中華民國第52屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

第二名

040406

旋轉硬幣的機率

學校名稱：國立嘉義高級中學

作者：	指導老師：
高二 鄭黃昱翔	吳博仁 李文堂

關鍵詞：硬幣厚度、轉動、機率

旋轉硬幣的機率

摘要

投擲一枚一般的硬幣會出現正面與反面，但若給予的硬幣之厚度，足以使硬幣著地後在不彈跳的情況下能夠站立（即出現側面），我們取正面的法向量Ｎ與硬幣質心Ｏ到著地點Ｐ的向量$\overline{OP}$，透過數學的方法來決定正面、反面與側面出現的機率，並討論出正面、反面與側面出現的機率與初速度、初角速度、硬幣形狀的關係。

壹、 研究動機

我們在學機率時常開玩笑:「如果硬幣會站起來」。而在印度小說 Q&A 中，羅摩·穆罕穆德·湯瑪士在小時候曾經被一位算命師算過命，算命師特別給羅摩一枚幸運硬幣，這枚硬幣似乎賦予了羅摩好運氣，往往決定羅摩在重大事件上的行動，而他引起我的注意，如果羅摩的硬幣會站起來呢？

貳、 研究目的

一、 探討硬幣出現正面、反面、側面的條件

二、 探討硬幣速度與角初速的關係

三、 探討正面、反面與側面出現機率的值

四、 探討非均質硬幣出現正面、反面與側面出現的機率

參、 研究設備及器材

紙、筆、電腦、繪圖程式、硬幣模型

肆、 研究過程或方法

一、 設定並簡化實驗的物理因素：

假設硬幣 C_1 為一輕質均勻剛體，地面可吸收碰撞，使硬幣著地後不彈跳、不變形，如海綿或泥地。

設硬幣半徑 r ，厚度 $2h$ ，硬幣中心O、重心G為同一點，G到正反面與側面的交線的距離 $R=\sqrt{r^2+h^2}$ ，$\alpha=\tan^{-1}\dfrac{r}{h}$ ，正面以H（紅色）表示，反面以T（藍色）表示，側面以S（綠色）表示，其中取正面的法向量 $\overline{N}$ ，做為指標（如圖 1），且以垂直地面向上為 y 軸正向，旋轉軸平行 z 軸。

二、 假設硬幣的運動方程式：

根據運動的獨立性，我們可將的運動方程式分解成移動和轉動兩部分（見附錄），又其中水平移動不影響硬幣落地的時間，所以可單純探討垂直上拋和旋轉的方程式即可。

移動：設 $y(t)$ 表示在時間 t 時 G 的位置，則

$$y(0)=R\text{，}\frac{d^2y(t)}{dt^2}=-g\text{，且當}t=0\text{時，}\frac{dy(t)}{dt}=u\ldots\ldots(1)$$

轉動：設 $\theta(t)$ 表示在時間 t 時 $\overline{N}$ 與 y 軸正向的有向角，

$$\theta(0)=0\text{，}\frac{dy(t)}{dt}=\omega\ldots\ldots(2)\text{（圖 2）}$$

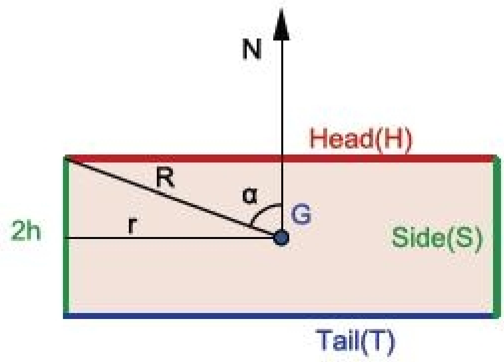

圖 1：硬幣的設定

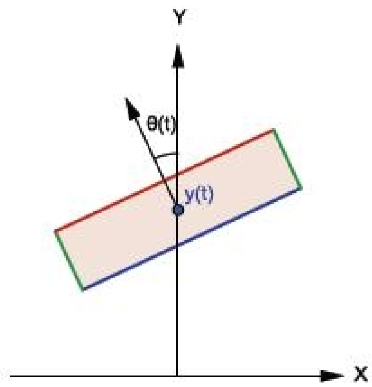

圖 2：硬幣的運動方程式

由(1)(2)可得到

$$y(t)=R+ut-\frac{gt^2}{2}\ldots\ldots(3)$$

$$\theta(t)=\omega t\ldots\ldots(4)$$

三、 正面、反面、側面的條件：

考慮硬幣在時間 t_0 時接觸地面的情況，我們之前假設地面可吸收衝力，使硬幣碰撞後不彈跳，則當

$$\begin{aligned}\theta(t_0)&=2n\pi\pm\alpha\\ \theta(t_0)&=(2n+1)\pi\pm\alpha\end{aligned}\quad\ldots\ldots(5)$$

時，G 到與地面接觸點 A 向量 $\overline{GA}$ 會與地面垂直，所以可得出現正面、反面、側面的情況與 $\theta(t_0)$ 的關係（在討論一有仔細的敘述）

$$H: 2n\pi-\alpha<\theta(t_0)<2n\pi+\alpha$$

$$T: (2n+1)\pi-\alpha<\theta(t_0)<(2n+1)\pi+\alpha \quad ，n\in N \ldots\ldots(6)（如圖 3）$$

$$S: \begin{cases} 2n\pi+\alpha<\theta(t_0)<(2n+1)\pi-\alpha \\ (2n+1)\pi+\alpha<\theta(t_0)<(2n+2)\pi-\alpha \end{cases}$$

