

中華民國第 52 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組 數學科

最佳團隊合作獎

040408

凡走過必留下痕跡

學校名稱：國立武陵高級中學

作者：	指導老師：
高二 藍崧文	吳明霞
高二 陳宗蔚	
高二 吳玟秀	

關鍵詞：類蚘線、重心、軌跡

摘要

在此作品”凡走過必留下痕跡”中，我們探討了任意三角形的重心 G 與其對各邊對稱所得到的三點 G_1 ， G_2 ， G_3 形成的軌跡。使三角形二頂點固定，一頂點於單位圓上繞行，並探討重心 G ， G_1 ， G_2 ， G_3 這些點形成的軌跡。我們發現了許多有趣的性質，在這些軌跡中我們找出了近似於蚶線、心臟線、類似彎月等各種奇妙的現象，我們深感有趣，因此繼續深入探討下發現了許多有趣的結論。

壹、 研究動機

數學課討論三角形各心性質時，我們突然想試試看各心對三角形各邊進行對稱時，是否具有特殊性質，最後我們發現直角三角形重心對各邊對稱所得到的三點，連線形成三角形後，此三角形兩邊中點和直角三角形重心共線。發現此現象後，我們運用 GeoGebra 接續探討各種三角形重心 G 與其對各邊對稱所得到的三點 G_1 ， G_2 ， G_3 的各種性質。

貳、 研究目的

探討 $\triangle ABC$ 在以下條件 G ， G_1 ， G_2 ， G_3 軌跡：

不失一般性令圓 O 為單位圓，圓心位於原點，且 A 點位於 $(-1,0)$ ， A 、 B 、 C 為三相異點。

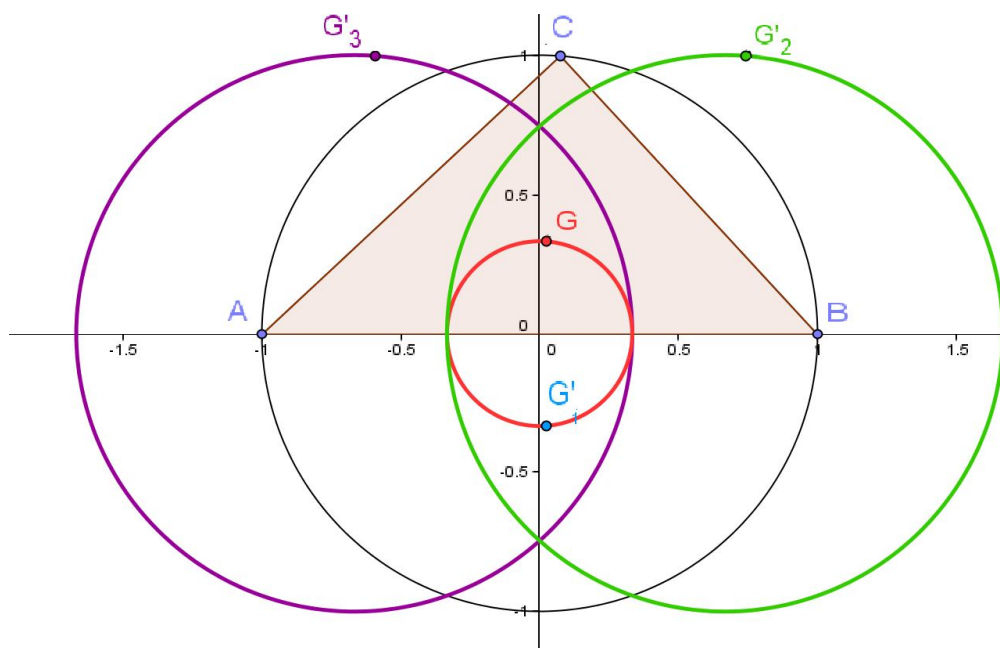
- 一、 B 點位於 $(1,0)$ ， C 點在單位圓 O 上繞行。(恆為直角三角形)
- 二、 B 點位於 x 軸上且在單位圓 O 內， C 點在圓 O 上繞行。
- 三、 B 點位於 x 軸上且在單位圓 O 外， C 點在圓 O 上繞行。
- 四、 B 點不位於 x 軸上且在單位圓 O 上， C 點在圓 O 上繞行。
- 五、 B 點不位於 x 軸上且在單位圓 O 內， C 點在圓 O 上繞行。
- 六、 B 點不位於 x 軸上且在單位圓 O 外， C 點在圓 O 上繞行。
- 七、直角三角形之討論。
- 八、等腰三角形之討論。

參、 研究設備及器材

- 一、筆
- 二、紙
- 三、電腦
- 四、GeoGebra
- 五、投影片
- 六、參考資料

肆、研究過程或方法

一、B點位於(1,0)，C點在單位圓O上繞行。(恆為直角三角形)



(一) G, G_1, G_2, G_3 軌跡為圓形

(二) 證明 G, G_1, G_2, G_3 軌跡為圓形：

不失一般性，令 $A(-1,0), B(1,0), C(\cos\theta, \sin\theta)$ ，

1. 重心 G 軌跡為圓形：

由於 $A(-1,0), B(1,0), C(\cos\theta, \sin\theta)$ ，

故重心 G 點座標為 $(\frac{\cos\theta}{3}, \frac{\sin\theta}{3})$ ，

顯然重心 G 所形成的軌跡為一圓，

其圓心為 $(0,0)$ ，半徑為 $\frac{1}{3}$ 。

2. G_1 軌跡為圓形：

已知 G 點軌跡為圓，由於對稱軸為 x 軸不改變，故 G_3 軌跡必定為圓，

其 G_1 點座標為 $(\frac{\cos\theta}{3}, -\frac{\sin\theta}{3})$ ，

因此重心 G, G_3 之軌跡為同一圓。

3. G_2 軌跡為圓形：

已知 G 點座標為 $(\frac{\cos\theta}{3}, \frac{\sin\theta}{3})$ ，且 $\overline{CG} = \frac{2}{3}$ ，

令 $\overline{GG_2}$ 交 $\overline{BC}$ 於 H 點，

則 $\overline{CH} = \frac{1}{3}\overline{BC} = \frac{1}{3}\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = \frac{\sqrt{2-2\cos\theta}}{3}$

$\overline{GH} = \sqrt{\overline{CG}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{\frac{2^2}{3^2} - (\frac{\sqrt{2-2\cos\theta}}{3})^2} = \frac{\sqrt{2+2\cos\theta}}{3}$

$$\text{故 } \overline{GG_2} = \frac{2\sqrt{2+2\cos\theta}}{3},$$

$$\text{又 } \frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|} = \left(\frac{\cos\theta+1}{\sqrt{2+2\cos\theta}}, \frac{\sin\theta}{\sqrt{2+2\cos\theta}} \right),$$

$$\begin{aligned}\text{則 } G_2 \text{ 點座標} &= G \text{ 點座標} + |\overline{GG_2}| \frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|} \\ &= \left(\frac{\cos\theta}{3}, \frac{\sin\theta}{3} \right) + \frac{2\sqrt{2+2\cos\theta}}{3} \left(\frac{\cos\theta+1}{\sqrt{2+2\cos\theta}}, \frac{\sin\theta}{\sqrt{2+2\cos\theta}} \right) \\ &= \left(\cos\theta + \frac{2}{3}, \sin\theta \right)\end{aligned}$$

因此 G_2 點座標為 $(\cos\theta + \frac{2}{3}, \sin\theta)$ ，

顯然 G_2 所形成的軌跡為一圓，

其圓心為 $(\frac{2}{3}, 0)$ ，半徑為 1。

4. G_3 軌跡為圓形：

已知 G 點座標為 $(\frac{\cos\theta}{3}, \frac{\sin\theta}{3})$ ，且 $\overline{CG} = \frac{2}{3}$ ，

令 $\overline{GG_3}$ 交 $\overline{AC}$ 於 H' 點，

$$\text{則 } \overline{CH'} = \frac{1}{3}\overline{AC} = \frac{1}{3}\sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = \frac{\sqrt{2+2\cos\theta}}{3}$$

$$\overline{GH'} = \sqrt{\overline{CG}^2 - \overline{CH'}^2} = \sqrt{\frac{2^2}{3} - \left(\frac{\sqrt{2+2\cos\theta}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2-2\cos\theta}}{3}$$

$$\text{故 } \overline{GG_3} = \frac{2\sqrt{2-2\cos\theta}}{3},$$

$$\text{又 } \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|} = \left(\frac{\cos\theta-1}{\sqrt{2-2\cos\theta}}, \frac{\sin\theta}{\sqrt{2-2\cos\theta}} \right),$$

$$\begin{aligned}\text{則 } G_3 \text{ 點座標} &= G \text{ 點座標} + |\overline{GG_3}| \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|} \\ &= \left(\frac{\cos\theta}{3}, \frac{\sin\theta}{3} \right) + \frac{2\sqrt{2-2\cos\theta}}{3} \left(\frac{\cos\theta-1}{\sqrt{2-2\cos\theta}}, \frac{\sin\theta}{\sqrt{2-2\cos\theta}} \right) \\ &= \left(\cos\theta - \frac{2}{3}, \sin\theta \right)\end{aligned}$$

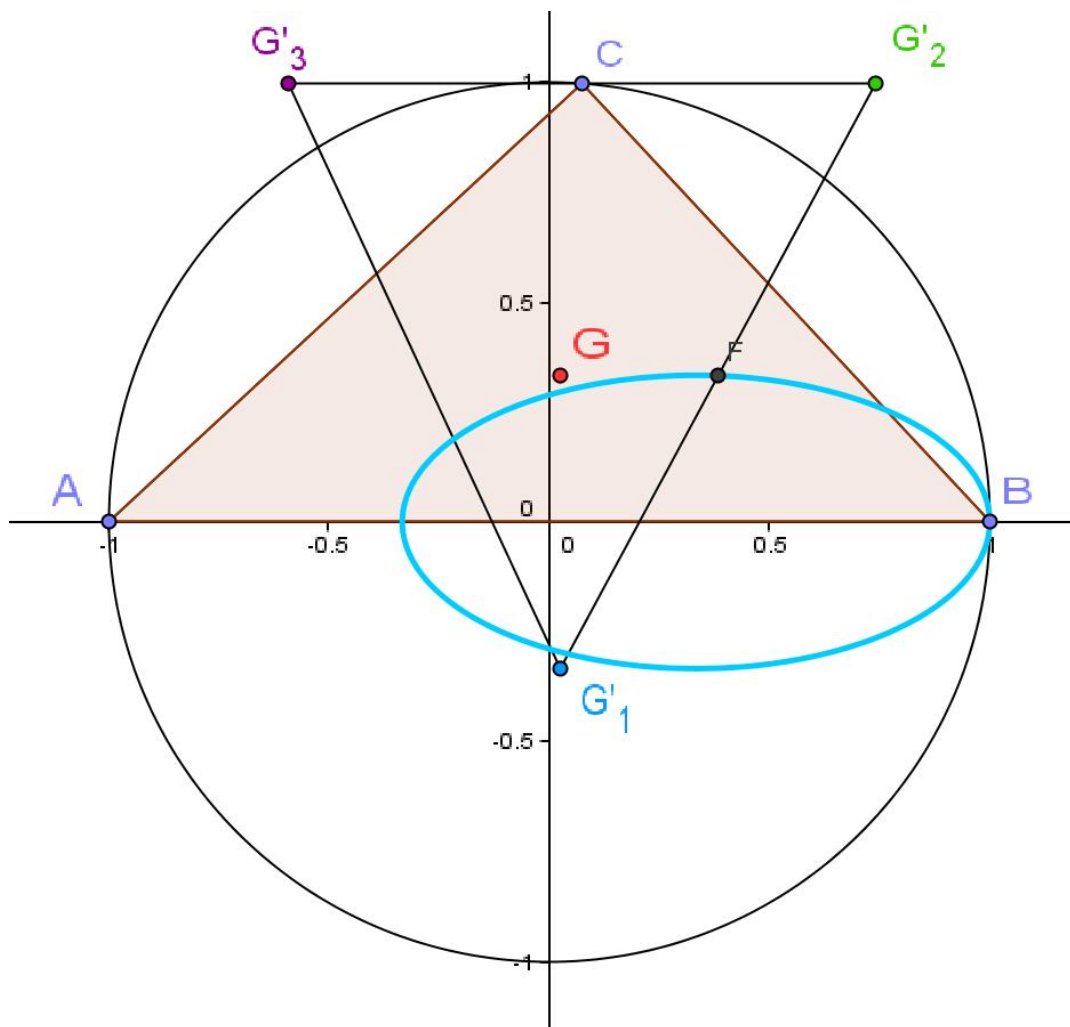
因此 G_3 點座標為 $(\cos\theta - \frac{2}{3}, \sin\theta)$ ，

顯然 G_3 所形成的軌跡為一圓，

其圓心為 $(-\frac{2}{3}, 0)$ ，半徑為 1。

5. 經由上述證明，發現 G_2 ， G_3 所形成的軌跡圓全等。

(三) $\overline{G_1G_2}$ 中點 F 之軌跡為橢圓：



(四) 證明 $\overline{G_1G_2}$ 中點 F 之軌跡為橢圓：

不失一般性，令 $A(-1, 0)$ ， $B(1, 0)$ ， $C(\cos\theta, \sin\theta)$ ，

則由 G_1 點座標為 $(\frac{\cos\theta}{3}, -\frac{\sin\theta}{3})$ ， G_2 點座標為 $(\cos\theta + \frac{2}{3}, \sin\theta)$ ，

