中華民國第52屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

佳作

040409

萬花筒－正三角鏡

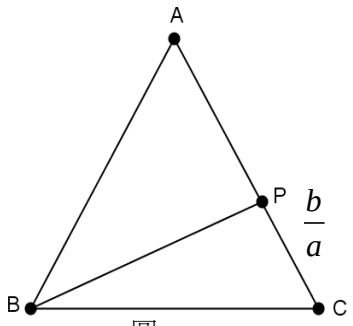
學校名稱：國立彰化高級中學

作者：	指導老師：
高二 洪宇陽 高二 林耀廷 高二 黃泊羲	林漢良

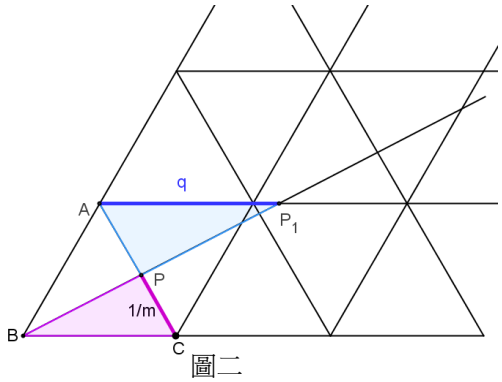
關鍵詞：同餘、稠密性、反射

摘要

問題與想法：邊長 1 的正三角鏡 ABC 中，光由原點 B 射到 $\overline{CA}$ 上一點 P(圖一)，再依反射定律繼續反射下去，我們想探討：是否能回到原點 B？而若回到原點 B，所走路徑及反射次數可找到通式？考慮圖二探討此問題。圖二中的每一頂點都對應△ABC 中每一頂點。



圖一

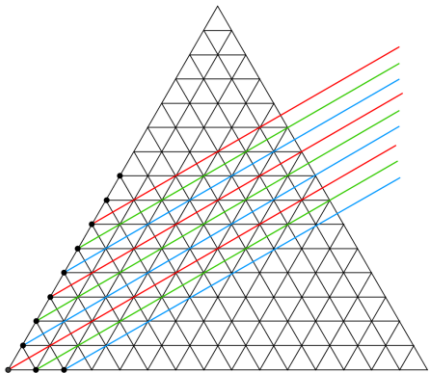


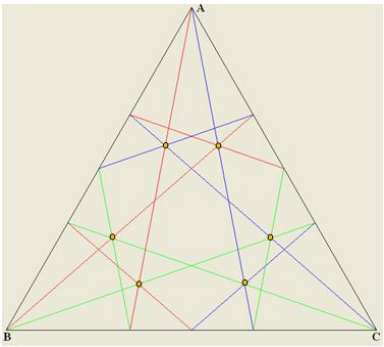
圖二

主要結論：我們算出每一反射點在圖二中的座標得以下結論：

(1) $\overline{CP}$ **爲有理數時，** $\overline{CP}=\frac{b}{a},(a,b)=1,a,b\in N$ ，導出第一個相交頂點在展開圖的座標爲 $(a-b,b)$ 。再利用展開圖中，同名點構成的直線特徵(如圖三)得：**由 B 射出光時，會返回原點 B。並知反射後回到 B 所需的次數與路徑可由 a、b 決定，公式如下：**

$$\begin{cases} \text{若}a+b\equiv 0\,(\text{mod}3)\text{，次數爲 }2(a-1)\text{次，路徑爲 B}\to\text{B} \\ \text{若}a+b\equiv 1\,(\text{mod}3)\text{，次數爲 }6(a-1)\text{次，路徑爲 B}\to\text{C}\to\text{A}\to\text{B} \\ \text{若}a+b\equiv 2\,(\text{mod}3)\text{，次數爲 }6(a-1)\text{次，路徑爲 B}\to\text{A}\to\text{C}\to\text{B} \end{cases}$$


圖三

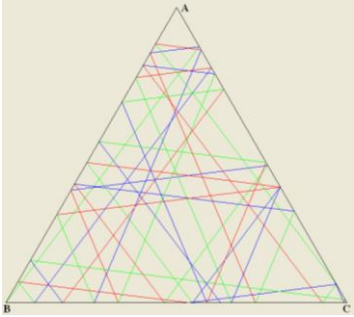


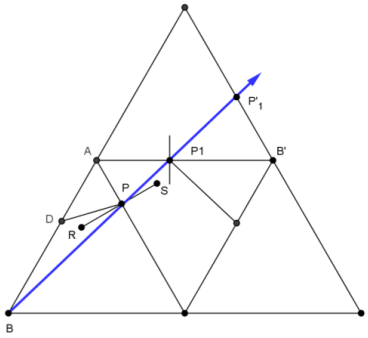
圖四

(2) **當** $\overline{CP}$ **爲無理數時，我們得到由 B 射出的光線不會返回 B。且所有無窮多的反射點，在邊上的分布具有稠密性。**

壹、研究動機

有天老師上數學課時，提到直線的鏡射，我們靈機一動，想到了正三角鏡的萬花筒。在三角鏡中以一頂點爲光源向對邊發射，使其在內部不斷地反射（如圖 1）。以邊爲對稱軸，將三角鏡無限翻轉（如圖 2、圖 3）。可從這些無數的入射線、反射線都呈一直線地無限延伸。





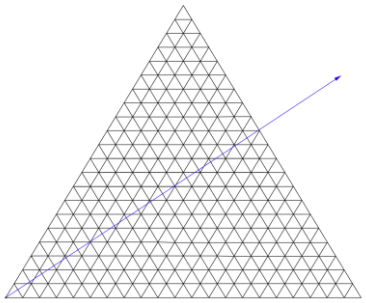


圖 1、三角鏡內的反射光　圖 2、入射線與反射線會共線　圖 3、展開圖

我們將研究光點是否會射回原點（光源），若會，則探討入射、反射的總次數是多少次?若不會反射回原點（光源），則探討光源打在邊上的這無數點的分布，在這邊上是否具有稠密性?

貳、研究目的

一、由原點 B 射到邊 $\overline{AC}$ 上一點 P，若 $\overline{CP}$ 長爲有理數（如圖 4），令 $\overline{CP}=\frac{b}{a},(a,b)=1,a,b\in N,0<\frac{1}{m}<1$，則

$$\begin{cases} \text{若 } a+b\equiv 0(\bmod 3)\text{，則射回原點 } B \text{ 所需總次數爲何？} \\ \text{若 } a+b\equiv 1(\bmod 3)\text{，則射回原點 } B \text{ 所需總次數爲何？} \\ \text{若 } a+b\equiv 2(\bmod 3)\text{，則射回原點 } B \text{ 所需總次數爲何} \end{cases}$$

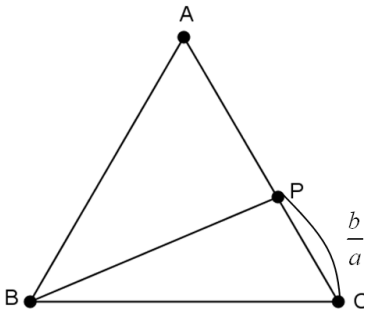


圖 4、由原點 B 射出光線

二、由原點 B 射到對邊 $\overline{AC}$ 上一點 P，若 $\overline{CP}$ 長爲無理數，則它經過無窮多次的入射、反射，都無法回到三頂點，欲探討射在每一邊上的這些無窮多點，在邊上的分布是否具有**稠密性**？（如圖 5）。

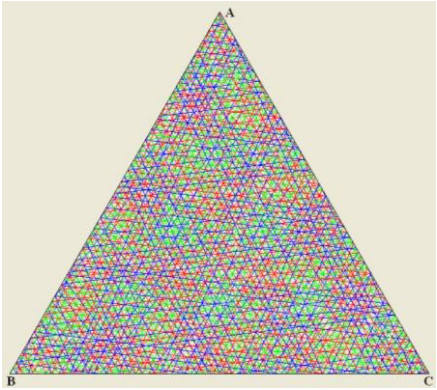


圖 5、以 $\overline{CP}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 爲例，反射多次皆無法回到原點

參、研究器材

紙、筆、電腦、Geogebra 繪圖軟體、Visual Basic

肆、研究方法

一、入射線與反射線經邊對稱之後成一直線

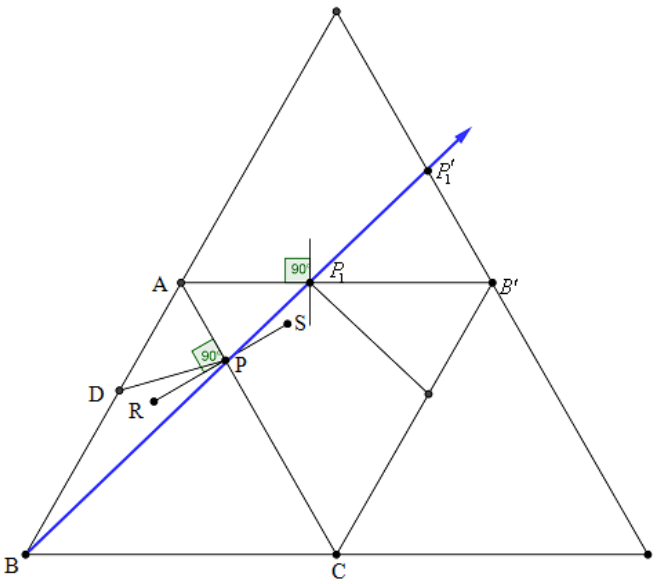


圖 6

<證明>

如圖 6 所示，△ABC 爲正三角形，B 點爲其光源，

光線射向反射面 $\overline{AC}$ 交於 P ，反射至 $\overline{AB}$ 交於 D，

$\overleftrightarrow{RS}$ 爲反射線中過 P 的法線，即 $\overleftrightarrow{RS} \perp \overline{AC}$ 。

設入射角 $\angle BPR$ 爲 θ，

$\because$ 入射角＝反射角　$\therefore \angle BPR = \angle RPD = \theta$

以 $\overline{AC}$ 爲軸作翻轉：△ ABC 得△ $AB'C$ ，△ APD 得△ APP_1 ，反射線 $\overline{BP}$ 得 $\overline{PP_1}$ ，

$\rightarrow \triangle APD \cong \triangle APP_1 \rightarrow \angle APD = \angle APP_1 = 90^\circ - \theta$

$\rightarrow \angle BPP_1 = \angle APD + \angle APP_1 + \angle RPD + \angle BPR = 2(90^\circ - \theta) + 2\theta = 180^\circ$

故得 $B - P - P_1$ 共線.。

可知入射線 $\overrightarrow{BP}$ 與以反射面爲軸將反射線 $\overline{BP}$ 翻轉所得 $\overline{PP_1}$ 共線，

同理，入射線 $\overline{PP_1}$ 以反射面爲軸將反射線翻轉所得 $\overline{P_1P_1'}$ 共線，

由此可推，原入射線 $\overline{BP}$ 將可與反射線經邊對稱後呈一直線。

二、展開圖坐標化

（一）建立坐標系

以 B 爲原點，$\overline{BC}$ 、$\overline{BA}$ 爲單位長度，以 $\overline{BC}$ 爲 x 軸正向、以 $\overline{BA}$ 爲 y 軸正向，且 $\angle ABC = 60^\circ$ ，令 x 軸爲 L_0 ，與 x 軸平行的直線依序爲 L_1 、L_2 、L_3 ……，令 y 軸爲 L_0' ，與 y 軸平行的直線依序爲 L_1' 、L_2' 、L_3' ……，且 $\overline{L_nL_{n+1}}$ 和 $\overline{L_n'L_{n+1}'}$ 的長度均爲一單位長度（如圖 7）。

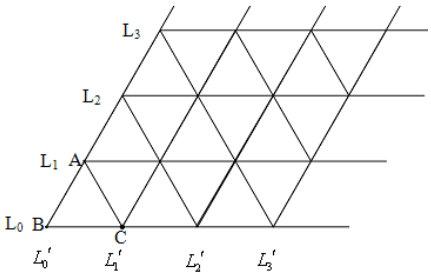


圖 7

（二）光線與三角鏡交點坐標的一般化

1. 橫軸交點的坐標爲 $P_n(nq,n)$

(1) 設 $0<\overline{AP_1}=q$（如圖 8），令 P_n 爲入射線 L 與 L_n 的交點（$n=1,2,3,\ldots$）

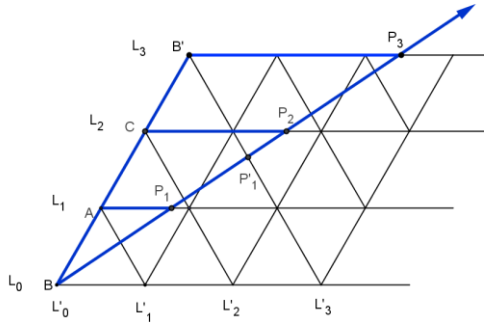


圖 8

(2) 由圖 9

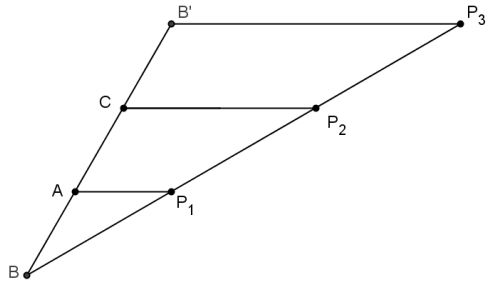


圖 9

【說明】在△ BAP_1 與△ BCP_2 中　$\because L_1 // L_2$　$\therefore$△ BAP_1 ～△ BCP_2

對應邊成比例得 $\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{AP_1}}{\overline{CP_2}}\Rightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{q}{\overline{CP_2}}\Rightarrow\overline{CP_2}=2q$

$\therefore P_2$ 的 x 坐標爲 $\overline{CP_2}$ 的長度 $2q$

同理，在△ BAP_1 與△ $BB'P_3$ 中 $\because L_1 // L_2$　$\therefore$△ BAP_1 ～△ $BB'P_3$

對應邊成比例得 $\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BB'}}=\dfrac{\overline{AP_1}}{\overline{BP_3}}\Rightarrow\dfrac{1}{3}=\dfrac{q}{\overline{B'P_3}}\Rightarrow\overline{B'P_3}=3q$

$\therefore P_3$ 的 x 坐標爲 $\overline{B'P_3}$ 的長度 $3q$

(3) P_4 的 x 坐標爲 $4q$，可歸納出 P_n 的 x 坐標爲 nq

$\rightarrow P_1(q,1),\ P_2(2q,2),\ P_3(3q,3)\ldots\boxed{P_n(nq,n)}$

2.縱軸交點坐標爲 $P_n'(n,\dfrac{n}{q})$

(1) 由圖 10

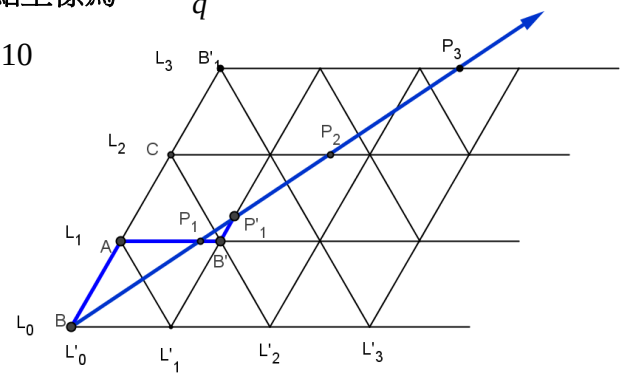
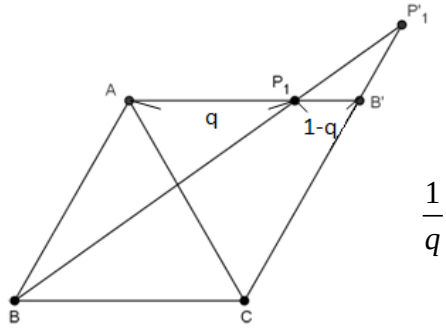