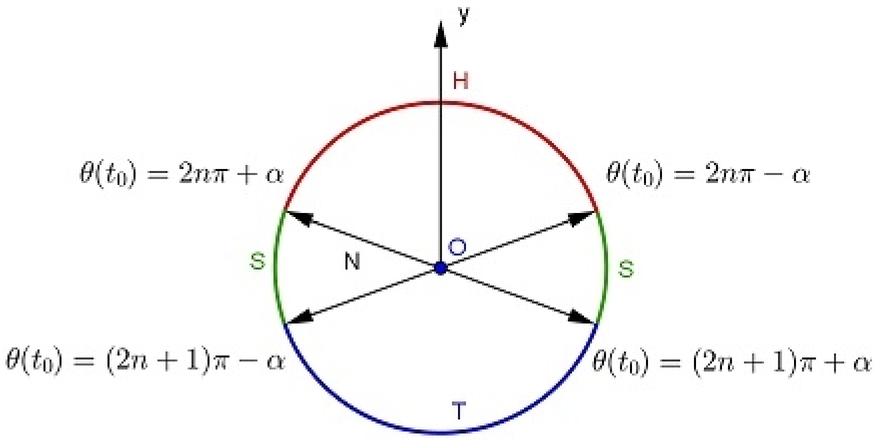

圖 3：正面、反面、側面的條件

四、 探討速度u與角速度ω的關係在硬幣出現正面、反面、側面時的關係：

在(5)的情況下 $y(t_0)=R$則$ut_0-\dfrac{gt_0^2}{2}=0$

可解得$t_0=0$或$t_0=\dfrac{2u}{g}$ 取$t_0=\dfrac{2u}{g}$

分別討論 4 種情況：

(一)、 當$\theta(t_0)=2n\pi+\alpha$（圖 4-1），

則$\omega t_0=\dfrac{2u\omega}{g}=2n\pi+\alpha$ 即$u\omega=ng\pi+\dfrac{g\alpha}{2}$……(7)（在圖 5 中為褐色曲線）

(二)、 當$\theta(t_0)=(2n+1)\pi-\alpha$（圖 4-2），

則$u\omega=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)g\pi-\dfrac{g\alpha}{2}$……(8)（在圖 5 中為紫色曲線）

