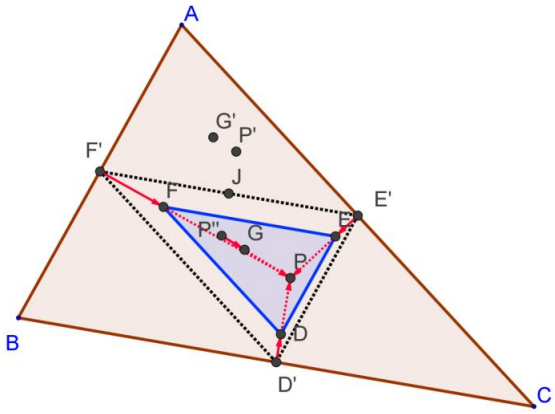
將ΔABC三邊上的中點 D、E、F連起來，我們可以得到四個全等的三角形：ΔADE、ΔFED、ΔDBF、ΔEFC，我們這裡所要探討的是，給定ΔABC內部的特殊點P，我們想要以縮放、旋轉、鏡射的觀點來討論P在ΔADE、ΔFED的位置。在【圖二十二】中我們可以得到:

P′為P在ΔADE的位置，其作法為以A為縮放中心將P往A的方向縮 $\frac{1}{2}$。

P"為P在ΔFED的位置，其作法為以$\overline{DE}$的中點K為旋轉中心將P′旋轉180°。

由以上兩個引理我們可以推導出「X心的重心三角形的X心是原三角形的重心」的一般性結果，我們的證明如下：

我們先說明外心的情形，進而推廣到對外內重垂心皆成立。



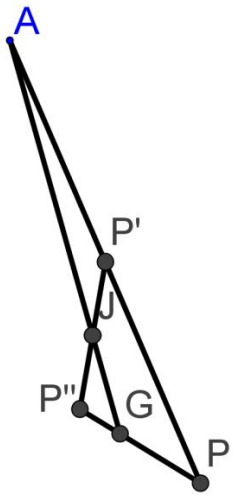
【圖二十三】

1、 P 是ΔABC的外心，G是ΔABC的重心，D、E、F分別為$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$中點。

由前面引理(1)的結果，我們知道ΔD′E′F′是以P為縮放中心縮為$\frac{2}{3}$，如此可得外心的重心三角形ΔDEF。

2、 再由引理(2)的結果，經過伸縮變換找出P、G在ΔADE相對應的位置 P′、G′，在經過旋轉變換找出P、G在ΔDEF相對應的位置 P”、G” (由重心的重心三角形的結果可知，G” = G)。

3、 當我們將ΔD′E′F′以P為縮放中心縮為$\frac{2}{3}$時，其內部每一點也會以相同的形式往內縮，因此ΔDEF的特殊點P”也會往P的方向縮$\frac{2}{3}$，也就是要證明P”經過縮$\frac{2}{3}$的變換之後將變換至G點，因此我們引入孟氏定理來計算其線段比例。



【圖二十四】

將某些重要的點畫出來【圖二十四】，由孟氏定理可知：

$$\frac{\overline{AP'}}{\overline{P'P}} \times \frac{\overline{PP''}}{\overline{P''G}} \times \frac{\overline{GJ}}{\overline{JA}} = 1$$

$$\frac{1}{1} \times \frac{\overline{PP''}}{\overline{P''G}} \times \frac{3}{1} = 1$$