可得 F 點座標 $= \frac{\overline{G_1G_2}}{2}$

$$= \frac{\left[\left(\frac{\cos\theta}{3}, -\frac{\sin\theta}{3}\right) + \left(\cos\theta + \frac{2}{3}, \sin\theta\right)\right]}{2}$$

$$= \left(\frac{2\cos\theta}{3} + \frac{1}{3}, \frac{\sin\theta}{3}\right)$$

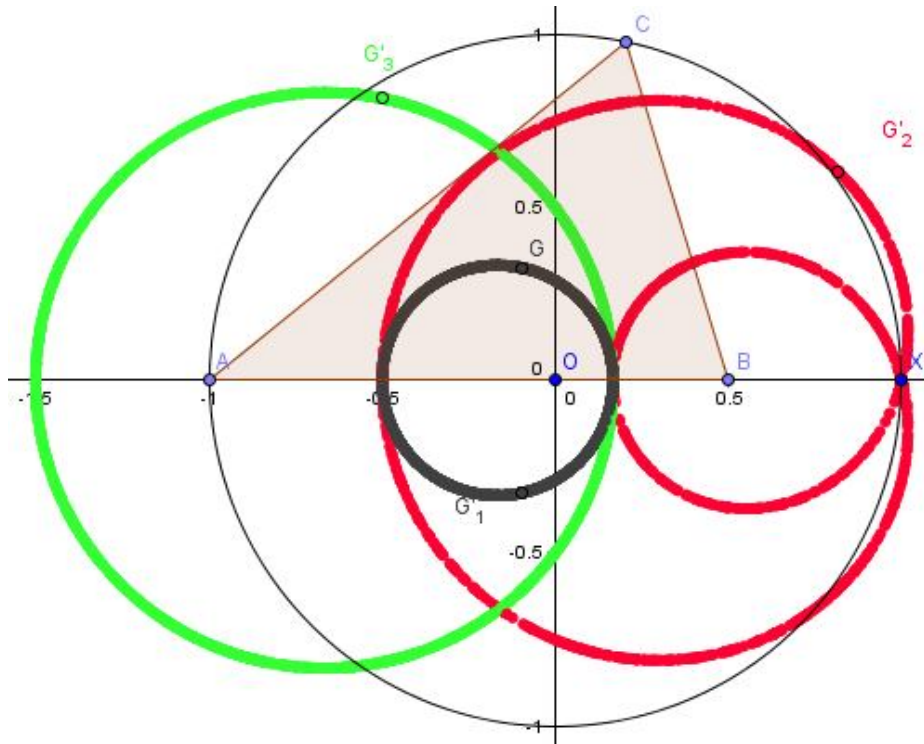
顯然 F 所形成的軌跡為一橢圓，

其橢圓中心為 $(\frac{1}{3}, 0)$ ，兩焦點分別為 $(\frac{1+\sqrt{3}}{3}, 0)$ ， $(\frac{1-\sqrt{3}}{3}, 0)$ ，

半長軸 $a = \frac{2}{3}$ ，半短軸 $b = \frac{1}{3}$ 。

(五) 同理 $\overline{G_1G_3}$ 中點之軌跡亦為橢圓。

二、B點位於x軸上且在單位圓O內，C點在圓O上繞行。



(一) G, G_1, G_3 之軌跡為圓形。

(二) 證明 G, G_1, G_3 之軌跡為圓形：

不失一般性，令 $A(-1,0), B(\alpha,0), C(\cos\theta, \sin\theta)$ ，其中 $-1 < \alpha < 1$ 。

1. 重心 G 軌跡為圓形：

由於 $A(-1,0), B(\alpha,0), C(\cos\theta, \sin\theta)$ ，

固重心 G 點座標為 $(\frac{\alpha-1+\cos\theta}{3}, \frac{\sin\theta}{3})$ ，

顯然重心 G 所形成的軌跡為一圓，

其圓心為 $(\frac{\alpha-1}{3}, 0)$ ，半徑為 $\frac{1}{3}$ 。

2. G_1 軌跡為圓形：

已知 G 點軌跡為圓，由於對稱軸為 x 軸不改變，固 G_3 軌跡必定為圓，

其 G_1 點座標為 $(\frac{\alpha-1+\cos\theta}{3}, \frac{-\sin\theta}{3})$ ，

因此重心 G, G_3 之軌跡為同一圓。

3. G_3 軌跡為圓形：

已知 G 點座標為 $(\frac{\alpha-1+\cos\theta}{3}, \frac{\sin\theta}{3})$ ，

又 $\overrightarrow{AC}$ 方程式為： $y = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}x + \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ ，

故 $\overrightarrow{GG_3}$ 方程式為： $y = -\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}x + \frac{1+\cos\theta}{3\sin\theta}\alpha$ ，

$$\overrightarrow{AC} \text{與} \overrightarrow{GG_3} \text{之交點為} y = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}x + \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = -\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}x + \frac{1+\cos\theta}{3\sin\theta}\alpha,$$

$$\rightarrow \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}x + \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = -\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}x + \frac{1+\cos\theta}{3\sin\theta}\alpha$$

$$\rightarrow \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}x + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}x = \frac{1+\cos\theta}{3\sin\theta}\alpha - \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\rightarrow \frac{\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2}{\sin\theta(1+\cos\theta)}x = \frac{(1+\cos\theta)^2\alpha - 3\sin^2\theta}{3\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$\rightarrow \frac{2(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)}x = \frac{(1+\cos\theta)^2\alpha - 3(1-\cos\theta)^2}{3\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$\rightarrow \frac{2}{\sin\theta}x = \frac{(1+\cos\theta)(\alpha + \alpha\cos\theta - 3 + 3\cos\theta)}{3\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$\rightarrow x = \frac{(\alpha-3) + (\alpha+3)\cos\theta}{6}$$

$$\text{代回} y = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}x + \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\text{得} y = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \times \frac{(\alpha-3) + (\alpha+3)\cos\theta}{6} + \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \times \left[\frac{(\alpha-3) + (\alpha+3)\cos\theta}{6} + 1 \right]$$

$$= \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \times \frac{(\alpha+3)(1+\cos\theta)}{6}$$

$$= \frac{(\alpha+3)\sin\theta}{6}$$

$$\text{故} G_3 \text{點座標為} \left(\left[\frac{(\alpha-3) + (\alpha+3)\cos\theta}{6} \times 2 - \frac{\alpha-1+\cos\theta}{3} \right], \left[\frac{(\alpha+3)\sin\theta}{6} \times 2 - \frac{\sin\theta}{3} \right] \right)$$

$$\rightarrow \left(\frac{(\alpha+2)\cos\theta - 2}{3}, \frac{(\alpha+2)\sin\theta}{3} \right)$$

顯然 G_3 所形成的軌跡為一圓，

其圓心為 $\left(\frac{-2}{3}, 0\right)$ ，半徑為 $\frac{(\alpha+2)}{3}$ 。

(三) 觀察重心 G 對 $\overline{BC}$ 作對稱點 G_2 之軌跡，發現其近似蚌線。

(四) G_2 之參數式：

$$\text{已知} G \text{點座標為} \left(\frac{\alpha-1+\cos\theta}{3}, \frac{\sin\theta}{3} \right),$$

$$\text{又} \overrightarrow{BC} \text{方程式為: } y = \frac{\sin\theta}{\cos\theta - \alpha}x - \frac{\alpha\sin\theta}{\cos\theta - \alpha},$$

$$\text{故} \overrightarrow{GG_2} \text{方程式為: } y = \frac{\alpha - \cos\theta}{\sin\theta}x + \frac{1 - \alpha(\alpha-1) - \cos\theta}{3\sin\theta},$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BC} \text{ 與 } \overrightarrow{GG_2} \text{ 之交點為 } y &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta-\alpha}x - \frac{\alpha\sin\theta}{\cos\theta-\alpha} = \frac{\alpha-\cos\theta}{\sin\theta}x + \frac{1-\alpha(\alpha-1)-\cos\theta}{3\sin\theta} \\
&\rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta-\alpha}x - \frac{\alpha\sin\theta}{\cos\theta-\alpha} = \frac{\alpha-\cos\theta}{\sin\theta}x + \frac{1-\alpha(\alpha-1)-\cos\theta}{3\sin\theta} \\
&\rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta-\alpha}x - \frac{\alpha-\cos\theta}{\sin\theta}x = \frac{\alpha\sin\theta}{\cos\theta-\alpha} + \frac{1-\alpha(\alpha-1)-\cos\theta}{3\sin\theta} \\
&\rightarrow \frac{\sin^2\theta+(\cos\theta-\alpha)^2}{\sin\theta(\cos\theta-\alpha)}x = \frac{3\alpha\sin^2\theta+(1-\alpha(\alpha-1)-\cos\theta)(\cos\theta-\alpha)}{3\sin\theta(\cos\theta-\alpha)} \\
&\rightarrow x = \frac{3\alpha\sin^2\theta+(1-\alpha(\alpha-1)-\cos\theta)(\cos\theta-\alpha)}{3(\sin^2\theta+(\cos\theta-\alpha)^2)} \\
&\text{代回 } y = \frac{\sin\theta}{\cos\theta-\alpha}x - \frac{\alpha\sin\theta}{\cos\theta-\alpha} \\
&\text{得 } y = \frac{\sin\theta}{\cos\theta-\alpha} \times \frac{3\alpha\sin^2\theta+(1-\alpha(\alpha-1)-\cos\theta)(\cos\theta-\alpha)}{3(\sin^2\theta+(\cos\theta-\alpha)^2)} - \frac{\alpha\sin\theta}{\cos\theta-\alpha} \\
&= \frac{\sin\theta}{\cos\theta-\alpha} \times \left[\frac{3\alpha\sin^2\theta+(1-\alpha(\alpha-1)-\cos\theta)(\cos\theta-\alpha)}{3(\sin^2\theta+(\cos\theta-\alpha)^2)} - \alpha \right] \\
&= \frac{\sin\theta}{\cos\theta-\alpha} \times \frac{(1-\alpha(\alpha-1)-\cos\theta)(\cos\theta-\alpha)-3\alpha(\cos\theta-\alpha)^2}{3(\sin^2\theta+(\cos\theta-\alpha)^2)} \\
&= \frac{\sin\theta(1-\alpha^2-(3\alpha+1)(\cos\theta-\alpha))}{3(\sin^2\theta+(\cos\theta-\alpha)^2)} \\
&\text{故 } G_2 \text{ 點座標為 } \begin{cases} x = \frac{3\alpha\sin^2\theta+(1-\alpha(\alpha-1)-\cos\theta)(\cos\theta-\alpha)}{3(\sin^2\theta+(\cos\theta-\alpha)^2)} \times 2 - \frac{\alpha-1+\cos\theta}{3} \\ y = \frac{\sin\theta(1-\alpha^2-(3\alpha+1)(\cos\theta-\alpha))}{3(\sin^2\theta+(\cos\theta-\alpha)^2)} \times 2 - \frac{\sin\theta}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

(五) 蚶線定義：

給定一個圓O及其圓周上一定點A，另給定一個正數k。設過A點的任意直線與給定圓O交於於另一點M，且直線AM上恰有兩點P與P'滿足 $\overline{MP} = \overline{MP'} = k$ ，所有此種P與P'點所成的圖形稱為蚶線，其中稱圓O為基圓、A點為基點且k為常數。即以 $r = 2a\cos\theta$ 為基圓、極點為基點、k為常數的蚶線極坐標方程式為

$$r = 2a\cos\theta + k, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

蚶線的形狀，隨著k與基圓之半徑的大小關係而有所不同。設基圓的半徑為a，若 $k > 2a$ ，則當M點在基圓上時，滿足 $\overline{MP} = \overline{MP'} = k$ 的點P與P'必都在基圓的外部，因此，在 $k > 2a$ 的情形中，蚶線上的點全都在其基圓的外部，而且蚶線沒有通過它的基點A。

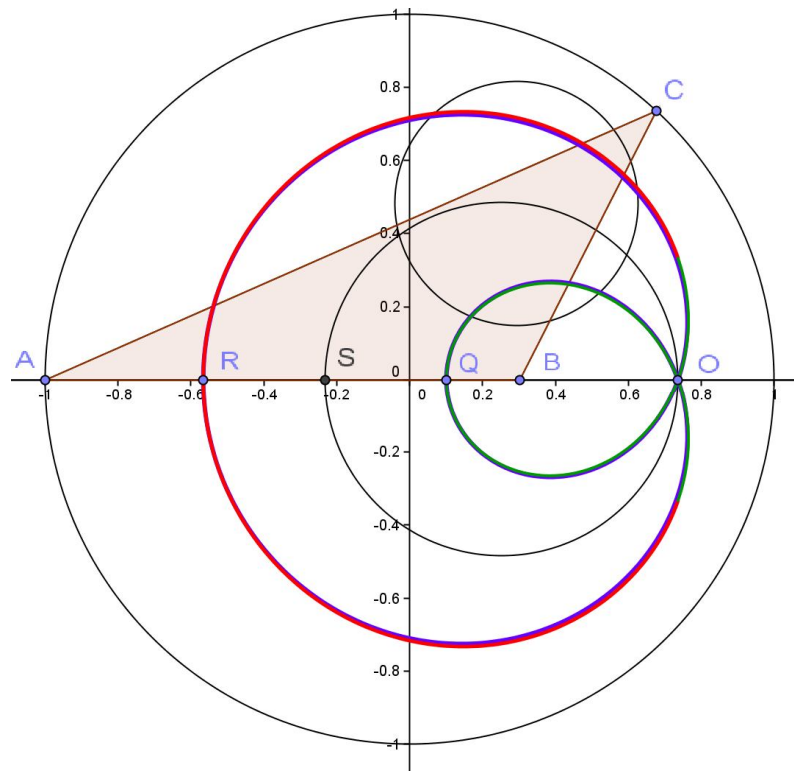
在 $k < 2a$ 的情形中，可以在基圓上找到兩個點M₁與M₂，使 $\overline{AM_1} = \overline{AM_2} = k$ 。於是，蚶線與直線AM₁或AM₂的兩個交點中，有一個交點為A點，表示基點A在蚶線上，即在 $k < 2a$ 的情形中，蚶線不僅通過基點A也通過基圓的內部。

