中華民國第52屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

第三名

040407

無奇不有的拋物線－頂點移動軌跡的探討

學校名稱：國立高雄師範大學附屬高級中學

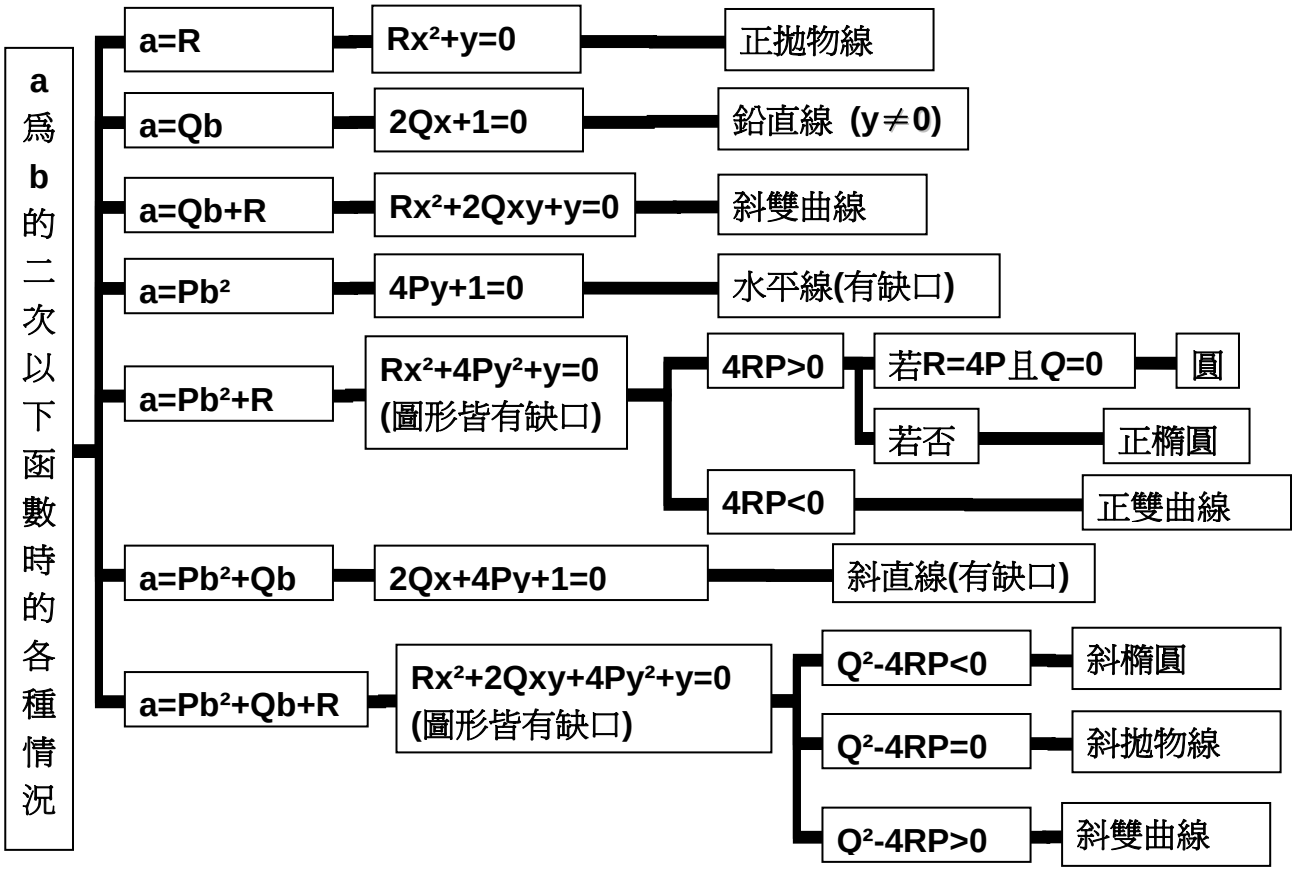
作者：	指導老師：
高一 陳聿軒	歐志昌 謝坤家

關鍵詞：拋物線、軌跡、圓錐截痕

摘　要

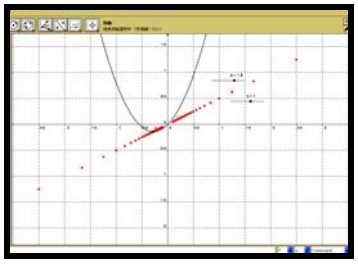
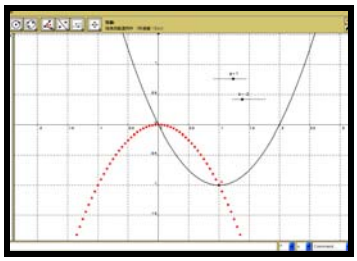
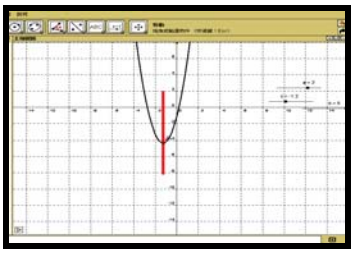
國中有學過二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形為拋物線，可以知道拋物線頂點是一個重要的圖型特徵，但沒有討論當 a,b,c 值變動時，對頂點會造成什麼影響。在本研究中，我發現當 a,b,c 值變動或者當 a,b,c 其中二個數值具有二次或一次的函數關係時，拋物線的頂點軌跡圖形會是圓錐曲線。特別是當 $a=Pb^2+Qb+R$ 時，拋物線的頂點軌跡會出現直線、拋物線、雙曲線及橢圓等情形。

接著利用頂點座標求出各種情形的一般式並得到頂點移動軌跡圖形與其一般式的充要條件，進一步針對 $a=Pb^2+Qb+R$ 的特殊情況進行深入的探討，利用圓錐曲線類型的判別式找出 P,Q,R 的值與圖形的對應結果（如下圖）。



壹、 研究動機

國中時，老師提到過在二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形中，a 會影響開口大小，c 會影響函數圖形的高低。這樣的結果往往是使用配方法，得到 $y=ax^2+bx+c=a(x-w)^2+S$ 的形式，再探討 a、c 兩變數對圖形的影響。然而，我卻好奇，當二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 只改變 b 值時，函數圖形會怎樣在座標上移動呢？那如果讓 a、b、c 互相有關係，圖形又會有什麼樣的變化呢？因為頂點是拋物線最具特殊性及代表性的位置，就以拋物線的頂點做為圖形變化的主要觀察對象，展開了下列的研究（如下圖）。

		
只有 a 值變動時的頂點移動軌跡（圖中紅色的部分）	**只有 b 值變動**時的頂點移動軌跡（圖中紅色的部分）	**只有 c 值變動**時的頂點移動軌跡（圖中紅色的部分）

貳、 研究目的

從上面的三個圖形可以發現，當二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的 a,b,c 值改變時，圖形的頂點軌跡會出現直線及拋物線，因此本研究希望能找出當二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的各項係數（a,b,c）任兩者間具有二次以下的函數關係時，其頂點所產生的各種軌跡，並針對較特殊的圖形進行討論，進一步將其軌跡的方程式求出，再與所繪出的圖形做分析及比較。因此，我的研究目的如下：

一、 觀察二次函數 $y=ax^2+bx$ 的頂點在 a、b 互相具有二次以下的函數關係時，所產生的軌跡圖形，因此我討論以下兩種情形：

（一）當 $a=Pb^2+Qb+R$ 時

（二）當 $b=Pa^2+Qa+R$ 時

二、 觀察二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的頂點在 c、a 及 c、b 互相具有二次以下的函數關係時，所產生的軌跡圖形，因此我討論以下四種情形：

（一）當 $c=Pa^2+Qa+R$ 時

（二）當 $a=Pc^2+Qc+R$ 時

（三）當 $c=Pb^2+Qb+R$ 時

（四）當 $b=Pc^2+Qc+R$ 時

三、 利用代數方法求出上述各種組合的一般式，證明其與頂點軌跡圖形的充要條件後，分析圖形種類。

參、 研究設備及器材

一、 電腦、紙、筆、GeoGebra

肆、 研究過程

一、 決定所要探討的方程式及動點

（一）$y=ax^2+bx+c=y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$，頂點為$(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2}{4a}+c)$。

（二）為了討論方便，暫不討論c項，在討論完a、b後，再討論c與a、b的關係。

（三）結論：討論$y=ax^2+bx$時，令頂點為$(\frac{-b}{2a},\frac{-b^2}{4a})$，討論$y=ax^2+bx+c$時，令頂點為$(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2}{4a}+c)$。

二、 討論$y=ax^2+bx$，且$a=Pb^2+Qb+R$時，拋物線頂點的軌跡圖形。

（一）若$a=0$（$P=Q=R=0$）無意義。

（二）若$a=R$（$P=Q=0$）（只有b值變動），頂點軌跡方程式為$y=-a^2x$，圖形為一拋物線。

（三）若$a=Qb$（$P=R=0$），頂點軌跡方程式為$x=\frac{-1}{2Q}$，圖形為一直線。

（四）若$a=Qb+R$（$P=0$），頂點軌跡圖形為一斜雙曲線，且Q的絕對值越小，圖形開口越大。

（五）若$a=Pb^2$（$Q=R=0$），頂點軌跡方程式為$y=\frac{-1}{4P}$，圖形為一直線。

（六）若$a=Pb^2+R$（$Q=0$），

1、當$a=b^2+R$，且$R>0$時，頂點軌跡圖形為水平橢圓，且R值越小，橢圓沿水平方向拉長，R值越大，橢圓沿水平方向收縮。

2、當$a=b^2+R$，且$R<0$時，頂點軌跡圖形為正雙曲線，且R值越小，開口越小，R值越大，開口越大。

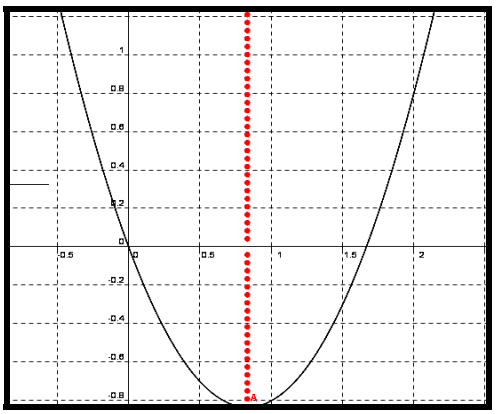
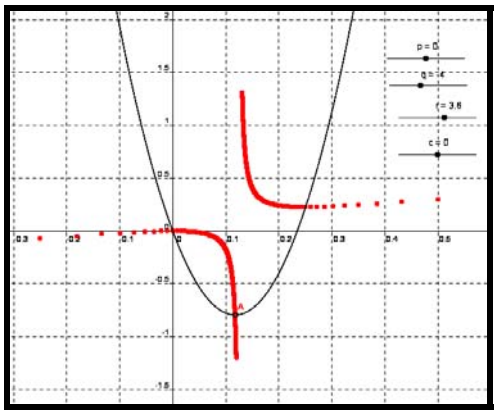
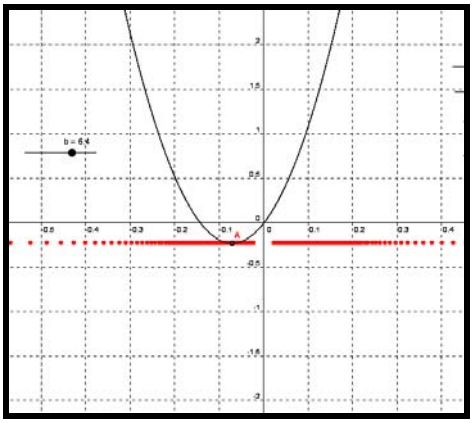
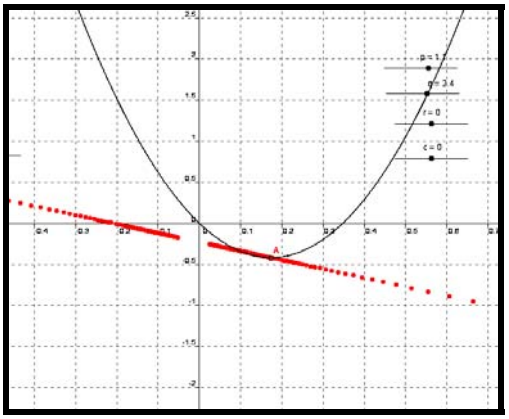
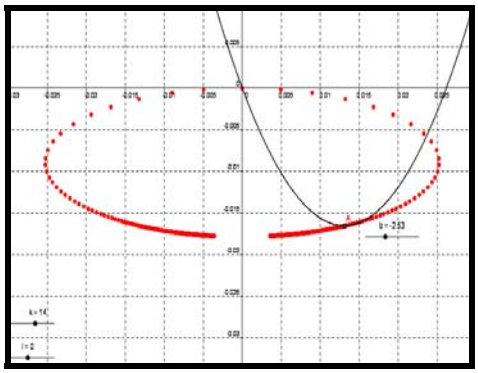
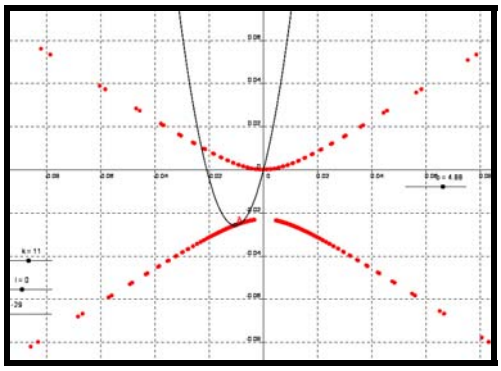
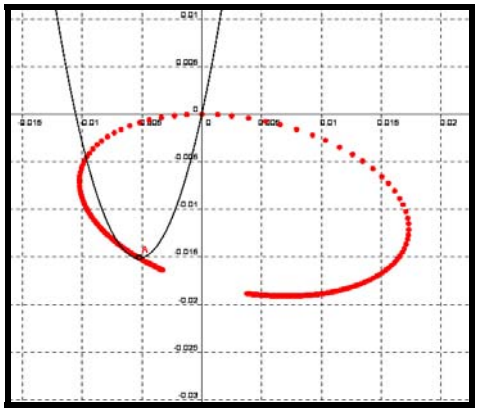
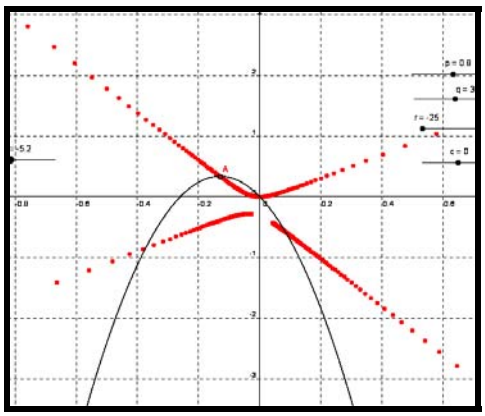
3、當$a=Pb^2+1$，$P>0$時，頂點軌跡圖形為水平橢圓，且P值越大，橢圓縮小。