(三)、 當$\theta(t_0)=(2n+1)\pi+\alpha$（圖 4-3），

則$u\omega=\left(n+\frac{1}{2}\right)g\pi+\frac{g\alpha}{2}$……(9)（在圖５中為紫色曲線)。

(四)、 當$\theta(t_0)=2n\pi-\alpha$（圖 4-4），

則$u\omega=ng\pi-\frac{g\alpha}{2}$……(10)（在圖５中為褐色曲線）。

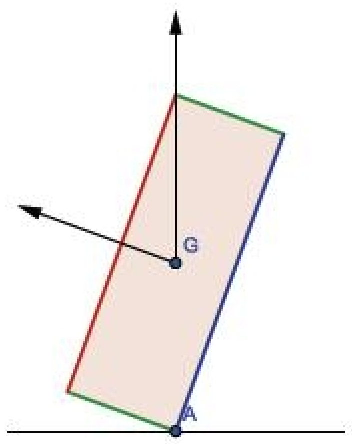

圖 4-1：$\theta(t_0)=2n\pi+\alpha$

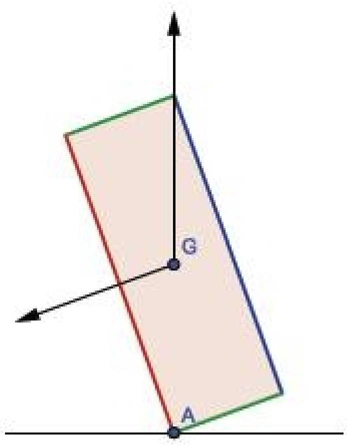

圖 4-2：$\theta(t_0)=(2n+1)\pi-\alpha$

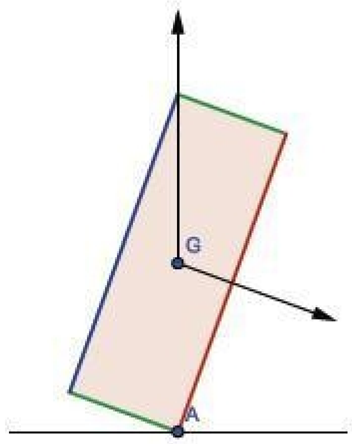

圖 4-3：$\theta(t_0)=(2n+1)\pi+\alpha$

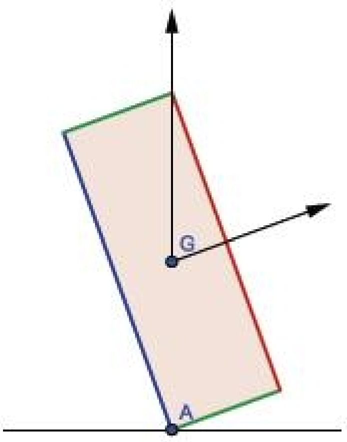

圖 4-4：$\theta(t_0)=2n\pi-\alpha$

五、 探討機率正面機率P_H、反面機率P_T、側面機率P_S的值：

首先畫出u對ω的圖（圖 5），其中正面為粉紅色、反面為淡紫色、側面為白色。以P_H表示出現正面機率、P_T表示出現反面機率、P_S表示出現側面機率。

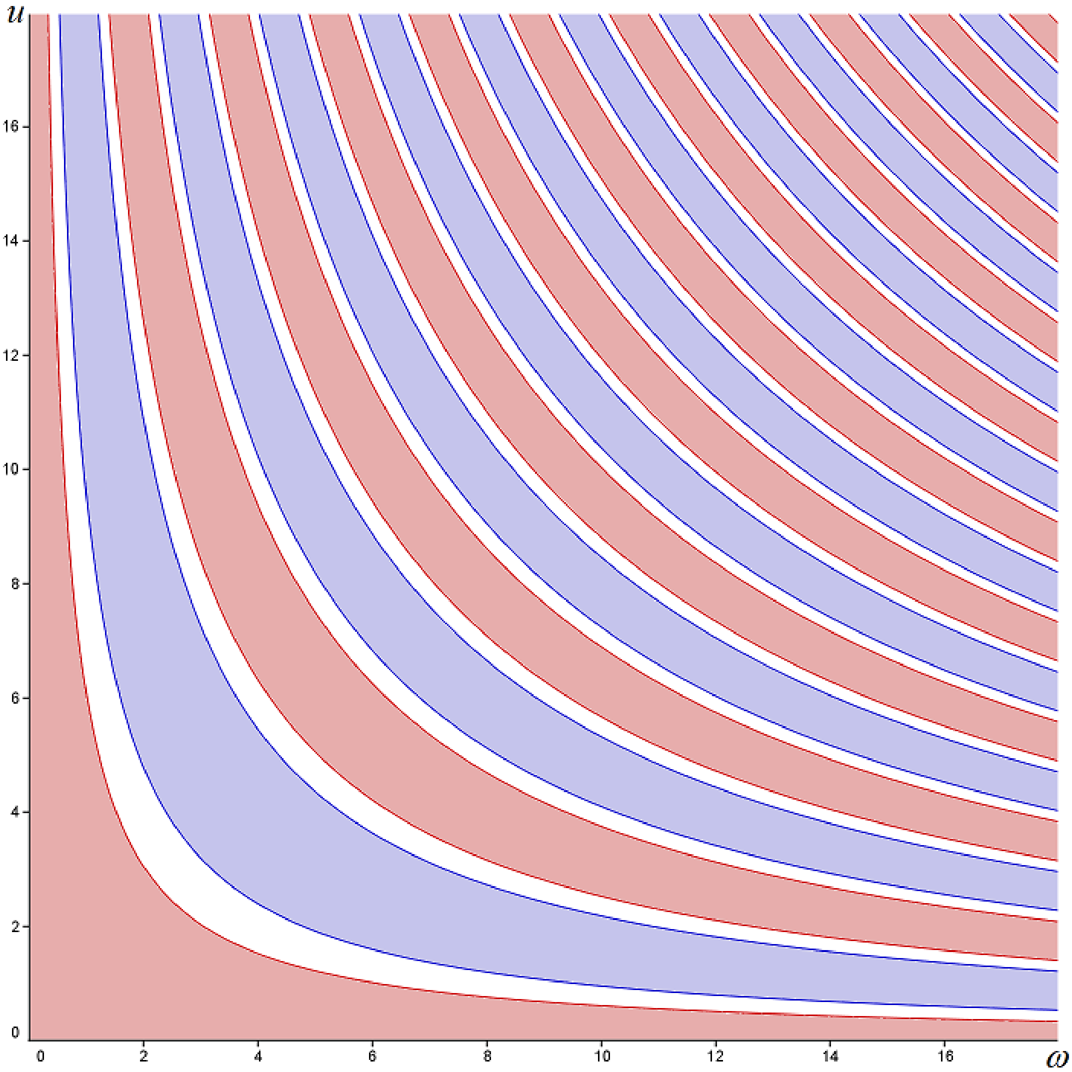

圖 5：當$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$時ω對u的圖（部分）

但各色塊的面積無法直接積分，所以假設在$\omega=x$時，正面機率$P_H(x)$、反面機率$P_T(x)$、側面機率$P_S(x)$（圖 6），則

$$P_H(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{g\alpha}{2}\times\dfrac{dx}{x}+\overbrace{g\alpha\times\dfrac{dx}{x}+\cdots+g\alpha\times\dfrac{dx}{x}}^{n-1}+\dfrac{g\alpha}{2}\times\dfrac{dx}{x}}{ng\pi\times\dfrac{dx}{x}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\times g\alpha\times\dfrac{dx}{x}}{ng\pi\times\dfrac{dx}{x}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\alpha}{\pi}\cdots\cdots(11)$$

$$P_{T}(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{g\alpha\times\frac{dx}{x}+\cdots+g\alpha\times\frac{dx}{x}}^{n}}{ng\pi\times\frac{dx}{x}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\times g\alpha\times\frac{dx}{x}}{ng\pi\times\frac{dx}{x}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\alpha}{\pi}\cdots\cdots(12)$$

$$P_{S}(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{(\pi-2\alpha)g\times\frac{dx}{x}+\cdots+(\pi-2\alpha)g\times\frac{dx}{x}}^{n}}{ng\pi\times\frac{dx}{x}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\times(\pi-2\alpha)g\times\frac{dx}{x}}{ng\pi\times\frac{dx}{x}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2\alpha}{\pi}\right)=1-\frac{2\alpha}{\pi}\cdots\cdots(13)$$

又 $P_{H}(x)=P_{T}(x)=\frac{\alpha}{\pi}$ 、 $P_{S}(x)=1-\frac{2\alpha}{\pi}$ 皆與 x 無關，所以

$$P_{H}=P_{T}=\frac{\alpha}{\pi}\text{，}P_{S}=1-\frac{2\alpha}{\pi}\cdots\cdots(14)$$