當 $k = 2a$ 時，所得的蚶線是以圓O為基圓、點A為歧點的心臟線，此時的蚶線只通過基點A卻沒有通過基圓的內部。

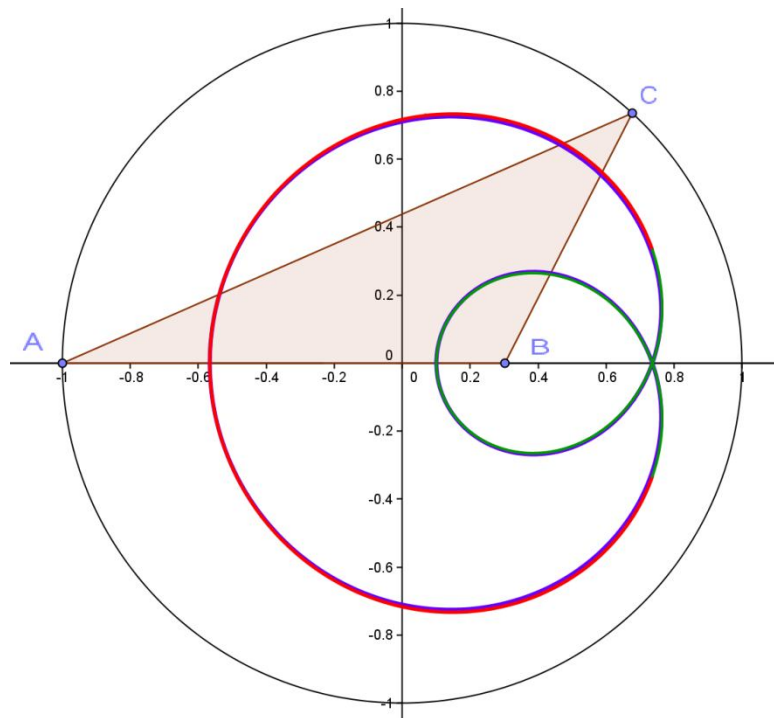
(六) 反推基圓：

1. 因為軌跡不是由蚌線標準定義繪圖而成，所以只能猜測跟蚌線或許有些許關係，所以我們用軌跡反推基圓，重新繪出蚌線和先前軌跡進行比較。

(下圖為反推蚌線之作圖)



2. 作法：軌跡上取與x軸相交之點，由右至左分別為O、Q、R，以 $\overline{RQ}$ 中點S為圓心， $\overline{RS}$ 為半徑作圓。以 $\overline{SO}$ 中點B為圓心， $\overline{RB}$ 為半徑作圓，此圓為基圓，接著以蚌線作圖方式得到的蚌線和原軌跡有極相似的路徑。



(上圖)紅綠色線段為 G_2 之軌跡，紫色軌跡為反推基圓所得之蚌線圖形

(七)極座標表示法:

(I) 假設 $\overline{OB} = x$ $\overline{BC} = y$ $\overline{OC} = R$ $\angle CBO = \theta^\circ$

由餘弦定理: $R^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta$

$$y = \frac{2x \cos \theta \pm \sqrt{4x^2 \cos^2 \theta - 4(x^2 - R^2)}}{2}$$

$\because R > x$ 故 SSA 有唯一 y 值 $\therefore$ 負不合

$$y = \frac{2x \cos \theta + \sqrt{4x^2 \cos^2 \theta - 4(x^2 - R^2)}}{2}$$

$$= x \cos \theta + \sqrt{R^2 - x^2 \sin^2 \theta}$$

(II) 接著 $\overline{AB}$ 對稱 $\overline{BC}$ 得 $\overline{CA'}$, 因為 $R - x =$ 定值, 使 θ 與之相符。

極座標方程: $3r = y - 2(R - x) \sin \theta = 3x \cos \theta - 2R \cos \theta - \sqrt{R^2 - x^2 \sin^2 \theta}$

$$r = \frac{3x - 2R}{3} \cos \theta -$$

$$\frac{1}{3} \sqrt{R^2 - x^2 \sin^2 \theta}$$

(III) 極座標原點 $(\frac{R-4x}{3}, 0)$

同理

(I) 假設 $\overline{OB} = x$ $\overline{BC} = y$ $\overline{OC} = R$ $\angle CBD = \theta^\circ$

$$y = -x \cos \theta + \sqrt{R^2 - x^2 \sin^2 \theta}$$

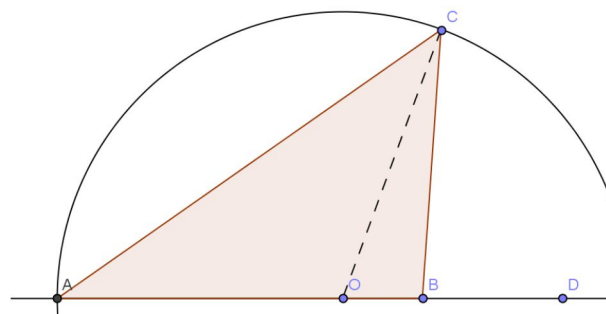
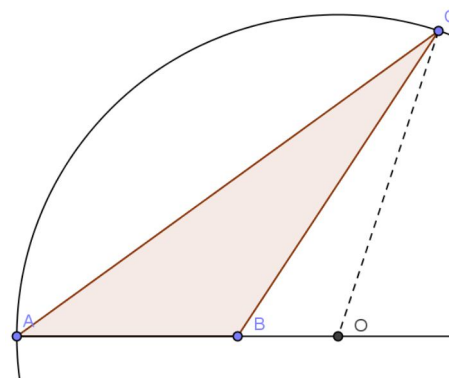
(II) 接著 $\overline{AB}$ 對稱 $\overline{BC}$ 得 $\overline{CA'}$, 因為 $R + x =$ 定值, 使 θ 與之相符。

極座標方程: $3r = y - 2(R + x) \cos \theta$

$$= -3x \cos \theta - 2R \cos \theta + \sqrt{R^2 - x^2 \sin^2 \theta}$$

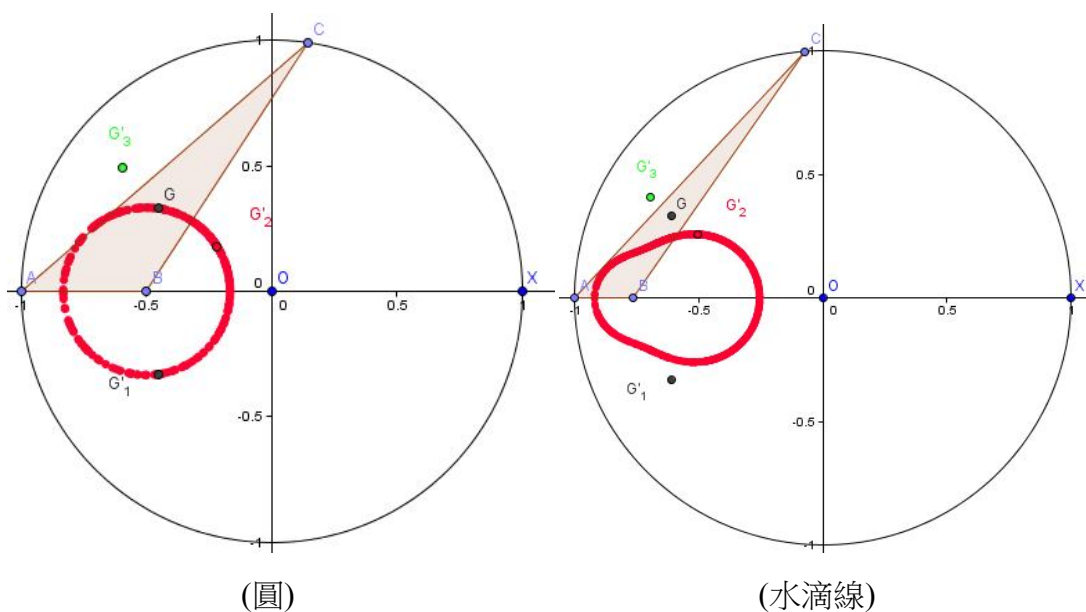
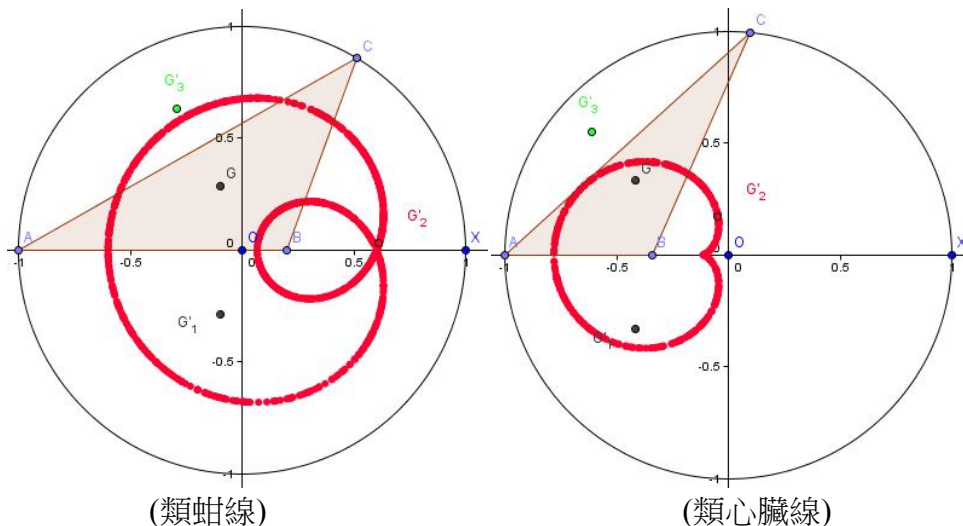
$$r = \frac{-3x - 2R}{3} \cos \theta + \frac{1}{3} \sqrt{R^2 - x^2 \sin^2 \theta}$$

(III) 極座標原點 $(\frac{R+4x}{3}, 0)$



從以上所得之極座標方程, 我們和蚶線極座標方程: $r = a \cos t + b$ 比較, 因為類蚶線存在 $\frac{1}{3} \sqrt{R^2 - x^2 \sin^2 \theta}$ 中角度的影響, 在 $x=0$ 時, 角度的影響會消失並可將 R 併入前項, 此時圖形即為蚶線, 在 $x \neq 0$ 圖形並不是蚶線, 而是我們所命名與蚶線圖形極為相似的類蚶線, 而且在 $R \gg x$ 時, 圖形會越近似蚶線。

(八) 軌跡圖：



(九) 證明在 $\alpha = -0.5$ 時， G_2 軌跡為圓，且重心 G ， G_1 ， G_2 軌跡共圓：

重心 G 之軌跡方程式為 $\left(x - \frac{\alpha-1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{9}$ ，

將 $\alpha = -0.5$ 代入，因此軌跡方程式為 $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{9}$ ，

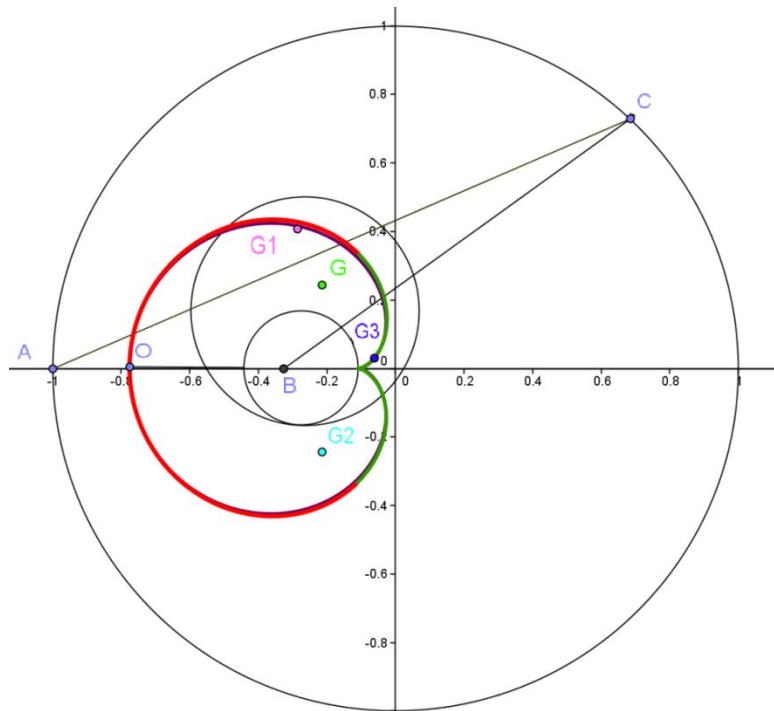
$$\begin{aligned} \text{又 } G_2 \text{ 點座標為 } \begin{cases} x = \frac{3\alpha \sin^2 \theta + (1-\alpha)(\alpha-1) - \cos \theta (\cos \theta - \alpha)}{3(\sin^2 \theta + (\cos \theta - \alpha)^2)} \times 2 - \frac{\alpha-1+\cos \theta}{3} \\ y = \frac{\sin \theta (1-\alpha^2 - (3\alpha+1)(\cos \theta - \alpha))}{3(\sin^2 \theta + (\cos \theta - \alpha)^2)} \times 2 - \frac{\sin \theta}{3} \end{cases} \\ \rightarrow \begin{cases} x = \frac{-(2\cos \theta + 7)}{6(5+4\cos \theta)} \\ y = \frac{\sin \theta}{(5+4\cos \theta)} \end{cases}, \text{ 將其代入 } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \left[\frac{5\cos \theta + 4}{3(5+4\cos \theta)}\right]^2 + \left[\frac{\sin \theta}{5+4\cos \theta}\right]^2 = \frac{25\cos^2 \theta + 40\cos \theta + 16 + (9-9\cos^2 \theta)}{9(5+4\cos \theta)^2} = \frac{(5+4\cos \theta)^2}{9(5+4\cos \theta)^2} = \frac{1}{9}$$

顯然 G_2 點符合重心 G 之軌跡方程式，因此重心 G ， G_1 ， G_2 軌跡共圓。

(十) 反推心臟線之基圓：

1.