圖 10

令 P_n' 爲入射角線 L 與 L_n' 的交點（$n=1,2,3,\ldots$）

(2) 由圖 11



$\frac{1}{q}$

圖 11

【說明】在△ BP_1A 與△ $B'P_1P_1'$ 中

$\because L_0' // L_1'$ $\quad \therefore \triangle BP_1A \sim \triangle B'P_1P_1'$

對應邊成比例 $\frac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{P_1'B'}} \Rightarrow \frac{q}{1-q} = \frac{1}{\overline{P_1'B'}} \Rightarrow \overline{P_1'B'} = \frac{1-q}{q} = \frac{1}{q} - 1$

$\therefore P_1'$ 的 y 坐標爲 $\overline{CP_1'}$ 長＝ $\overline{CB'} + \overline{B'P_1'} = 1 + (\frac{1}{q} - 1) = \frac{1}{q}$

(3) 由圖 12

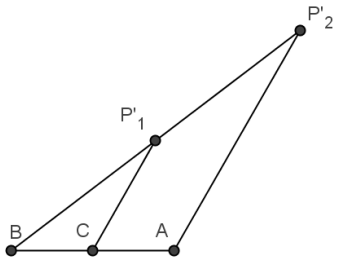


圖 12

【說明】在△ BCP_1' 與△ BAP_2' 中 $\quad \because L_1' // L_2' \quad \therefore \triangle BCP_1' \sim \triangle BAP_2'$

對應邊成比例得 $\overline{AP_2'} = 2\overline{CP_1'} = \frac{2}{q} \quad \therefore P_2'$ 的 y 坐標爲 $\overline{AP_2'}$ 長度 $\frac{2}{q}$

(4) P_3' 的 y 坐標爲 $\frac{3}{q}$ ，可歸納出 P_n' 的 y 坐標爲 $\frac{n}{q}$

$\rightarrow P_1'(1, \frac{1}{q}),\ P_2'(2, \frac{2}{q}),\ P_3'(3, \frac{3}{q}) \ldots \boxed{P_n'(n, \frac{n}{q})}$

3. 右斜線交點坐標爲 $P_n''\left(\frac{nq}{q+1}, \frac{n}{q+1}\right)$

入射線 L 與右斜線 L_1'' ， L_2'' ， $L_3'' \cdots$ ，

分別交 L 於 P_1'' ， P_2'' ， P_3'' （圖 13）

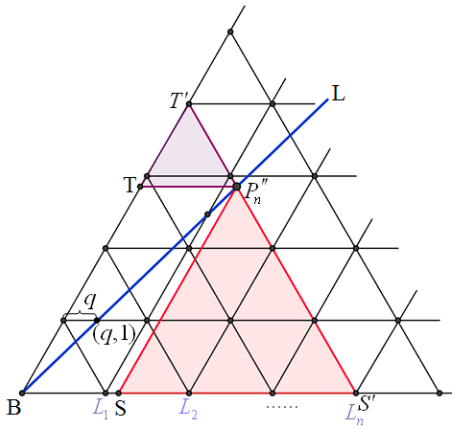


圖 13

證明：

$\because L$ 過 $(0,0)$ 和 $(q,1)$ 兩點 $\quad \therefore L: x - qy = 0 \quad$ 又 $L_n: x + y = n$

解 $\begin{cases} x - qy = 0 \\ x + y = n \end{cases}$ 得 $x = \frac{nq}{q+1},\ y = \frac{n}{q+1} \quad \therefore P_n''\left(\frac{nq}{q+1}, \frac{n}{q+1}\right)$

結論：

令 **q** 爲直線 **L** 與第一條橫線交點之 **x** 座標值，

則入射線 L 與平行橫軸($\overline{BC}$)的直線 L_n 的交點坐標 $P_n(nq,n)$

入射線 L 與平行縱軸($\overline{AB}$)的直線 L_n' 的交點坐標 $P_n'(n,\frac{n}{q})$

入射線 L 與平行右斜線($\overline{AC}$)的直線 L_n'' 的交點坐標 $P_n''\left(\frac{nq}{q+1},\frac{n}{q+1}\right)$

伍、研究過程

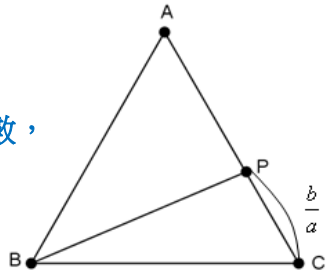


圖 14

一、由原點 **B** 射到對邊 $\overline{AC}$ 上一點 **P**，若 $\overline{CP}=\frac{b}{a}$，$(a,b)=1$爲有理數，

此時我們將探討由 **B** 點射出是否會返回原點 **B**？

若會，進而探討返回 **B** 所需反射的總次數是否有公式解？

（一）實驗範例

1. 分母爲 $a=3n-1$ （如圖 15）

$\overline{CP}$	n	（不經過 A、C 點，直接打回原點）B 點→B 點	打回原點 B 總需次數 $2\times(3n-2)$
1/2	1	2	2
1/5	2	8	8
1/8	3	14	14
1/11	4	20	20

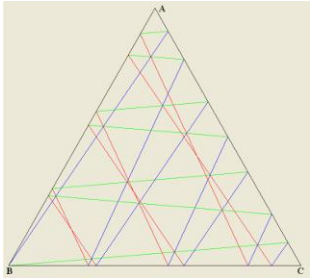


圖 15 $\overline{CP}=\frac{1}{11}$，總共打 20 次

2. 分母爲 $a=3n$ （如圖 16）

$\overline{CP}$	n	B 點→ C 點→ A 點→ B 點			打回原點 B 總需次數 2×(3n－1)×3
1/3	1	4	4	4	12
1/6	2	10	10	10	30
1/9	3	16	16	16	48

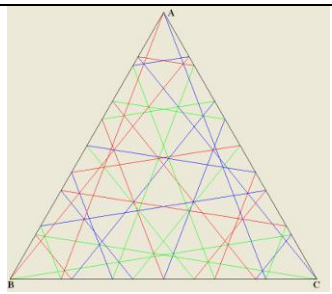


圖 16 $\overline{CP}=\frac{1}{6}$，總共打 30 次

3. 分母爲 $a=3n+1$（如圖 17）

$\overline{CP}$	n	B 點→ A 點→ C 點→ B 點			打回原點 B 總需次數 2×(3n)×3
1/4	1	6	6	6	18
1/7	2	12	12	12	36
1/10	3	18	18	18	54

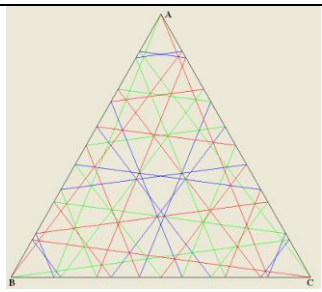


圖 17 $\overline{CP}=\frac{1}{7}$，總共打 36 次

（二） 證明過程：

若$\overline{CP}$爲有理數，必會反射回原點 B（取$\overline{CP}=\frac{1}{m}=\frac{b}{a}<1$）

證明：如圖 18，由△AP_1P～△CBP可知$\frac{1}{\frac{1}{m}}=\frac{q}{1-\frac{1}{m}}$，得$q=m-1=\frac{a}{b}-1$

入射線過$(0,0)$、$P_1(q,1)$，故方程式爲$y=\frac{x}{q}\Rightarrow x=qy=(\frac{a}{b}-1)y$

令光線碰到的第一個頂點(格子點)爲$((\frac{a}{b}-1)k,k)$

$\because k\in N$且$(\frac{a}{b}-1)k\in N\quad\therefore b|k$

$\because$要取第一個交點$\therefore$取k的最小值爲b，得第一個相交頂點爲$(a-b,b)$

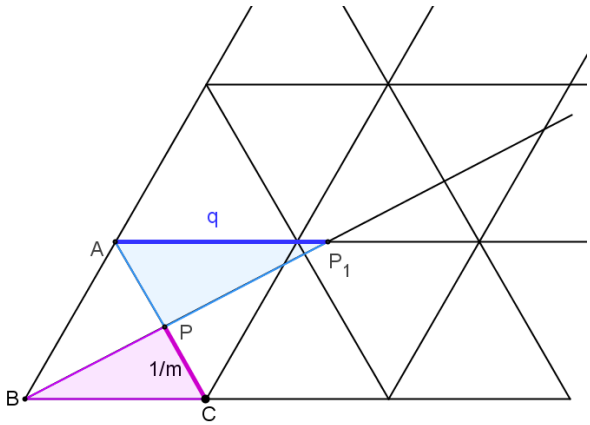


圖 18

（三）取$\overline{CP}=\frac{1}{m}=\frac{b}{a}<1$，反射後回到原點的坐標爲

$$\begin{cases}\text{若}a+b\equiv 0\pmod 3\text{，反射後回到原點}B\text{的座標爲}(a-b,b)\text{，且必不射至A,C點}\\ \text{若}a+b\equiv 1\pmod 3\text{，反射後回到原點}B\text{的座標爲}(3(a-b),3b)\\ \text{若}a+b\equiv 2\pmod 3\text{，反射後回到原點}B\text{的座標爲}(3(a-b),3b)\end{cases}$$