4、當$a=Pb^2+1$，$P<0$時，頂點軌跡圖形為正雙曲線，且P值越小，雙曲線的開口越大且兩葉距離越近（貫軸越短）。

5、觀察的結果為軌跡圖形皆為正橢圓或正雙曲線

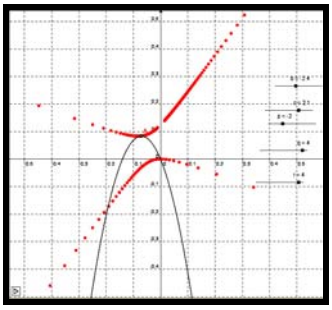
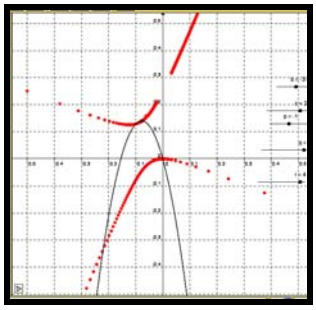
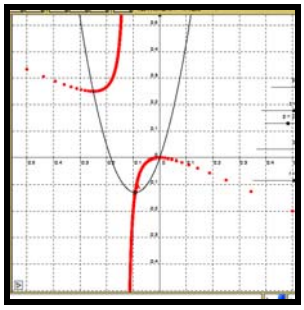
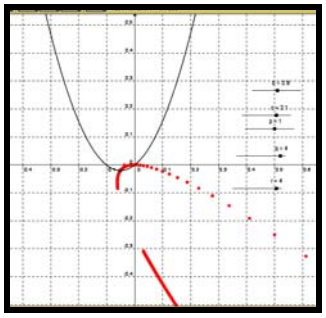
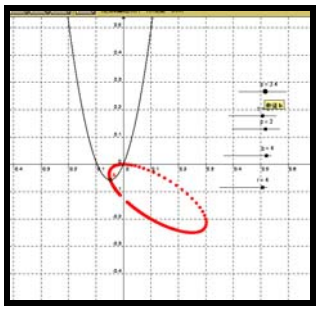
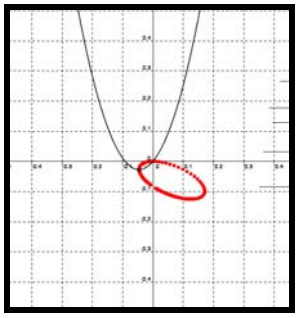
6、所有圖形都有一缺口$(0,\frac{1}{-4P})$。

（七）若$a=Pb^2+Qb$（$R=0$），頂點軌跡圖形為一斜直線，且圖形與y軸無交點圖形有一缺口$(0,\frac{1}{-4P})$

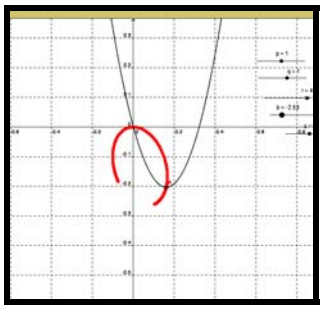
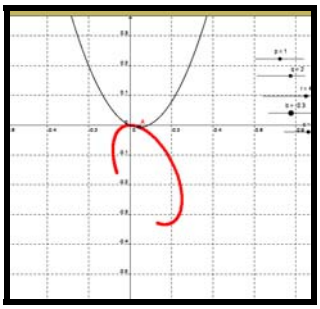
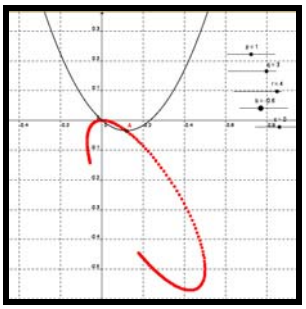
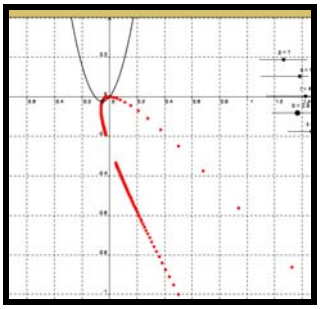
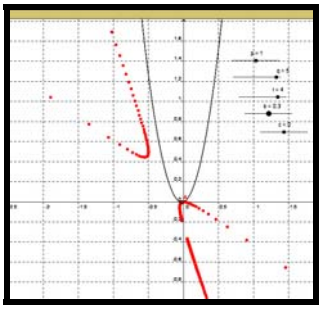
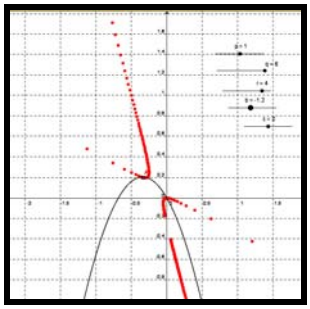
	
a＝Qb 時，頂點軌跡圖形為鉛直線	a＝Qb＋R 時，頂點軌跡圖形為斜雙曲線
	
a＝Pb^2 時，頂點軌跡圖形為水平線	a＝Pb^2＋Qb 時，頂點軌跡圖形為斜直線
	
a＝Pb^2＋R 時，頂點軌跡圖形為正橢圓	a＝Pb^2＋R 時，頂點軌跡圖形為正雙曲線
	
a＝Pb^2＋Qb＋R 時，頂點軌跡圖形為斜橢圓	a＝Pb^2＋Qb＋R 時，頂點軌跡圖形為斜雙曲線

（八）若 $a=Pb^2+Qb+R$，頂點軌跡圖形為為斜雙曲線或斜橢圓，有一瞬間會變成斜拋物線。

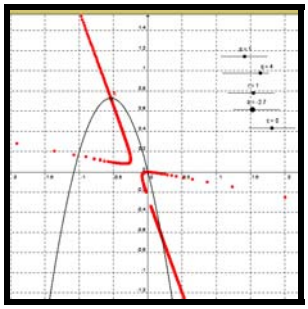
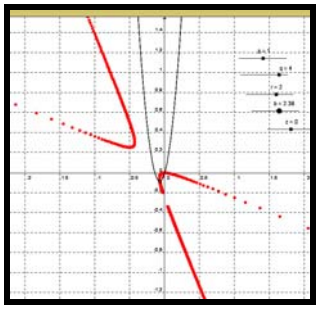
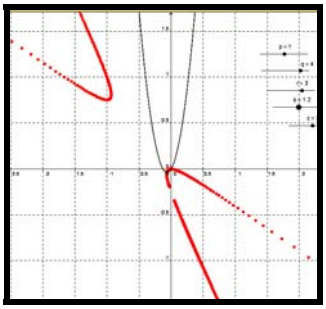
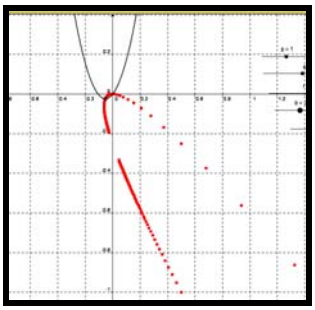
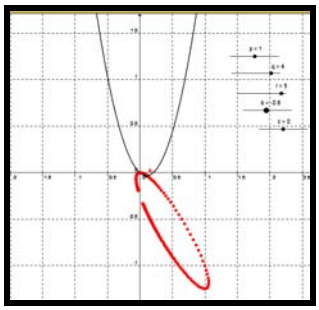
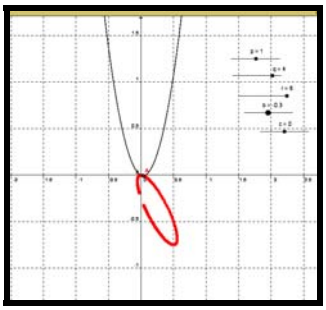
1、若選定 P,Q,R 值時，頂點軌跡圖形為雙曲線，此時固定 Q,R 值，P 值由小變大，頂點軌跡圖形會由雙曲線變為拋物線，最後再變成橢圓（如下圖）。