2.作法：軌跡上取與x軸相交之點，

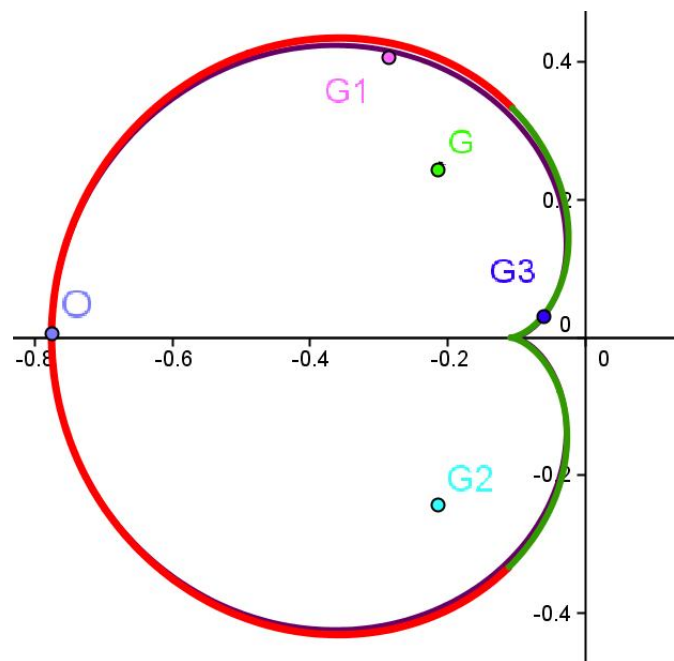
由於根據蚶線的定義知， $r = 2a\cos\theta + k$ ，

最右方為極座標原點，中間座標與原點距離為 $(2a-k)$ ，

左方則為 $(2a+k)$ ，若為心臟線時， $2a=k$ ，即中間點與右方點重合。

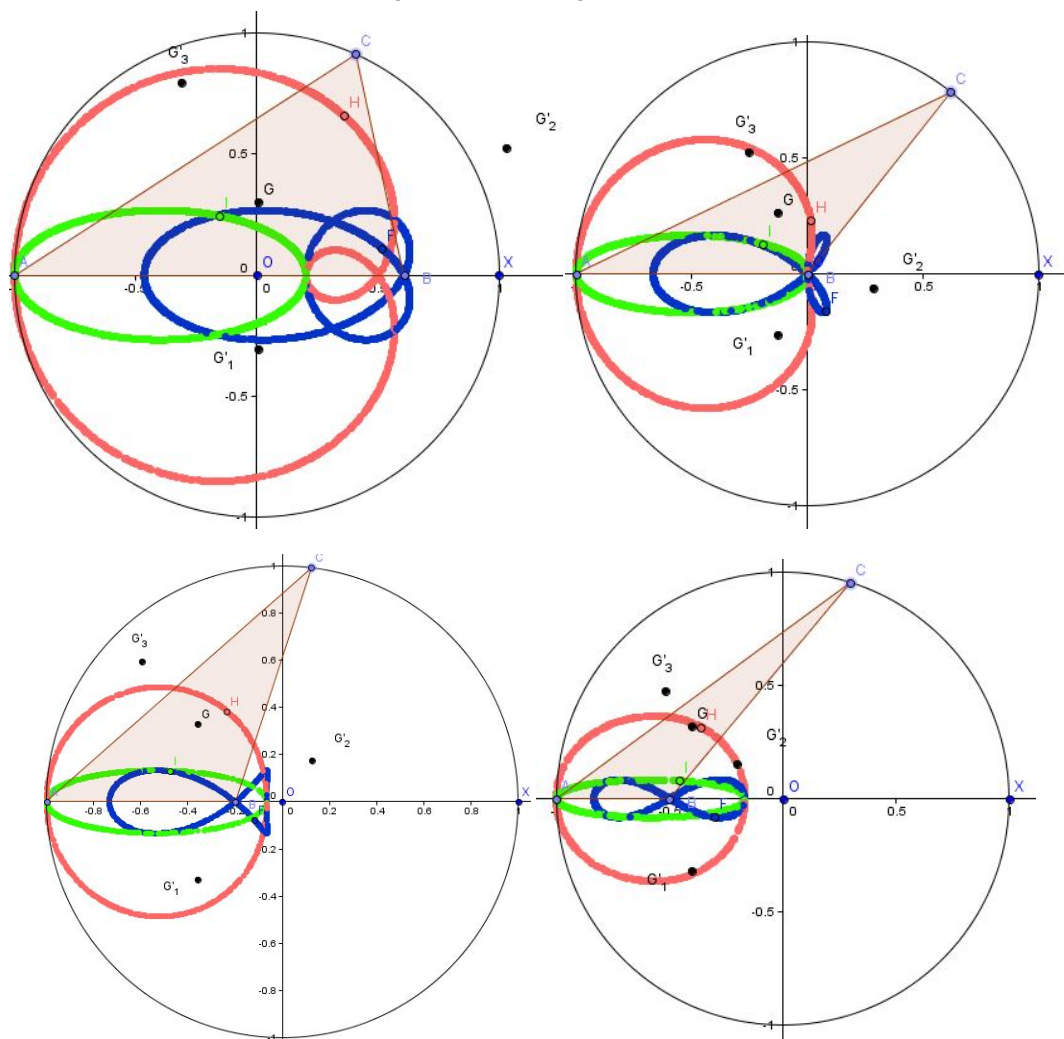
作圖得 $2a$ 跟 k ，再由蚶線的作圖法得到以此定義出的蚶線，

與原探討的軌跡相異不大。



(上圖)紅綠色線段為 G_2 之軌跡，紫色軌跡為反推基圓所得之心臟線圖形

(十一) $\overline{G_1G_2}$ 中點 F, $\overline{G_1G_3}$ 中點 I, $\overline{G_2G_3}$ 中點 H 之軌跡圖：



1.藉由移動B點，觀察 $\overline{G_1G_2}$ 中點 F, $\overline{G_1G_3}$ 中點 I, $\overline{G_2G_3}$ 中點 H 之軌跡發現：

- (1) $\overline{G_1G_2}$ 中點 F 軌跡形狀有顯著的變化，由 4 塊區域漸變成 2 塊區域。
- (2) $\overline{G_1G_3}$ 中點 I 軌跡恆為橢圓。
- (3) $\overline{G_2G_3}$ 中點 H 軌跡變化類似 G_2 的軌跡變化。

2.證明 $\overline{G_1G_3}$ 中點 I 之軌跡恆為橢圓：

已知 G_1 點座標為 $(\frac{\alpha-1+\cos\theta}{3}, \frac{-\sin\theta}{3})$ ， G_3 點座標為 $(\frac{(\alpha+2)\cos\theta-2}{3}, \frac{(\alpha+2)\sin\theta}{3})$

故 $\overline{G_1G_3}$ 中點 I 之點座標為 $(\frac{\frac{\alpha-1+\cos\theta}{3} + \frac{(\alpha+2)\cos\theta-2}{3}}{2}, \frac{\frac{-\sin\theta}{3} + \frac{(\alpha+2)\sin\theta}{3}}{2})$

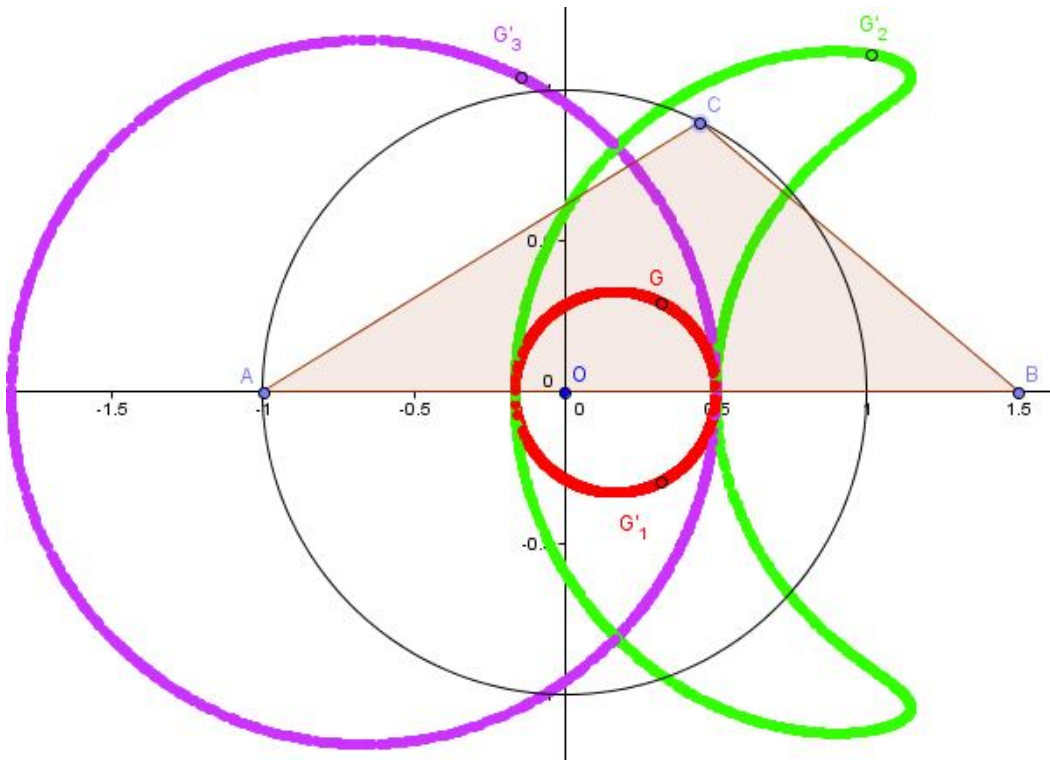
$$\rightarrow (\frac{(\alpha+3)\cos\theta + (\alpha-3)}{6}, \frac{(\alpha+1)\sin\theta}{6})$$

顯然點 I 所形成的軌跡為一橢圓，

其橢圓中心為 $(\frac{(\alpha-3)}{6}, 0)$ ，兩焦點分別為 $(\frac{(\alpha-3)+2\sqrt{\alpha+2}}{6}, 0)$ ， $(\frac{(\alpha-3)-2\sqrt{\alpha+2}}{6}, 0)$ ，

半長軸 $a = \frac{(\alpha+3)}{6}$ ，半短軸 $b = \frac{(\alpha+1)}{6}$ 。

三、B點位於x軸上且在單位圓O外，C點在圓O上繞行。



(一) G, G_1, G_3 之軌跡為圓形。

(二) 證明 G, G_1, G_3 之軌跡為圓形：

不失一般性，令 $A(-1, 0)$ ， $B(\alpha, 0)$ ， $C(\cos\theta, \sin\theta)$ ，其中 $\alpha > 1$ 或 $\alpha < -1$ 。