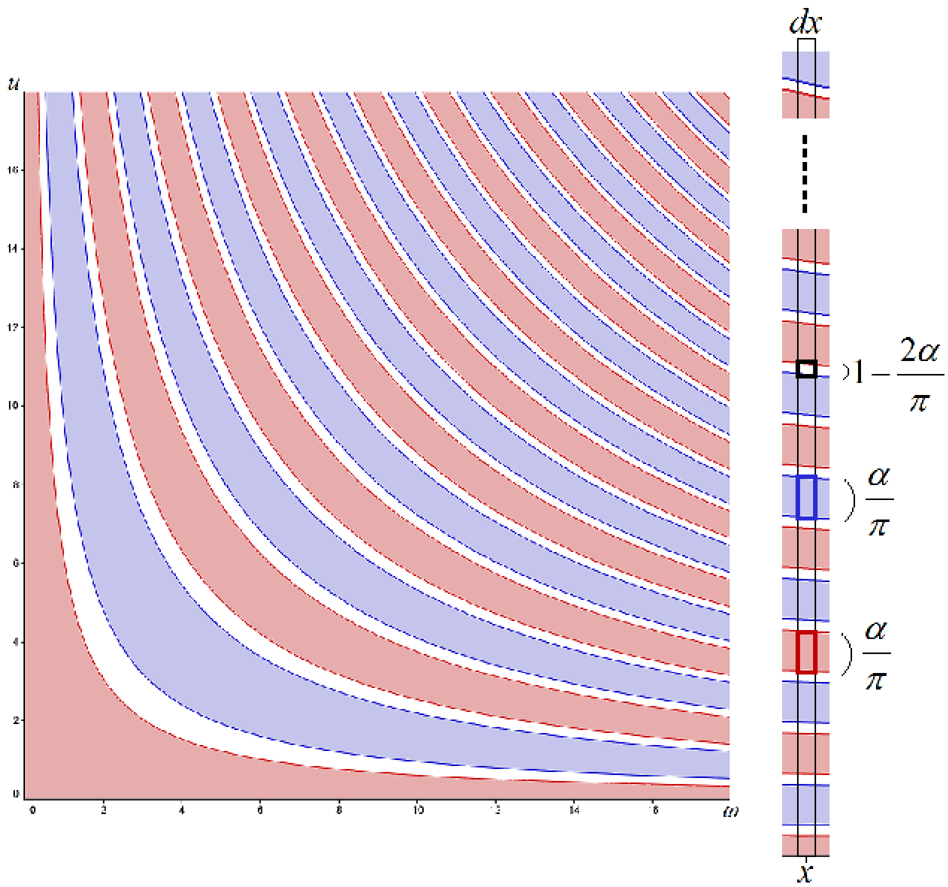

圖 6： $\omega=x$時， $P_{H}(x)$ 、 $P_{T}(x)$ 、 $P_{S}(x)$的計算

六、 探討質心偏移之硬幣：

假設硬幣C_2如同C_1，但硬幣中心O、重心G不為同一點，G與O距離 $d\left(G,O\right)=kh$，$0<k<1$，且$\overline{OG}\parallel\overline{N}$，再設$\beta=\tan^{-1}\dfrac{r}{\left(1-k\right)h}$，$\gamma=\tan^{-1}\dfrac{r}{\left(1+k\right)h}$（如圖7），且$C_2$的運動方程式為

$$y\left(0\right)=\frac{R\sin\alpha}{\sin\gamma}\text{ ，}\frac{d^2y\left(t\right)}{dt^2}=-g\text{ ，且當}t=0\text{時，}\frac{dy\left(t\right)}{dt}=u\ \ldots\ldots(15)$$

$$\theta\left(0\right)=0\text{ ，}\frac{dy\left(t\right)}{dt}=\omega\ \ldots\ldots(16)$$

由(14)(15)可得到

$$y\left(t\right)=R\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right)+ut-\frac{gt^2}{2}\ \ldots\ldots(17)$$