$(P,Q,R)=(-2,4,4)$ 時	$(P,Q,R)=(-1,4,4)$ 時	$(P,Q,R)=(0,4,4)$ 時
		
$(P,Q,R)=(1,4,4)$ 時	$(P,Q,R)=(2,4,4)$ 時	$(P,Q,R)=(3,4,4)$ 時
		

2、若選定 P,Q,R 值時，頂點軌跡圖形為橢圓，此時固定 P,R 值，Q 值由小變大，頂點軌跡圖形會由橢圓變為拋物線，最後再變成雙曲線（如下圖）。

$(P,Q,R)=(1,1,4)$ 時	$(P,Q,R)=(1,2,4)$ 時	$(P,Q,R)=(1,3,4)$ 時
		
$(P,Q,R)=(1,4,4)$ 時	$(P,Q,R)=(1,5,4)$ 時	$(P,Q,R)=(1,6,4)$ 時
		

3、若選定P,Q,R值時，頂點軌跡圖形為雙曲線，此時固定P,Q值，R值由小變大，頂點軌跡圖形會由雙曲線變為拋物線，最後再變成橢圓（如下圖）。

$(P,Q,R)=(1,4,1)$ 時	$(P,Q,R)=(1,4,2)$ 時	$(P,Q,R)=(1,4,3)$ 時
		
$(P,Q,R)=(1,4,4)$ 時	$(P,Q,R)=(1,4,5)$ 時	$(P,Q,R)=(1,4,6)$ 時
		

4、所有圖形都有一缺口 $(0,\frac{1}{-4P})$。

三、 討論 $y=ax^2+bx$，且 $b=Pa^2+Qa+R$ 時，拋物線頂點的軌跡圖形。

（一）若 $b=0$（$P=Q=R=0$），只改變開口大小，圖形為一點$(0,0)$

（二）若 $b=R$（$P=Q=0$）(只有a值變動)，則頂點軌跡圖形為有缺口$(0,0)$的斜直線，且R值越大斜率越大。

（三）若 $b=Qa$（$P=R=0$），頂點軌跡圖形為一鉛直線。

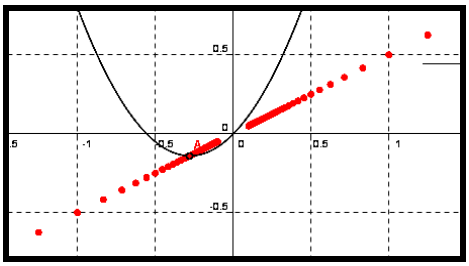
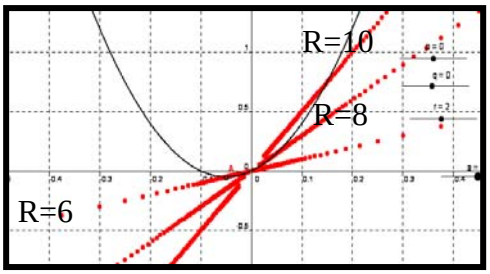
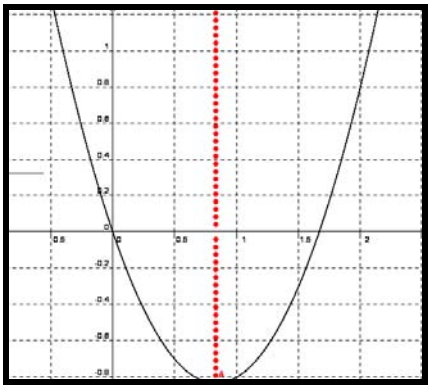
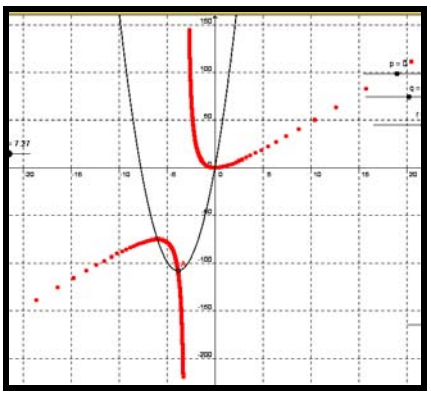
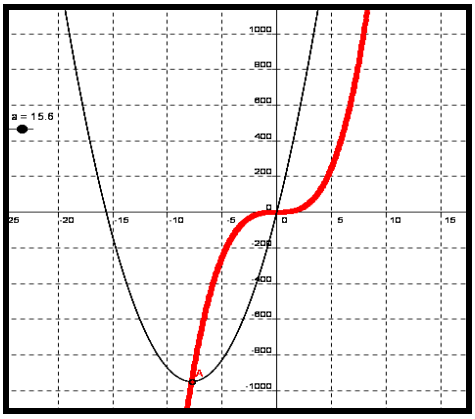
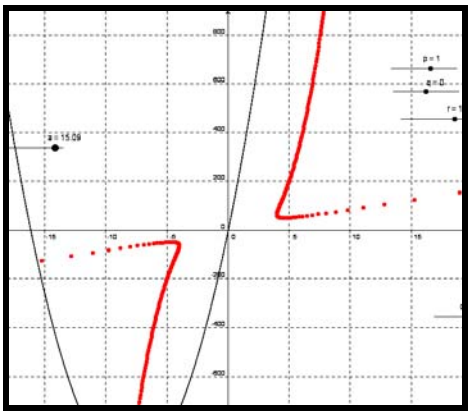
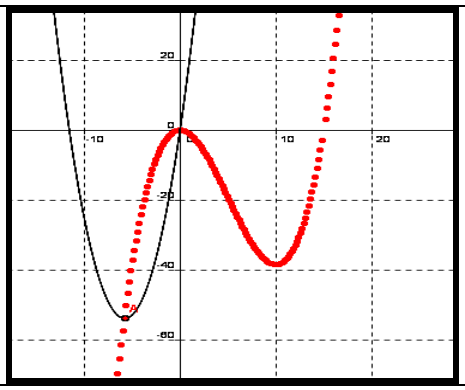
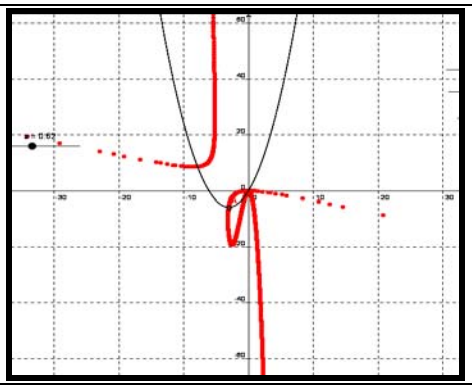
（四）若 $b=Qa+R$（$P=0$），頂點軌跡圖形為一斜雙曲線，且必有一頂點落在y軸上。

（五）若 $b=Pa^2$（$Q=R=0$），頂點軌跡方程式為三次方程式：$y=\frac{2}{p}x^3$。

（六）若 $b=Pa^2+R$（$Q=0$），頂點軌跡圖形並非圓錐截痕。

（七）若 $b=Pa^2+Qa$（$R=0$），頂點軌跡方程式為三次方程式，並非圓錐截痕。

（八）若 $b=Pa^2+Qa+R$，頂點軌跡圖形並非圓錐截痕。

	
固定b（b＝R），改變a時，頂點軌跡方程式為$y=\frac{1}{2}bx$，圖形為一斜直線	R值越大時，直線斜率越大，圖形有缺口(0,0)
	
b＝Qa時，頂點軌跡圖形為一鉛直線	b＝Qa＋R時，頂點軌跡圖形為斜雙曲線
	
b＝Pa^2時，頂點軌跡圖形為三次方程式：$y=\frac{2}{p}x^3$	b＝Pa^2＋R時，頂點軌跡圖形並非圓錐截痕
	
b＝Pa^2＋Qa時，頂點軌跡圖形的為三次方程式的圖形	b＝Pa^2＋Qa＋R時，頂點軌跡圖形並非圓錐截痕

四、 討論 $y=ax^2+bx+c$，且 $c=Pa^2+Qa+R$ 時，拋物線頂點的軌跡圖形。

（一）若 $b=0$，因 $y=ax^2+c$ 則頂點只會在 y 軸上移動，故以下的觀察為 $b\neq 0$ 時。

（二）若 $c=0$（$P=Q=R=0$）(只有 a 值變動)，則頂點軌跡圖形為有缺口(0, 0)的斜直線。

（三）若 $c=R$（$P=Q=0$）(只有 a 值變動)，則頂點軌跡圖形為有缺口(0, 0)的斜直線。

（四）若 $c=Qa$（$P=R=0$），則頂點軌跡圖形為中心點(0, 0)的斜雙曲線，y 軸為雙曲線的其中一條漸近線。

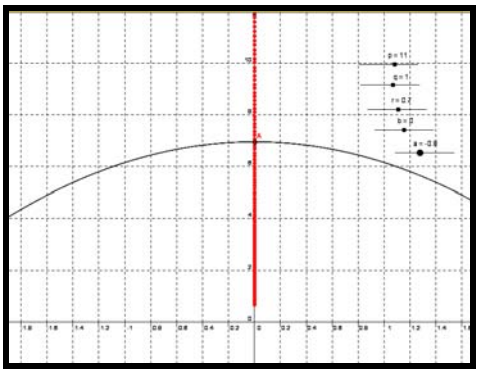
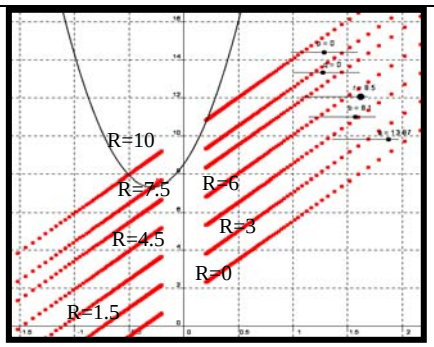
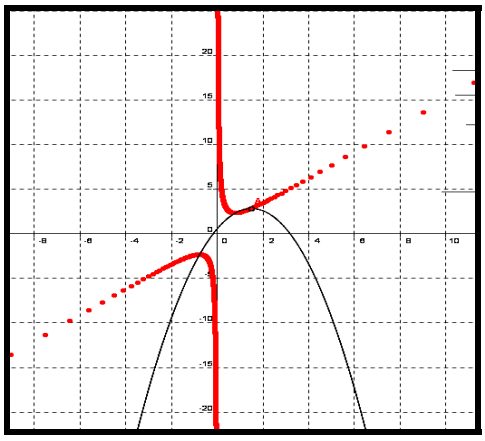
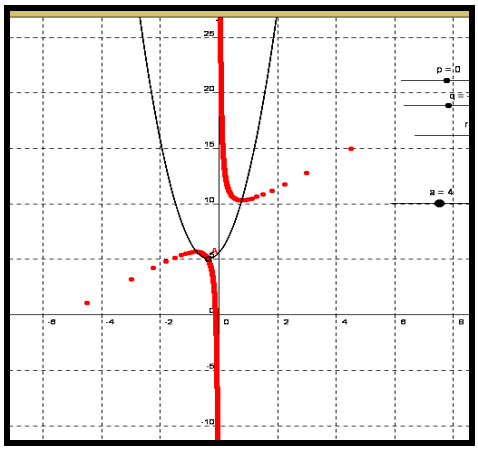
（五）若 $c=Qa+R$（$P=0$），則頂點軌跡圖形為斜雙曲線，y 軸為雙曲線的其中一條漸近線，且圖形恰為 $c=Qa$ 的頂點軌跡圖形鉛直。

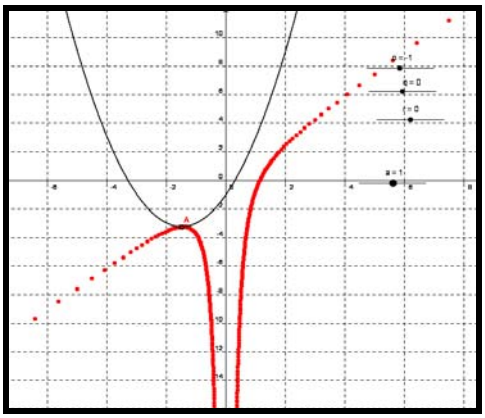
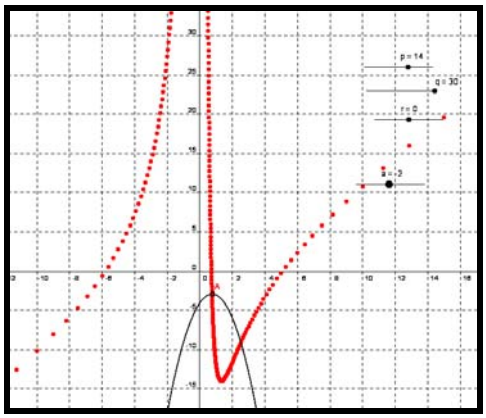
（六）若 $c=Pa^2$（$Q=R=0$），則頂點軌跡圖形並非圓錐截痕。

（七）若 $c=Pa^2+R$（$Q=0$），則頂點軌跡圖形並非圓錐截痕，且圖形恰為 $c=Pa^2$ 的頂點軌跡圖形鉛直平移。

（八）若 $c=Pa^2+Qa$（$R=0$），則頂點軌跡圖形並非圓錐截痕。

（九）若 $c=Pa^2+Qa+R$，則頂點軌跡圖形並非圓錐截痕，且圖形恰為 $c=Pa^2+Qa$ 的頂點軌跡圖形鉛直平移。

	
若 $b=0$，因 $y=ax^2+c$ 則頂點只會在 y 軸上移動	若 $c=R$，隨著 R 值改變，所形成之頂點軌跡圖形為斜率相同之平行斜直線
	
$c=Qa$ 時，頂點軌跡圖形為中心點 $(0,0)$ 的斜雙曲線，y 軸為其中一條漸近線	$c=Qa+R$ 時，頂點軌跡圖形為的斜雙曲線，y 軸為其中一條漸近線

	
$c=Pa^2$ 時，頂點軌跡圖形並非圓錐截痕	$c=Pa^2+Qa$ 時，頂點軌跡圖形並非圓錐截痕

五、 討論 $y=ax^2+bx+c$ ，且 $a=Pc^2+Qc+R$ 時，拋物線頂點的軌跡圖形。

（十）若 $b=0$ ，因 $y=ax^2+c$ 則頂點只會在 y 軸上移動，故以下的觀察為 $b\neq 0$ 時。

（一）若 $a=0$（$P=Q=R=0$）無意義。

（二）若 $a=R$（$P=Q=0$）（只有 c 值變動），則頂點軌跡圖形為一鉛直線。

（三）若 $a=Qc$ （$P=R=0$），則頂點軌跡圖形為中心點 $(0,0)$ 的斜雙曲線，y 軸為其中一條漸近線。

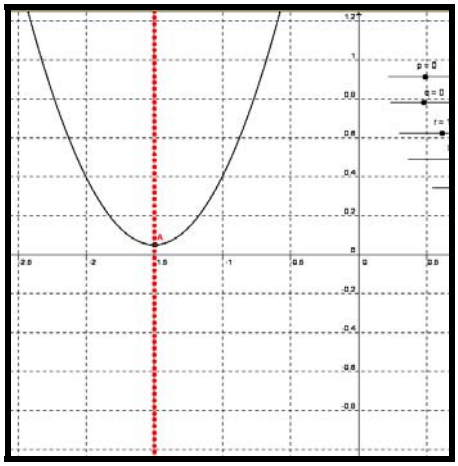
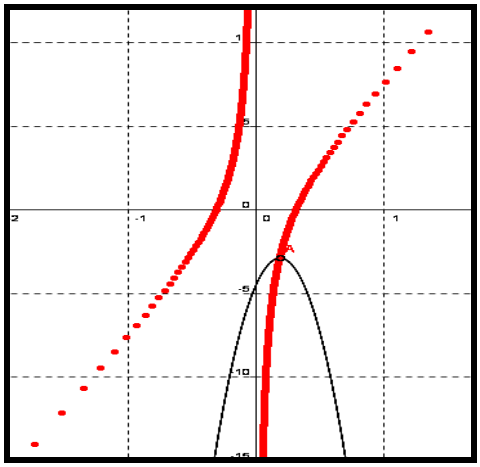
（四）若 $a=Qc+R$ （$P=0$），則頂點軌跡圖形可由 $a=Qc$ 的頂點軌跡圖形在鉛直方向平移得到（$R>0$ 時，向上平移；$R<0$ 時，向下平移）。