1. 重心 G 軌跡為圓形：

由於 $A(-1, 0)$ ， $B(\alpha, 0)$ ， $C(\cos\theta, \sin\theta)$ ，

固重心 G 點座標為 $(\frac{\alpha-1+\cos\theta}{3}, \frac{\sin\theta}{3})$ ，

顯然重心 G 所形成的軌跡為一圓，

其圓心為 $(\frac{\alpha-1}{3}, 0)$ ，半徑為 $\frac{1}{3}$ 。

2. G_1 軌跡為圓形：

已知 G 點軌跡為圓，由於對稱軸為 x 軸不改變，固 G_3 軌跡必定為圓，

其 G_1 點座標為 $(\frac{\alpha-1+\cos\theta}{3}, \frac{-\sin\theta}{3})$ ，

因此重心 G 、 G_3 之軌跡為同一圓。

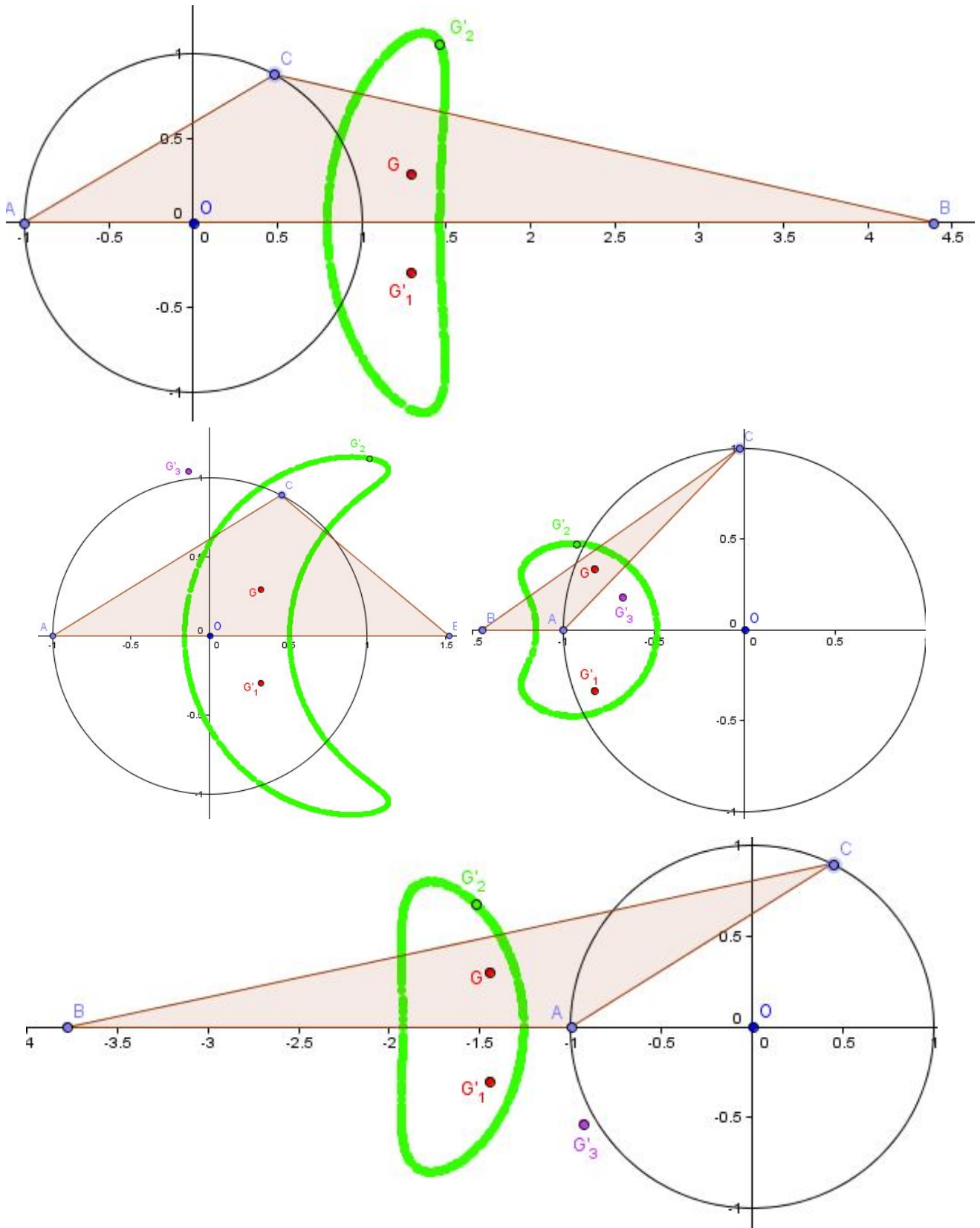
3. G_3 軌跡為圓形：

故 G_3 點座標為 $(\frac{(\alpha+2)\cos\theta-2}{3}, \frac{(\alpha+2)\sin\theta}{3})$

顯然 G_3 所形成的軌跡為一圓，

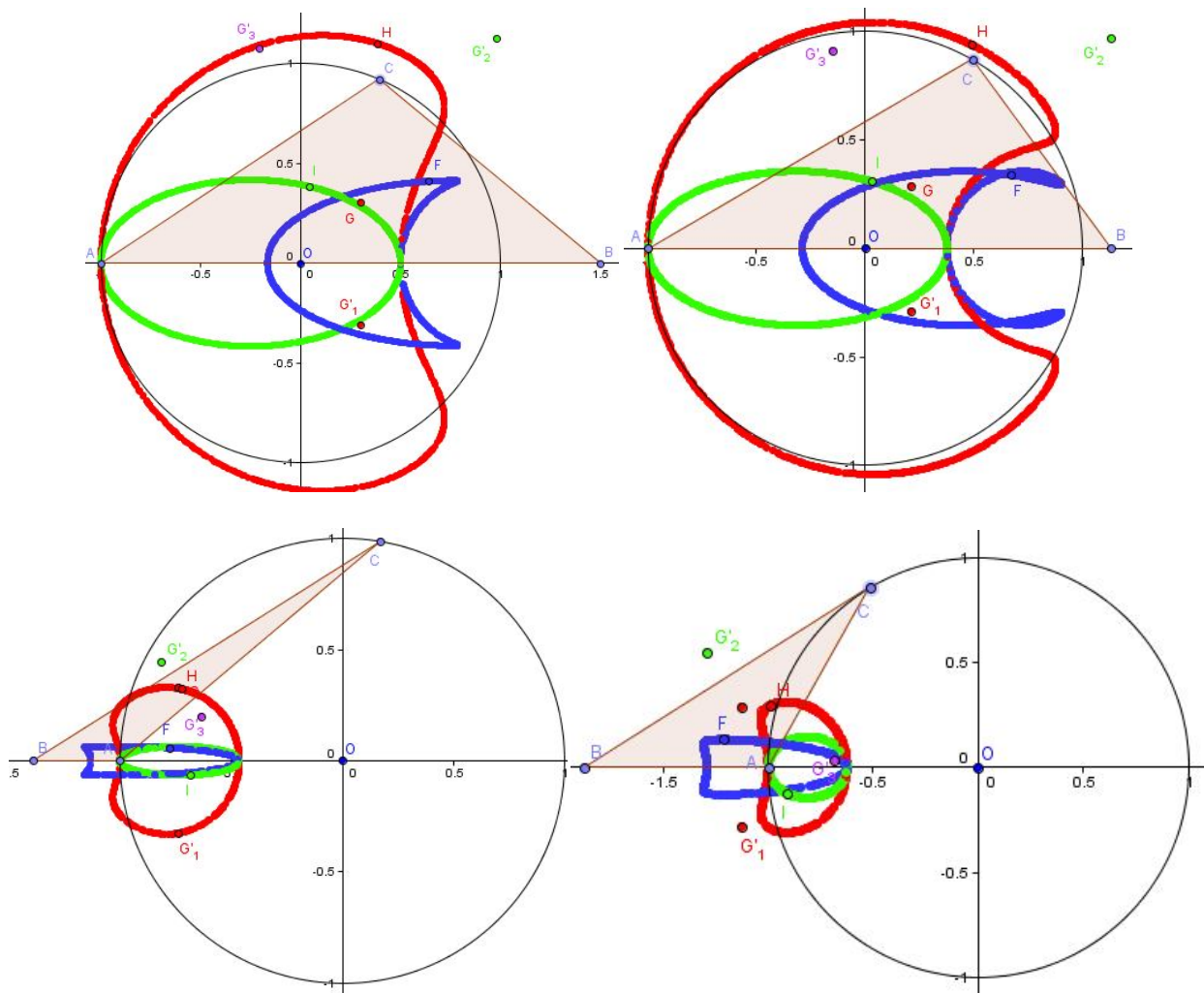
其圓心為 $(\frac{-2}{3}, 0)$ ，半徑為 $|\frac{(\alpha+2)}{3}|$ 。

(三) 當B點於不同位置時， G_2 點所形成的軌跡變化：



目前這個圖形是我們所觀察出的結論，而其所要的推導和相關性質卻是還是我們要持續探討的東西，對於角度的變換造成圖形的變異卻又還存有和原圖相似的關係，是未來要持續探討的，後續出現近似月亮形的軌跡僅以附圖表示。

(四) $\overline{G_1G_2}$ 中點 F, $\overline{G_1G_3}$ 中點 I, $\overline{G_2G_3}$ 中點 H 之軌跡圖：



1.藉由移動B點，觀察 $\overline{G_1G_2}$ 中點 F, $\overline{G_1G_3}$ 中點 I, $\overline{G_2G_3}$ 中點 H 之軌跡發現：

- (1) $\overline{G_1G_2}$ 中點 F 軌跡形狀的方向由B點的位置決定，
且 $\alpha > 1$ 時會被分為3個區域或1個區域， $\alpha < -1$ 時只被分為1個區域。
- (2) $\overline{G_1G_3}$ 中點 I 軌跡恆為橢圓。
- (3) $\overline{G_2G_3}$ 中點 H 軌跡變化類似 G_2 的軌跡變化。

2.證明 $\overline{G_1G_3}$ 中點 I 之軌跡恆為橢圓：

已知 G_1 點座標為 $(\frac{\alpha-1+\cos\theta}{3}, \frac{-\sin\theta}{3})$ ， G_3 點座標為 $(\frac{(\alpha+2)\cos\theta-2}{3}, \frac{(\alpha+2)\sin\theta}{3})$

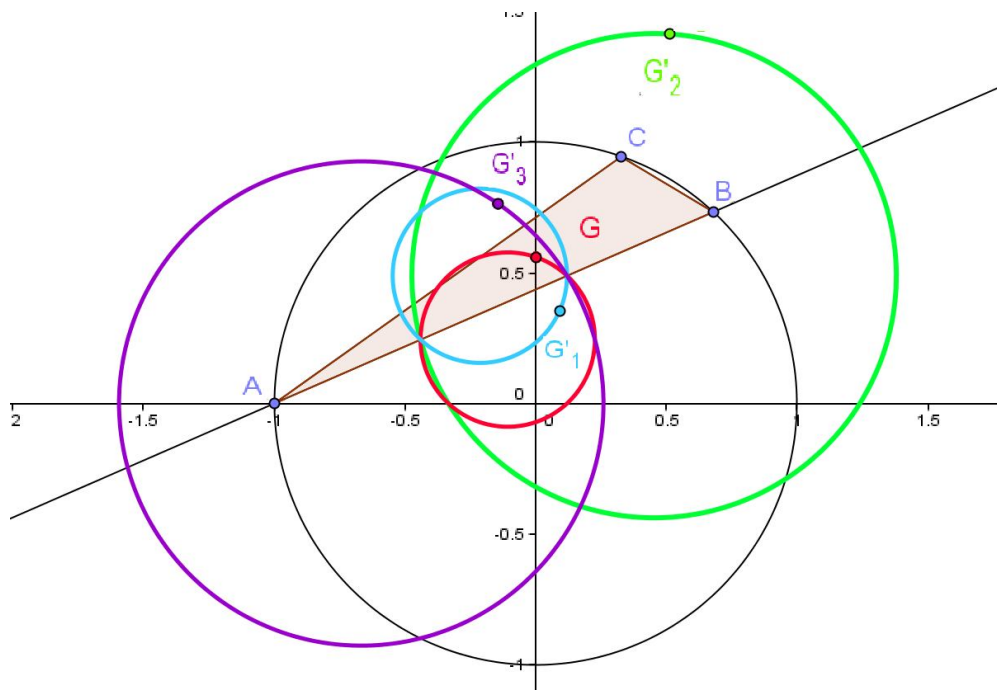
故 $\overline{G_1G_3}$ 中點 I 之點座標為 $(\frac{(\alpha+3)\cos\theta+(\alpha-3)}{6}, \frac{(\alpha+1)\sin\theta}{6})$

顯然點 I 所形成的軌跡為一橢圓，

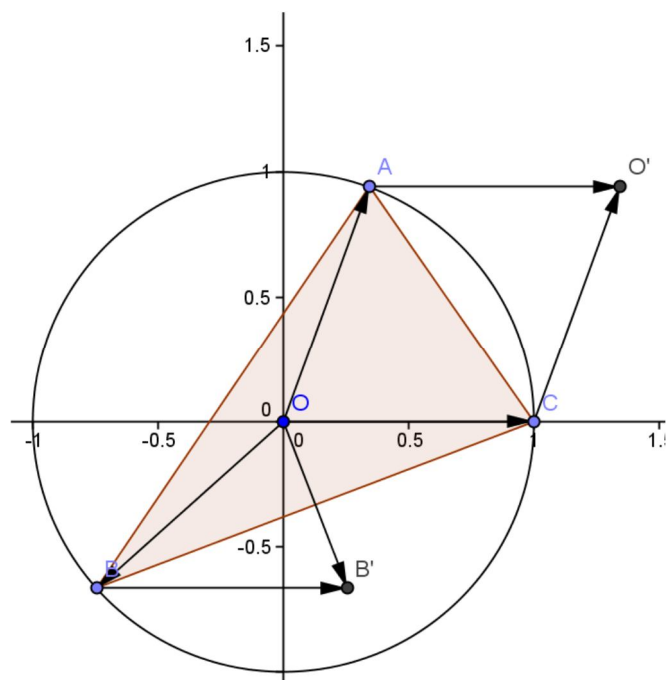
其橢圓中心為 $(\frac{(\alpha-3)}{6}, 0)$ ，兩焦點分別為 $(\frac{(\alpha-3)+2\sqrt{\alpha+2}}{6}, 0)$ ， $(\frac{(\alpha-3)-2\sqrt{\alpha+2}}{6}, 0)$ ，

半長軸 $a = \left| \frac{(\alpha+3)}{6} \right|$ ，半短軸 $b = \left| \frac{(\alpha+1)}{6} \right|$ 。

四、B點不位於x軸上但在單位圓O上，C點在圓O上繞行。



- (一) G, G_1, G_2, G_3 之軌跡為圓形。
 (二) 證明 G, G_1, G_2, G_3 軌跡為圓形：
 1.證明：



分三次對稱，

重心 G 座標為圓心加上三分之一的 $\overrightarrow{OA}$ 向量、 $\overrightarrow{OB}$ 向量、 $\overrightarrow{OC}$ 向量，
 其中 A 為動點， O 對 AC 對稱得 O' ，又 $\overrightarrow{CO} \parallel \overrightarrow{AO}$ ，故 O' 軌跡亦為圓。

而三分之一的 $\overrightarrow{OA}$ 向量對 AC 對稱得 $\frac{1}{3}\overrightarrow{O'A}$ 恆平行 $\overrightarrow{OC}$ (因四邊形 $OA O' C$ 為菱形)