$$\theta\left(t\right)=\omega t\ \ldots\ldots(18)\text{（圖 8）}$$

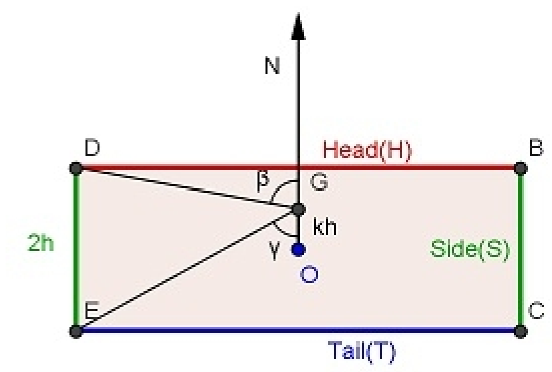

圖7：硬幣的設定

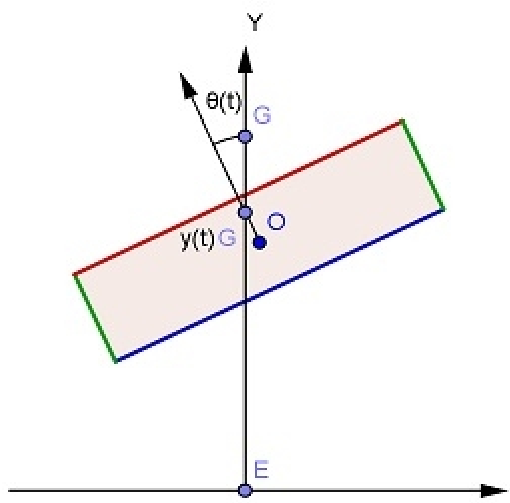

圖8：硬幣的運動方程式

七、 正面、反面、側面的條件：

考慮硬幣在時間t_0時接觸地面的情況，則當

$$\theta\left(t_0\right)=2n\pi\pm\gamma\quad\ldots\ldots(19)$$

$$\theta\left(t_0\right)=\left(2n+1\right)\pi\pm\beta\quad\ldots\ldots(20)$$

時，G到與地面接觸點A向量$\overline{GA}$會與地面垂直，所以可得出現正面、反面、

側面的情況與$\theta(t_0)$的關係

$$H: 2n\pi-\gamma<\theta(t_0)<2n\pi+\gamma$$
$$T: (2n+1)\pi-\beta<\theta(t_0)<(2n+1)\pi+\beta \quad，n\in N \;\ldots\ldots(21)\text{（如圖 9）}$$
$$S:\begin{cases}2n\pi+\gamma<\theta(t_0)<(2n+1)\pi-\beta\\(2n+1)\pi+\beta<\theta(t_0)<(2n+2)\pi-\gamma\end{cases}$$

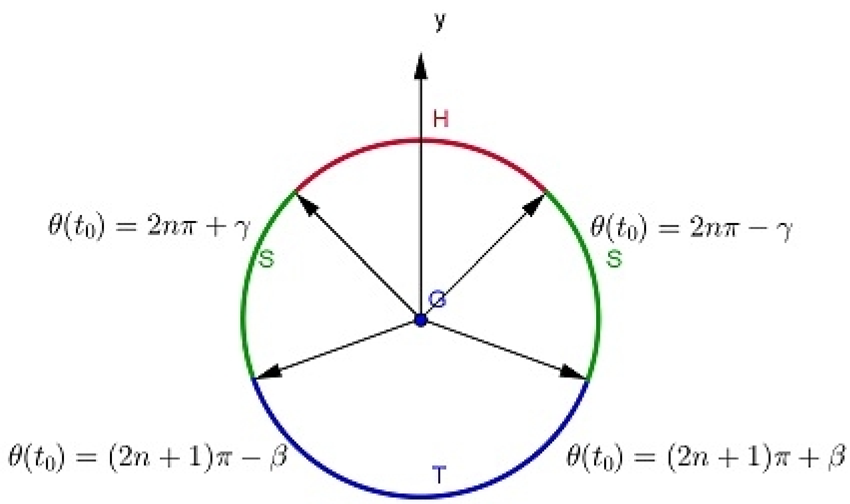

圖 9：正面、反面、側面的條件

八、 探討速度u與角速度ω的關係在硬幣出現正面、反面、側面時的關係：

在(19)的情況下 $y(t_0)=\dfrac{R\sin\alpha}{\sin\gamma}$ 則 $ut_0-\dfrac{gt_0^2}{2}=0$

可解得 $t_0=0$ 或 $t_0=\dfrac{2u}{g}$ 取 $t_0=\dfrac{2u}{g}$

(一)、 當 $\theta(t_0)=2n\pi-\gamma$（圖 10-1），則 $u\omega=ng\pi-\dfrac{g\gamma}{2}\;\ldots\ldots(22)$。

(二)、 當 $\theta(t_0)=2n\pi+\gamma$（圖 10-4），則 $u\omega=ng\pi+\dfrac{g\gamma}{2}\;\ldots\ldots(23)$。

在(20)的情況下 $y(t_0)=\dfrac{R\sin\alpha}{\sin\beta}$

$$\text{則 } R\sin\alpha\left(\frac{1}{\sin\gamma}-\frac{1}{\sin\beta}\right)+ut_0-\frac{gt_0^2}{2}=0$$
$$u=\frac{gt_0}{2}-\frac{R\sin\alpha}{t_0}\left(\frac{1}{\sin\gamma}-\frac{1}{\sin\beta}\right)$$

(一)、 當 $\theta(t_0)=(2n+1)\pi-\beta$（圖 10-2），則 $\omega t_0=(2n+1)\pi-\beta$

$$即\ u=\frac{g\left[(2n+1)\pi-\beta\right]}{2}\times\frac{1}{\omega}-\frac{R\sin\alpha}{(2n+1)\pi-\beta}\left(\frac{1}{\sin\gamma}-\frac{1}{\sin\beta}\right)\times\omega\ ......(24)$$

(二)、 當 $\theta(t_0)=(2n+1)\pi+\beta$（圖 10-3），則 $\omega t_0=(2n+1)\pi+\beta$

$$即\ u=\frac{g\left[(2n+1)\pi+\beta\right]}{2}\times\frac{1}{\omega}-\frac{R\sin\alpha}{(2n+1)\pi+\beta}\left(\frac{1}{\sin\gamma}-\frac{1}{\sin\beta}\right)\times\omega\ ......(25)$$