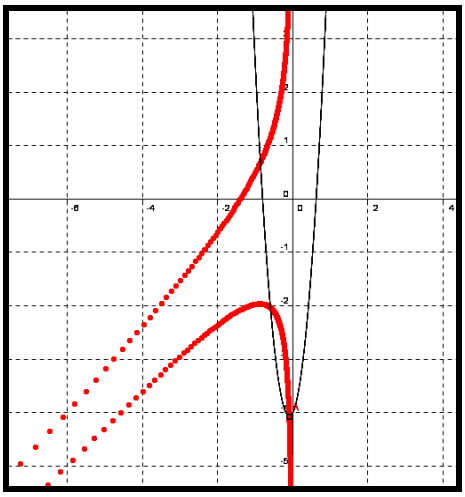
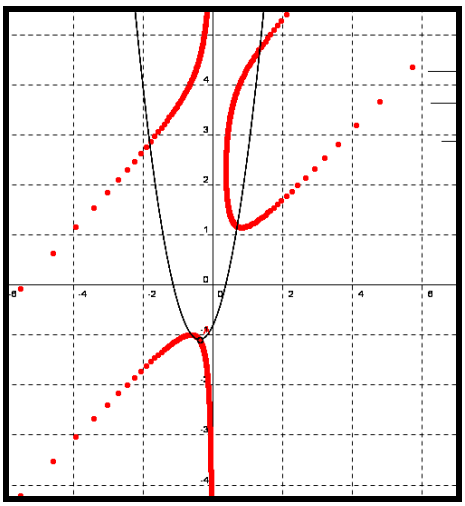
（五）若 $a=Pc^2$ （$Q=R=0$），頂點軌跡圖形並非圓錐截痕。

（六）若 $a=Pc^2+R$ （$Q=0$），頂點軌跡圖形並非圓錐截痕。

（七）若 $a=Pc^2+Qc$ （$R=0$），頂點軌跡圖形並非圓錐截痕。

（八）若 $a=Pc^2+Qc+R$ ，頂點軌跡圖形並非圓錐截痕。

	
$a=R$ 時，頂點軌跡圖形為一鉛直線。	$a=Qc$ 時，頂點軌跡圖形為中心點 $(0,0)$ 的斜雙曲線，y 軸為其中一條漸近線

	
$a=Pc^2$ 時，頂點軌跡圖形並非圓錐截痕	$a=Pc^2+Qc$ ，頂點軌跡圖形並非圓錐截痕

六、 討論 $y=ax^2+bx+c$ ，且 $c=Pb^2+Qb+R$ 時，拋物線頂點的軌跡圖形。

（一）若 $a=0$ 無意義，故以下的觀察為 $a\neq 0$ 時

（二）若 $c=0$ （$P=Q=R=0$）（只有 b 值變動），頂點軌跡圖形為拋物線。

（三）若 $c=R$ （$P=Q=0$）(只有 b 值變動)，頂點軌跡圖形為拋物線。

（四）若 $c=Qb$ （$P=R=0$），頂點軌跡圖形為拋物線。

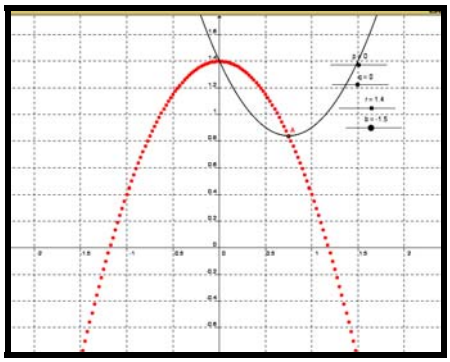
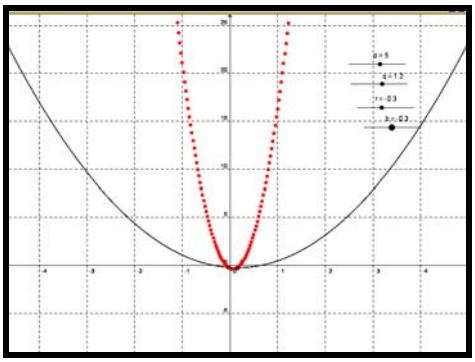
（五）若 $c=Qb+R$ （$P=0$），頂點軌跡圖形為拋物線。

（六）若 $c=Pb^2$ （$Q=R=0$），頂點軌跡圖形為拋物線。

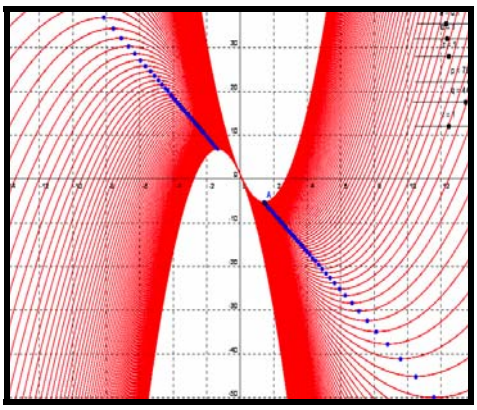
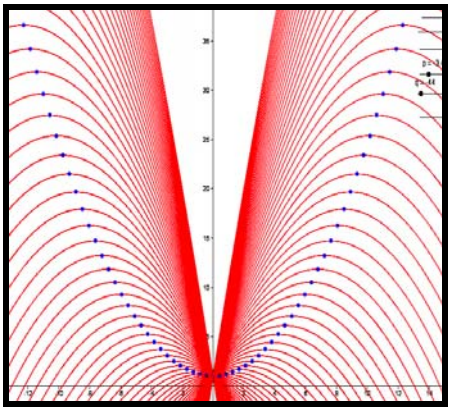
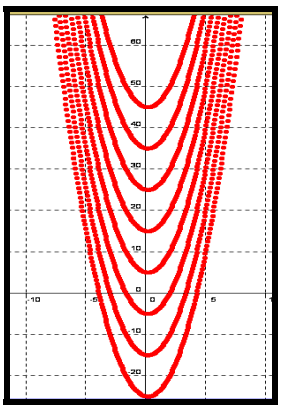
（七）若 $c=Pb^2+R$ （$Q=0$），頂點軌跡圖形為拋物線。

（八）若 $c=Pb^2+Qb$ （$R=0$），頂點軌跡圖形為拋物線。

（九）若 $c=Pb^2+Qb+R$ ，頂點軌跡圖形為拋物線。

	
若 $c=R$ ，頂點軌跡圖形為拋物線	不論 P,Q,R 值為何，頂點軌跡圖形皆為拋物線

（十）經由上述圖形觀察發現：頂點軌跡圖形皆為拋物線，且改變 P 值只改變頂點軌跡圖形之開口大小，並使頂點沿斜直線移動；改變 Q 值只讓頂點軌跡圖形沿拋物線軌跡移動；改變 R 值只讓頂點軌跡圖形上下移動。

		
改變 P 值	改變 Q 值	改變 R 值

七、 討論 $y=ax^2+bx+c$，且 $b=Pc^2+Qc+R$ 時，拋物線頂點的軌跡圖形。

（一）若 $a=0$ 無意義，故以下的觀察為 $a\neq 0$ 時

（二）若 $b=0$（$P=Q=R=0$）(只有 c 值變動)，頂點軌跡圖形為鉛直線。

（三）若 $b=R$（$P=Q=0$）（只有 c 值變動），頂點軌跡圖形為鉛直線。

（四）若 $b=Qc$（$P=R=0$），頂點軌跡圖形為原拋物線的對稱圖形，也就是另一個拋物線。

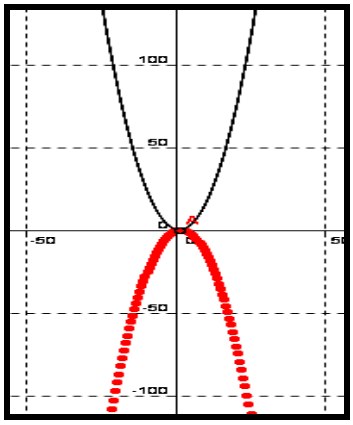
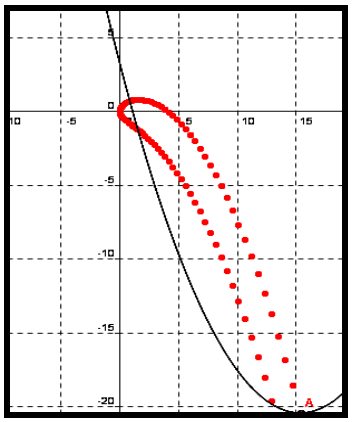
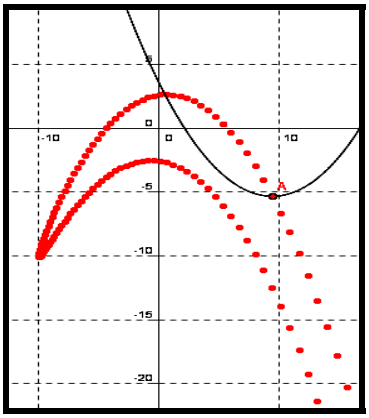
（五）若 $b=Qc+R$（$P=0$），頂點軌跡圖形與 $b=Qc$ 時的情形相同，但頂點軌跡圖形有鉛直平移 R 單位的現象。

（六）若 $b=Pc^2$（$Q=R=0$），頂點軌跡圖形並非圓錐截痕。

（七）若 $b=Pc^2+R$（$Q=0$），頂點軌跡圖形並非圓錐截痕，且圖形恰為 $b=Pc^2$ 的頂點軌跡圖形鉛直平移 R 單位。

（八）若 $b=Pc^2+Qc$（$R=0$），頂點軌跡圖形並非圓錐截痕。

（九）若 $b=Pc^2+Qc+R$，頂點軌跡圖形並非圓錐截痕，且圖形恰為 $b=Pc^2+Qc$ 的頂點軌跡圖形鉛直平移 R 單位。

		
$b=Qc$ 時，頂點軌跡圖形為原拋物線的對稱圖形	$b=Pc^2$ 時，頂點軌跡圖形類似兩個半拋物線，並非圓錐截痕	$b=Pc^2+Qc$ 時，頂點軌跡圖形與 $b=Pc^2$ 時類似，並非圓錐截痕

伍、 研究結果

由以上的討論及圖形的觀察，我發現二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的各項係數 a,b,c ，若兩個係數相互之間具有二次以下的函數關係，則原二次函數的頂點軌跡會出現圓錐截痕及三次以上的函數圖形，我將研究結果整理如下：

一、 二次函數為 $y=ax^2+bx$ 時：

a,b,c 之間的函數關係	原二次函數的頂點軌跡圖形
$a=R(R\neq 0)$	拋物線： $y=-a^2x$
$a=Qb(Q\neq 0)$	鉛直線： $x=\frac{-1}{2Q}$
$a=Qb+R(Q,R\neq 0)$	斜雙曲線
$a=Pb^2(P\neq 0)$	水平線： $y=\frac{-1}{4P}$
$a=Pb^2+R(P,R\neq 0)$	正橢圓或正雙曲線
$a=Pb^2+Qb(P,Q\neq 0)$	斜直線
$a=Pb^2+Qb+R(P,Q,R\neq 0)$	斜橢圓或斜雙曲線
$b=Pa^2+Qa+R$	一點、斜直線、鉛直線、斜雙曲線、非圓錐截痕圖形

二、 二次函數為 $y=ax^2+bx+c$ 時：

a,b,c 之間的函數關係	原二次函數的頂點軌跡圖形
$c=Pa^2+Qa+R$	鉛直線、斜直線、斜雙曲線、非圓錐截痕圖形
$a=Pc^2+Qc+R$	鉛直線、斜雙曲線、非圓錐截痕圖形
$c=Pb^2+Qb+R$	斜直線、拋物線
$b=Pc^2+Qc+R$	鉛直線、拋物線、非圓錐截痕圖形

陸、 討論

從圖形的觀察可以發現，頂點軌跡圖形會出現圓錐截痕及非圓錐截痕，有一些圖形會與圓錐截痕的部分圖形很類似，所以接下來我想透過軌跡方程式的推導來驗證頂點軌跡圖形是否為圓錐截痕圖形。

一、 頂點坐標的互換關係式

（一）二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的頂點坐標為 $(x,y)=\left(\frac{-b}{2a},\frac{-b^2}{4a}+c\right)$

$$\Rightarrow y=\frac{-b^2}{4a}+c=-a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2+c=-ax^2+c\cdots\cdots(1)\text{，且 }x=\frac{2y-c}{b}\cdots\cdots(2)$$

（二）由 $x=\frac{-b}{2a}\Rightarrow b=-2ax\cdots\cdots(3)$，$a=\frac{-b}{2x}\cdots\cdots(4)$

由 $x=\frac{2y-c}{b}\Rightarrow c=y-\frac{bx}{2}\cdots\cdots(5)$，且 $b=\frac{2(y-c)}{x}\cdots\cdots(6)$

由 $y=-ax^2+c\Rightarrow c=y+ax^2\cdots\cdots(7)$，且 $a=\frac{c-y}{x^2}\cdots\cdots(8)$