故 $\frac{1}{3}\overrightarrow{O'A}$ 只造成 O' 軌跡圓平移。

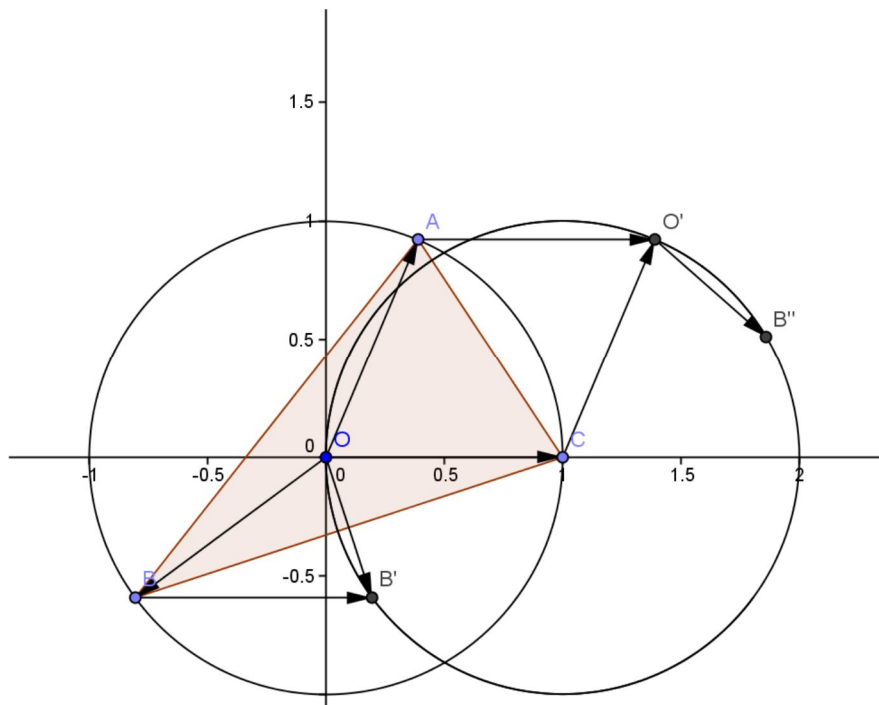
又最後剩下三分之一的 $\overrightarrow{OB}$ 向量， $\overrightarrow{OC}$ 向量(即三分之一 $\overrightarrow{OB'}$)對 AC 對稱，
因 B, C 為定點故向量不變，

當 A 沿著圓 O 移動時，(不失一般性，設逆時針走)

則 $\angle ACO$ 減少 θ ， $\frac{1}{3}\overrightarrow{OB'}$ 對稱後的向量逆時針旋轉 2θ ，

而 $\overrightarrow{OA}$ 亦逆時針旋轉 2θ ，

且 $\overrightarrow{CO'} \parallel \overrightarrow{AO}$ ，故加上 $\frac{1}{3}\overrightarrow{OB'}$ 對稱後的向量後仍旋轉對稱，即為圓，證畢。



(上圖中，顯然可見 $\overrightarrow{OB'}$ 對稱後的向量 $\overrightarrow{O'B''}$ 與 $\overrightarrow{CO'}$ 恆夾一角度，
但此圖未取其向量之三分之一以方便說明)

不失一般性，令 $A(-1,0)$ ， $B(\cos\theta, \sin\theta)$ ， $C(\cos\theta, \sin\theta)$ ，

2. 重心 G 軌跡為圓形：

由於 $A(-1,0)$ ， $B(\cos\theta, \sin\theta)$ ， $C(\cos\theta, \sin\theta)$ ，

固重心 G 點座標為 $(\frac{\cos\theta + \cos\theta - 1}{3}, \frac{\sin\theta + \sin\theta}{3})$ ，

顯然重心 G 所形成的軌跡為一圓，

其圓心為 $(\frac{\cos\theta - 1}{3}, \frac{\sin\theta}{3})$ ，半徑為 $\frac{1}{3}$ 。

3. G_1 軌跡為圓形：

已知 G 點軌跡為圓，由於當 C 點在圓上繞行時，對稱軸 $\overline{BC}$ 不變，

固 G_3 軌跡必定為圓，且大小與重心 G 軌跡所形成的圓大小相等，

因此半徑為 $\frac{1}{3}$ ，

由於參數式過於複雜，因此改以幾何證明證之。

4.由於 A ， B 兩點皆為定點，因此 $\overline{AB}$ 固定，從而可將其視為由 x 軸旋轉 θ 度。
可將其視為原有之座標軸旋轉 θ 度，因此 G_2 ， G_3 之軌跡必為圓形。

5.已知 G 點座標為 $(\frac{\cos\theta+\cos\theta-1}{3}, \frac{\sin\theta+\sin\theta}{3})$ ，

$$\text{又}\overrightarrow{AC}\text{方程式為：}y = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}x + \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}，$$

$$\overrightarrow{AB}\text{方程式為：}y = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}x + \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}，$$

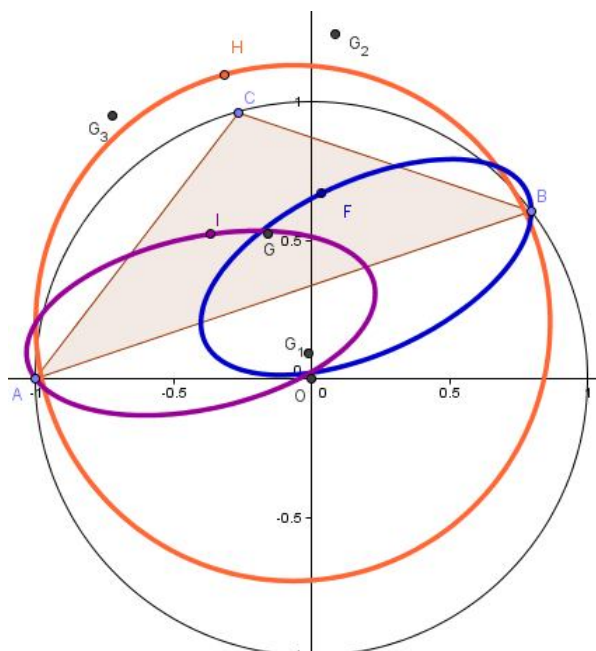
$$\overrightarrow{AC}\text{方程式為：}y = \frac{\sin\theta-\sin\theta}{\cos\theta-\cos\theta}x + \frac{\sin(\theta-\theta)}{\cos\theta-\cos\theta}$$

$$\text{故}\overrightarrow{GG_3}\text{方程式為：}y = -\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}x + \frac{\cos\theta+\cos(\theta-\theta)}{3\sin\theta}，$$

$$\overrightarrow{GG_1}\text{方程式為：}y = -\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}x + \frac{\cos\theta+\cos(\theta-\theta)}{3\sin\theta}，$$

$$\overrightarrow{GG_2}\text{方程式為：}y = \frac{\cos\theta-\cos\theta}{\sin\theta-\sin\theta}x + \frac{\cos\theta-\cos\theta}{3(\sin\theta-\sin\theta)}。$$

(三) $\overline{G_1G_2}$ 中點 F ， $\overline{G_1G_3}$ 中點 I ， $\overline{G_2G_3}$ 中點 H 之軌跡圖：



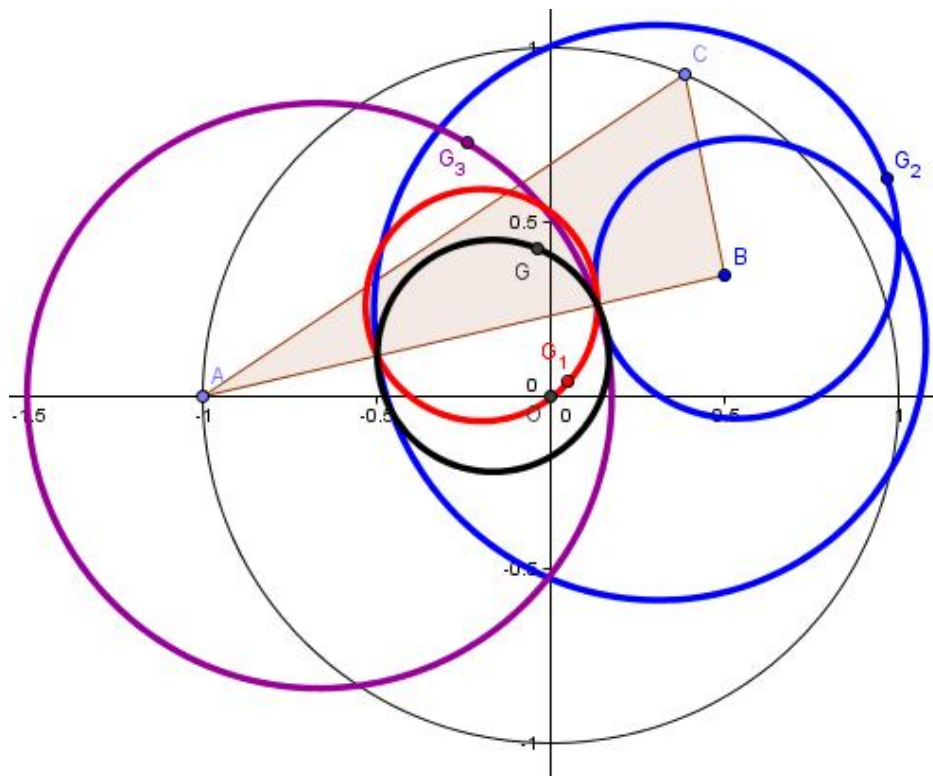
1.藉由移動 B 點，觀察 $\overline{G_1G_2}$ 中點 F ， $\overline{G_1G_3}$ 中點 I ， $\overline{G_2G_3}$ 中點 H 之軌跡發現：

(1) $\overline{G_2G_3}$ 中點 H 軌跡恆為圓。

(2) $\overline{G_1G_3}$ 中點 I ， $\overline{G_1G_2}$ 中點 F 軌跡恆為橢圓。

2.以斜座標之觀念可知其軌跡形狀與前述相同，為橢圓和圓。

五、B點不位於x軸上且在單位圓O內，C點在圓O上繞行。



(一) G, G_1, G_3 之軌跡為圓形。

(二) 證明 G, G_1 軌跡為圓形：

不失一般性，令 $A(-1,0), B(\alpha, \beta), C(\cos\theta, \sin\theta)$ ，且 $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ 。

1. 重心 G 軌跡為圓形：

由於 $A(-1,0), B(\alpha, \beta), C(\cos\theta, \sin\theta)$ ，

固重心 G 點座標為 $(\frac{\cos\theta + \alpha - 1}{3}, \frac{\sin\theta + \beta}{3})$ ，

顯然重心 G 所形成的軌跡為一圓，

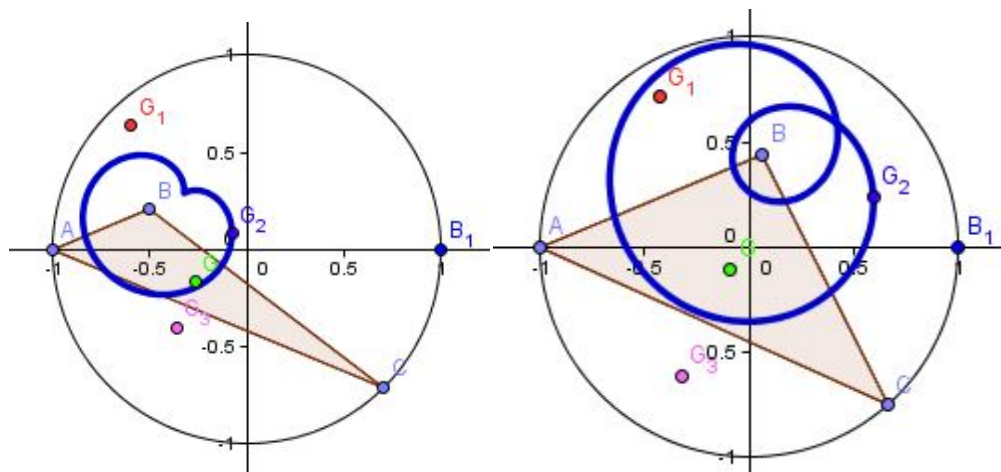
其圓心為 $(\frac{\alpha-1}{3}, \frac{\beta}{3})$ ，半徑為 $\frac{1}{3}$ 。

2. G_1 軌跡為圓形：

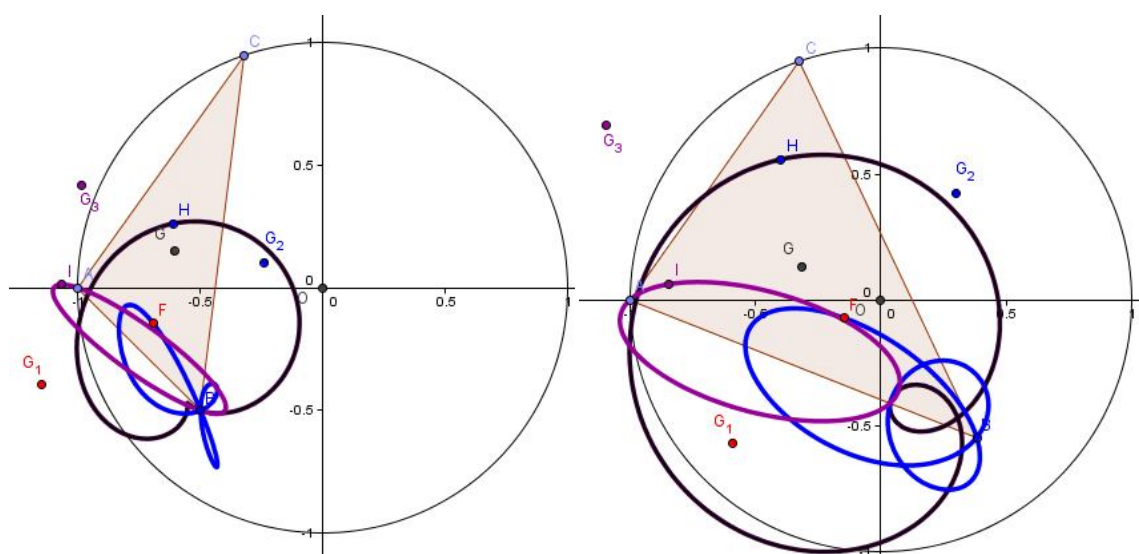
已知 G 點軌跡為圓，由於當 C 點在圓上繞行時，對稱軸 $\overline{BC}$ 不變，固 G_3 軌跡必定為圓，且大小與重心 G 軌跡所形成的圓大小相等，