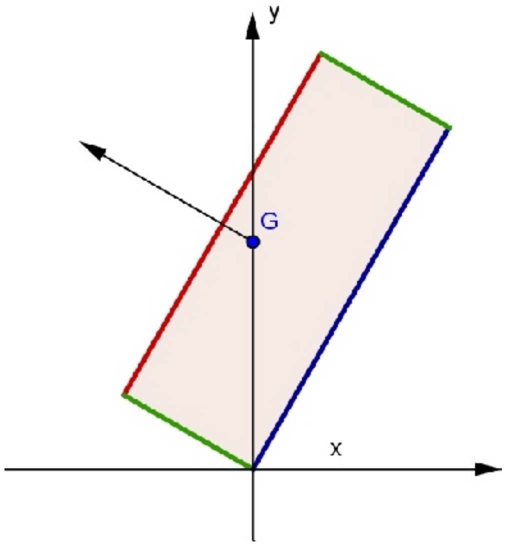

圖 10-1： $\theta(t_0)=2n\pi+\gamma$

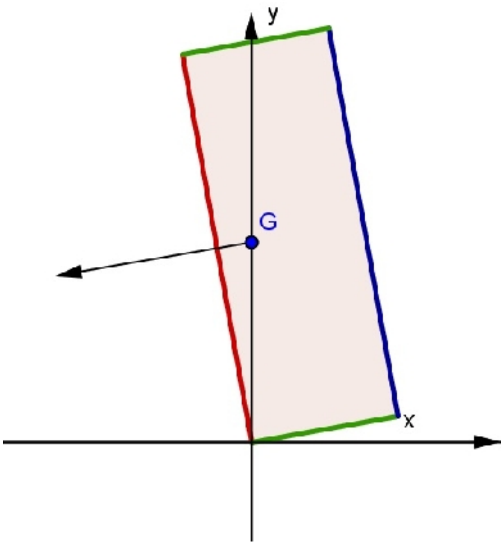

圖 10-2： $\theta(t_0)=(2n+1)\pi-\beta$

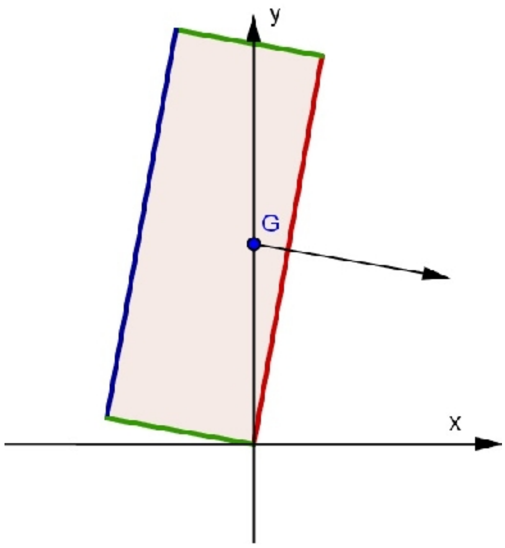

圖 10-3： $\theta(t_0)=(2n+1)\pi+\beta$

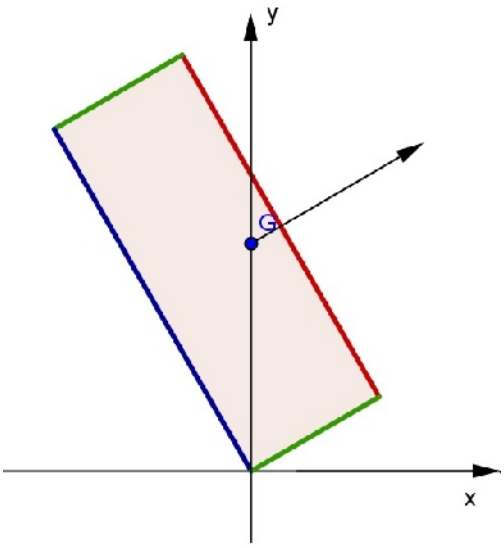

圖 10-4： $\theta(t_0)=2n\pi-\gamma$

九、 ：畫出重心偏移時u對ω的圖

畫出重心偏移時u對ω的圖（圖 11），其中正面為粉紅色、反面為淡紫色、側面為白色。而著色的及焦點的討論留在後面的第伍點進行討論。

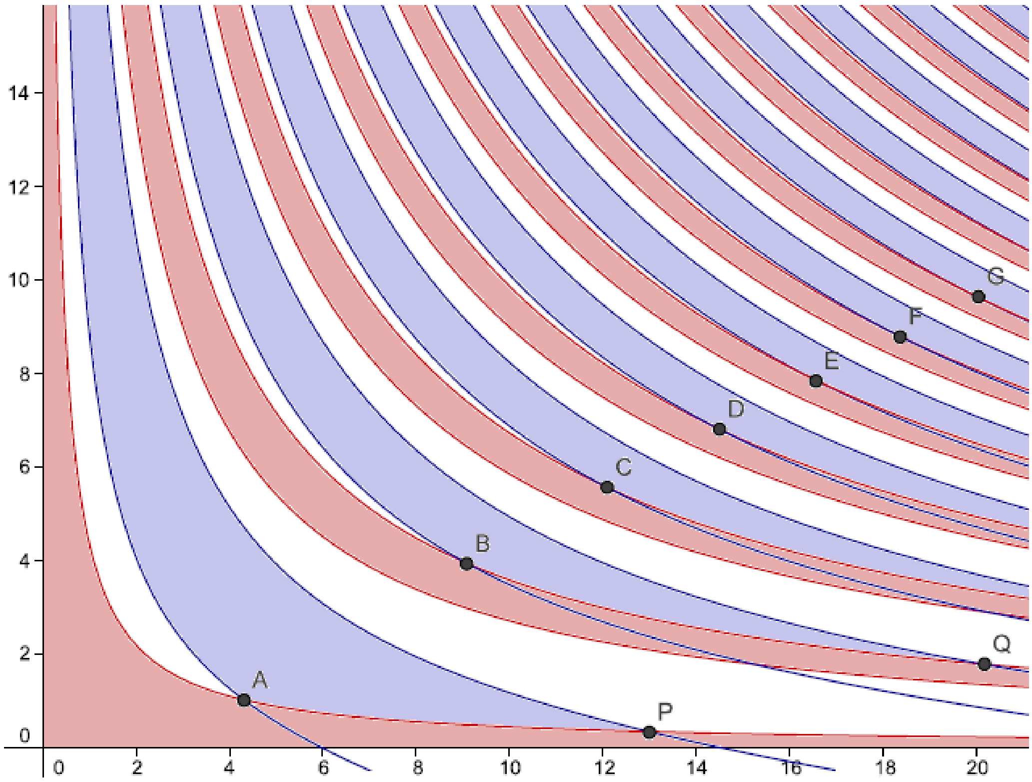

圖 11：重心偏移時u對ω的圖

伍、 討論

一、 影響硬幣正反面或側面的關鍵在於：何時 O 到與地面接觸點 A 向量$\overline{GA}$會垂直地面，在圖 5 與圖 6 中為褐色曲線（粉紅色區域與白色區域的交界線）與紫色曲線（淡紫色區域與白色區域的交界線）。當$\overline{GA}$不垂直地面時，

(一)、 若為圖 12-1 向右傾斜或圖 12-2 向左傾斜則正面朝上

(二)、 若為圖 13-1 向右傾斜或圖 13-2 向左傾斜則反面朝上

(三)、 若為圖 14-1 向左傾斜、圖 14-2 向右傾斜、圖 14-3 向左傾斜或圖 14-4 向右傾斜則側面朝上。

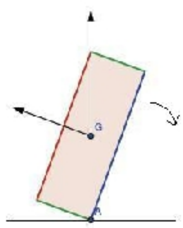

圖 12-1

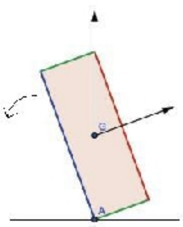