1. 探討同名點所構成直線特徵

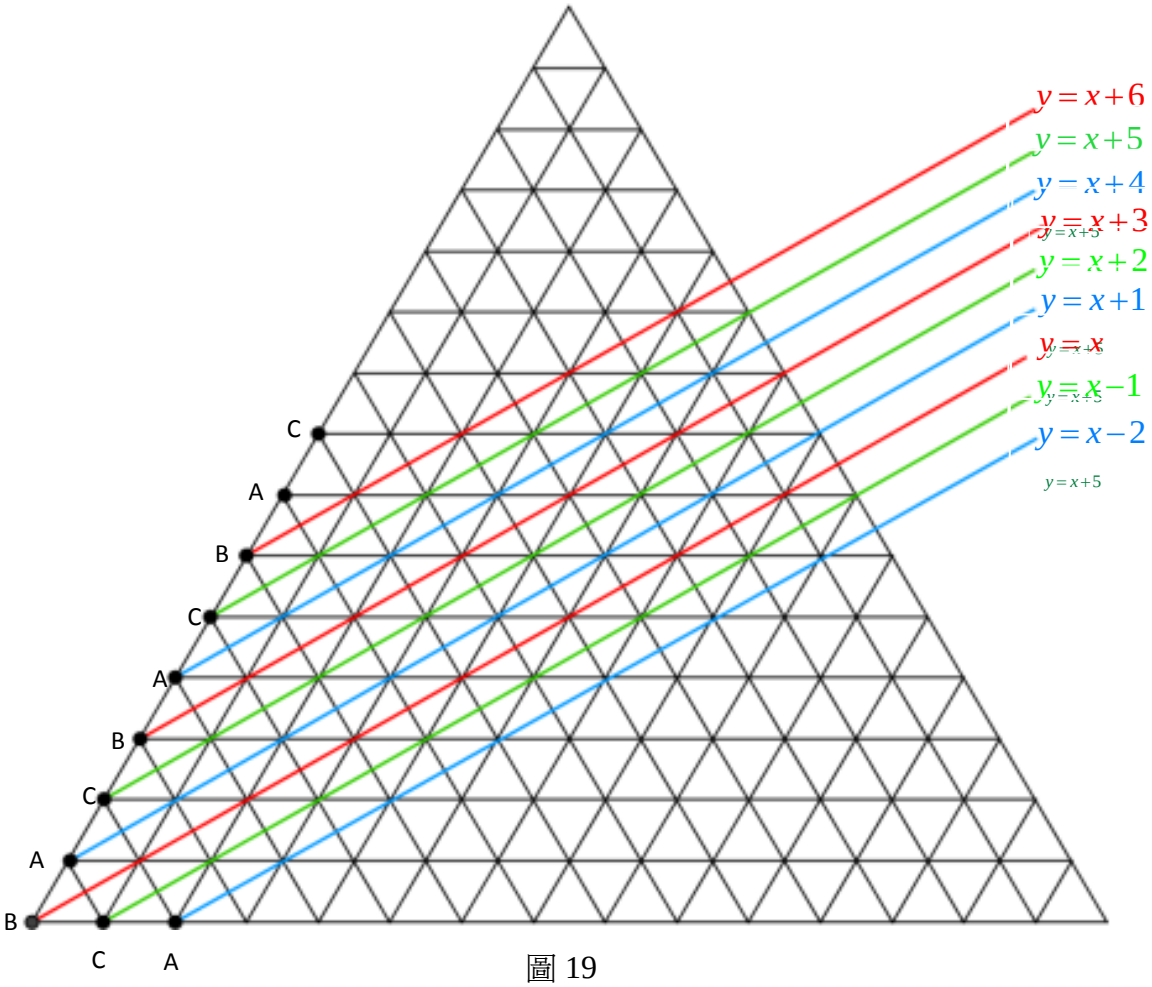


圖 19

如圖 19 所示：

由同名 A 點構成直線方程式，爲 $y=x-5$、$y=x-2$、$y=x+1$、$y=x+4$……，

→可得同名 A 點構成的直線之通式 $y=x+k, k\equiv 1 \pmod 3$。

由同名 B 點構成直線方程式，爲 $y=x-6$、$y=x-3$、$y=x+0$、$y=x+3$……，

→可得同名 B 點構成的直線之通式 $y=x+k, k\equiv 0 \pmod 3$。

由同名 C 點構成直線方程式，爲 $y=x-4$、$y=x-1$、$y=x+2$、$y=x+5$……，

→可得同名 C 點構成的直線之通式 $y=x+k, k\equiv 2 \pmod 3$。

(1) 若 $a+b\equiv 0(\mathrm{mod}3)$ B→B(如圖 20)即由 B 點不經過 A、C 點直接打回原點 B

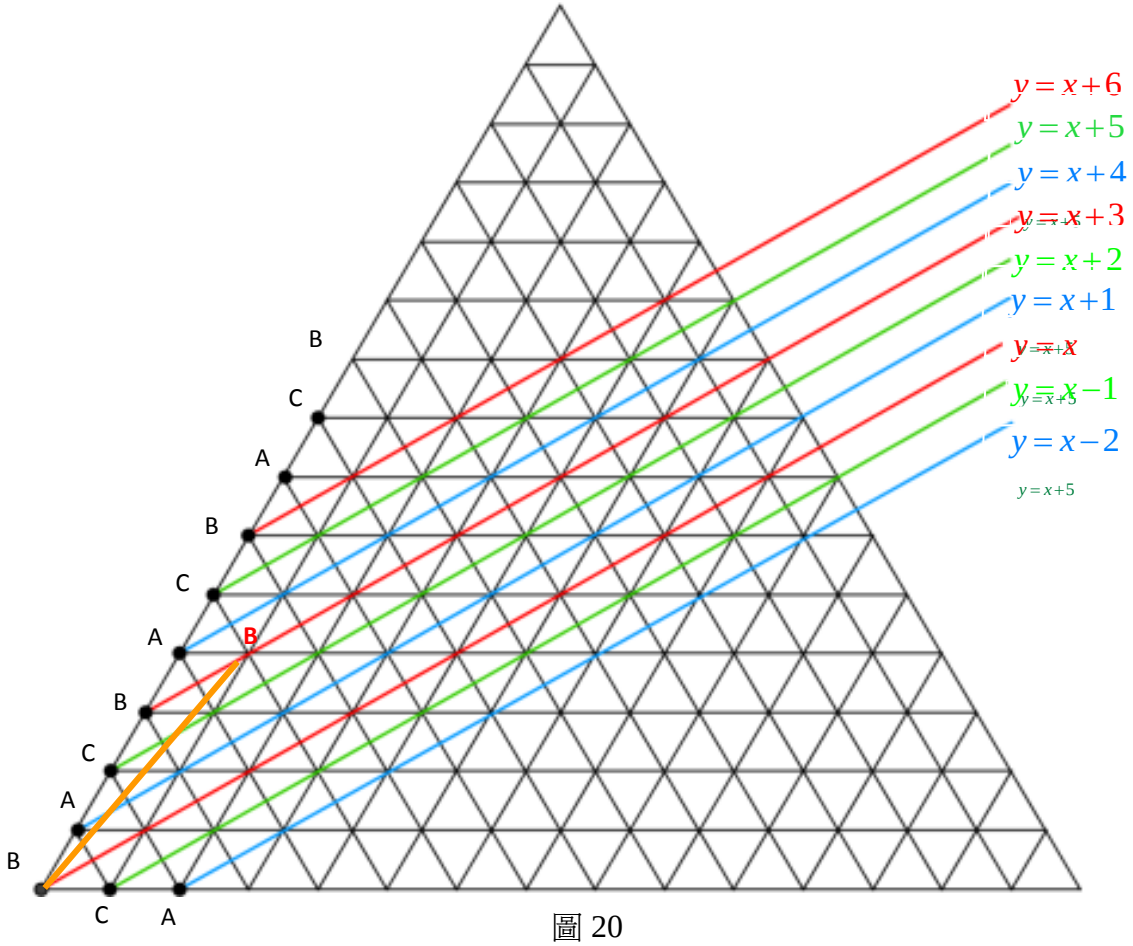


圖 20

<證明>

令入射線 L 與同名點 B 的連線 $y=x+k$ 交於點 $(a-b,b)$，

$(a-b,b)$ 代入 $y=x+k$ 中 $\Rightarrow b=(a-b)+k \Rightarrow k=-a+2b$。

若欲光線不經過 A,C 直接射回到原點 B，

則 $k=2b-a\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,3) \Leftrightarrow a\equiv 2b\ (\mathrm{mod}\,3) \Leftrightarrow a\equiv -b\ (\mathrm{mod}\,3) \Leftrightarrow a+b\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,3)$，

故當 $a+b\equiv 0(\mathrm{mod}3)$時(如圖 20)，光源由原點 B 射出時必不經過 A,C 點，而直接打回原點 B。

(2) 若 $a+b\equiv 1(\mathrm{mod}3)$ (如圖 21)，即由 $\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{A}\to\mathrm{B}$

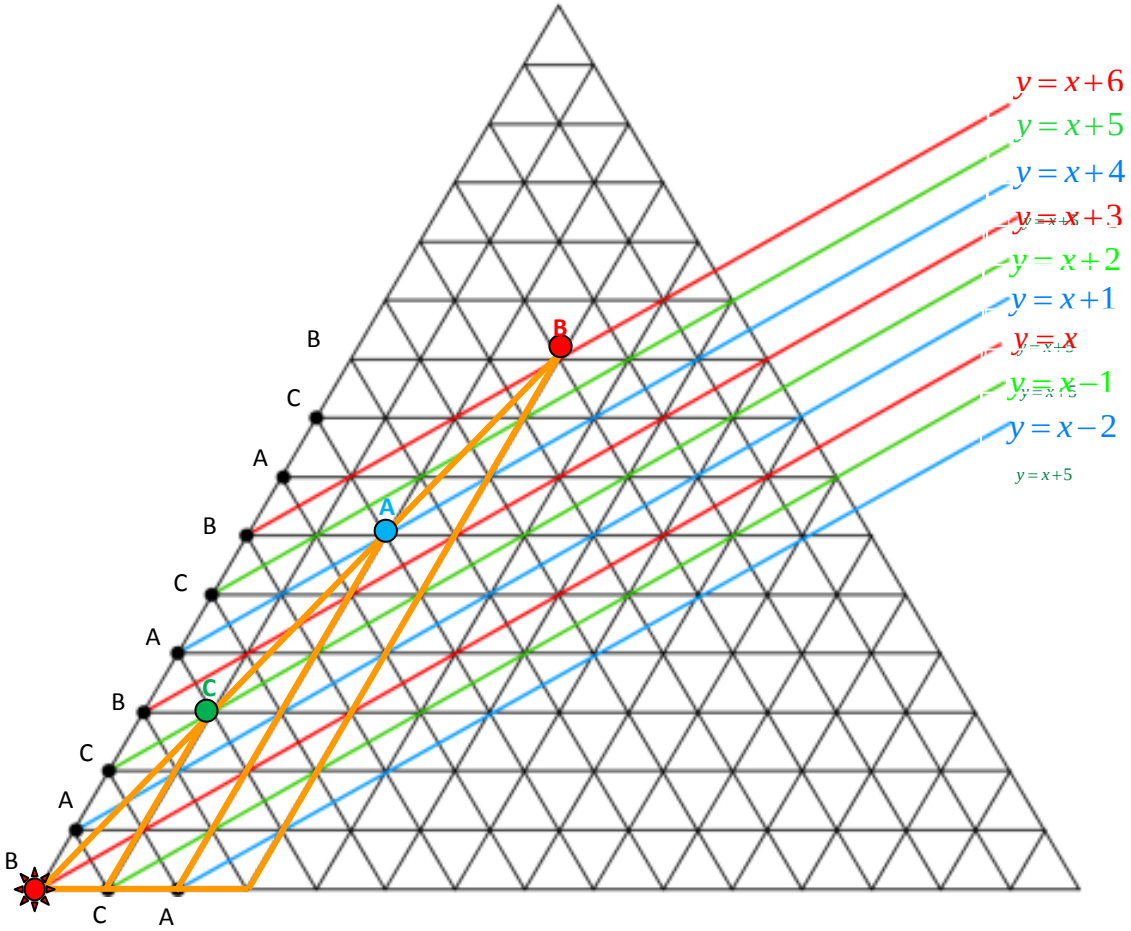


圖 21

<證明>

若 $a+b\equiv 1(\mathrm{mod}3)$，入射線 L 打到的第一個頂點坐標爲 $(a-b,b)$ 代入同名點直線

$y=x+k$

$\Rightarrow b=a-b+k\Rightarrow -k=a-2b\equiv a+b\equiv 1\Rightarrow -k\equiv 1\Rightarrow k\equiv 2$ $\therefore$ 先過C點

入射線 L 打到的第二個頂點坐標爲 $(2(a-b),2b)$ 代入方程式 $y=x+k$ 中

$\Rightarrow 2b=2(a-b)+k\Rightarrow -k=2a-4b=2(a-2b)\equiv 2(a+b)\equiv 2$

$\Rightarrow -k\equiv 2\quad\Rightarrow \mathrm{k}\equiv 1\quad\therefore$ 再過A點

入射線 L 打到的第三個頂點坐標爲 $(3(a-b),3b)$ 代入方程式 $y=x+k$ 中

$\Rightarrow 3b=3(a-b)+k\Rightarrow -k=3a-6b=3(a-2b)\equiv 3(a+b)\equiv 3$

$\Rightarrow -k\equiv 3\equiv 0\quad\Rightarrow \mathrm{k}\equiv 0\quad\therefore$ 第三次回到原點B

故若 $a+b\equiv 1(\mathrm{mod}3)$ (如圖 21)，即由 $\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{A}\to\mathrm{B}$

(3) 若 $a+b\equiv 2(\bmod 3)$ (如圖 22)，即由 $\mathrm{B}\to A\to C\to B$

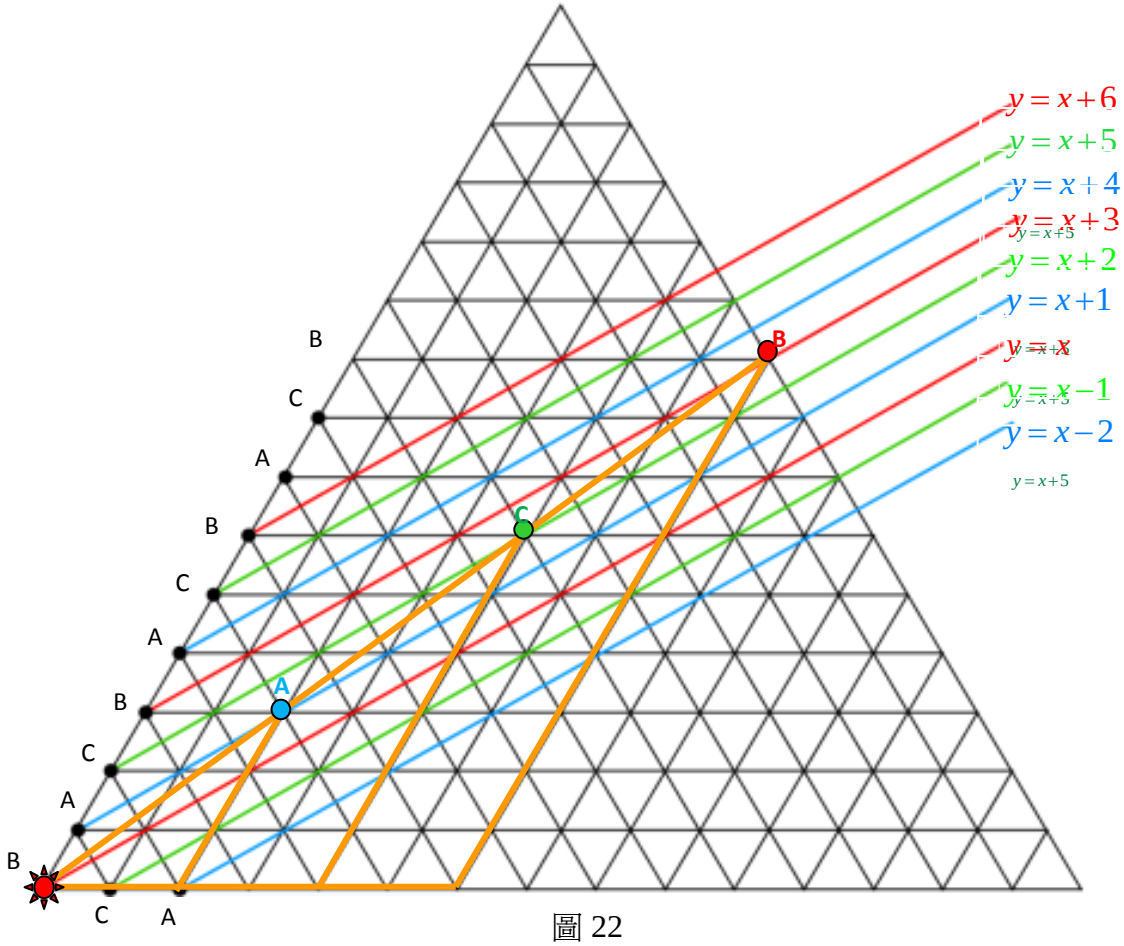


圖 22

<證明>

若 $a+b\equiv 2(\bmod 3)$

入射線 L 打到的第一個頂點坐標爲 $(a-b,b)$ 代入方程式 $y=x+k$ 中

$\Rightarrow b=a-b+k\Rightarrow -k=a-2b\equiv a+b\equiv 2\Rightarrow -k\equiv 2\quad\Rightarrow \mathrm{k}\equiv 1\qquad\therefore$ 先過A點

入射線 L 打到的第二個頂點坐標爲 $(2(a-b),2b)$ 代入方程式 $y=x+k$ 中

$\Rightarrow 2b=2(a-b)+k\Rightarrow -k=2a-4b=2(a-2b)\equiv 2(a+b)\equiv 4$

$\Rightarrow -k\equiv 4\equiv 1\quad\Rightarrow \mathrm{k}\equiv 2\qquad\therefore$ 再過C點

第三個頂點坐標爲 $(3(a-b),3b)$ 代入方程式 $y=x+k$ 中

$\Rightarrow 3b=3(a-b)+k\Rightarrow -k=3a-6b=3(a-2b)\equiv 3(a+b)\equiv 6$

$\Rightarrow -k\equiv 6\equiv 0\quad\Rightarrow \mathrm{k}\equiv 0\qquad\therefore$ 第三次回到原點

故若 $a+b\equiv 2(\bmod 3)$ (如圖 22)，即由 $\mathrm{B}\to A\to C\to B$

2. 由 B 點射出返回 B 點所需反射次數之公式解證明：

觀察 $\overline{CP}=\dfrac{1}{m}=\dfrac{b}{a}$ 的圖形反射後原點 B 的坐標爲 (x,y)（如圖 23）

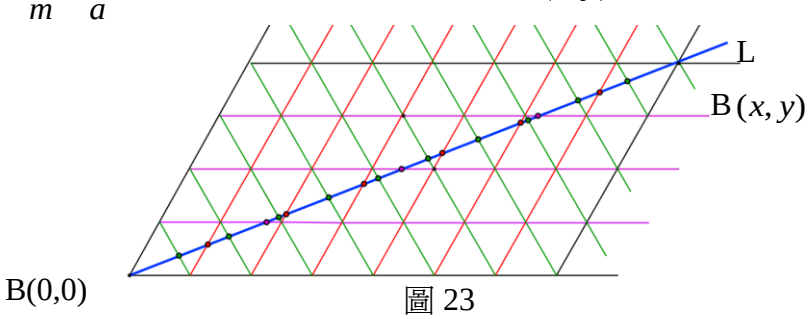


圖 23

可知直線 L 和每一條紅、藍、綠線各恰有一交點，則圖中共有 $(x-1)$ 條紅線，$(y-1)$ 條紫線，$(x+y-1)$ 條綠線

$\Rightarrow$ 有 $[(x-1)+(y-1)+(x+y-1)]=2(x+y)-3$ 個交點，再加上最後回到原點 B

$\Rightarrow$ 共有 $[2(x+y)-3]+1=2(x+y-1)$ 個交點 $\Rightarrow$ 反射了 $2(x+y-1)$ 次

(1) 若 $a+b\equiv 0(\bmod 3)$ 時，光點由 B(0,0) 不經過 A、C 兩點，直接打到 $B(a-b,b)$

$\Rightarrow x=a-b, y=b$ 帶入，總反射次數＝ $2[(a-b)+b-1]=2(a-1)$

(2) 若 $a+b\equiv 1(\bmod 3)$ 時，光點依序擊至 B(0,0)→C $(a-b,b)$ →A $(2(a-b),2b)$ →B $(3(a-b),3b)$，如圖 24 所示，反射次數應爲(1)結論的 3 倍