因此半徑為 $\frac{1}{3}$ 。

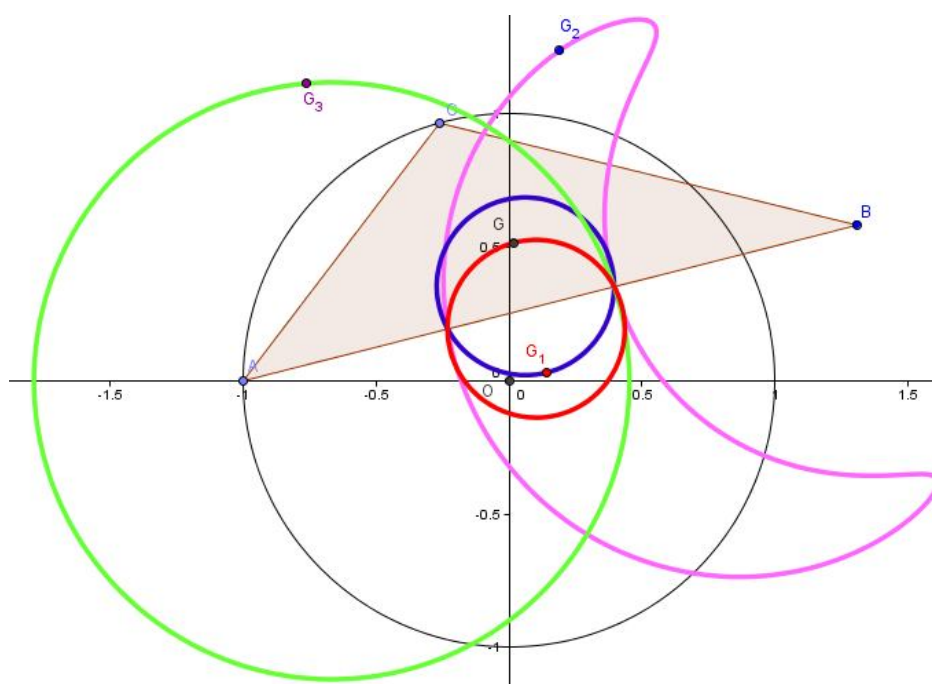
(三) 當B點於不同位置時， G_2 點所形成的軌跡變化：



(四) $\overline{G_1G_2}$ 中點 F， $\overline{G_1G_3}$ 中點 I， $\overline{G_2G_3}$ 中點 H 之軌跡圖：



六、B點不位於x軸上且在單位圓O外，C點在圓O上繞行。



(一) G, G_1, G_3 之軌跡為圓形。

(二) 證明 G, G_1 軌跡為圓形：

不失一般性，令 $A(-1,0), B(\alpha, \beta), C(\cos\theta, \sin\theta)$ ，且 $\alpha^2 + \beta^2 > 1$ 。

1. 重心 G 軌跡為圓形：

由於 $A(-1,0), B(\alpha, \beta), C(\cos\theta, \sin\theta)$ ，

固重心 G 點座標為 $(\frac{\cos\theta + \alpha - 1}{3}, \frac{\sin\theta + \beta}{3})$ ，

顯然重心 G 所形成的軌跡為一圓，

其圓心為 $(\frac{\alpha-1}{3}, \frac{\beta}{3})$ ，半徑為 $\frac{1}{3}$ 。

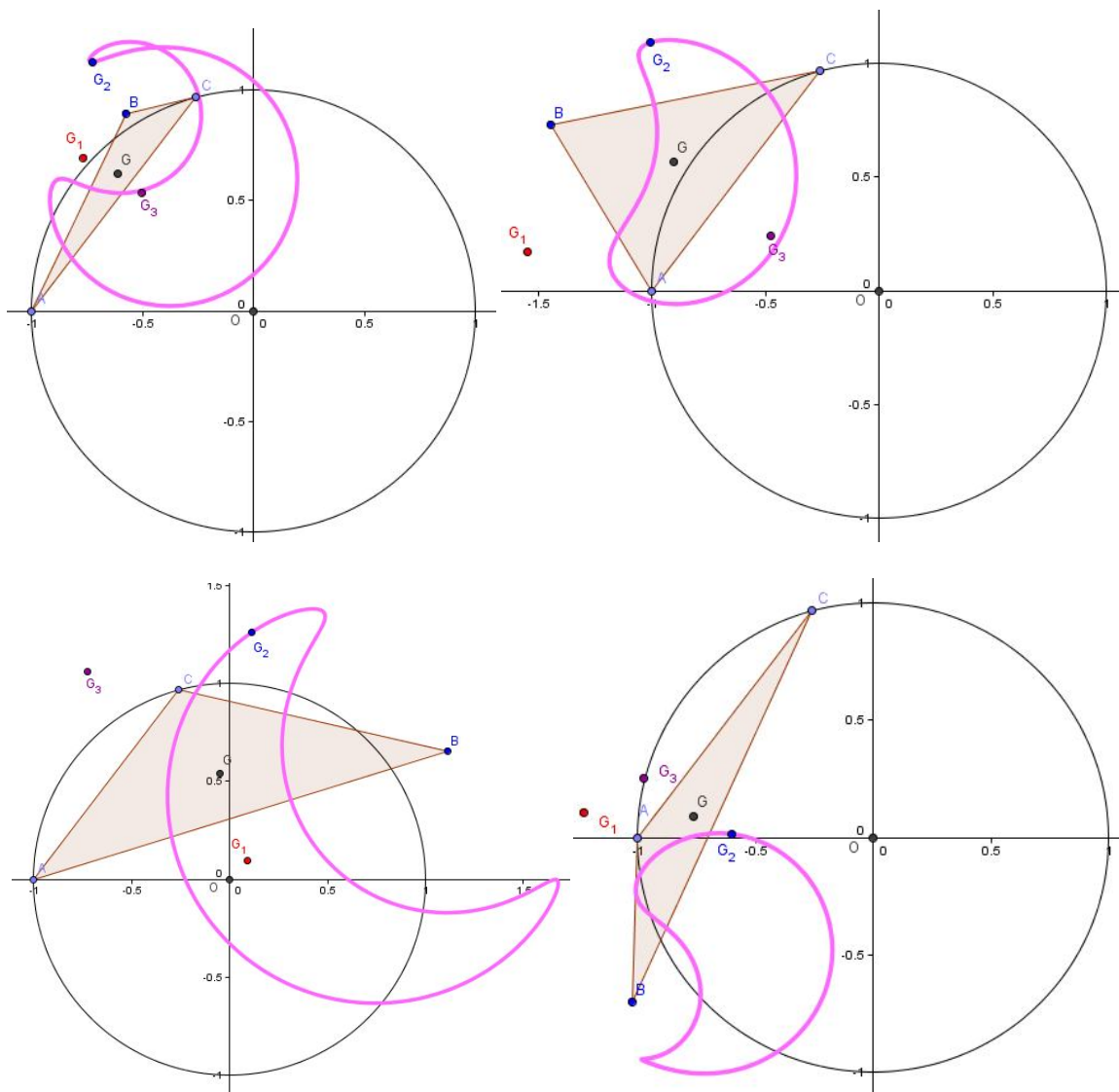
2. G_1 軌跡為圓形：

已知 G 點軌跡為圓，由於當 C 點在圓上繞行時，對稱軸 $\overline{BC}$ 不變，

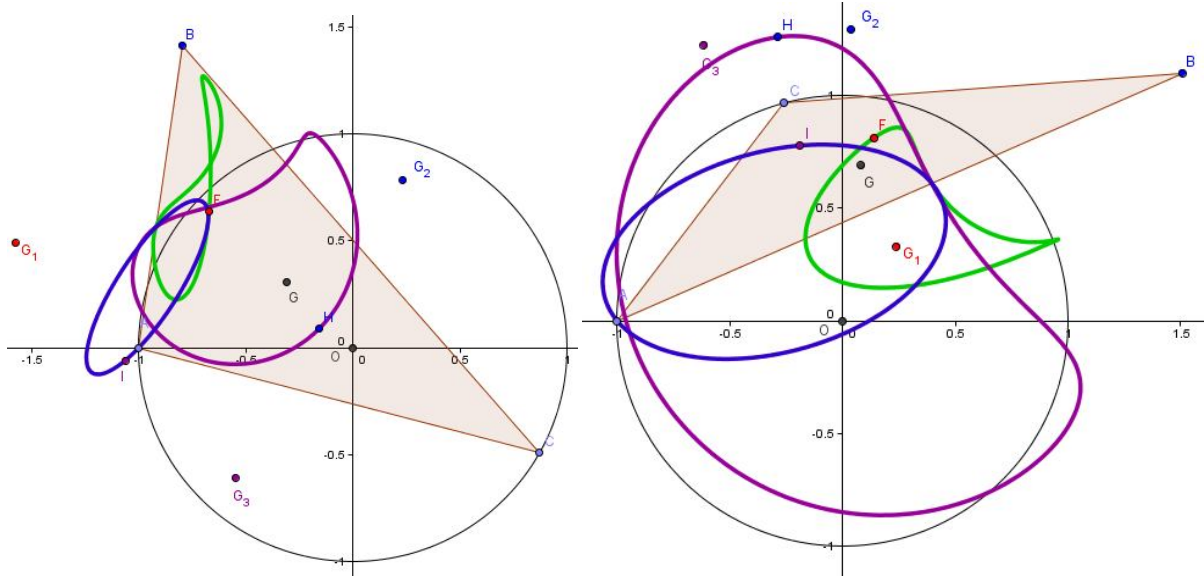
固 G_3 軌跡必定為圓，且大小與重心 G 軌跡所形成的圓大小相等，

因此半徑為 $\frac{1}{3}$ 。

(三) 當 B 點於不同位置時， G_2 點所形成的軌跡變化：

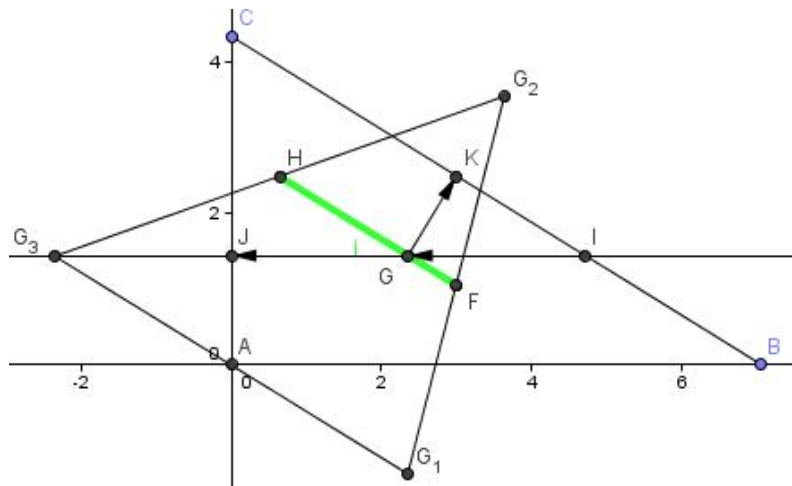


(四) $\overline{G_1G_2}$ 中點 F, $\overline{G_1G_3}$ 中點 I, $\overline{G_2G_3}$ 中點 H 之軌跡圖：



七、直角三角形之討論。

(一) $\overline{G_1G_2}$ 中點 F, $\overline{G_2G_3}$ 中點 H 和直角三角形重心 G 三點共線：



(二) 證明 $\overline{G_1G_2}$ 中點 F, $\overline{G_2G_3}$ 中點 H 和直角三角形重心 G 三點共線：

1. 向量解：

作平行線 $\overline{JI}$ 過G點平行 $\overline{AB}$ 直線，

$\because \angle CAB = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 平行線垂直 $\overline{AC}$ ，

$$\overrightarrow{GH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GG_3} + \overrightarrow{GG_2}) = \overrightarrow{GK} + \overrightarrow{GJ},$$

因G為重心，G在 $\triangle ABC$ 的 $\overline{AB}$ 中線上，所以G點平分 $\overline{JI}$

所以 $\overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{IG}$ ，

由 $\triangle GIK$ 得 $\overrightarrow{GH}$ 平行 $\overline{BC}$ 直線，同理， $\overrightarrow{GF}$ 平行 $\overline{BC}$ 直線，

故三點共線，得證。

我們也可知道非直角三角形無法滿足條件 $\overline{JI}$ 垂直 $\overline{AC}$ ，

故F、G、H三點必不共線。

2.代數解：

不失一般性，令 $A(0,0)$ ， $B(x_0, 0)$ ， $C(0, y_0)$ ，

則重心 G 為 $(\frac{x_0}{3}, \frac{y_0}{3})$ ，

又 $\overline{BC}$ 直線方程式為 $y_0x + x_0y = x_0y_0$ ，

$$\overrightarrow{GG'} \text{ 參數式為 } \begin{cases} x = \frac{x_0}{3} + y_0t \\ y = \frac{y_0}{3} + x_0t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), \text{ 代入 } \overline{BC},$$

$$\text{得 } y_0 \left(\frac{x_0}{3} + y_0t' \right) + x_0 \left(\frac{y_0}{3} + x_0t' \right) = x_0y_0,$$

$$\text{從而 } t' = \frac{x_0y_0}{3(x_0^2 + y_0^2)},$$

又 $t = 2t'$ ，故 $t = \frac{2x_0y_0}{3(x_0^2 + y_0^2)}$ ，將其代入 $\overrightarrow{GG_2}$ 得到 G_2 座標，

$$\text{得 } G_2 \left(\frac{x_0(x_0^2 + 3y_0^2)}{3(x_0^2 + y_0^2)}, \frac{y_0(3x_0^2 + y_0^2)}{3(x_0^2 + y_0^2)} \right),$$

$$\text{又 } G_1 \left(\frac{x_0}{3}, -\frac{y_0}{3} \right), G_3 \left(-\frac{x_0}{3}, \frac{y_0}{3} \right),$$