圖 12-2

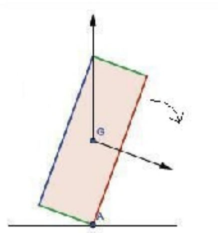

圖 13-1

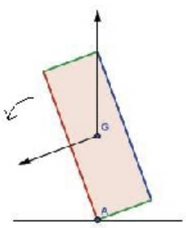

圖 13-2

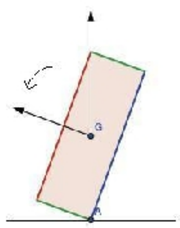

圖 14-1

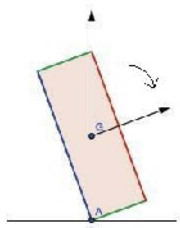

圖 14-2

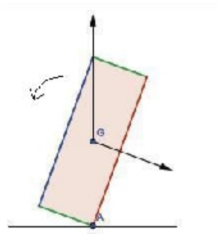

圖 14-3

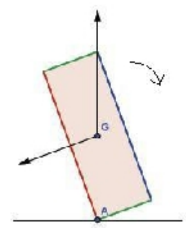

圖 14-4

二、 我發現(14)式的結果和圖 15 有關聯

$$P_{\mathrm{H}}=\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\text{紅色弧長}\overset{\frown}{AB}}{\text{圓周長}}\ ;\ P_{T}=\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\text{藍色弧長}\overset{\frown}{CD}}{\text{圓周長}}\ ;$$

$$P_{\mathrm{S}}=1-\frac{2\alpha}{\pi}=\frac{\text{綠色弧長}\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AD}}{\text{圓周長}}$$

而分界的四個向量表示當$\overline{GA}$垂直地面時的$\overline{N}$，其意義為：最後是正面背面還是側面受落地時$\overline{N}$的方向影響，與初速度u、初角速度ω無關。