二、 討論二次函數 $y=ax^2+bx$，若 $a=Pb^2+Qb+R$，頂點 $(x,y)=\left(\frac{-b}{2a},\frac{-b^2}{4a}\right)$ 的軌跡方程式。

（一）已知 $a=Pb^2+Qb+R$，$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-b}{2(Pb^2+Qb+R)}(Pb^2+Qb+R\neq 0)$，又

$$b=\frac{2y}{x},(x\neq 0)\Rightarrow x=\frac{-\frac{y}{x}}{P\left(\frac{2y}{x}\right)^2+Q\left(\frac{2y}{x}\right)+R}\Rightarrow x^2=\frac{-y}{P\left(\frac{2y}{x}\right)^2+Q\left(\frac{2y}{x}\right)+R}$$

$$\Rightarrow Rx^2+2Qxy+4Py^2+y=0$$

由上述討論可知：二次函數 $y=ax^2+bx$ 的係數有 $a=Pb^2+Qb+R$ 的關係時，所有頂點所成的圖形包含於方程式 $Rx^2+2Qxy+4Py^2+y=0$ 的圖形中。

（二）反之，我將證明若 (x,y) 滿足 $Rx^2+2Qxy+4Py^2+y=0$，則必存在 b，使得

$(x,y)=\left(\frac{-b}{2a},\frac{-b^2}{4a}\right)$，為拋物線 $y=ax^2+bx$ 的頂點。

公式解的 y 值 $y=\frac{-2Qx-1\pm(\sqrt{4Q^2x^2+4Qx+1-16PR})}{8P}$

爲確立必存在 b，能使得 $x=\frac{-b}{2a}$，也就是

欲 $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-b}{2(Pb^2+Qb+R)}$

$2xPb^2+2xQb+2xR=-b \Rightarrow 2xPb^2+(2xQ+1)b+2xR=0$

(判別式) $D=(2xQ+1)^2-4(2xP)(2xR)=4Q^2x^2+4Qx+1-16PRx^2$

$=(4Q^2-16PR)x^2+4Qx+1$

此時若判別式恆爲負沒有能夠滿足 x 值的 b，

若否，也就是大於或等於零時則有能夠滿足 x 值的 b，便能夠成圖形。

恆爲負的條件爲 $\begin{cases} 4Q^2-16PR<0 \\ 16Q^2-16Q^2+64PR<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q^2<4PR \\ PR<0 \end{cases}$ …矛盾，

故不論 P,Q,R 值爲何，必存在 b，能使得 $x=\frac{-b}{2a}$，以下便利用

$x \to (-\frac{b}{2a}) \to (-\frac{b}{2(Pb^2+Qb+R)})$

先代入根號內得

$$y=\frac{-2Qx-1\pm\frac{1}{a}(\sqrt{(Q^2b^2-4PRb^2+P^2b^4+Q^2b^2+R^2+2PQb^3+2QRb+2PRb^2-2PQb^3-2Q^2b^2-2QRb)})}{8P}$$

化簡後爲

$$y=\frac{-2Qx-1\pm\frac{1}{a}(\sqrt{(P^2b^4+R^2-2PRb^2)})}{8P}=\frac{-2Qx-1\pm\frac{1}{a}(\sqrt{(Pb^2-R)^2})}{8P}=\frac{-2Qx-1\pm\frac{1}{a}(Pb^2-R)}{8P}$$

再以 $-\frac{b}{2a}$ 代換 x，化簡後爲

$$y=\frac{\frac{Qb}{(Pb^2+Qb+R)}-1\pm\left(\frac{(Pb^2-R)}{(Pb^2+Qb+R)}\right)}{8P}=\frac{-Pb^2-R\pm(Pb^2-R)}{8P(Pb^2+Qb+R)}$$

取正時得 $y=\frac{-R}{4P(Pb^2+Qb+R)}$ ， 取負時得 $y=\frac{-b^2}{4(Pb^2+Qb+R)}=-\frac{b^2}{4a}$

所以 (x,y) 可以表為 $\left(\frac{-b}{2a},\frac{-b^2}{4a}\right)$，為拋物線 $y=ax^2+bx$ 的頂點。

由上述討論可知：方程式 $Rx^2+2Qxy+4Py^2+y=0$ 上的圖形包含於二次函數 $y=ax^2+bx$ 的頂點（在係數有 $a=Pb^2+Qb+R$ 的關係時）所成的圖形中。

$\Rightarrow$ **故二次函數 $y=ax^2+bx$ 的頂點（在係數有 $a=Pb^2+Qb+R$ 的關係時）的軌跡方程式為 $Rx^2+2Qxy+4Py^2+y=0$**

（三）由頂點軌跡方程式$Rx^2+2Qxy+4Py^2+y=0$可知，頂點軌跡圖形必為圓錐截痕。且隨著P,Q,R值的不同，圓錐截痕的圖形會有不同，也會產生退化成直線的情形。

1、討論P,Q,R值有至少一個為0的情況。

P,Q,R值的情形	頂點軌跡方程式	對應圖形
$P=Q=R=0$	$a=0$無意義	無
$P=Q=0$	$Rx^2+y=0$	拋物線
$P=R=0$	$2Qx+1=0$	鉛直線
$Q=R=0$	$4Py+1=0$	水平線
$P=0$	$Rx^2+2Qxy+y=0$	斜雙曲線
$Q=0$	$Rx^2+4Py^2+y=0$	橢圓、圓、雙曲線
$R=0$	$2Qx+4Py+1=0$	斜直線

2、討論P,Q,R值皆不為0的情況。

（1） 二元二次方程式$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$的圖形類別可藉由

$$\delta=B^2-4AC \text{ 及 } \Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2A & B & D\\ B & 2C & E\\ D & E & 2F\end{vmatrix}$$ 加以判斷（如下表）。

$\delta=B^2-4AC=0$	$\Delta\neq 0$	圖形為拋物線
	$\Delta=0$	圖形為兩平行線、兩重合直線或圖形不存在
$\delta=B^2-4AC<0$	$\Delta\neq 0$	$A\times\Delta<0$時，圖形為橢圓或圓
		$A\times\Delta>0$時，圖形不存在
	$\Delta=0$	圖形為一點
$\delta=B^2-4AC>0$	$\Delta\neq 0$	圖形為雙曲線
	$\Delta=0$	圖形為兩相交直線

（2） 考慮$Rx^2+2Qxy+4Py^2+y=0$

$$\Rightarrow \delta=4Q^2-16PR=4\left(Q^2-4PR\right)，\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2R & 2Q & 0\\ 2Q & 8P & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=-R$$

【case1】若$Q^2-4PR=0$，且已知$\Delta=-R\neq 0\Rightarrow$頂點軌跡圖形必為拋物線。

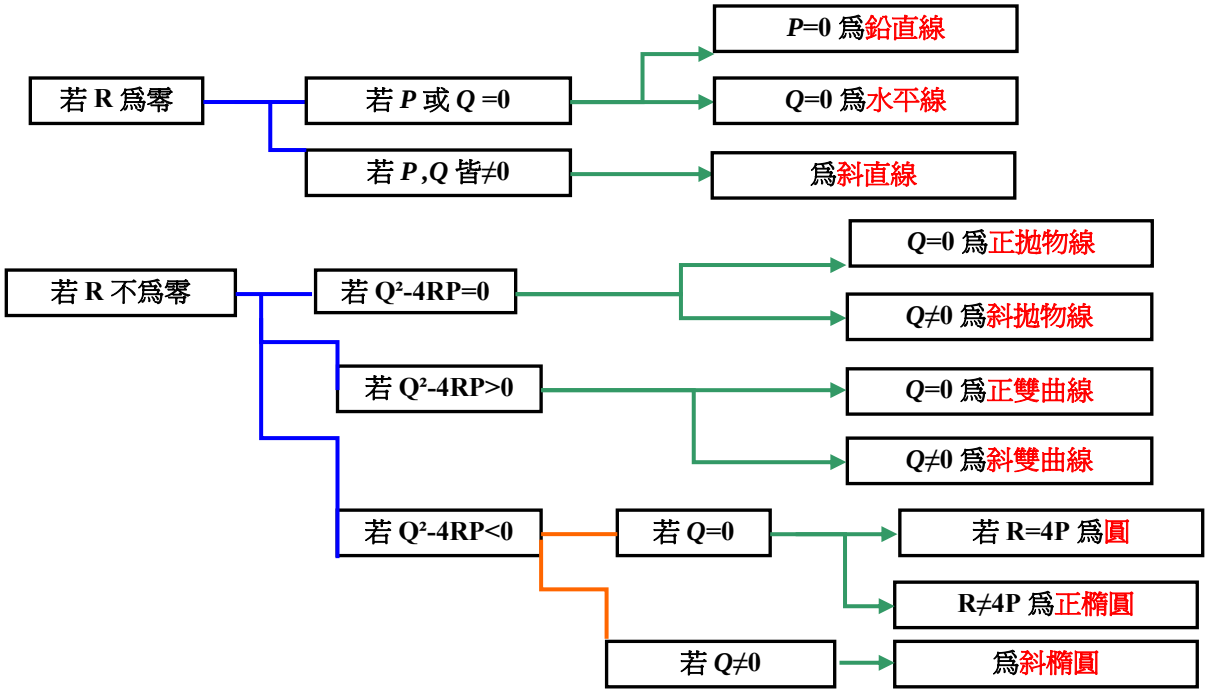
【case2】若$Q^2-4PR>0$，且已知$\Delta=-R\neq 0\Rightarrow$頂點軌跡圖形必為雙曲線。

【case3】若$Q^2-4PR<0$，且已知$\Delta=-R\neq 0\Rightarrow$頂點軌跡圖形必不為一點。

又$A\times\Delta=R\times(-R)=-R^2<0\Rightarrow$圖形為橢圓或圓。

但已知$Q\neq 0$，所以圖形不可能出現圓。

3、綜合以上述討論，我將圖形的判別方式歸納如下：



三、 討論二次函數 $y=ax^2+bx$，當 $b=Pa^2+Qa+R$ 時，頂點的軌跡方程式。

（一）已知 $b=Pa^2+Qa+R$，$\because 2y=bx \Rightarrow 2y=\left(Pa^2+Qa+R\right)x$，

又 $a=\dfrac{-b}{2x}$，$b=\dfrac{2y}{x} \Rightarrow a=\dfrac{-2y/x}{2x}=\dfrac{-y}{x^2}$

$$\Rightarrow 2y=\left(Pa^2+Qa+R\right)x=\left[P\left(\frac{-y}{x^2}\right)^2+Q\left(\frac{-y}{x^2}\right)+R\right]x$$

整理可得方程式：$Rx^4-2x^3y-Qx^2y+Py^2=0$

由上述討論可知：二次函數 $y=ax^2+bx$ 的係數有 $b=Pa^2+Qa+R$ 的關係時，所有頂點所成的圖形包含於方程式 $Rx^4-2x^3y-Qx^2y+Py^2=0$ 的圖形中。

（二）反之，我將證明若 (x,y) 滿足 $Rx^4-2x^3y-Qx^2y+Py^2=0$，則必存在 a，使得

$(x,y)=\left(\dfrac{-b}{2a},\dfrac{-b^2}{4a}\right)$，為拋物線 $y=ax^2+bx$ 的頂點。

公式解的 y 值 $y=\dfrac{2x^3+Qx^2\pm\sqrt{(2x^3+Qx^2)^2-4PR+4}}{2P}$

爲確立必存在 a 能使得 $x=\dfrac{-b}{2a}$，也就是

欲 $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{Pa^2+Qa+R}{-2a}\Rightarrow -2ax=Pa^2+Qa+R\Rightarrow Pa^2+(Q+2x)a+R=0$

(判別式) $D=(Q+2x)^2-4PR=4x^2+4Qx+Q^2-4PR$

此時若判別式恆為負沒有能夠滿足 x 值的 a，若否，也就是大於或等於零時則有能夠滿足 x 值的 a，便能夠成圖形。因為判別式的開口向上，故不論 P,Q,R 值為何，必存在 a 能使得 $x=\dfrac{-b}{2a}$。以下便利用 $x=\dfrac{b}{-2a}=\dfrac{Pa^2+Qa+R}{-2a}$ 先代入根號內得

$$y=\frac{2x^3+Qx^2\pm \frac{x^2}{a}\sqrt{P^2a^4+Q^2a^2+R^2+2PQa^3+2QRa+2PRa^2-2PQa^3-2Q^2a^2-2QRa+Q^2a^2-4PRa^2}}{2P}$$

$$=\frac{2x^3+Qx^2\pm \frac{x^2}{a}\sqrt{P^2a^4+R^2-2PRa^2}}{2P}=\frac{2x^3+Qx^2\pm \frac{x^2}{a}\sqrt{(Pa^2-R)^2}}{2P}=\frac{x^2}{2P}(2x+Q\pm(\frac{Pa^2-R}{a}))$$

再以 $-\dfrac{b}{2a}$ 代換 x，化簡後為

$$y=\frac{(Pa^2+Qa+R)^2}{8Pa^2}(\frac{-Pa^2-Qa-R+Qa\pm(Pa^2-R)}{a})=\frac{(Pa^2+Qa+R)^2}{8Pa^3}(-Pa^2-R\pm(Pa^2-R))$$