$\Rightarrow$ 總反射次數＝ $3\times[2(a-1)]=6(a-1)$

(3) 若 $a+b\equiv 2(\bmod 3)$ 時，光點依序擊至 B(0,0)→A $(a-b,b)$ →C $(2(a-b),2b)$ →B $(3(a-b),3b)$ $\Rightarrow$ 總反射次數＝ $3\times[2(a-1)]=6(a-1)$

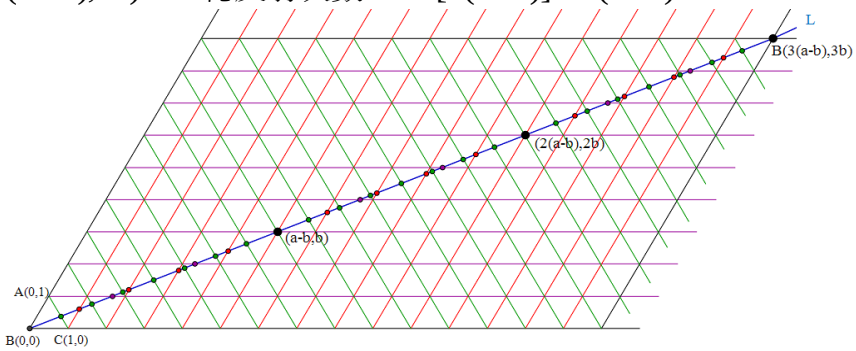


圖 24

故得結論，取 $\overline{CP}=\dfrac{1}{m}=\dfrac{b}{a}<1,\ (a,b)=1$，反射後射回所需的反射次數爲

$$\begin{cases} \text{若} a+b\equiv 0\ (\bmod 3)\text{，次數爲 } 2(a-1)\text{次，B} \to \text{B} & (1) \\ \text{若} a+b\equiv 1\ (\bmod 3)\text{，次數爲 } 6(a-1)\text{次，B} \to \text{C} \to \text{A} \to \text{B} & (2) \\ \text{若} a+b\equiv 2\ (\bmod 3)\text{，次數爲 } 6(a-1)\text{次，B} \to \text{A} \to \text{C} \to \text{B} & (3) \end{cases}$$

二、由原點 B 射到對邊 $\overline{AC}$ 上一點 P，若 $\overline{CP}$ 長爲無理數，則它經過無窮多次的入射、反射，都無法回到三頂點，欲證明射在每一邊上的這些無窮多點，在邊上具有**稠密性**（如圖 25）。

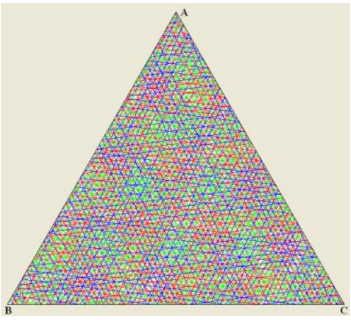


圖 25、以 $\overline{CP}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 爲例，反射多次皆無法回到原點

稠密性之詳細證明過程如下

(一)展開圖中光線與三角鏡的交點座標之整理與簡化：

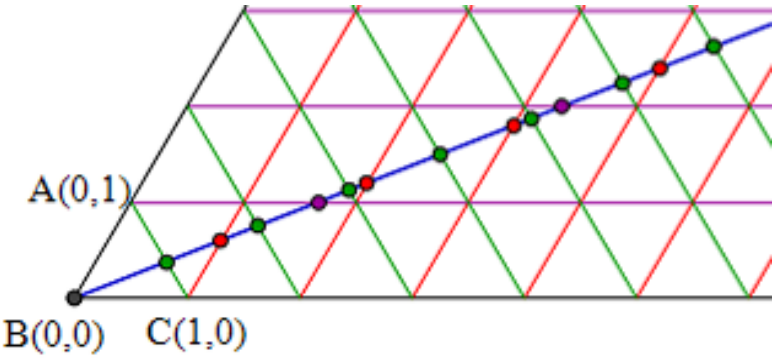


圖 26、未經變換之圖形(P_n 爲紫色點、P'_n 爲紅色點、P''_n 爲綠色點)

爲了討論光線與三角鏡邊上交點之稠密性，我們將這些交點分成 $P_n(nq,n)$ 、 $P_n'(n,\frac{n}{q})$ 及 $P_n''\left(\frac{nq}{q+1},\frac{n}{q+1}\right)$ 三類，，並加以討論。但由於這些點在展開圖上的分布是屬於二維空間分布(如圖 26)，不易討論其稠密性，故定義 $\langle x\rangle = x-[x]$。將三類點 P_n、P'_n、P''_n 轉換成 P_{n0}、P'_{n0}、P''_{n0} ，亦即將這些點平移至兩條座標軸上(如圖 27)：

$$\begin{cases} P_{n0} = (nq, 0) \\ P'_{n0} = \left(0, \frac{n}{q}\right) \\ P''_{n0} = \left(0, \frac{n}{q+1}\right) \end{cases}$$

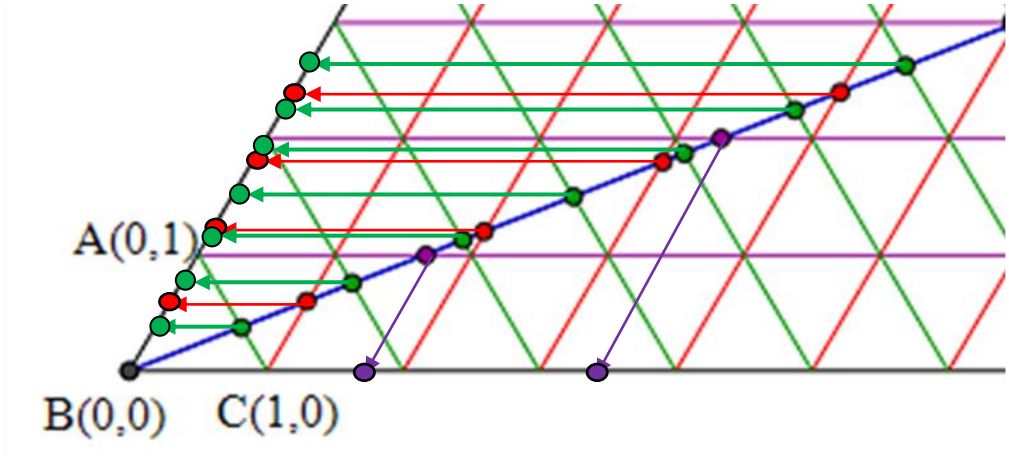


圖 27、將三類點都投影到 X 軸或 Y 軸上

其中新的 P_{n0}、P'_{n0}、P''_{n0} 三類點中的 P_{n0} 會分佈在 X 軸上，而 P'_{n0}、P''_{n0} 會分佈在 Y 軸上。接下來我們分別將 P_{n0} 的 x 座標值與 P'_{n0}、P''_{n0} 的 y 座標值作 $\langle x\rangle = x-[x]$ 運算，此時圖將變成(如圖 28)：

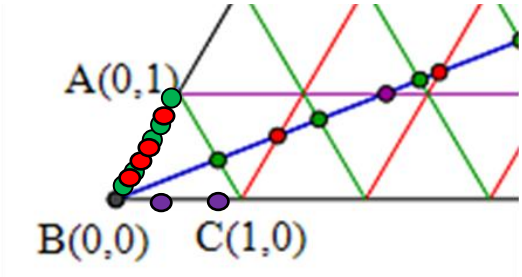


圖 28

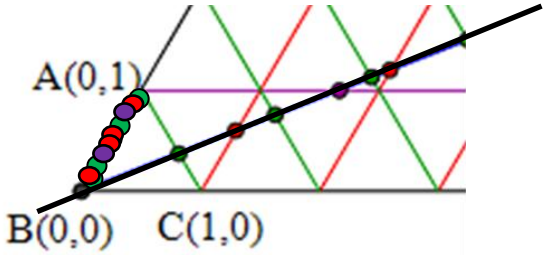


圖 29、做對稱之後三類點皆在 Y 軸上

然後再將點以 y=x 爲對稱軸做對稱，新座標通式爲$(0,\langle nq\rangle)(\mathrm{III})$(圖 29)

經過上述變換之後，我們發現此新的三類點都分布在 Y 軸上並且介於 [0，1]區間之中，即分布在圖 29 中$\overline{BA}$線段上。因此我們可以將 Y 軸與點視爲一條數線，而三類點之座標則表示爲：$P_n<nq>,\ P_n'<\frac{n}{q}>,\ P_n''<\frac{n}{q+1}>$

接下來，我們將利用$P_n<nq>,\ P_n'<\frac{n}{q}>,\ P_n''<\frac{n}{q+1}>$的通式證明其稠密性。

(二) 所須之定理： （高斯符號 [x]：不大於 x 的最大整數。）

【預備定理】對於任意無理數$\alpha>0$，任意正數$\varepsilon>0$，存在$k\in N$

使得$\left|k\alpha-[k\alpha]\right|<\varepsilon$或$1-\varepsilon<\left|k\alpha-[k\alpha]\right|<1$

證明：$\because 0<k\alpha-[k\alpha]<1$　　$\forall\varepsilon>0$，存在$n\in N$使得$\frac{1}{10^n}<\varepsilon$

在區間$[0,1]$內，取10^n個$k\alpha-[k\alpha]$的點（值），其中$k=1,2,3,\ldots,10^n$，

(1) 這10^n個$k\alpha-[k\alpha]$的值必均不相等。

【註】：假設存在兩個k_1,k_2使得$k_1\alpha-[k_1\alpha]=k_2\alpha-[k_2\alpha]$

則$(k_1-k_2)\alpha=[k_1\alpha]-[k_2\alpha]$＝整數，得$\alpha=\frac{[k_1\alpha]-[k_2\alpha]}{k_1-k_2}$，

但α爲無理數（矛盾）。　　故這10^n個$k\alpha-[k\alpha]$的值均不相等

(2) 必可找到$k_1,\ k_2\in N$且$k_2>k_1$，使得$k_1\alpha-[k_1\alpha]=k_2\alpha-[k_2\alpha]\pm\varepsilon_1$，其中$\varepsilon_1<\frac{1}{10^n}$

【註】：若$\forall k_1,k_2\in N\quad (k_2\alpha-[k_2\alpha])-(k_1\alpha-[k_1\alpha])>\frac{1}{10^n}$皆成立

則$\overline{BA},[0,1]$區間內這10^n個點中的任兩個點距離皆大於$\frac{1}{10^n}$

$\Rightarrow\overline{BA}>10^n\cdot\frac{1}{10^n}>1\rightarrow\leftarrow$矛盾

$\therefore$必可找到$k_1,\ k_2\in N$,且$k_2>k_1$，使得$k_1\alpha-[k_1\alpha]=k_2\alpha-[k_2\alpha]\pm\varepsilon_1$,其中$\varepsilon_1<\frac{1}{10^n}$

(3) 取$k_1,k_2\in N$且$k_2>k_1$

$\because [k_2\alpha]-[k_1\alpha]=[(k_2-k_1)\alpha]\ldots\ldots$①　或$[k_2\alpha]-[k_1\alpha]=[(k_2-k_1)\alpha]+1\ldots\ldots$②

$\because$ 由(2) $k_1\alpha-[k_1\alpha]=k_2\alpha-[k_2\alpha]\pm\varepsilon_1$ $\therefore k_2\alpha-k_1\alpha=[k_2\alpha]-[k_1\alpha]\pm\varepsilon_1$

由①②知$(k_2-k_1)\alpha-[(k_2-k_1)\alpha]=\pm\varepsilon_1$或$(k_2-k_1)\alpha-[(k_2-k_1)\alpha]=1\pm\varepsilon_1$

取$k=k_2-k_1$ 故得 $k\alpha-[k\alpha]=\varepsilon_1$或$k\alpha-[k\alpha]=1-\varepsilon_1$

取$\varepsilon_1<\varepsilon$ 故得$k\alpha-[k\alpha]<\varepsilon$ 或$1-\varepsilon<k\alpha-[k\alpha]<1$

【定理一】對於任意無理數$\alpha>0$，令$k\in N$，取$r=k\alpha-[k\alpha]$，$0<r<1$，$\forall\varepsilon>0$，

則存在$k'\in N, k'>k$，使得$|(k'\alpha-[k'\alpha])-(k\alpha-[k\alpha])|<\varepsilon$

即$\forall n\in N$，$n\alpha-[n\alpha]$稠密於$[0,1]$之區間

證明：由預備定理知：$\forall\varepsilon>0$,存在$k_0\in N, 0<k_0\alpha-[k_0\alpha]<\varepsilon$或$1-\varepsilon<k_0\alpha-[k_0\alpha]<1$

取$k'=k+k_0$ (即$k'>k$)。若$\begin{cases} r=k\alpha-[k\alpha]\text{—}(1) \\ 0<k_0\alpha-[k_0\alpha]<\varepsilon\text{—}(2)\end{cases}$

由(1) (2)得 $r<k\alpha+k_0\alpha-[k\alpha]-[k_0\alpha]<r+\varepsilon$

而$-[k\alpha]-[k_0\alpha]=-[(k+k_0)\alpha]$或$-[k\alpha]-[k_0\alpha]=-[(k+k_0)\alpha]+1$

$\Rightarrow r<(k+k_0)\alpha-[(k+k_0)\alpha]<r+\varepsilon$—(3)

或$r-1<(k+k_0)\alpha-[(k+k_0)\alpha]<r+\varepsilon-1$—(4)

由(4)得$(k+k_0)\alpha-[(k+k_0)\alpha]$爲負數

但$\because 0<(k+k_0)\alpha-[(k+k_0)\alpha]<1$，故第(4)式永遠不會成立

已知$k'=k+k_0$ ，由(3)式可得$r<k'\alpha-[k'\alpha]<r+\varepsilon$

即$k\alpha-[k\alpha]<k'\alpha-[k'\alpha]<k\alpha-[k\alpha]+\varepsilon$，故$|(k'\alpha-[k'\alpha])-(k\alpha-[k\alpha])|<\varepsilon$得證

α爲無理數，可設點$A(k\alpha-[k\alpha])$爲$(0,1)$的一定點，

由上述的證明知必存在$k'\in N$，使得$|(k'\alpha-[k'\alpha])-(k\alpha-[k\alpha])|<\varepsilon$

證明了存在一個點$P(k'\alpha-[k'\alpha])$可任意的逼近點$A(k\alpha-[k\alpha])$

即驗證了$\forall n\in N$，坐標爲$(n\alpha-[n\alpha])$這樣的無窮多點在$[0,1]$是稠密的。

(三)依據定理一可知 $P_n<nq>, P_n'<\frac{n}{q}>, P_n''<\frac{n}{q+1}>$分別稠密於$[0,1]$邊上。

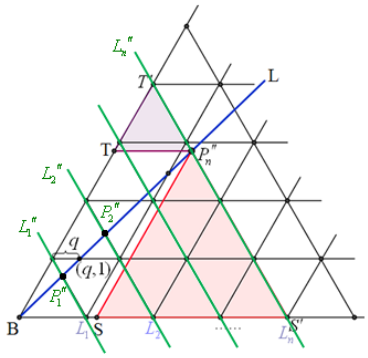


圖 30

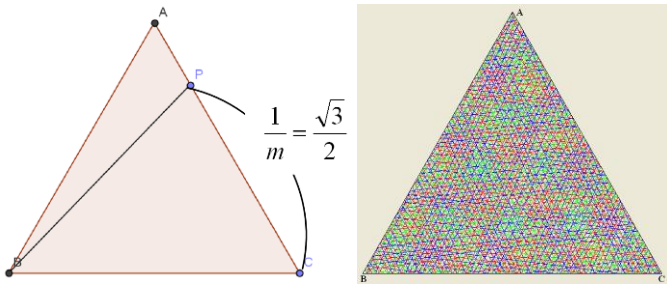


圖 31

(四) 以$\overline{CP}=\frac{1}{m}=\frac{\sqrt{3}}{2}$爲例　$q=m-1=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$