$$\therefore \frac{\overline{PP''}}{\overline{P''G}} = \frac{1}{3}$$

如此我們證明了ΔDEF的外心為ΔABC的重心。

由推導的過程中，我們可知無論P為任一特殊點，我們都可以以相同的推導方式證明，因此「X心的重心三角形的X心是原三角形的重心」成立。

柒、　結論與未來展望

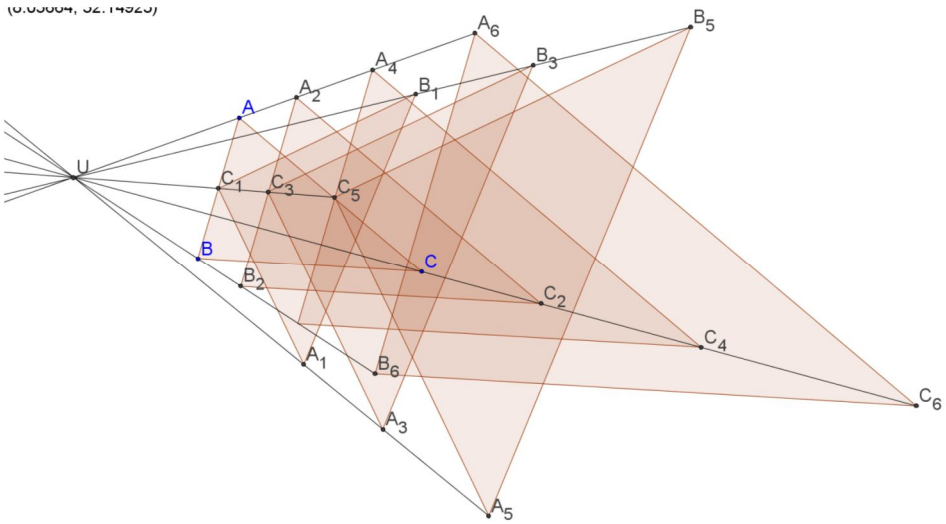
由前面研究結果可知，除了一般性的結果，如垂心三角形會與原三角形等面積、「X心的重心三角形的X心是原三角形的重心」，有關特定點為內心時，並沒有特殊的發現，接下來希望能從角平分線的性質再做更深入的探討。

從前面研究結果的表格可知，並非每一種組合都有特別的結果，像是內心的部分；再加上表格上所發現的性質大多是利用數學繪圖軟體一個一個作圖，量化它的角度、面積，再計算比值，得到一些特別的性質最後再給予書面證明。假使今日無法使用如此方便的軟體，又要如何得到這些性質？所以我們下一步的研究就是想寫出內、外、重、垂心）的「構造方法」(如外心對應到中垂線、內心對應到角平分線，角度的遞移等等)，希望能找出將這些性質組合後，能夠不需畫圖就能預測將會出現的性質、三角形的形狀，這將有助於我們找出表格空缺的答案，希望這在將來能帶來更多的突破！

此外，在研究完一對一的圖形，我們進一步以原三角形重複做一個動作(例如重複做重心的外心三角形，見下圖)，我們發現這種經過「疊代」的圖形，可能會出現有面積有極值或是隔代相似（如疊代兩次相似）的特殊情況，在我們接續的方向中，我們想要討論疊代時，新三角形與原三角形：

(1)是否會收斂 (2)是否會全等 (3)是否會相似(4)面積的變化關係

下圖為原三角形$\triangle ABC$重複做重心的外心三角形，得到$\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$，這部份我們觀察到它的面積是以相同倍數遞增，並以一定點U點向外發散，而且還具有**隔代遺傳**的特殊性質，其疊代奇數次的三角形、疊偶數次的三角形與原三角形兩組各自會相似，我們希望接下來的時間能夠把他研究完，這樣搭配上外心的外心三角形、內心的外心三角形及重心的外心三角形就能對特定點為外心的研究作一個完整的解釋。



【圖二十五】

目前我們已經把特殊點為四心特定點為外心的研究作一個整理，我們期望接下來可以推廣到任意點的外心三角形並討論它的性質。除此之外，我們將對特定點為垂心的部分做討論與比較，並像特定點為外心時一樣探討他的「相同處」與「不同處」。最後，我們希望能「重複一種動作」的疊代，推廣成「重複做兩個動作」的疊代(如重複先做外心的垂心三角形再做垂心的外心三角形)或是更複雜的疊代，並試著找出其規律或通式。而終極目標是將平面的三角形換成空間中的三角錐，尋找它能夠唯一決定的點，觀察其性質。

【評語】040410

本科展作品探討一平面幾何的問題，作者們利用數學軟體去找尋一些特殊點的特定點三角形的關係。並利用三角函數去算出其邊，角與面積關係。最後，再探討其疊代後的極限性質。此作品為一古典平面幾何課題，內容豐富及論証嚴謹。但在創新部份，若能加強，則更加完善。

捌、　參考資料及其他

一、中華民國第四十六屆中小學科學展覽會，國中部數學組，內心、垂心、外心是三位循環節的循環小數？

二、98年能力競賽（第三區）

三、Orthocentric system ，http://en.wikipedia.org/wiki/Orthocentric_system

四、Orthocentric system ，http://mathworld.wolfram.com/OrthocentricSystem.html

【評語】040410

本科展作品探討一平面幾何的問題，作者們利用數學軟體去找尋一些特殊點的特定點三角形的關係。並利用三角函數去算出其邊，角與面積關係。最後，再探討其疊代後的極限性質。此作品為一古典平面幾何課題，內容豐富及論証嚴謹。但在創新部份，若能加強，則更加完善。