取正時得 y= $\dfrac{R(Pa^2+Qa+R)^2}{-4Pa^3}$，取負時得 y= $\dfrac{-(Pa^2+Qa+R)^2}{4a}=\dfrac{-b^2}{4a}$

所以 (x,y) 可以表為 $\left(\dfrac{-b}{2a},\dfrac{-b^2}{4a}\right)$，為拋物線 $y=ax^2+bx$ 的頂點。

由上述討論可知：方程式 $Rx^4-2x^3y-Qx^2y+Py^2=0$ 上的圖形包含於二次函數 $y=ax^2+bx$ 的頂點（在係數有 $b=Pa^2+Qa+R$ 的關係時）所成的圖形中。

⇒故二次函數 $y=ax^2+bx$ 的頂點（在係數有 $b=Pa^2+Qa+R$ 的關係時）的軌跡方程式為 $Rx^4-2x^3y-Qx^2y+Py^2=0$

（三）由頂點軌跡方程式 $Rx^4-2x^3y-Qx^2y+Py^2=0$ 可知，頂點軌跡圖形必為圓錐截痕。且隨著 P,Q,R 值的不同，圓錐截痕的圖形會有不同，也會產生退化成直線的情形。

1、討論 P,Q,R 值有至少一個為 0 的情況。

P,Q,R 值的情形	頂點軌跡方程式	對應圖形
$P=Q=R=0$	$b=0$	一點
$P=Q=0$	$2y=Rx$	斜直線
$P=R=0$	$-2x=Q$	鉛直線
$Q=R=0$	$Py=2x^3$	非圓錐截痕
$P=0$	$Rx^2-2xy-Qy=0$	斜雙曲線
$Q=0$	$Rx^4-2x^3y+Py^2=0$	非圓錐截痕
$R=0$	$Py=2x^3+Qx^2$	非圓錐截痕

2、討論P,Q,R值皆不為0的情況。

若P,Q,R值皆不為0，則頂點軌跡方程式：$Rx^4-2x^3y-Qx^2y+Py^2=0$必不為圓錐截痕。

四、 討論二次函數$y=ax^2+bx+c$，當$c=Pa^2+Qa+R$時，頂點的軌跡方程式。

（一）已知$c=Pa^2+Qa+R$，$\because (y-c)\times 2=bx \Rightarrow \left[y-\left(Pa^2+Qa+R\right)\right]\times 2=bx$

又$a=\dfrac{-b}{2x} \Rightarrow \left\{y-\left[P\left(\dfrac{-b}{2x}\right)^2+Q\left(\dfrac{-b}{2x}\right)+R\right]\right\}\times 2=bx$

整理可得方程式：$2bx^3+4Rx^2-4x^2y-2bQx+b^2P=0$

由上述討論可知：二次函數$y=ax^2+bx+c$的係數有$c=Pa^2+Qa+R$的關係時，所有頂點所成的圖形包含於方程式$2bx^3+4Rx^2-4x^2y-2bQx+b^2P=0$的圖形中。

（四）反之，我將證明若(x,y)滿足$2bx^3+4Rx^2-4x^2y-2bQx+b^2P=0$，則必存在a與b，使得$(x,y)=\left(\dfrac{-b}{2a},\dfrac{-b^2}{4a}+c\right)$，為拋物線$y=ax^2+bx+c$的頂點。

公式解的y值$=\dfrac{2bx^3+4Rx^2-2bQx+b^2P}{4x^2}=\dfrac{bx}{2}+R-\dfrac{bQ}{2t}+\dfrac{b^2P}{4x^2}$

由於a與b值都是自變數，故不論P,Q,R值為何，皆存在a與b值能使得$x=-\dfrac{b}{2a}$

以下便利用$x=-\dfrac{b}{2a}$代入得

$$y=\frac{-b}{2}\times\frac{b}{2a}+R+\frac{bQ}{2}\times\frac{2a}{b}+\frac{b^2P}{4}\times\frac{4a^2}{b^2}=\frac{-b^2}{4a}+R+Qa+Pa^2=\frac{-b^2}{4a}+c$$

所以(x,y)可以表為$\left(\dfrac{-b}{2a},\dfrac{-b^2}{4a}+c\right)$，為拋物線$y=ax^2+bx+c$的頂點。

由上述討論可知：方程式$2bx^3+4Rx^2-4x^2y-2bQx+b^2P=0$的圖形包含於二次函數$y=ax^2+bx+c$的頂點（在係數有$c=Pa^2+Qa+R$的關係時）所成的圖形中。

$\Rightarrow$故二次函數$y=ax^2+bx+c$的頂點（在係數有$c=Pa^2+Qa+R$的關係時）的軌跡方程式為$2bx^3+4Rx^2-4x^2y-2bQx+b^2P=0$

（二）由頂點軌跡方程式$2bx^3+4Rx^2-4x^2y-2bQx+b^2P=0$可知，頂點軌跡圖形會隨著P,Q,R值的不同而不同。

1、在b值為零時，圖形為只改變c值的鉛直線。

2、討論 b 值不為零時P,Q,R 值有至少一個為0 的情況。

P,Q,R 值的情形	頂點軌跡方程式	對應圖形
$P=Q=R=0$	只改變開口頂點不動	一點
$P=Q=0$	$2y=bx+2R$	斜直線
$P=R=0$	$2bx^2-4xy-2bQ=0$	斜雙曲線
$Q=R=0$	$2bx^3-4x^2y+b^2P=0$	非圓錐截痕
$P=0$	$2bx^2+4Rx-4xy-2bQ=0$	斜雙曲線
$Q=0$	$2bx^3+4Rx^2-4x^2y+b^2P=0$	非圓錐截痕
$R=0$	$2bx^3-4x^2y-2bQx+b^2P=0$	非圓錐截痕

3、討論P,Q,R 值皆不為0 的情況。

若P,Q,R 值皆不為0，則頂點軌跡方程式：

$2bx^3+4Rx^2-4x^2y-2bQx+b^2P=0$ 必不為圓錐截痕。

五、 討論二次函數 $y=ax^2+bx+c$，當 $a=Pc^2+Qc+R$ 時，頂點的軌跡方程式。

（一）已知 $a=Pc^2+Qc+R$，$\because y=-ax^2+c \Rightarrow y=-\left(Pc^2+Qc+R\right)x^2+c$

又已知 $c=y-\dfrac{bx}{2} \Rightarrow y=-\left[P\left(y-\dfrac{bx}{2}\right)^2+Q\left(y-\dfrac{bx}{2}\right)+R\right]x^2+\left(y-\dfrac{bx}{2}\right)$

整理可得方程式：$Pb^2x^3-4Pbx^2y-2Qbx^2+4Pxy^2+4Qxy+4Rx+2b=0$

由上述討論可知：二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的係數有 $a=Pc^2+Qc+R$ 的關係時，所有頂點所成的圖形包含於方程式 $Pb^2x^3-4Pbx^2y-2Qbx^2+4Pxy^2+4Qxy+4Rx+2b=0$ 的圖形中。

（二）反之，我將證明若 (x,y) 滿足

$Pb^2x^3-4Pbx^2y-2Qbx^2+4Pxy^2+4Qxy+4Rx+2b=0$，則必存在 b 與 c，使

得 $(x,y)=\left(\dfrac{-b}{2a},\dfrac{-b^2}{4a}+c\right)$，為拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 的頂點。

公式解的 y 值 $=\dfrac{4Pbx^2-4Qx\pm\sqrt{(4Qx-4Pbx^2)^2-16Px(Pb^2x^3-2Qbx^2+4Rx+2b)}}{8Px}$

$$=\frac{4Pbx^2-4Qx\pm\sqrt{16Q^2x^2+16P^2b^2x^4-32PQbx^3-16P^2b^2x^4+32PQbx^3-64PRx^2-32Pbx}}{8Px}$$

$$=\frac{4Pbx^2-4Qx\pm\sqrt{16Q^2x^2-64PRx^2-32Pbx}}{8Px}=\frac{4Pbx^2-4Qx\pm4\sqrt{Q^2x^2-4PRx^2-2Pbx}}{8Px}$$

爲確立必存在 b 與 c 值能使得 $x=\dfrac{-b}{2a}$，即

欲 $x=\dfrac{-b}{2a}\Rightarrow x=\dfrac{-b}{2(Pc^2+Qc+R)}\Rightarrow 2(Pc^2+Qc+R)x+b=0$

$\Rightarrow 2Pxc^2+2Qxc+2Rx+b=0$

(判別式) $D=(2Qx)^2-4(2Px)(2Rx+b)=(4Q^2-16PR)x^2-8Pbx$

此時若判別式恆為負沒有能夠滿足 x 值的 b 與 c，若否，也就是大於或等於零時則有能夠滿足 x 值的 b 與 c，便能構成圖形。

恆為負的條件需要 $\begin{cases} 4Q^2-16PR<0\cdots\cdots(\mathbf{1}) \\ (-8Pb)^2-0<0\cdots\cdots(\mathbf{2}) \end{cases}$，但式(2)不合

故不論 P,Q,R 值為何，皆存在 b 與 c 值能使得 $x=\dfrac{-b}{2a}$

以下便利用 $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-b}{2(Pc^2+Qc+R)}$，先代入根號內並化簡可得

$$y=\frac{Pbx^2-Qx\pm\sqrt{Q^2(\frac{-b}{2(Pc^2+Qc+R)})^2-2PR(\frac{-b}{(Pc^2+Qc+R)})^2-Pb(\frac{-b}{(Pc^2+Qc+R)})}}{2Px}$$

$$=\frac{bx}{2}-\frac{Q}{2P}\pm\frac{\sqrt{(\frac{-bQ}{2(Pc^2+Qc+R)})^2-2PR(\frac{-b}{(Pc^2+Qc+R)})^2-Pb(\frac{-b}{(Pc^2+Qc+R)})}}{2Px}$$

$$=\frac{bx}{2}-\frac{Q}{2P}\pm\frac{\sqrt{\frac{b^2Q^2-2PRb^2+4Pb^2\times(Pc^2+Qc+R)}{4(Pc^2+Qc+R)^2}}}{2Px}$$

$$=\frac{bx}{2}-\frac{Q}{2P}\pm\frac{\sqrt{b^2Q^2-2PRb^2+4Pb^2\times(Pc^2+Qc+R)}}{4Px(Pc^2+Qc+R)}$$

$$=\frac{bx}{2}-\frac{Q}{2P}\pm\frac{\sqrt{b^2Q^2-4PRb^2+4P^2b^2c^2+4PQb^2c+4PRb^2}}{4Pxa}$$

$$=\frac{bx}{2}-\frac{Q}{2P}\pm\frac{\sqrt{(Qb+2Pbc)^2}}{4Pxa}=\frac{bx}{2}-\frac{Q}{2P}\pm\frac{Qb+2Pbc}{4Pxa}$$

再以 $-\dfrac{b}{2a}$ 代換 x，化簡後為 $y=\dfrac{-b^2}{4a}-\dfrac{Q}{2P}\pm\dfrac{-2a(Qb+2Pbc)}{4Pba}=\dfrac{-b^2}{4a}-\dfrac{Q}{2P}\pm\dfrac{-Q-2Pc}{2P}$

取正時 $\dfrac{-b^2}{4a}-\dfrac{Q}{P}-c$ ， 取負時 $\dfrac{-b^2}{4a}+c$

所以 (x,y) 可以表為 $\left(\dfrac{-b}{2a},\dfrac{-b^2}{4a}+c\right)$，為拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 的頂點。

由上述討論可知：方程式 $Pb^2x^3-4Pbx^2y-2Qbx^2+4Pxy^2+4Qxy+4Rx+2b=0$ 上的圖形包含於二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的頂點（在係數有 $a=Pc^2+Qc+R$ 的關係時）所成的圖形中。

⇒ **故二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的頂點（在係數有 $a=Pc^2+Qc+R$ 的關係時）的軌跡方程式為 $Pb^2x^3-4Pbx^2y-2Qbx^2+4Pxy^2+4Qxy+4Rx+2b=0$**

（三）由頂點軌跡方程式$Pb^2x^3-4Pbx^2y-2Qbx^2+4Pxy^2+4Qxy+4Rx+2b=0$可知，隨著P,Q,R值的不同，圖形會有所不同。

1、在b值為零時，圖形為只隨c值移動的鉛直線。

2、討論在b值不為零時P,Q,R值有至少一個為0的情況。

P,Q,R值的情形	頂點軌跡方程式	對應圖形
$P=Q=R=0$	$a=0$無意義	無
$P=Q=0$	$-2Rx=b$	鉛直線
$P=R=0$	$Qbx^2+2Qxy+b=0$	斜雙曲線
$Q=R=0$	$Pb^2x^3-4Pbx^2y+4Pxy^2+2b=0$	非圓錐截痕
$P=0$	$-Qbx^2+2Qxy+2Rx+b=0$	斜雙曲線
$Q=0$	$Pb^2x^3-4Pbx^2y+4Pxy^2+4Rx+2b=0$	非圓錐截痕
$R=0$	$\frac{Pb^2}{4}x^3-Pbx^2y-\frac{Qb}{2}x^2+Pxy^2+Qxy+\frac{b}{2}=0$	非圓錐截痕