1. 以電腦繪圖

(1)在$\overline{BA}$邊上找出$P_n<nq>$這樣無窮多的點P_1、P_2、P_3、P_4、P_5、P_6、P_7……

(2)在$\overline{BA}$邊上找出$P_n'<\frac{n}{q}>$這樣無窮的點P_1'、P_2'、P_3'、P_4'、P_5'、P_6'……

(3)在$\overline{BA}$邊上找出$P_n''<\frac{n}{q+1}>$這樣無窮的點P_1''、P_2''、P_3''、P_4''、P_5''、P_6''、……

(4)由電腦繪圖看出以上這些點在$\overline{BA}$上的分佈是稠密的。(如圖 32)

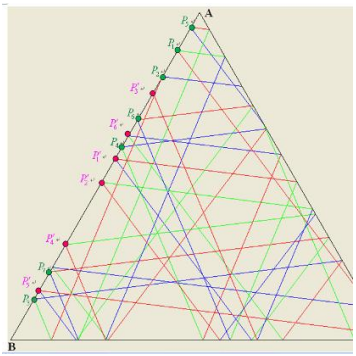


圖 32

2. 以$\overline{CP}=\frac{1}{m}=\frac{\sqrt{3}}{2}$爲例$q=m-1=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$入射線 L 打到$\overline{CB}$邊上的一點 P，進行反射，整理如下

	$P_n(nq,n)$ 爲入射線與水平線之交點 當 n=1,2,…時, 取$[nq]$之值	$P_n'(n,\frac{n}{q})$ 爲入射線與左斜線之交點 當 n=1,2,…,時, 取$[\frac{n}{q}]$之值	$P_n''(\frac{nq}{q+1},\frac{n}{q+1})$ 爲入射線與右斜線之交點 當 n=1,2,…時, 取$[\frac{n}{q+1}]$之值
交於$\overline{BA}$者	$p_1\Rightarrow[\frac{2\sqrt{3}-3}{3}]=0\equiv1+2$ $p_4\Rightarrow[4(\frac{2\sqrt{3}-3}{3})]=0\equiv4+2$ $p_8\Rightarrow[8(\frac{2\sqrt{3}-3}{3})]=1\equiv8+2$ $p_{11}\Rightarrow[11(\frac{2\sqrt{3}-3}{3})]=1\equiv11+2$ $p_{15}\Rightarrow[15(\frac{2\sqrt{3}-3}{3})]=2\equiv15+2$	$p_4'\Rightarrow[4(\frac{3}{2\sqrt{3}-3})]=25\equiv4+0$ $p_5'\Rightarrow[5(\frac{3}{2\sqrt{3}-3})]=32\equiv5+0$ $p_{10}'\Rightarrow[10(\frac{3}{2\sqrt{3}-3})]=64\equiv10+0$ $p_{11}'\Rightarrow[11(\frac{3}{2\sqrt{3}-3})]=71\equiv11+0$	$p_3''\Rightarrow[\frac{3}{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}+1}]=2\equiv-3+2$ $p''_6\Rightarrow[\frac{6}{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}+1}]=5\equiv-6+2$ $p''_8\Rightarrow[\frac{8}{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}+1}]=6\equiv-8+2$

由上可知：此三類型的點$P_n(nq,n)$、$P_n'(n,\frac{n}{q})$、$P_n''(\frac{nq}{q+1},\frac{n}{q+1})$在$\overline{BA}$皆有其分佈。

上述已證過這三堆$P_n<nq>$, $P_n'<\frac{n}{q}>$, $P_n''<\frac{n}{q+1}>$無窮多點，每一堆各在$\overline{BA}$上的分布都是稠密的（如圖 31）。今再證：

【定理二】當 $P_n < nq > P_n' < \frac{n}{q} >$ 及 $P_n'' \left\langle \frac{n}{q+1} \right\rangle$ 這三堆無窮多點混雜在 $\overline{BA}$ 上時

欲證明這些無窮多點 $P_n < nq > P_n' < \frac{n}{q} >$ 及 $P_n'' \left\langle \frac{n}{q+1} \right\rangle$ 混雜在 $\overline{BA}$ 邊上時

，其分佈亦爲稠密。

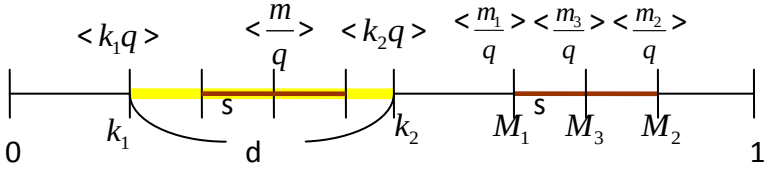


圖 33

(1)在[0，1]之間取兩點 $K_1 < k_1q >$、$K_2 < k_2q >$，且 $< k_1q > - < k_2q > \ = d > 0$

(2)$\because < \frac{n}{q} >$ 在[0，1]的區間中是稠密的，

故可取兩點 $M_1 < \frac{m_1}{q} >$、$M_2 < \frac{m_2}{q} >$ 且使 $< \frac{m_1}{q} > - < \frac{m_2}{q} > = s$，其中 s，0<s<d

而在兩點 M_1、M_2 之間必可到另一點 $M_3 \ < \frac{m_3}{q} >$

(3)$\because < \frac{n}{q} >$ 在[0，1]的區間其有稠密性，

只要在[0，1]之間找一段長爲 s 的區間則 $< \frac{m}{q} >$ 存在

(4)$\because \overline{k_1k_2} = d > s$，$\therefore K_1$、$k_2$ 兩點之間必可找到一段爲 s 的區間，

找到一點 $M < \frac{m}{q} >$ 且 $< k_1q > < < \frac{m}{q} > < < k_2q >$ 如圖 33，

故在兩數 $K_1 < k_1q >$、$K_2 < k_2q >$ 之間必可找到一個數 $< \frac{m}{q} >$ 介於其間……①

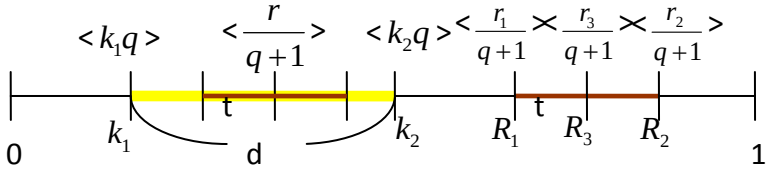


圖 34

(5)同理在 $K_1 < k_1q >$、$K_2 < k_2q >$ 之間必可找到一個數 $R < \frac{r}{q+1} >$ 介於其間，

如圖 34……②

(6)由①②知在 $K_1 < k_1q >$、$K_2 < k_2q >$ 間必可找到一點 $M < \frac{m}{q} >$ 及一點 $R < \frac{r}{q+1} >$

(7)同理可知在 $M_1 < \frac{m_1}{q} >$、$M_2 < \frac{m_2}{q} >$ 兩點之間也必可找 $K<kq>$、$R < \frac{r}{q+1} >$ 的點

(8)由此可知無窮多點的 $< nq >, < \frac{n}{q} >, < \frac{n}{q+1} >$ 混雜在[0,1]之間是交錯稠密的。

陸、結論

一、在三角形 ABC 中，由原點 B 射到邊 $\overline{AC}$ 上一點 P ，若 $\overline{CP}$ 長爲有理數（如圖 35），令 $\overline{CP}=\frac{b}{a},(a,b)=1,a,b\in N,0<\frac{1}{m}<1$，則

$$\begin{cases}\text{若}a+b\equiv 0\,(\text{mod}3)\text{，則射回原點所需總次數爲}\,2(a-1)\text{次，}B\to B\\ \text{若}a+b\equiv 1\,(\text{mod}3)\text{，則射回原點所需總次數爲}\,6(a-1)\text{次，}B\to C\to A\to B\\ \text{若}a+b\equiv 2\,(\text{mod}3)\text{，則射回原點所需總次數爲}\,6(a-1)\text{次，}B\to A\to C\to B\end{cases}$$

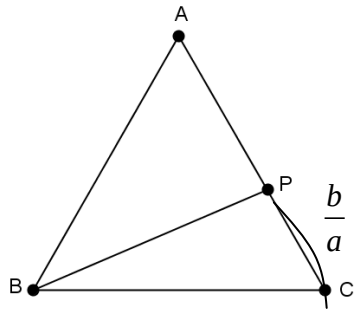


圖 35、由原點 B 射出光線

二、我們將正三角形的圖無限翻轉，得一展開圖，並將其座標化(如圖 36)

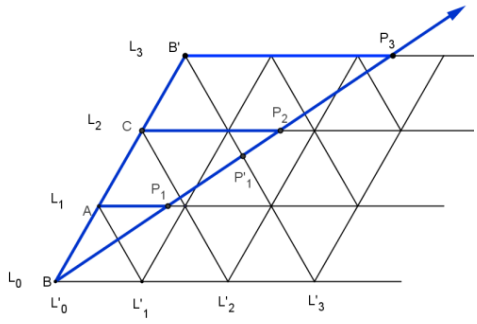


圖 36

可得，令 q 爲直線 L 與第一條橫線交點之 x 座標值，

則入射線 L 與平行橫軸($\overline{BC}$)的直線 L_n 的交點坐標 $P_n(nq,n)$

入射線 L 與平行縱軸($\overline{AB}$)的直線 L_n' 的交點坐標 $P_n'(n,\frac{n}{q})$

入射線 L 與平行右斜線($\overline{AC}$)的直線 L_n'' 的交點坐標 $P_n''\left(\frac{nq}{q+1},\frac{n}{q+1}\right)$

三、入射線 L 與水平線 L_n 的交點座標爲 $P_n(nq,n)$ 其中某些 P 點是交在 $\overline{BA}$ 上，另一些 P 點是交在 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 上。如何判斷，我們亦推出：

$$\begin{cases}\text{若}[nq]\equiv n(\text{mod}3)\text{，則}P_n\text{在}\overline{BC}\text{上}\\ \text{若}[nq]\equiv n+1(\text{mod}3)\text{，則}P_n\text{在}\overline{CA}\text{上}\\ \text{若}[nq]\equiv n+2(\text{mod}3)\text{，則}P_n\text{在}\overline{AB}\text{上}\end{cases}$$

四、入射線 L 與平行縱軸($\overline{BA}$)的直線 L_n' 的交點坐標爲 $P_n'(n,\frac{n}{q})$ ，其中某些 P' 點是交在 $\overline{BA}$ 上，另一些 P' 點是交在 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 上。如何判斷，我們亦推出：

$$\begin{cases} 若\left[\dfrac{n}{q}\right]\equiv n(\mathrm{mod}\,3),則P_n'在\overline{AB}上 \\ 若\left[\dfrac{n}{q}\right]\equiv n+1(\mathrm{mod}\,3),則P_n'在\overline{CA}上 \\ 若\left[\dfrac{n}{q}\right]\equiv n+2(\mathrm{mod}\,3),則P_n'在\overline{BC}上 \end{cases}$$

五、入射線 L 與平行右斜線($\overline{CA}$)的直線 L_n'' 的交點坐標 $P_n''\left(\dfrac{nq}{q+1},\dfrac{n}{q+1}\right)$，其中某些 P'' 點是交在 $\overline{BA}$ 上，另一些 P' 點是交在 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 上。如何判斷，我們亦推出：

$$\begin{cases} 若\left[\dfrac{n}{q+1}\right]\equiv -n(\mathrm{mod}\,3),則P_n''在\overline{BC}上 \\ 若\left[\dfrac{n}{q+1}\right]\equiv -n+1(\mathrm{mod}\,3),則P_n''在\overline{CA}上 \\ 若\left[\dfrac{n}{q+1}\right]\equiv -n+2(\mathrm{mod}\,3),則P_n''在\overline{AB}上 \end{cases}$$

六、在三角形 ABC 中，由原點 B 射到對邊 $\overline{AC}$ 上一點 P，若 $\overline{CP}$ 長爲無理數，我們證明出：它經過無窮多次的入射、反射，都無法回到三頂點（如圖 37）。

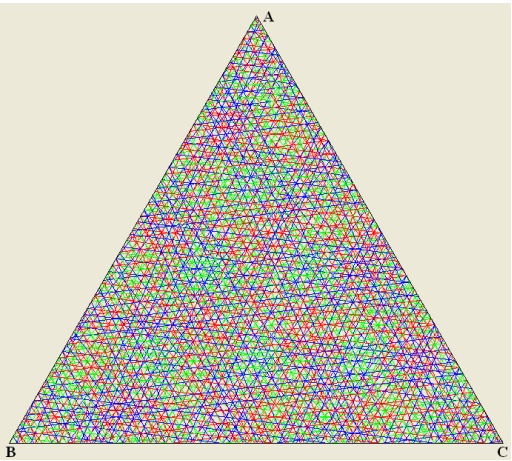


圖 37、以 $\overline{CP}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 爲例，反射無窮多次皆無法回到原點

七、在三角形 ABC 中，由原點 B 射到對邊 $\overline{AC}$ 上一點 P，若 $\overline{CP}$ 長爲無理數，取 $\overline{CP}=\dfrac{1}{m}(0<m<1)$，令 q 爲直線 L 與第一條橫線交點之 x 座標值，則 $q=m-1$，

我們證出：無論 $\begin{cases} (1)\ [nq]\equiv n(\mathrm{mod}\,3) \\ (2)\ [nq]\equiv n+1(\mathrm{mod}\,3) \\ (3)\ [nq]\equiv n+2(\mathrm{mod}\,3) \end{cases}$ $P_n<nq>$ 皆稠密於[0，1]，意即稠密於 $\overline{BA}$

八、在三角形 ABC 中，由原點 B 射到對邊 $\overline{AC}$ 上一點 P，若 $\overline{CP}$ 長爲無理數，取 $\overline{CP}=\dfrac{1}{m}(0<m<1)$，令 q 爲直線 L 與第一條橫線交點之 x 座標值，則 $q=m-1$，

我們證出：無論 $\begin{cases} (1)\ [\frac{n}{q}] \equiv n(\mathrm{mod}3) \\ (2)\ [\frac{n}{q}] \equiv n+1(\mathrm{mod}3) \\ (3)\ [\frac{n}{q}] \equiv n+2(\mathrm{mod}3) \end{cases}$ $P_n' < \frac{n}{q} >$ 皆稠密於[0，1] ，意即稠密於 $\overline{BA}$

九、 $P_n''\left(\frac{nq}{q+1}, \frac{n}{q+1}\right)$ 在 $\overline{BA}$ 上的分佈亦證明出其稠密性。

