中華民國第52屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040405

以矩陣分析進行易經掛象研究

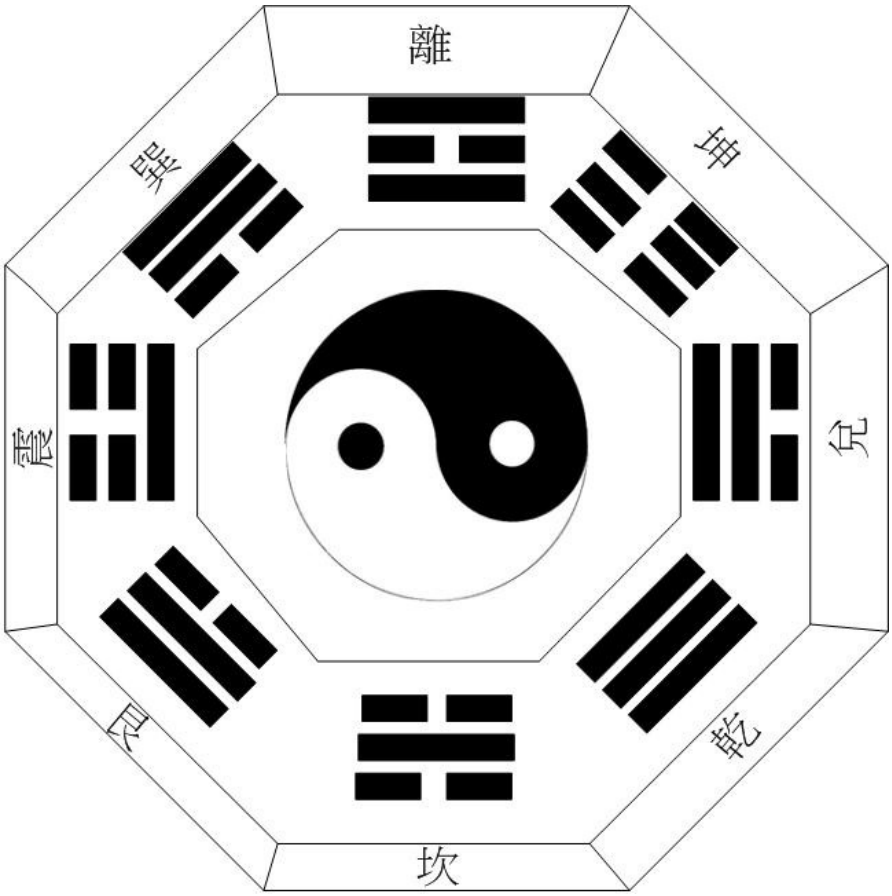
學校名稱：國立馬祖高級中學

作者：	指導老師：
高一 陳登志	李　中
高二 程盈甄	胡裕仁
高一 袁　白	

關鍵詞：易經、矩陣、二進位

摘要

本研究的目的為嘗試找出易經的數學邏輯架構，並以現代科學方式詮釋易經的演藝邏輯過程。研究先藉由易經的古文以及相關的白話易學的書籍開始，先了解清楚易經的規則、規律，還有它的中心思想之後再以現代分析魔方陣的數學概念進行易經中關於”陰”、”陽”八掛的玄學推展。期待發現易經的推導過成數學與魔方陣的關係，希望能夠進一步的探討古代玄學和現代數學之間兩者彼此的變化。



壹、研究動機

一般人對於算命多數都抱有好奇心，我們也不例外，但是為什麼命可以算，即可算那和數學是否有關，所以…

我們藉此思考易經占卜是否有一定的規則？

如果有？那這個規則從何而來？

是否古代易經之間存在著我們未知的規則？

而易經當中存在的河圖(圖 4-1)、洛書(圖 4-2)這些圖表是否能以現代數學的架構加以詮釋？

基於對上述問題的好奇，我們嘗試探討以數學方法分析上述的問題。

研究的核心主要是找出一個易經的數學演化模式，並用數學推演過程詮釋易經的陰陽邏輯分析。

貳、文獻探討

春秋時代的易經以及老子的道德經都有提到陰陽。而陰陽理論早已滲透到中國傳統文化的各方面。其中陰陽的概念，係源自古代中國人民的自然觀。古人觀察到自然界中各種對立又相聯的大自然現象，如天地、日月、晝夜、寒暑、男女、上下等，以哲學的思想方式，歸納出「陰陽」的概念[6][7][8]。

中國春秋時代的陰陽家認為天文氣象是「天道」，為天下綱紀。為政者「順天則昌，逆之則亡」。陰陽學說認為宇宙間所有事物皆有陰陽兩個屬性，他們相互依靠、相互制約、存有相互轉化的關係。在史記司馬談的論六家要旨[9]亦提及「嘗竊觀陰陽之術，大祥而眾忌諱，使人拘而多所畏。然其序四時之大順，不可失也。－－－夫陰陽、四時、八位、十二度、二十四節，各有教令。順之者昌，逆之者不死則亡，未必然也。故曰：使人拘而多畏。夫春生夏長、秋收冬藏，此天道之大經也，弗順則無以為天下綱紀。故曰：四時之大順，不可失也。」