3、討論P,Q,R值皆不為0的情況。

若P,Q,R值皆不為0，則頂點軌跡方程式：

$Pb^2x^3-4Pbx^2y-2Qbx^2+4Pxy^2+4Qxy+4Rx+2b=0$必不為圓錐截痕。

六、 討論二次函數$y=ax^2+bx+c$，當$c=Pb^2+Qb+R$時，頂點的軌跡方程式。

（一）已知$c=Pb^2+Qb+R$，$\because (y-c)\times 2=bx \Rightarrow \left[y-\left(Pb^2+Qb+R\right)\right]\times 2=bx$

又已知$b=-2ax \Rightarrow \left\{y-\left[P(-2ax)^2+Q(-2ax)+R\right]\right\}\times 2=(-2ax)x$

整理可得方程式：$y=\left(4a^2P-a\right)x^2-2aQx+R$

由上述討論可知：二次函數$y=ax^2+bx+c$的係數有$c=Pb^2+Qb+R$的關係時，所有頂點所成的圖形包含於方程式$y=(4a^2P-a)x^2-2Qax+R$的圖形中。

（二）反之，我將證明若(x,y)滿足$y=(4a^2P-a)x^2-2Qax+R$，則必存在a與b，使得$(x,y)=\left(\frac{-b}{2a},\frac{-b^2}{4a}+c\right)$，為拋物線$y=ax^2+bx+c$的頂點。

由於a與b值都是自變數，故不論P,Q,R值爲何，皆有a,b值有構成t的能力。

再以$-\frac{b}{2a}$代換x，化簡後爲

$$y=(4a^2P-a)(-\frac{b}{2a})^2-2Qa(-\frac{b}{2a})+R=(4a^2P-a)(\frac{b^2}{4a^2})+Qb+R$$

$$=(4aP-1)(\frac{b^2}{4a})+Qb+R=Pb^2-\frac{b^2}{4a}+Qb+R=-\frac{b^2}{4a}+c$$

所以(x,y)可以表爲$\left(\frac{-b}{2a},\frac{-b^2}{4a}+c\right)$，爲拋物線$y=ax^2+bx+c$的頂點。

由上述討論可知：方程式$y=(4a^2P-a)x^2-2Qax+R$的圖形包含於二次函數$y=ax^2+bx+c$的頂點（在係數有$c=Pb^2+Qb+R$的關係時）所成的圖形。

$\Rightarrow$故二次函數$y=ax^2+bx+c$的頂點（在係數有$c=Pb^2+Qb+R$的關係時）的軌跡方程式為$y=\left(4a^2P-a\right)x^2-2aQx+R$

（三）由頂點軌跡方程式$y=\left(4a^2P-a\right)x^2-2aQx+R$可知，頂點軌跡圖形必為圓錐截痕。且隨著P,Q,R值的不同，圓錐截痕的圖形會有不同，也會產生退化成直線的情形。

1、在a值為零時無意義。

2、討論在a值不為零時P,Q,R值有至少一個為0的情況。

P,Q,R值的情形	頂點軌跡方程式	對應圖形
$P=Q=R=0$	只變動b值	拋物線
$P=Q=0$	$y=-ax^2+R$	拋物線
$P=R=0$	$y=-ax^2-2aQx$	拋物線
$Q=R=0$	$y=\left(4a^2P-a\right)x^2$	拋物線
$P=0$	$y=-ax^2-2aQx+R$	拋物線
$Q=0$	$y=\left(4a^2P-a\right)x^2+R$	拋物線
$R=0$	$y=\left(4a^2P-a\right)x^2-2aQx$	拋物線
$P=\dfrac{1}{4a}$	$y=-2aQx$	斜直線

3、討論P,Q,R值皆不為0的情況。

若P,Q,R值皆不為0，則頂點軌跡方程式：

$y=\left(4a^2P-a\right)x^2-2aQx+R$必為拋物線，且P,Q,R值對頂點軌跡圖形的影響與二次函數$y=ax^2+bx+c$中的a,b,c值對拋物線圖形的影響角色相同。

七、 討論二次函數$y=ax^2+bx+c$，當$b=Pc^2+Qc+R$時，頂點的軌跡方程式。

（一）已知$b=Pc^2+Qc+R$，$\because (y-c)\times 2=bx \Rightarrow (y-c)\times 2=\left(Pc^2+Qc+R\right)x$

又已知$c=\left(y+ax^2\right)\Rightarrow\left[y-\left(y+ax^2\right)\right]\times 2=\left[P\left(y+ax^2\right)^2+Q\left(y+ax^2\right)+R\right]x$

整理可得方程式：$Pa^2x^4+2Pax^2y+Qax^2+2ax+Py^2+Qy+R=0$

由上述討論可知：二次函數$y=ax^2+bx+c$的係數有$b=Pc^2+Qc+R$的關係時，所有頂點所成的圖形包含於方程式$Pa^2x^4+2Pax^2y+Qax^2+2ax+Py^2+Qy+R=0$的圖形中。

（二）反之，我將證明若 (x,y) 滿足 $Pa^2x^4+2Pax^2y+Qax^2+2ax+Py^2+Qy+R=0$，

則必存在 a 與 c，使得 $(x,y)=\left(\frac{-b}{2a},\frac{-b^2}{4a}+c\right)$，為拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 的頂點。

公式解的 y 值 $=\dfrac{-2Pax^2-Q\pm\sqrt{(2Pax^2+Q)^2-4P(Pa^2x^4+Qax^2+2ax+R)}}{2P}$

$=\dfrac{-2Pax^2-Q\pm\sqrt{4P^2a^2x^4+Q^2+4PQax^2-4P^2a^2x^4-4PQax^2-8Pax-4PR}}{2P}$

$=\dfrac{-2Pax^2-Q\pm\sqrt{Q^2-8Pax-4PR}}{2P}$

爲確立在 $x=\dfrac{-b}{2a}$ 時有 a 與 c 值能滿足 x 值，即

欲 $x=\dfrac{-b}{2a}\Rightarrow x=\dfrac{-Pc^2-Qc-R}{2a}\Rightarrow Pc^2+Qc+R+2xa=0$

(判別式) $D=Q^2-4P(R+2ax)=-8Pxa+Q^2-4PR$，爲斜直線(必非恆負)，故

不論 P,Q,R 值爲何，皆存在有 a 與 c 值能使得 $x=\dfrac{-b}{2a}$

以下便利用 $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{Pc^2+Qc+R}{2a}$ 先代入根號內得

$y=\dfrac{-2Pax^2-Q\pm\sqrt{Q^2+4P(Pc^2+Qc+R)-4PR}}{2P}$

$=\dfrac{-2Pax^2-Q\pm\sqrt{Q^2+4P^2c^2+4PQc+4PR-4PR}}{2P}$

$=\dfrac{-2Pax^2-Q\pm\sqrt{Q^2+4P^2c^2+4PQc}}{2P}=\dfrac{-2Pax^2-Q\pm\sqrt{(Q+2Pc)^2}}{2P}$

$=\dfrac{-2Pax^2-Q\pm(Q+2Pc)}{2P}=-ax^2-\dfrac{Q}{2P}\pm\dfrac{(Q+2Pc)}{2P}$

再以 $-\dfrac{b}{2a}$ 代換 x，化簡後爲 $y=-\dfrac{b^2}{4a}-\dfrac{Q}{2P}\pm\dfrac{(Q+2Pc)}{2P}$

取負時 $\dfrac{-b^2}{4a}-\dfrac{Q}{P}-c$ ， 取正時 $\dfrac{-b^2}{4a}+c$

所以 (x,y) 可以表為 $\left(\frac{-b}{2a},\frac{-b^2}{4a}+c\right)$，為拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 的頂點。

由上述討論可知：方程式 $Pa^2x^4+2Pax^2y+Qax^2+2ax+Py^2+Qy+R=0$ 的圖形包含於二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的頂點（在係數有 $b=Pc^2+Qc+R$ 的關係時）所成的圖形中。

⇒ **故二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的頂點（在係數有 $b=Pc^2+Qc+R$ 的關係時）的軌跡方程式為 $Pa^2x^4+2Pax^2y+Qax^2+2ax+Py^2+Qy+R=0$**

（三）由頂點軌跡方程式$Pa^2x^4+2Pax^2y+Qax^2+2ax+Py^2+Qy+R=0$可知，頂點軌跡圖形隨著P,Q,R值的不同而有所不同。

1、在a值為零時無意義。

2、討論在a值不為零時P,Q,R值有至少一個為0的情況。

P,Q,R值的情形	頂點軌跡方程式	對應圖形
$P=Q=R=0$	只有c值變動	鉛直線
$P=Q=0$	$2ax=R$	鉛直線
$P=R=0$	$Qax^2+2ax+Qy=0$	拋物線
$Q=R=0$	$Pa^2x^4+2Pax^2y+2ax+Py^2=0$	非圓錐截痕
$P=0$	$Qax^2+2ax+Qy+R=0$	拋物線
$Q=0$	$Pa^2x^4+2Pax^2y+2ax+Py^2+R=0$	非圓錐截痕
$R=0$	$Pa^2x^4+2Pax^2y+Qax^2+2ax+Py^2+Qy=0$	非圓錐截痕

3、討論P,Q,R值皆不為0的情況。

若P,Q,R值皆不為0，則頂點軌跡方程式：

$Pa^2x^4+2Pax^2y+Qax^2+2ax+Py^2+Qy+R=0$必不為圓錐截痕。

八、 討論P,Q,R值的變動對於頂點軌跡圖形的影響

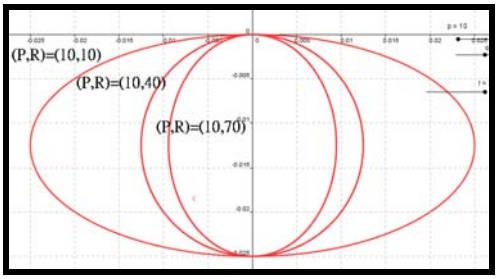
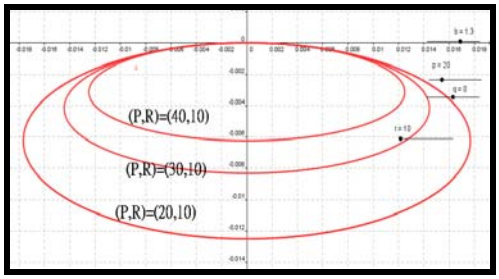
從研究過程中可以發現，P,Q,R值的變動會讓頂點軌跡圖形產生平移、伸縮或改變開口大小的現象，因此我接著討論P,Q,R值的變動對於頂點軌跡圖形的影響

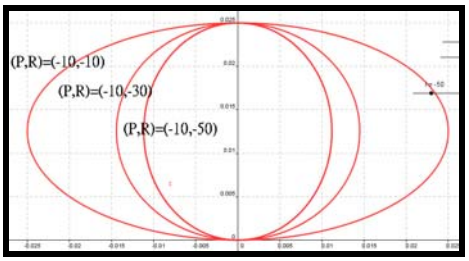
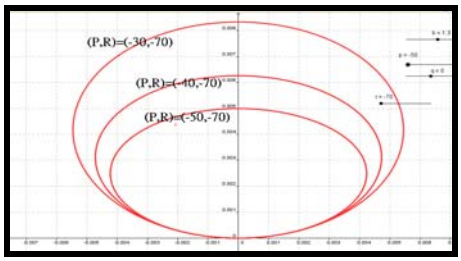
以當a,b具有二次函數$a=Pb^2+R$關係為例

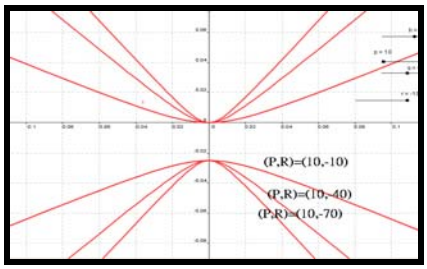
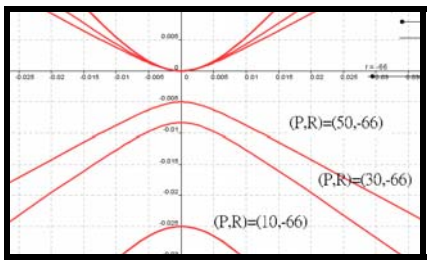
當$a=Pb^2+R$時，頂點軌跡方程式為：$Rx^2+4Py^2+y=0$，

配方可得：$Rx^2+4P=[y^2+\frac{1}{4P}y+(\frac{1}{8P})^2]=\frac{1}{16P}\Rightarrow 16PRx^2+64P^2(y+\frac{1}{8P})^2=1$