十、當 q 爲無理數，$P_n < nq > P_n' < \frac{n}{q} >$ 及 $P_n'' \left\langle \frac{n}{q+1} \right\rangle$ 這三堆無窮多點混雜在 $\overline{BA}$ 上時，其在 $\overline{BA}$ 上的分佈是稠密的；同理，這三堆無窮多點在 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 上的分佈亦是稠密的。由原點 B 射到對邊 $\overline{AC}$ 上一點 P，若 $\overline{CP}$ 長爲無理數，則它經過無窮多次的入射、反射，都無法回到三頂點，光點打在三邊上的無窮多點，在三邊上的分佈是稠密的。

柒、展望

在 $\overline{CP} = \frac{1}{m} = \frac{1}{3}$ 的反射路徑途中，可發現許多三線交於一點的情況，因此，我們又觀察了其他 $\frac{1}{m}$ 不同時的路徑圖，亦可發現相同的情況，我們稱之爲「三叉點」(如圖 38 中的黃點 K，共有 6 個三叉點)，未來我們將試著找出圖中所有的三叉點，並探討(1)三叉點個數是否和 m 有關？(2)可否找出三叉點個數的公式解？(3)三叉點之對稱性

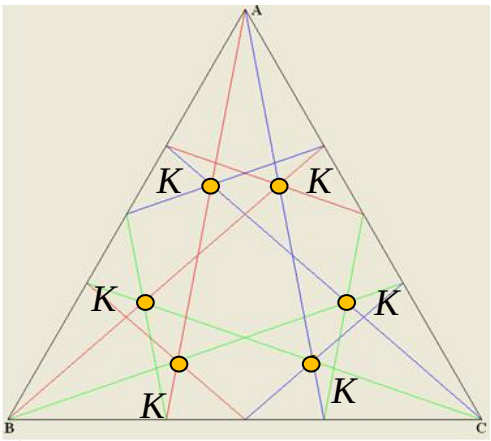


圖 38

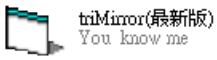
捌、參考文獻

一、林義雄、林紹雄，理論分析初步，九章出版社，1993 年 7 月

二、張景中，從 $\sqrt{2}$ 談起，凡異出版社，1994 年 3 月

三、THOMAS，Calculus and analytic geomotry，亞美出版社，1971 年 7 月

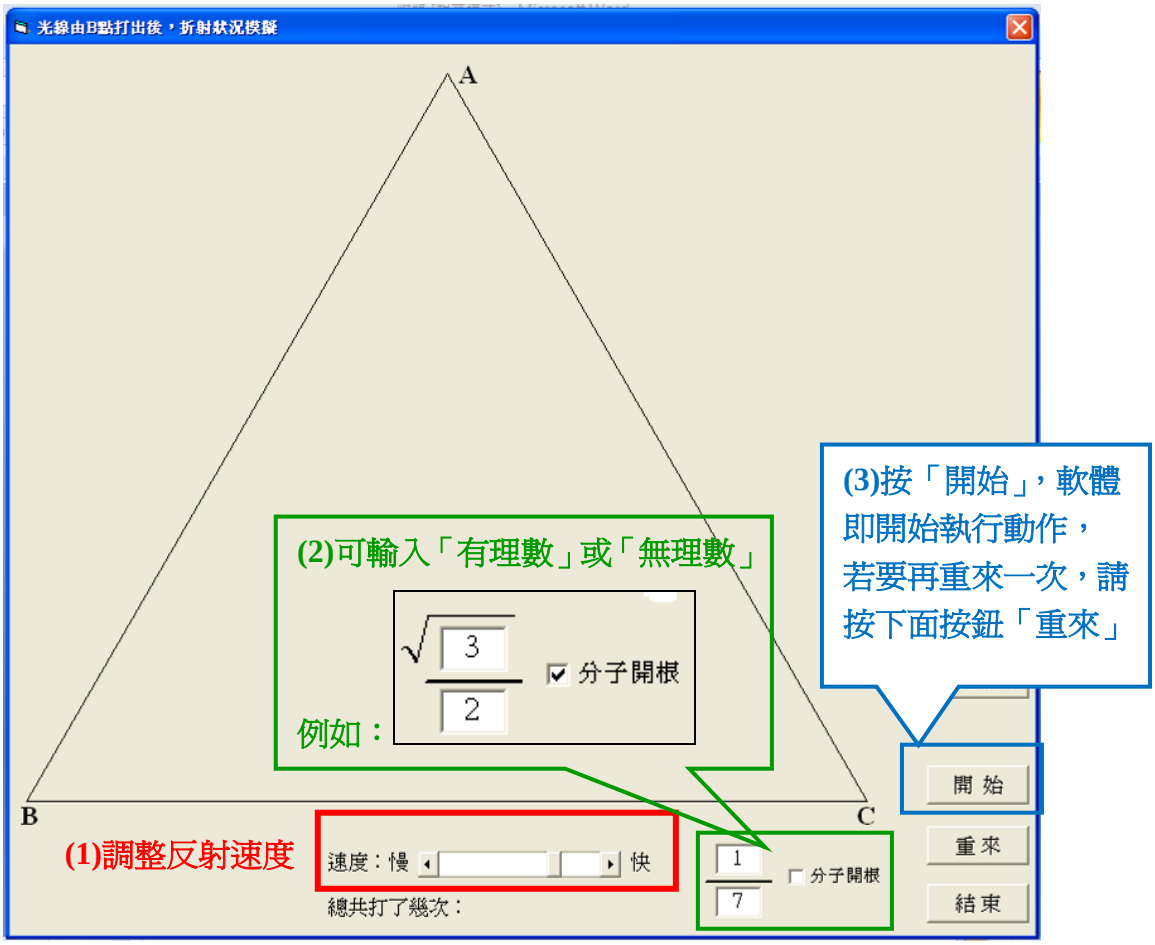
附錄 A、正三角鏡反射軟體之操作方法

步驟 1. 滑鼠左鍵點兩下軟體 

，即可打開

步驟 2. 由原點 B 射到對邊 $\overline{AC}$ 上一點 P

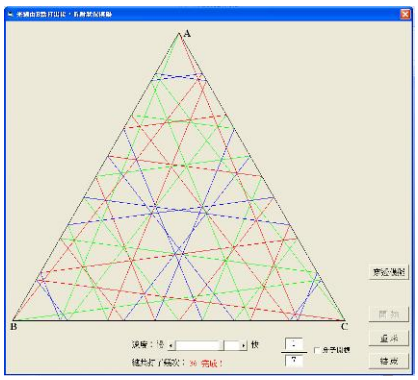
(1) 調整反射的速度 → (2) 輸入 $\overline{CP}$ 的長度 → (3) 按「開始」



步驟 3.輸出執行結果

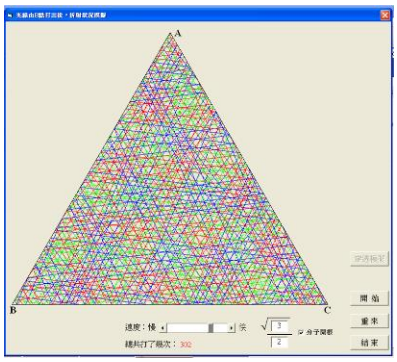
例 1：$\overline{CP}=\dfrac{1}{7}$

反射 36 次回到原點 B



例 2. $\overline{CP}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

反射無窮多次無法回到原點 B



附錄 B、交點的同餘性質

令 $\overline{CP}=\frac{1}{m}=\frac{b}{a}$ 及 $\overline{AP_1}=q$，討論交點的同餘性質之前，先求 q 與 m 關係為 $\boxed{q=m-1}$

【說明】如圖 B-1，因為△ PBC ～△ PP_1A ⇒

對應邊成比例：$\overline{BC}:\overline{PC}=\overline{AP_1}:\overline{AP}$

$\Rightarrow 1:\frac{1}{m}:q:(1-\frac{1}{m})\Rightarrow \frac{q}{m}=1-\frac{1}{m}\Rightarrow q=m-1$

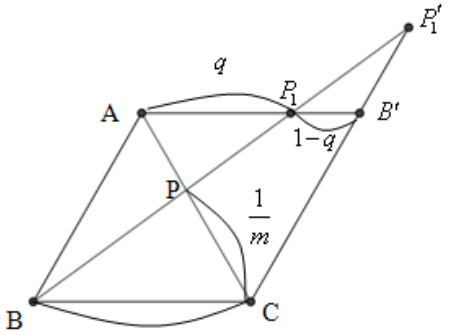


圖 B-1

（一）有理數的例子，例 $\overline{CP}=\frac{1}{m}=\frac{2}{5}$ 時如圖 B-2 及 $\frac{1}{m}=\frac{2}{5}$ 展開圖 B-3，整理得表一：

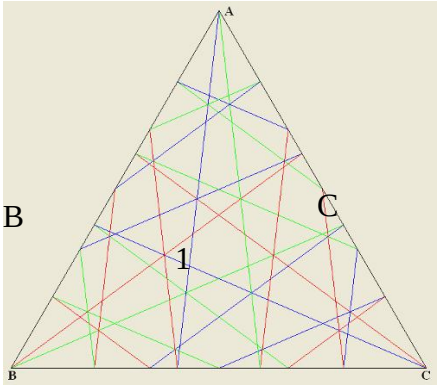


圖 B-2 $\overline{CP}=\frac{1}{m}=\frac{2}{5}$ 之反射圖

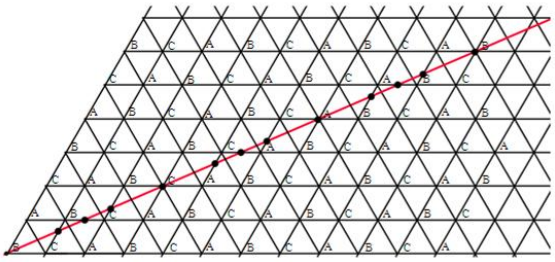


圖 B-3 $\overline{CP}=\frac{1}{m}=\frac{2}{5}$ 展開圖

表一、當 $\frac{1}{m}=\frac{2}{5}$、$q=m-1=\frac{3}{2}$ 時 $[nq]$、$[\frac{n}{q}]$ 之同餘情況

	$P_n(nq,n)$ 為入射線與 L_n 之交點 當 n=1,2,…,6 時，取 $[nq]$ 之值	$P_n'(n,\frac{n}{q})$ 為入射線與 L_n' 之交點 當 n=1,2,…,9 時，取 $[\frac{n}{q}]$ 之值
交於 $\overline{AB}$	$P_4\Rightarrow[6]=6\equiv 4+2$ (mod3)(A點) $P_5\Rightarrow[\frac{15}{2}]=7\equiv 5+2$ (mod3)	$P_7'\Rightarrow[\frac{14}{3}]=4\equiv 7+0(\text{mod}\,3)$ $P_8'\Rightarrow[\frac{16}{3}]=5\equiv 8+0(\text{mod}\,3)$ $P_9'\Rightarrow[\frac{18}{3}]=6\equiv 9+0(\text{mod}\,3)$
交於 $\overline{BC}$	$P_1\Rightarrow[\frac{3}{2}]=1\equiv 1+0$ (mod3) $P_6\Rightarrow[9]=9\equiv 6+0$ (mod3)	$P_1'\Rightarrow[\frac{2}{3}]=0\equiv 1+2$ (mod3) $P_2'\Rightarrow[\frac{4}{3}]=1\equiv 2+2$ (mod3) $P_3'\Rightarrow[2]=2\equiv 3+2$ (mod3)(C點)
交於 $\overline{CA}$	$P_2\Rightarrow[3]=3\equiv 2+1$ (mod3)(C點)	$P_4'\Rightarrow[\frac{8}{3}]=2\equiv 4+1$ (mod3)

	$P_3 \Rightarrow [\frac{9}{2}] = 4 \equiv 3+1 \pmod 3$	$P_5' \Rightarrow [\frac{10}{3}] = 3 \equiv 5+1 \pmod 3$ $P_6' \Rightarrow [4] = 4 \equiv 6+1 \pmod 3$(A點)

由上述 $\frac{1}{m} = \frac{2}{5}$ 爲例的數據，整理可得表下表二：

	P_n	P_n'
交於 $\overline{AB}$	$[nq] \equiv n+2 \pmod 3$	$[\frac{n}{q}] \equiv n \pmod 3$
交於 $\overline{BC}$	$[nq] \equiv n \pmod 3$	$[\frac{n}{q}] \equiv n+2 \pmod 3$
交於 $\overline{CA}$	$[nq] \equiv n+1 \pmod 3$	$[\frac{n}{q}] \equiv n+1 \pmod 3$

（二）無理數的例子，例 $\overline{CP} = \frac{1}{m} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 時（圖 B-4）展開（圖 B-5），整理得表三：

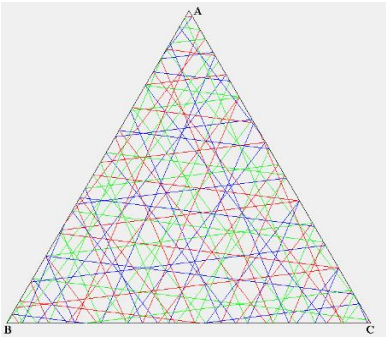


圖 B-4 $\overline{CP} = \frac{1}{m} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 之反射圖

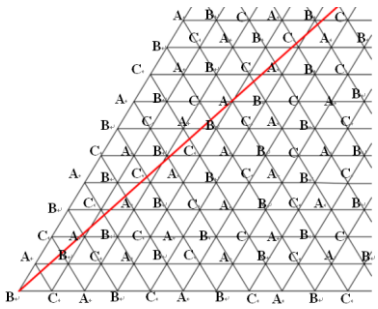


圖 B-5 $\overline{CP} = \frac{1}{m} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 之展開圖

表三、當 $\frac{1}{m} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $q = m-1 = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}$ 時 $[nq]$ 、$[\frac{n}{q}]$ 之同餘情況

	$P_n(nq, n)$ 爲入射線與 L_n 之交點 當 n=1,2,…,21 時，取 $[nq]$ 之值	$P_n'(n, \frac{n}{q})$ 爲入射線與 L_n' 之交點 當 n=1,2,…,21 時，取 $[\frac{n}{q}]$ 之值
交於 $\overline{AB}$	$p_1 \Rightarrow [\frac{2\sqrt{3}-3}{3}] = 0 \equiv 1+2$ $p_4 \Rightarrow [4(\frac{2\sqrt{3}-3}{3})] = 0 \equiv 4+2$ $p_8 \Rightarrow [8(\frac{2\sqrt{3}-3}{3})] = 1 \equiv 8+2 \ldots\ldots$	$p_4' \Rightarrow [4(\frac{3}{2\sqrt{3}-3})] = 25 \equiv 4+0$ $p_5' \Rightarrow [5(\frac{3}{2\sqrt{3}-3})] = 32 \equiv 5+0$ $p_{10}' \Rightarrow [10(\frac{3}{2\sqrt{3}-3})] = 64 \equiv 10+0 \ldots$
交於 $\overline{BC}$	$p_3 \Rightarrow [3(\frac{2\sqrt{3}-3}{3})] = 0 \equiv 3+0$ $p_6 \Rightarrow [6(\frac{2\sqrt{3}-3}{3})] = 0 \equiv 6+0$ $p_7 \Rightarrow [7(\frac{2\sqrt{3}-3}{3})] = 1 \equiv 7+0 \ldots\ldots$	$p_1' \Rightarrow [\frac{3}{2\sqrt{3}-3}] = 6 \equiv 1+2$ $p_6' \Rightarrow [6(\frac{3}{2\sqrt{3}-3})] = 38 \equiv 6+2$ $p_7' \Rightarrow [7(\frac{3}{2\sqrt{3}-3})] = 45 \equiv 7+2 \ldots\ldots$