求得 $\overline{G_1G_2}$ 中點 F ， $\overline{G_2G_3}$ 中點 H 座標：

$$H \left(\frac{x_0(x_0^2 + 2y_0^2)}{3(x_0^2 + y_0^2)}, \frac{x_0^2y_0}{3(x_0^2 + y_0^2)} \right), F \left(\frac{x_0y_0^2}{3(x_0^2 + y_0^2)}, \frac{y_0(2x_0^2 + y_0^2)}{3(x_0^2 + y_0^2)} \right),$$

$$\text{從而 } \overrightarrow{HF} : \left(\frac{x_0(x_0^2 + y_0^2)}{3(x_0^2 + y_0^2)}, \frac{-y_0(x_0^2 + y_0^2)}{3(x_0^2 + y_0^2)} \right) = \frac{1}{3}(x_0, -y_0),$$

$$\text{又 } \overrightarrow{GF} : \left(\frac{x_0y_0^2}{3(x_0^2 + y_0^2)}, \frac{-y_0^3}{3(x_0^2 + y_0^2)} \right) = \frac{y_0^2}{3(x_0^2 + y_0^2)}(x_0, -y_0),$$

故 F 、 G 、 H 三點共線，得證。

(三) 討論當移動點 B 或點 C 時， G ， G_1 ， G_2 ， G_3 之軌跡：

1.顯然不管移動點 B 或點 C ， G ， G_1 ， G_3 之軌跡皆為一直線。

(1)移動點 B 時 G 之軌跡方程式： $y = \frac{y_0}{3}$ 。

(2)移動點 C 時 G 之軌跡方程式： $x = \frac{x_0}{3}$ 。

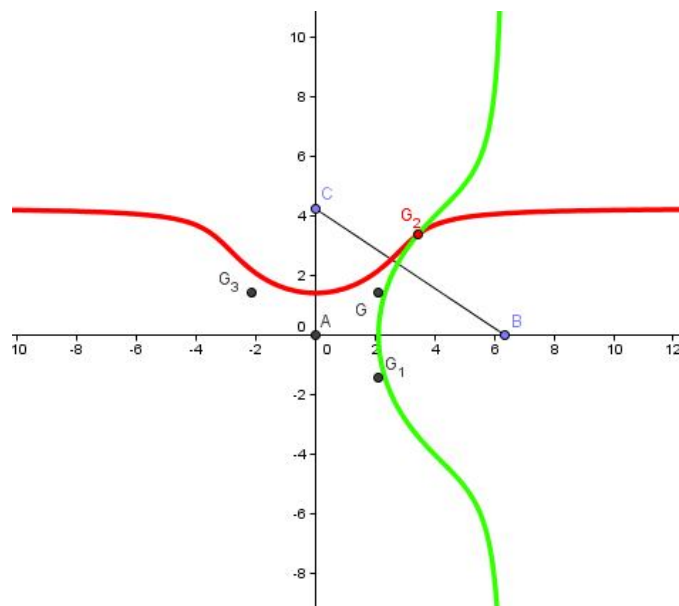
(3)移動點 B 時 G_1 之軌跡方程式： $y = -\frac{y_0}{3}$ 。

(4)移動點 C 時 G_1 之軌跡方程式： $x = \frac{x_0}{3}$ 。

(5)移動點 B 時 G_3 之軌跡方程式： $y = \frac{y_0}{3}$ 。

(6)移動點 C 時 G_3 之軌跡方程式： $x = -\frac{x_0}{3}$ 。

2. 當移動點B 或點 C 時， G_2 之軌跡圖：

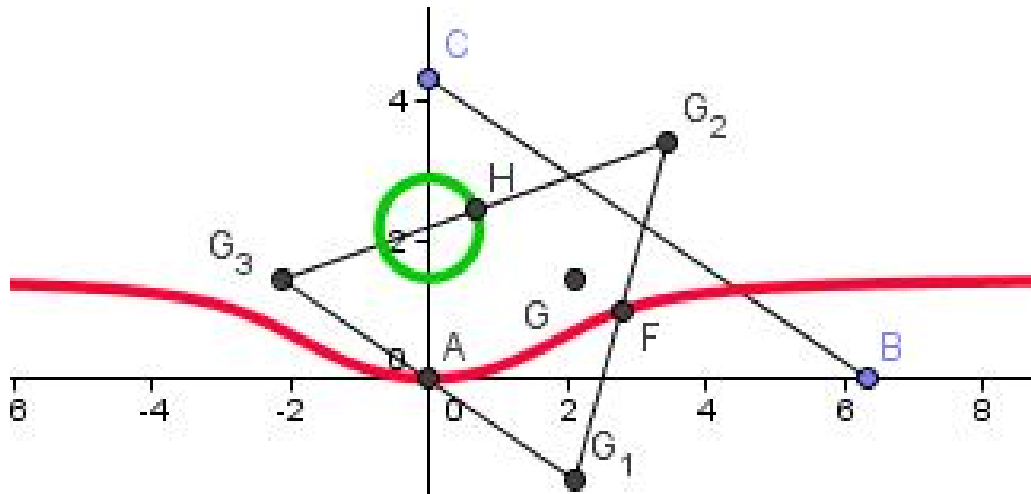


3. 當移動點B 時， G_2 之函數：

不失一般性，令 $A(0,0)$ ， $B(x_0, 0)$ ， $C(y_0, 0)$ ，

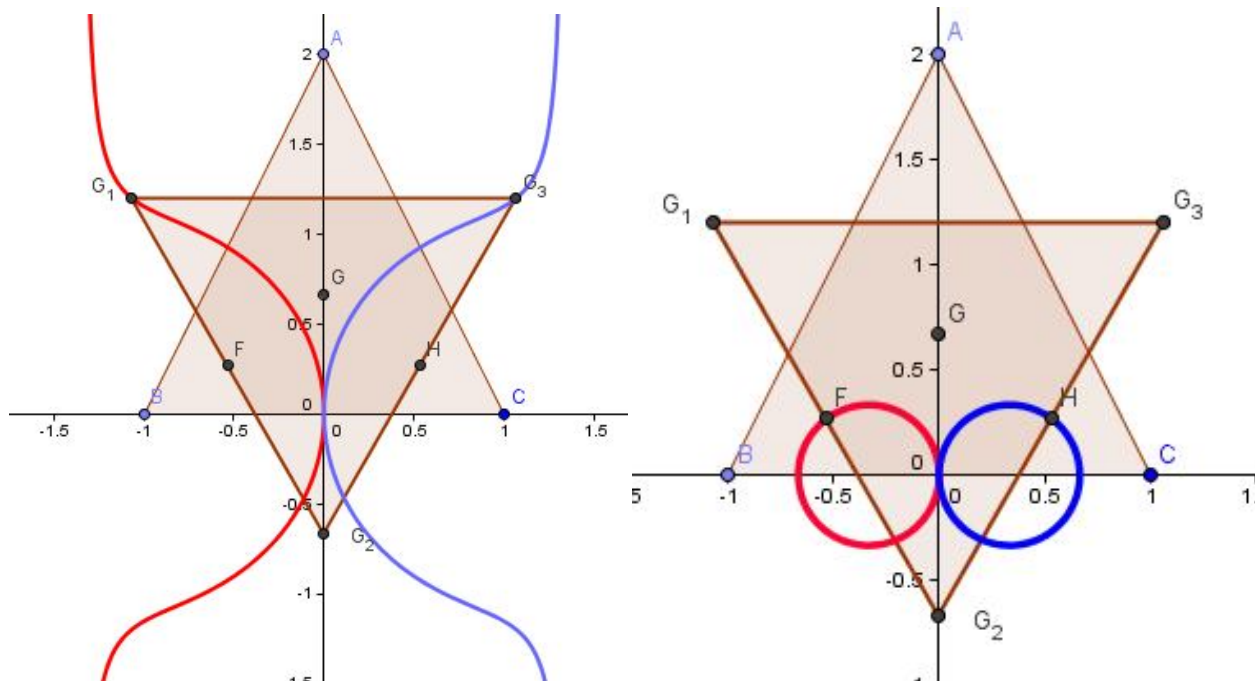
$$\text{由上述知動點 } G_2 \text{ 之函數為： } G_2(X) = \begin{cases} x = \frac{x_0(x_0^2 + 3y_0^2)}{3(x_0^2 + y_0^2)} \\ y = \frac{y_0(3x_0^2 + y_0^2)}{3(x_0^2 + y_0^2)} \end{cases}.$$

(四) 移動點B時， $\overline{G_1G_2}$ 中點 F， $\overline{G_2G_3}$ 中點 H 之軌跡圖：

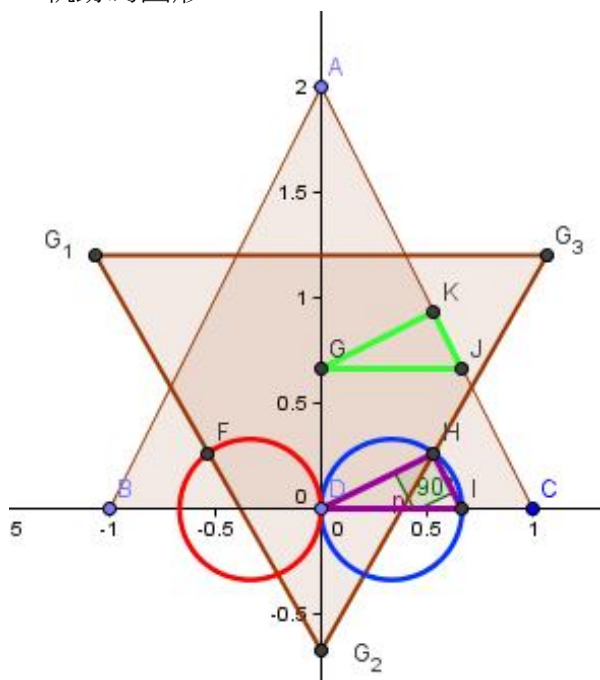


1. 觀察得之 $\overline{G_2G_3}$ 中點 H 之軌跡為圓， $\overline{G_1G_2}$ 中點 F 之軌跡與 G_2 點軌跡相似。
2. 由上述得知點 H 和點 F 之參數式，易知點 H 之軌跡為圓。

八、等腰三角形之討論。



1. G_1, G_3 的軌跡不易討論，因此改討論 $\overline{G_1G_2}$ 中點 F ， $\overline{G_2G_3}$ 中點 H 之軌跡。
2. 證明 F, H 軌跡為圓形：



因 F, H 分別為 $\overline{G_1G_2}$ 和 $\overline{G_2G_3}$ 中點，
 過重心 G 垂直並交 $\overline{AC}$ 於 K 點，過重心 G 垂直並交 $\overline{BC}$ 於 D 點，
 過重心 G 平行 $\overline{BC}$ 並交 $\overline{AC}$ 於 J 點，過重心 G 平行 $\overline{AC}$ 並交 $\overline{BC}$ 於 I 點，
 因為 $\overline{GK} + \overline{GD} = \overline{GH}$ ， $\overline{GK}$ 平移至 $\overline{DH}$ ， $\overline{GJ}$ 平移至 $\overline{DI}$ ， $\overline{KJ}$ 平移至 $\overline{HI}$ ，
 故 $\triangle GJK \cong \triangle HID$ ，
 所以 $\angle GJK = 90^\circ = \angle DHI$ ，
 即可得知 H 軌跡為圓形，同理得知 F 軌跡也為圓形，證畢。

伍、 結論

- 一、當A，B兩點固定時，一點C繞著一圓之圓周移動，其重心G及分別對 $\overline{AB}$ ， $\overline{AC}$ 對稱所得的兩點 G_1 ， G_3 ，其軌跡皆為圓形，且重心G與 G_1 之軌跡圓全等。
- 二、當A，B，C三點共圓時，重心G， G_1 ， G_2 ， G_3 之軌跡皆為圓形，且重心G與 G_1 之軌跡圓全等， G_2 ， G_3 之軌跡圓全等。
- 三、當B點位於x軸上且在單位圓O內，C點在圓O上繞行，G， G_1 ， G_3 之軌跡為圓形， G_2 軌跡為類蚶線。
- 四、當B點位於x軸上且在單位圓O外，C點在圓O上繞行，G， G_1 ， G_3 之軌跡為圓形， G_2 軌跡為弦月線。
- 五、當B點不位於x軸上且在單位圓O內，C點在圓O上繞行，G， G_1 ， G_3 之軌跡為圓形， G_2 軌跡為偏類蚶線，但此類蚶線和前述所提及之稍有不同，因為受到 $\overline{AB}$ ，x軸夾角影響，造成軌跡上下不對稱的偏類蚶線。
- 六、當B點不位於x軸上且在單位圓O外，C點在圓O上繞行，G， G_1 ， G_3 之軌跡為圓形， G_2 軌跡大多為偏弦月線，因為受到 $\overline{AB}$ ，x軸夾角影響，造成軌跡除了上下不對稱的偏弦月線外，還有過度內偏而產生軌跡相交的情形。

陸、 討論

經過多月來的努力終於完成了本作品，然稍有遺漏之處，在探討各點的軌跡時發現了許多特殊的軌跡，諸如蚶線、心臟線、弦月線……等。但是我們卻無法將其函數方程式表示出，期許未來能夠將其計算出來並找出它們之間的關係性。

柒、 參考資料及其他

- 一、趙文敏著 科學月刊第二十一卷第五期 何謂心臟線
- 二、http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_21_07_1/index.html 蚶線

【評語】 040408

對一三角形重心 G ，與其對各邊對稱所得的三點 G_1 、 G_2 、 G_3 ，

本作品探討形成之軌跡，使用極座標等工具，針對各情況討論。雖

找出不少有趣的現象，惟尚有部分情況未能表示出來。