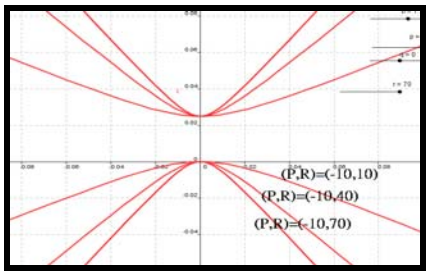
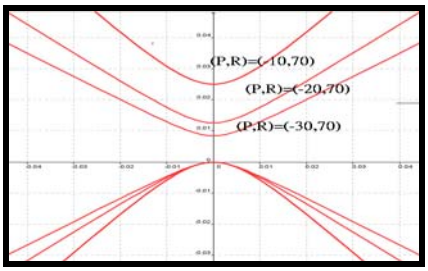
$$\Rightarrow \frac{(x-0)^2}{1/16\times 1/PR}+\frac{(y+1/8P)^2}{1/64\times 1/P^2}=1$$

（一）當 $PR>0$ 時，圖形為橢圓或圓，P＞0 且 R＞0			
當 R 值變大	$1/PR$ 變小	y 項不變	圖形只橫向收縮
當 R 值變小	$1/PR$ 變大	y 項不變	圖形只橫向拉長
當 P 值變大	$1/PR$ 變小	$1/P^2$ 變小	圖形變小
當 P 值變小	$1/PR$ 變大	$1/P^2$ 變大	圖形變大
			
P＞0 且 R＞0，橢圓 R 值變化的影響		P＞0 且 R＞0，橢圓 P 值變化的影響	

（二）當 $PR>0$ 時，圖形為橢圓或圓，若 P、R 皆負			
當 R 值變大	$1/PR$ 變大	y 項不變	圖形橫向拉長
當 R 值變小	$1/PR$ 變小	y 項不變	圖形橫向收縮
當 P 值變大	$1/PR$ 變大	$1/P^2$ 變大	圖形變大
當 P 值變小	$1/PR$ 變小	$1/P^2$ 變小	圖形變小
			
P＜0 且 R＜0，橢圓 R 值變化的影響		P＜0 且 R＜0，橢圓 P 值變化的影響	

（三）當 $PR<0$ 時，圖形為雙曲線，P＞0 且 R＜0，$-\dfrac{(x-0)^2}{1/16\times -1/PR}+\dfrac{(y+1/8P)^2}{1/64\times 1/P^2}=1$			
當 R 值變大	$-1/PR$ 變大	y 項不變	圖形開口變大，貫軸不變
當 R 值變小	$-1/PR$ 變小	y 項不變	圖形開口變小，貫軸不變
當 P 值變大	$-1/PR$ 變小	$1/P^2$ 變小	圖形開口變大，貫軸變短
當 P 值變小	$-1/PR$ 變大	$1/P^2$ 變大	圖形開口變小，貫軸變長
			
P＞0 且 R＜0，雙曲線 R 值變化的影響		P＞0 且 R＜0，雙曲線 P 值變化的影響	

當 $PR<0$ 時，圖形為雙曲線，$P<0$ 且 $R>0$			
當 R 值變大	$-1/PR$ 變小	y 項不變	圖形開口變小，貫軸不變
當 R 值變小	$-1/PR$ 變大	y 項不變	圖形開口變大，貫軸不變
當 P 值變大	$-1/PR$ 變大	$1/P^2$ 變大	圖形開口變小，貫軸變長
當 P 值變小	$-1/PR$ 變小	$1/P^2$ 變小	圖形開口變大，貫軸變短

	
$P<0$ 且 $R>0$，雙曲線 R 值變化的影響	$P<0$ 且 $R>0$，雙曲線 P 值變化的影響

九、 討論圖形缺口的成因

我發現當二次函數為 $y=ax^2+bx$ 時，若 a 為 b 的二次函數，則頂點軌跡圖形除了直線外，必通過原點 $(0,0)$，且圖形在 $\left(0,\frac{-1}{4P}\right)$ 會出現缺口，以下為缺口的成因討論：

（一）當頂點軌跡圖形為一直線時，其軌跡方程式為：$2Qx+4Py+1=0$，

因為 $x=0$ 時，拋物線頂點為 $(0,0)$，所以圖形不會有點 $\left(0,\frac{-1}{4P}\right)$。

（二）當頂點軌跡圖形不為直線時，由頂點坐標 $(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2}{4a})$ 可知：

若 $y=0\Rightarrow a\neq 0$ 且 $b=0\Rightarrow x=0\Rightarrow(0,0)$ 必為圖形經過之點。

若 $y\neq 0\Rightarrow a\neq 0$ 且 $b\neq 0\Rightarrow x\neq 0\Rightarrow\left(0,\frac{-1}{4P}\right)$ 必不為圖形經過之點。

柒、 結論

一、 已知二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的各項係數為 a,b,c，當 a,b,c 中任兩個相互之間具有二次以下的函數關係時，原二次函數的頂點軌跡會出現圓錐截痕及三次以上的函數圖形。其中會出現的圓錐截痕圖形包含：正橢圓、斜橢圓、正拋物線、斜拋物線、正雙曲線、斜雙曲線、水平線、鉛直線、斜直線。

二、 利用頂點座標轉換的公式算出

（一） 從 $y=ax^2+bx$ 探討 a 與 b 間的關係:

1、當 $a=Pb^2+Qb+R$ 時: $Rx^2+2Qxy+4Py^2+y=0$

2、當 $b=Pa^2+Qa+R$ 時: $Rx^4-2x^3y-Qx^2y+Py^2=0$

（二） 從 $y=ax^2+bx+c$ 探討 a 與 c 間的關係:

1、當 $c=Pa^2+Qa+R$ 時: $2bx^3+4Rx^2-4x^2y-2bQx+b^2P=0$

2、當 $a=Pc^2+Qc+R$ 時: $Pb^2x^3-(4Pby+2Qb)x^2+(Py^2+Qy+R)4x+2b=0$

（三） 從 $y=ax^2+bx+c$ 探討 b 與 c 間的關係:

1、當 $c=Pb^2+Qb+R$ 時: $y=\left(4a^2P-a\right)x^2-2aQx+R$

2、當 $b=Pc^2+Qc+R$ 時: $Pa^2x^4+2Pax^2y+Qax^2+2ax+Py^2+Qy+R=0$

三、 利用參數式將 $x=t=\dfrac{-b}{2a}$ 與 a, b, c 間的關係代回頂點軌跡方程式，證明了其與頂點軌跡圖形的充要條件後，可利用 P,Q,R 是否為零將軌跡分類，並針對較特殊的軌跡進一步討論，如 $a=Pb^2+Qb+R$ 和 $c=Pb^2+Qb+R$

四、 當 $a=Pb^2+Qb+R$ 時，頂點軌跡方程式為 $Rx^2+2Qxy+4Py^2+y=0$，透過二元二次方程式圖形類別判別式：$\delta=4Q^2-16PR=4\left(Q^2-4PR\right)$，$\Delta=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}2R & 2Q & 0\\ 2Q & 8P & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=-R$

當 P,Q,R 值皆不為 0 時，可推得以下結果：

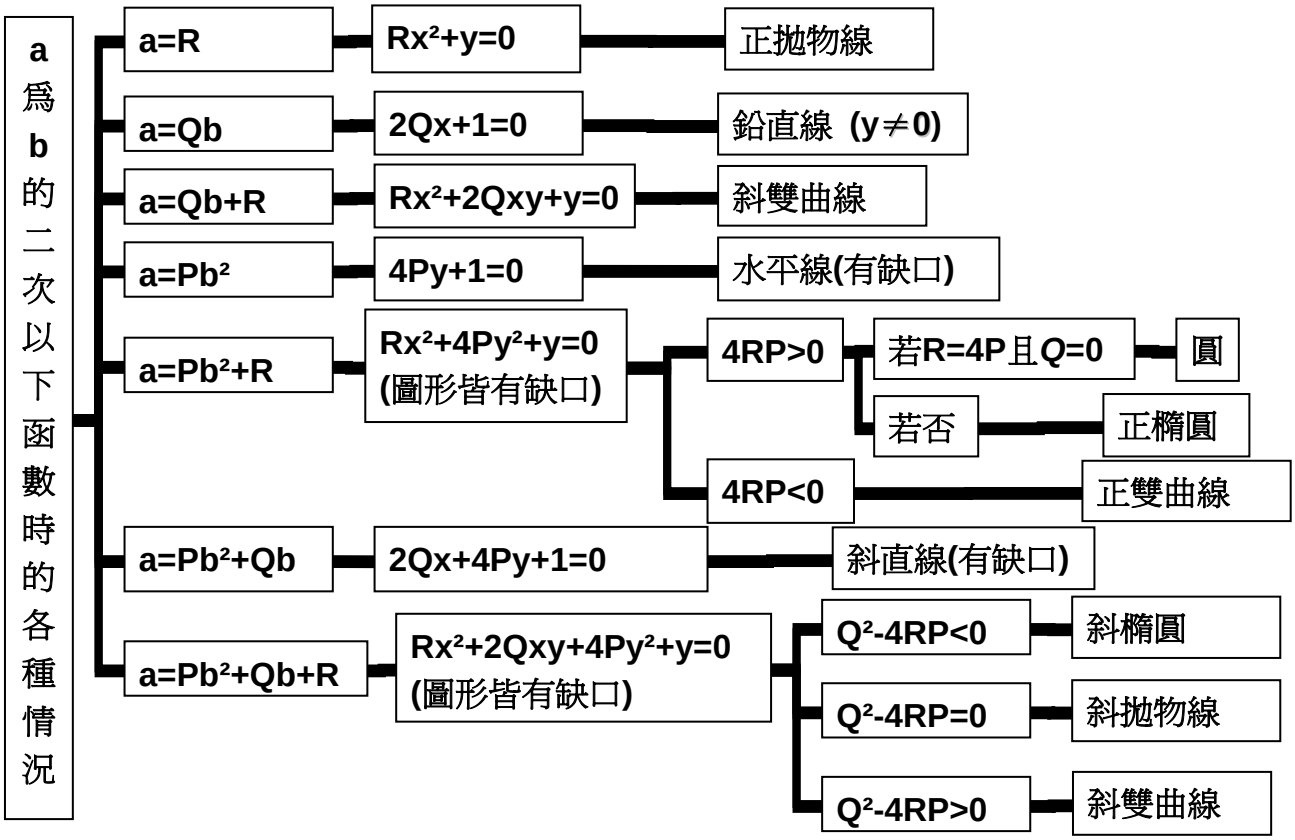
（一）若 $Q^2-4PR=0$，$\Rightarrow$ 頂點軌跡圖形必為拋物線。

（二）若 $Q^2-4PR>0$，$\Rightarrow$ 頂點軌跡圖形必為雙曲線。

（三）若 $Q^2-4PR<0$，$\Rightarrow$ 頂點軌跡圖形必為橢圓。

五、 已知二次函數 $y=ax^2+bx$，若 a 為 b 的二次函數，則頂點軌跡圖形除了直線外，必通過原點 $(0,0)$，且圖形在 $\left(0,\dfrac{-1}{4P}\right)$ 會出現缺口。

六、　當 $a=Pb^2+Qb+R$ 時，頂點軌跡圖形與 P,Q,R 的值的對應結果如下圖：



七、　當 $c=Pb^2+Qb+R$ 時，除 $P=\dfrac{1}{4a}$ 為直線外軌跡圖形皆為拋物線，且 P,Q,R 值對頂點軌跡圖形的影響與二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 中的 a,b,c 值對拋物線圖形的影響角色相同。

八、　當 a,b,c 中任兩個相互之間具有二次以下的函數關係時，從研究過程中可以發現，P,Q,R 值的變動會讓頂點軌跡圖形產生平移、伸縮或改變開口大小的現象。

捌、未來展望

一、　本研究主要是在討論拋物線方程式各項係數間具有二次以下函數關係時，頂點軌跡圖形的各種情況，往後希望進一步討論延伸討論各項係數間的函數關係為 n 次以下的情形（如：$a=P_Nb^n+P_{N-1}b^{n-1}+\cdots\cdots+P_1b+P_0$ ）），希望能有新的發現。

二、　希望可以繼續討論距離頂點的 x 分量 n 的單位的時候 $(\dfrac{-b}{2a}+n\ ,\ \dfrac{-b^2}{4a}+c+n^2a)$ 的拋物線上任一點的軌跡。

三、　希望可以繼續討論拋物線焦點的軌跡圖形。

四、　希望可以繼續討論其他圓錐曲線（雙曲線及橢圓）的頂點軌跡圖形。

玖、參考資料

一、 高中數學第一冊。龍騰出版社。

二、 高中數學第四冊。康熹出版社。

三、 高中數學第四冊教師手冊。康熹出版社。

四、 高中選修數學（Ⅱ）。康熹出版社。

五、 維基百科。圓錐曲線。

http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%9C%86%E9%94%A5%E6%9B%B2%E7%BA%BF

六、 和諧課堂。崔洪琳的博客。學生的研究成果。程乃嘉。

http://blog.sina.com.cn/s/blog_5d7808ff0100brjj.html

【評語】040407

對一簡單的二次函數 $y=ax^2+bx+c$，針對係數之 a、b、c 之變化，考慮拋物線頂點之軌跡圖形。雖未使用困難的工具，但討論詳盡，推導細膩，為一頗具水準的作品。