交於 $\overline{CA}$	$p_2 \Rightarrow [2(\frac{2\sqrt{3}-3}{3})] = 0 \equiv 2+1$ $p_5 \Rightarrow [5(\frac{2\sqrt{3}-3}{3})] = 0 \equiv 5+1$ $p_9 \Rightarrow [9(\frac{2\sqrt{3}-3}{3})] = 1 \equiv 9+1 \ldots\ldots$	$p'_2 \Rightarrow [2(\frac{3}{2\sqrt{3}-3})] = 12 \equiv 2+1$ $p'_3 \Rightarrow [3(\frac{3}{2\sqrt{3}-3})] = 19 \equiv 3+1$ $p'_8 \Rightarrow [8(\frac{3}{2\sqrt{3}-3})] = 51 \equiv 8+1 \ldots\ldots$

由上述 $\frac{1}{m} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 爲例的數據，整理可得下表四：

	P_n	P_n'
交於 $\overline{AB}$	$[nq] \equiv n+2 \pmod 3$	$[\frac{n}{q}] \equiv n \pmod 3$
交於 $\overline{BC}$	$[nq] \equiv n \pmod 3$	$[\frac{n}{q}] \equiv n+2 \pmod 3$
交於 $\overline{CA}$	$[nq] \equiv n+1 \pmod 3$	$[\frac{n}{q}] \equiv n+1 \pmod 3$

（三）點 $P_n(nq,n)$ 其 $[nq]$ 同餘性質之證明過程：

1. 實例驗證

例 1：$\boxed{q=\frac{3}{5}，n=14}$ $\because n=14 \equiv 2 \pmod 3$ $\therefore$ 開頭爲 C

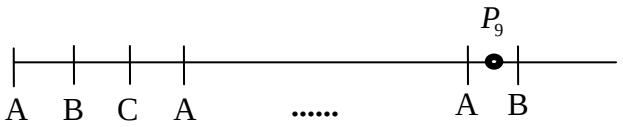
又 $\because [nq]=[\frac{3}{5}\times 14]=8 \equiv 2 \equiv n \pmod 3$ $\therefore P_{14}$ 在 $\overline{BC}$ 上

例 2：$\boxed{q=\frac{3}{5}，n=12}$ $\because n=12 \equiv 0 \pmod 3$ $\therefore$ 開頭爲 B

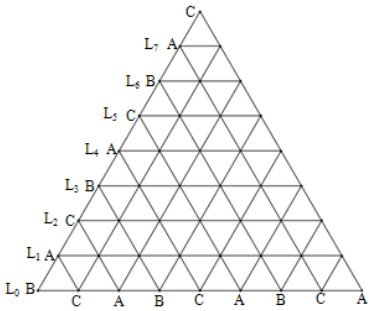
又 $\because [nq]=[\frac{3}{5}\times 12]=7 \equiv 1 \equiv n+1 \pmod 3$ $\therefore P_7$ 在 $\overline{CA}$ 上

例 3：$\boxed{q=\frac{3}{5}，n=16}$ $\because n=16 \equiv 1 \pmod 3$ $\therefore$ 開頭爲 A

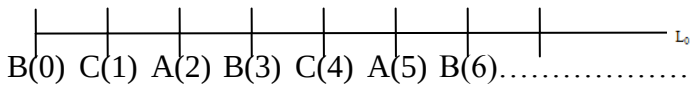
又 $\because [nq]=[\frac{3}{5}\times 16]=9 \equiv 0 \equiv n+2 \pmod 3$ $\therefore P_9$ 在 $\overline{AB}$ 上



2. 理論證明

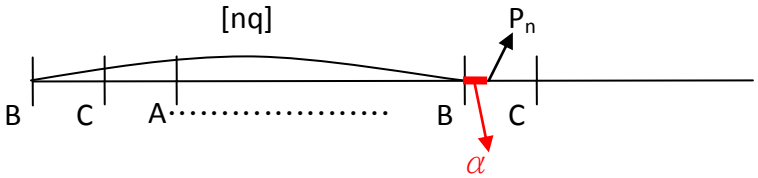


令 B 開頭之橫線 L_n 爲型 1 $\Leftrightarrow n \equiv 0(\mathrm{mod}3)$，如 $L_0, L_3, L_6 \ldots$ 觀察 L_n 得：上每三個整數點爲一循環，如

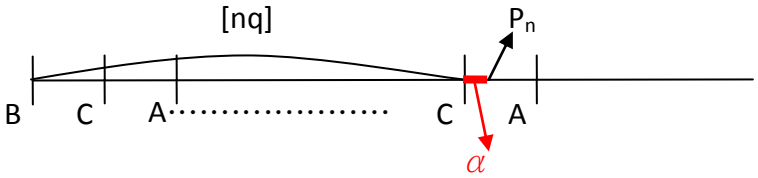


設一線段 $\overline{BP_n} = nq = [nq] + \alpha, 1 > \alpha > 0$

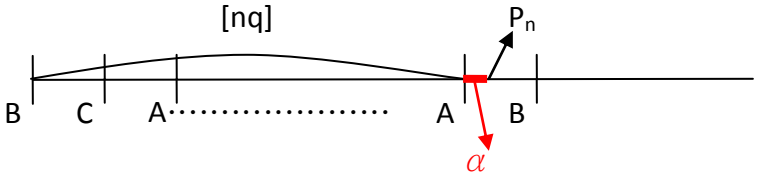
若 $[nq] \equiv 0 \equiv n(\mathrm{mod}3)$，則 $[nq]$ 爲 B 點，故 P_n 在 $\overline{BC}$ 上



若 $[nq] \equiv 1 \equiv n+1(\mathrm{mod}3)$，則 $[nq]$ 爲 C 點，故 P_n 在 $\overline{CA}$ 上



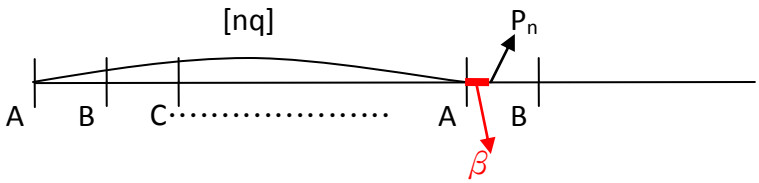
若 $[nq] \equiv 2 \equiv n+2(\mathrm{mod}3)$，則 $[nq]$ 爲 A 點，故 P_n 在 $\overline{AB}$ 上



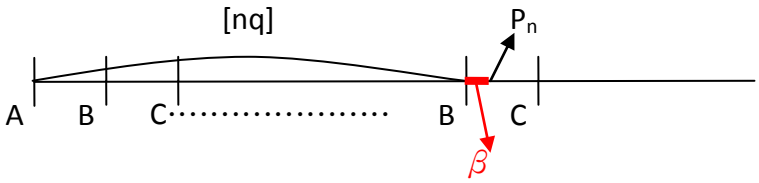
(2)令 A 開頭之橫線 L_n 爲型 2 $\Leftrightarrow n \equiv 1(\mathrm{mod}3)$，如 $L_1, L_4, L_7 \ldots$

設一線段 $\overline{AP_n} = n = [nq] + \alpha$，$1 > \alpha > 0$

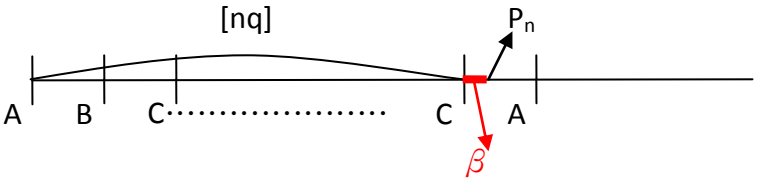
若 $[nq] \equiv 0 \equiv n+2(\mathrm{mod}3)$，則 $[nq]$ 爲 A 點，故 P_n 在 $\overline{AB}$ 上



若 $[nq] \equiv 1 \equiv n(\mathrm{mod}3)$，則 $[nq]$ 爲 B 點，故 P_n 在 $\overline{BC}$ 上



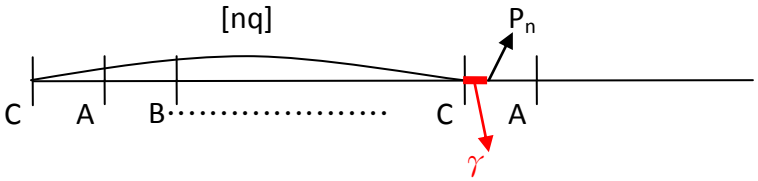
若 $[nq] \equiv 2 \equiv n+1(\mathrm{mod}3)$，則 $[nq]$ 爲 C 點，故 P_n 在 $\overline{CA}$ 上



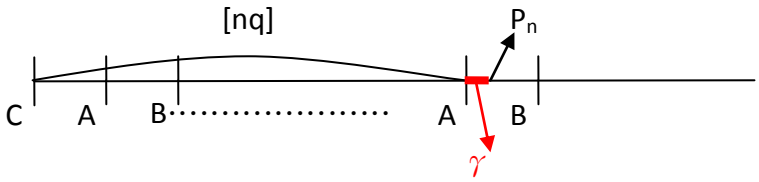
(3) 令 C 開頭之橫線 L_n 爲型 $3 \Leftrightarrow n \equiv 2(\text{mod}3)$,如 $L_2, L_5, L_8 \ldots$

設一線段 $\overline{CP_n} = n = [nq] + \alpha$ ，$1 > \alpha > 0$

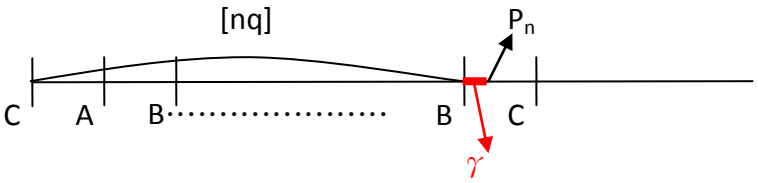
若 $[nq] \equiv 0 \equiv n+1(\text{mod}3)$ ，則 $[nq]$ 爲 C 點，故 P_n 在 $\overline{CA}$ 上



若 $[nq] \equiv 1 \equiv n+2(\text{mod}3)$ ，則 $[nq]$ 爲 A 點，故 P_n 在 $\overline{AB}$ 上



若 $[nq] \equiv 2 \equiv n(\text{mod}3)$ ，則 $[nq]$ 爲 B 點，故 P_n 在 $\overline{BC}$ 上



由(1)(2)(3)可知：
$$\begin{cases} \text{若 } [nq] \equiv n(\text{mod}3) \text{ ，則 } P_n \text{ 在 } \overline{BC} \text{ 上} \\ \text{若 } [nq] \equiv n+1(\text{mod}3) \text{ ，則 } P_n \text{ 在 } \overline{CA} \text{ 上} \\ \text{若 } [nq] \equiv n+2(\text{mod}3) \text{ ，則 } P_n \text{ 在 } \overline{AB} \text{ 上成立} \end{cases}$$

（四）P_n' 其 $\left[\dfrac{n}{q}\right]$ 同餘性質之證明：

1. 將 $X-Y$ 平面第一象限的區域和直線 L ，以 Y 軸作鏡射，得 $X'-Y'$ 平面及 L' ，由圖 B-6 可知 $\overline{B'S} = \overline{B'T}$ $\therefore P$ 和 Q 之橫坐標一樣皆爲 nq 又 $\because \overline{SP} = \overline{TQ}$ $\therefore P$ 和 Q 之橫坐標一樣皆爲 n ，故 P 和 Q 之坐標一樣皆爲 (nq, n)，又 $\because L$ 和 $X-Y$ 平面之相對位置與 L' 和 $X'-Y'$ 平面之相對位置相同，可知直線 L 和 L_n 之交點 $P_n(nq,n)$ 之 $[nq]$ 同餘性質會和 L' 和 L_n' 之交點 $Q(nq,n)$ 之 $[nq]$ 同餘性質完全一樣。

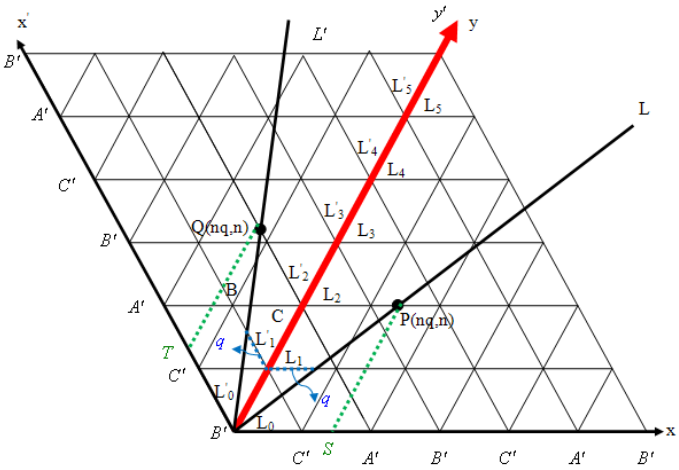


圖 B-6

2. 將圖 B-6 之紅線右左側之圖形順時針轉 60° 得到下圖 B-7, $\overline{C'Q}=q'$ $\therefore \overline{A'R}=\dfrac{1}{q'}$

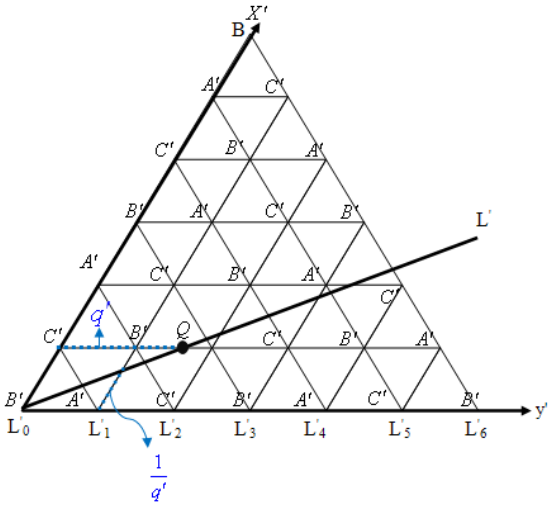


圖 B-7

由（三）之結論，同理可得下表五：

	P_n
交於 $\overline{A'B'}$	$[nq]\equiv n+2 \pmod 3$
交於 $\overline{B'C'}$	$[nq]\equiv n \pmod 3$
交於 $\overline{C'A'}$	$[nq]\equiv n+1 \pmod 3$

令 $\overline{C'Q}=q'$，再將圖 B-7 中, $B'=B$ 代入, $C'=A$, $A'=C$ 代入得下表六之結果：

	P_n'
交於 $\overline{AB}$	$[nq']\equiv n \pmod 3$
交於 $\overline{BC}$	$[nq']\equiv n+2 \pmod 3$
交於 $\overline{CA}$	$[nq']\equiv n+1 \pmod 3$