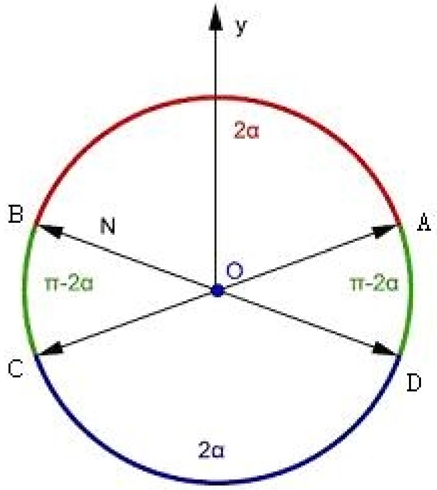

圖 15：正面、反面、側面與$\overline{N}$的的關係

三、 根據 $P_H = P_T = \frac{\alpha}{\pi}$，$P_S = 1 - \frac{2\alpha}{\pi}$

(一)、 當$\alpha \to 0$時，可以得到一個正面、反面出現機率趨近於$\frac{1}{2}$，側面出現機率趨近於０的硬幣。

(二)、 當$\alpha = \frac{\pi}{3}$時，可以得到一個正面、反面、側面的機率皆為$\frac{1}{3}$的硬幣，可作為公正的三面骰子。

(三)、 當$\alpha \to \frac{\pi}{2}$時，可以得到一個正面、反面出現機率趨近於０，側面出現機率趨近於 1 的硬幣。

四、 在圖 16-1 和圖 16-1 中，當$n = k$時(24)(25)式會與(22)式會相交，如點Ａ~Ｇ及點Ｐ,Ｑ，其意義如下：

(一)、 當(u,ω)落在H_1 H_2或H_3時，正面朝上

(二)、 當(u,ω)落在T時，反面朝上

(三)、 當(u,ω)落在S_1或S_2時，側面朝上

依此方式分析其出現正面、反面或側面並著色

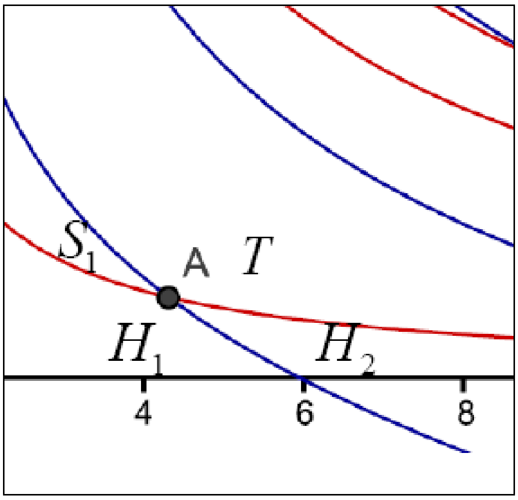

圖 16-1：(24)式會與(22)式相交

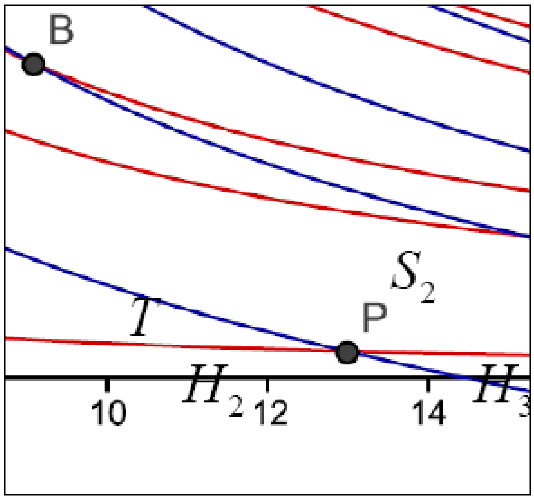

圖 16-2：(25)式會與(22)式相交

五、 當不均勻硬幣C_2中的$\beta=\gamma=\alpha$時，C_2如同均勻硬幣，則

$$P_H=P_T=\frac{\alpha}{\pi}\text{，}P_S=1-\frac{2\alpha}{\pi}\text{。}$$

陸、 研究結果與結論

一、 均質硬幣C_1出現正面、反面、側面的條件：

$$H:2n\pi-\alpha<\theta(t_0)<2n\pi+\alpha$$

$$T:(2n+1)\pi-\alpha<\theta(t_0)<(2n+1)\pi+\alpha$$

$$S:\begin{cases}2n\pi+\alpha<\theta(t_0)<(2n+1)\pi-\alpha\\(2n+1)\pi+\alpha<\theta(t_0)<(2n+2)\pi-\alpha\end{cases}$$

二、 均質硬幣C_1的初速u與角速度ω的關係在硬幣出現正面、反面、側面時的關係：

$$H:ng\pi-\frac{g\alpha}{2}<\omega u<ng\pi+\frac{g\alpha}{2}$$

$$T:\left(n+\frac{1}{2}\right)g\pi-\frac{g\alpha}{2}<\omega u<\left(n+\frac{1}{2}\right)g\pi+\frac{g\alpha}{2}$$

$$S:\begin{cases} ng\pi+\dfrac{g\alpha}{2}<\omega u<\left(n+\dfrac{1}{2}\right)g\pi-\dfrac{g\alpha}{2} \\ \left(n+\dfrac{1}{2}\right)g\pi+\dfrac{\alpha}{2}<\omega u<(n+1)\pi-\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$$

三、 均質硬幣C_1出現正面、反面、側面機率： $P_H=P_T=\dfrac{\alpha}{\pi}$ ， $P_S=1-\dfrac{2\alpha}{\pi}$

四、 當不均勻硬幣C_2中的$\beta=\gamma=\alpha$時， C_2如同均勻硬幣，則

$$P_H=P_T=\frac{\alpha}{\pi}\text{ ， }P_S=1-\frac{2\alpha}{\pi}\text{ 。}$$

柒、 展望

機率是一門很大的學問，我希望能夠不只是研究均質的硬幣出現各面的機率，而是不均勻的硬幣，甚至是非圓柱體的機率，例如中華傳統的廟宇文化中「擲筊」。

捌、 參考資料及其他

一、 Joseph B. Keller, "*The Probability of Heads*",The American Mathematical Monthly,Vol.93,No.3(Mar.,1986),p.191-197

二、 Ee Hou Yong and L. Mahadevan, "*Probability,geometry,and dynamics in the toss of a think coin*" 2011 American Association of Physics Teachers.,Am.J.Phys.79(12),December 2011.

玖、 附錄

運動獨立性是指剛體在做運動時質心的移動與物體繞質心之相對轉動不互相干擾，如不考慮阻力一物體一邊旋轉一邊斜拋出去時，質心會做拋體運動，其軌跡為拋物線，而周圍各點繞著質心做等角速度旋轉。對物體上任何一點的軌跡，可由質心的位移向量和該點對質心的相對位置向量來合成。

這次研究涉及機率之探討的因素之一為硬幣落地的時間，所以水平速度及位移不影響落地時間，因此我把非垂直上拋的類型，化簡成同樣鉛直速度的垂直上拋的運動來討論。

#【評語】040406

傳統投擲一個公正的硬幣，出現正面和反面的機率各為二分之一。本文異於傳統，改為討論投擲有厚度的硬幣，這時候，硬幣有可能站立起來（即出現側面），本文旨在計算硬幣出現正面、反面、側面的機率，討論這個機率與初速度、初角速度、硬幣形狀的關係，是一個有創意的理論。從實用觀點來看，是否可以做出這樣的一個有厚度的硬幣，真正做一些實驗，以驗證本文的理論是否正確可行，請作者思考是否試看看。