再由圖 B-8 知當 $\overline{AP_1}=q$ 時，$\overline{CP_1'}=\dfrac{1}{q}$

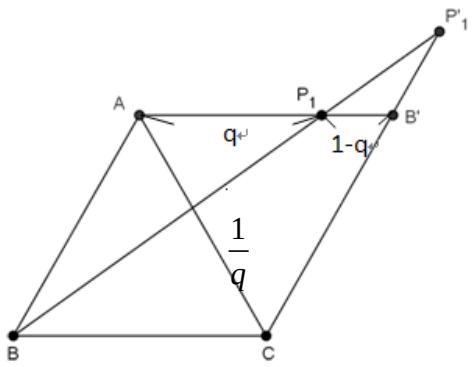


圖 B-8

故圖 B-7 中的 $\frac{1}{q'}=q$，故可得 $q'=\frac{1}{q}$。再將表六中之 q' 以 $\frac{1}{q}$ 代入，得下表七：

	P_n'
交於 $\overline{AB}$	$[\frac{n}{q}]\equiv n \pmod 3$
交於 $\overline{BC}$	$[\frac{n}{q}]\equiv n+2 \pmod 3$
交於 $\overline{CA}$	$[\frac{n}{q}]\equiv n+1 \pmod 3$

最後，故可得如下表八之結果：

	P_n	P_n'
交於 $\overline{AB}$	$[nq]\equiv n+2 \pmod 3$	$[\frac{n}{q}]\equiv n \pmod 3$
交於 $\overline{BC}$	$[nq]\equiv n \pmod 3$	$[\frac{n}{q}]\equiv n+2 \pmod 3$
交於 $\overline{CA}$	$[nq]\equiv n+1 \pmod 3$	$[\frac{n}{q}]\equiv n+1 \pmod 3$

3. 如圖 B-9

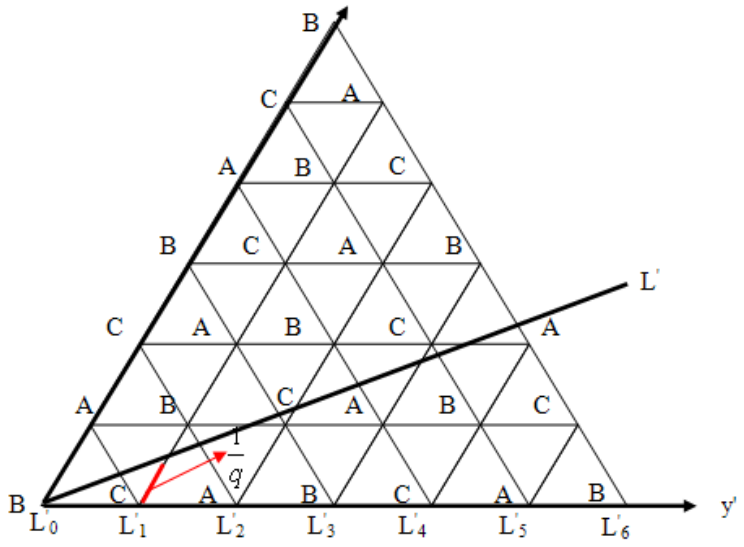


圖 B-9

$$
\text{即}\begin{cases}
\text{若}\left[\dfrac{n}{q}\right]\equiv n(\bmod 3),\text{則}P_n'\text{在}\overline{AB}\text{上}\\
\text{若}\left[\dfrac{n}{q}\right]\equiv n+1(\bmod 3),\text{則}P_n'\text{在}\overline{CA}\text{上}\\
\text{若}\left[\dfrac{n}{q}\right]\equiv n+2(\bmod 3),\text{則}P_n'\text{在}\overline{BC}\text{上}
\end{cases}
$$

附錄 C、$\frac{n}{q+1}$同餘性質之證明

1. 先求 P_n'' 之坐標（如圖 C-1）

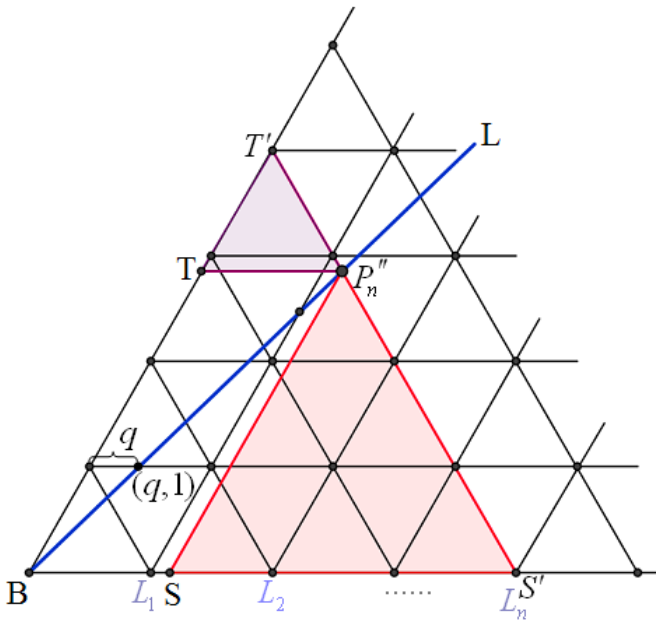


圖 C-1

證明：

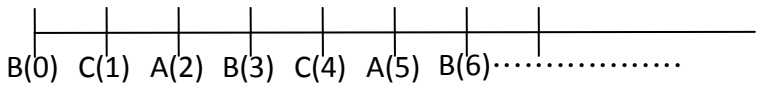
$\because L$ 過 $(0,0)$ 和 $(q,1)$ 兩點　$\therefore L: x-qy=0$　又 $L_n: x+y=n$

解 $\begin{cases} x-qy=0 \\ x+y=n \end{cases}$ 得 $x=\frac{nq}{q+1},\ y=\frac{n}{q+1}$

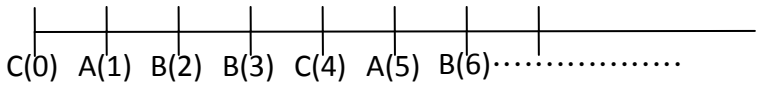
$\therefore P_n''\left(\frac{nq}{q+1},\frac{n}{q+1}\right)$

2. 斜線同餘之證明：

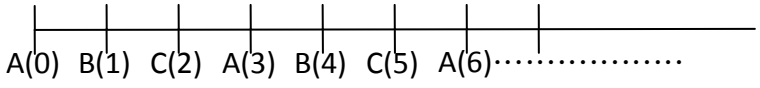
令以 B 開頭之斜線 L_n'' 爲型 1 $\Leftrightarrow n\equiv 0\,(\text{mod } 3)$ $\Leftrightarrow -n\equiv 0\,(\text{mod } 3)$,如 L_0'', L_3'', L_6''



令以 C 開頭之斜線 L_n'' 爲型 2 $\Leftrightarrow n\equiv 1\,(\text{mod } 3)$ $\Leftrightarrow -n\equiv 2\,(\text{mod } 3)$,如 L_1'', L_4'', L_7''



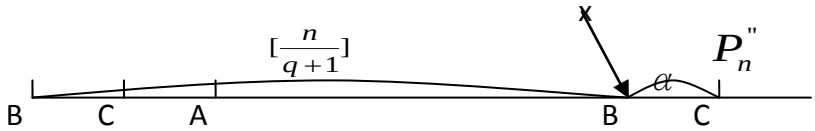
令以 A 開頭之斜線 L_n'' 爲型 3 $\Leftrightarrow n\equiv 2\,(\text{mod } 3)$ $\Leftrightarrow -n\equiv 1\,(\text{mod } 3)$,如 L_2'', L_5'', L_8''



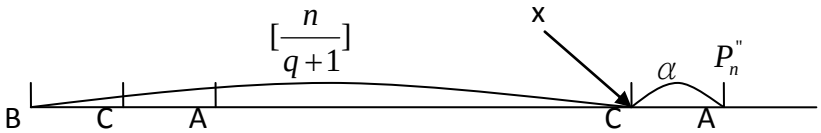
又 L_n'' 上坐標每 3 點爲一循環

(1) 設一線段 $\overline{BP_n''}=\dfrac{n}{q+1}=\left[\dfrac{n}{q+1}\right]+\alpha\,,1>\alpha>0\Leftrightarrow n\equiv 0(\mathrm{mod}3)\Leftrightarrow -n\equiv 0(\mathrm{mod}3)$

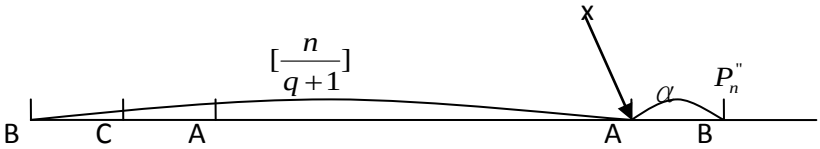
若 $\left[\dfrac{n}{q+1}\right]\equiv 0\equiv n\equiv -n(\mathrm{mod}3)$,則動點 $X(\left[\dfrac{n}{q+1}\right])$ 停在 B 點,故 P_n'' 在 $\overline{BC}$ 上



若 $\left[\dfrac{n}{q+1}\right]\equiv 1\equiv n+1\equiv -n+1(\mathrm{mod}3)$,則動點 $X(\left[\dfrac{n}{q+1}\right])$ 停在 C 點,故 P_n'' 在 $\overline{CA}$ 上

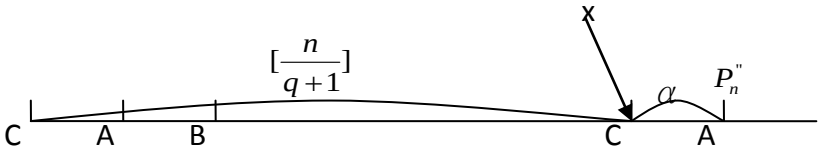


若 $\left[\dfrac{n}{q+1}\right]\equiv 2\equiv n\equiv -n+2(\mathrm{mod}3)$,則動點 $X(\left[\dfrac{n}{q+1}\right])$ 停在 A 點,故 P_n'' 在 $\overline{AB}$ 上

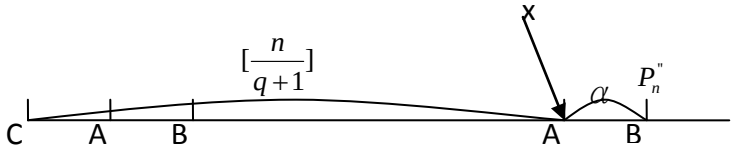


(2) 設一線段 $\overline{CP_n''}=\dfrac{n}{q+1}=\left[\dfrac{n}{q+1}\right]+\alpha\,,1>\alpha>0\Leftrightarrow n\equiv 1(\mathrm{mod}3)\Leftrightarrow -n\equiv 2(\mathrm{mod}3)$

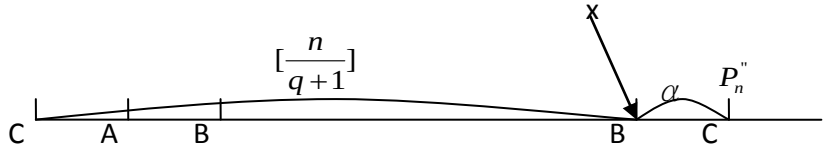
若 $\left[\dfrac{n}{q+1}\right]\equiv 0\equiv n+2\equiv -n+1(\mathrm{mod}3)$,則動點 $X(\left[\dfrac{n}{q+1}\right])$ 停在 C 點,故 P_n'' 在 $\overline{CA}$ 上



若 $\left[\dfrac{n}{q+1}\right]\equiv 1\equiv n\equiv -n+2(\mathrm{mod}3)$,則動點 $X(\left[\dfrac{n}{q+1}\right])$ 停在 A 點,故 P_n'' 在 $\overline{AB}$ 上

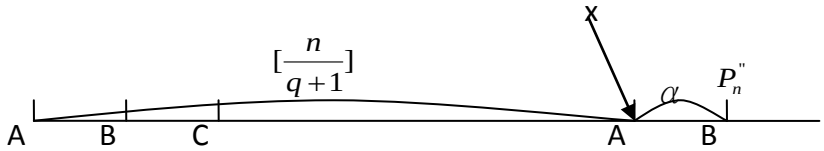


若$\left[\dfrac{n}{q+1}\right]\equiv 2\equiv n+1\equiv -n(\mathrm{mod}3)$,則動點$X(\left[\dfrac{n}{q+1}\right])$停在 B 點,故$P_n''$在$\overline{BC}$上

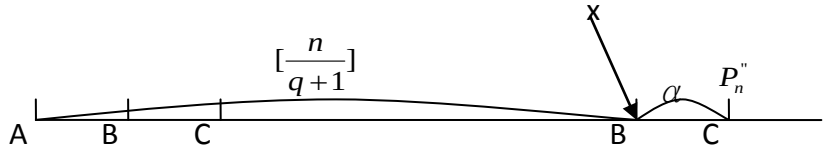


(3) 設一線段$\overline{AP_n''}=\dfrac{n}{q+1}=\left[\dfrac{n}{q+1}\right]+\alpha$,$1>\alpha>0\Leftrightarrow n\equiv 2(\mathrm{mod}3)\Leftrightarrow -n\equiv 1(\mathrm{mod}3)$

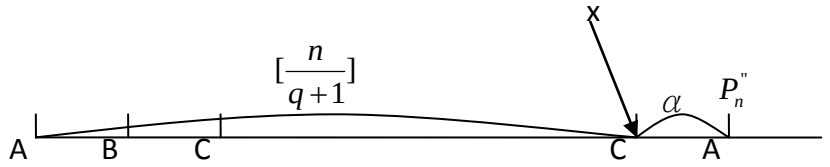
若$\left[\dfrac{n}{q+1}\right]\equiv 0\equiv n+1\equiv -n(\mathrm{mod}3)$,則動點$X(\left[\dfrac{n}{q+1}\right])$停在 A 點,故$P_n''$在$\overline{AB}$上



若$\left[\dfrac{n}{q+1}\right]\equiv 1\equiv n+2\equiv -n+1(\mathrm{mod}3)$,則動點$X(\left[\dfrac{n}{q+1}\right])$停在 B 點,故$P_n''$在$\overline{BC}$上



若$\left[\dfrac{n}{q+1}\right]\equiv 2\equiv n\equiv -n+2(\mathrm{mod}3)$,則動點$X(\left[\dfrac{n}{q+1}\right])$停在 C 點,故$P_n''$在$\overline{CA}$上



由(1)(2)(3)得 $\begin{cases} 若\left[\dfrac{n}{q+1}\right]\equiv -n(\mathrm{mod}3),則P_n''在\overline{BC}上 \\ 若\left[\dfrac{n}{q+1}\right]\equiv -n+1(\mathrm{mod}3),則P_n''在\overline{CA}上 \\ 若\left[\dfrac{n}{q+1}\right]\equiv -n+2(\mathrm{mod}3),則P_n''在\overline{AB}上 \end{cases}$

【評語】040409

對一邊長為1之正三角形,本作品討論由一頂點射到對邊一點,然後持續反射，是否會回到原頂點，諸如路徑的稠密性，能回到原頂點之條件及回到原頂點所需次數，均為探討範圍，題材有趣，討論亦相當完整，是一不錯的作品。