劉向等人的漢書藝文志[10]記載「陰陽家者流，蓋出於羲和之官，敬順昊天，曆象日月星辰，敬授民時，此其所長也；及拘者為之，則牽於禁忌，泥於小數，捨人事而任鬼神。』

我們由上述文獻判斷易經中的陰陽理論，應該是和二進位有關，因為陰陽、四時、八位恰好是二進位。只是那和算命的方式是否有更具體的關係？因此我們設想易經的八卦邏輯架構，恰好是漢書藝文志所解釋的八位，並於是我們假設以二進位的數學方式來了解易經的規則。探討易經的來由：從河圖、洛書之中，試著從中發現它的演變規則，如圖 2-1[2]。

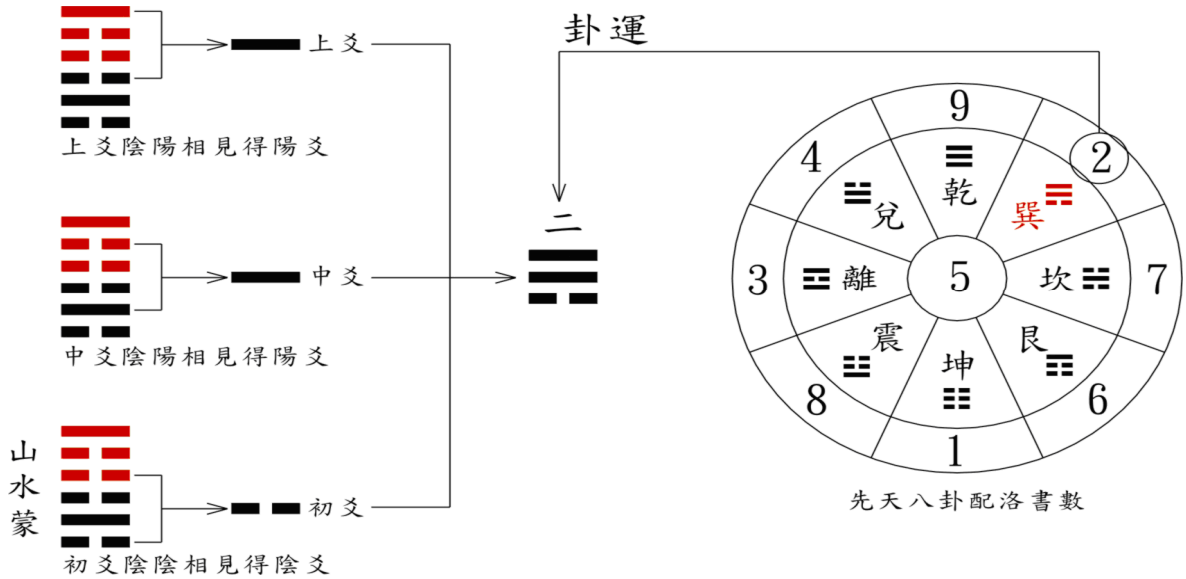


圖 2-1: 易經的邏輯架構形成圖

名詞解釋:

爻：為構成八卦的基本元素，一個卦以三個爻構成，如圖 2-2。

陽爻：形狀如國字「一」的符號。

陰爻：形狀如陽爻中間切斷「- -」的符號。

反卦：卦象的三個爻分別陰陽相對，例如:乾卦的反卦為坤卦、兌卦的反卦為艮卦。

魔方陣：行數、列數都一樣的填有數字的方陣，且 行、列、對角線的數字之和都一樣。

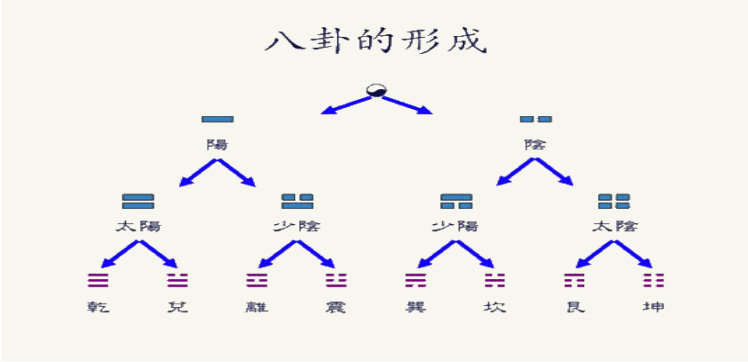


圖 2-2:八卦形成圖(取自 www.epochtimes.com)

六十四卦與地方圖

因為坤為地，萬物皆由此孕育，所以將坤卦在方陣中擺第一，方位圖則是天在上、地在下。六十四卦的方位與八卦相同，用線連起來也可得一太極。其順序也是以一組八卦為下，再向上分別排列一組八卦。以坤卦為基礎向上排列八卦，依照陰陽順序依次組合，以此類推形成六十四卦[1](如圖 4-5)。

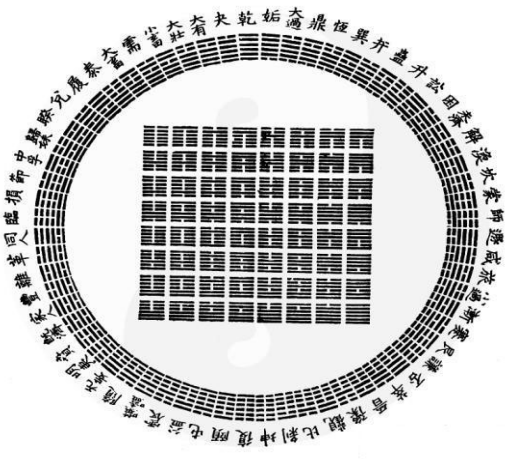


圖 4-5：天圓地方圖

本研究的創新問題

（一）洛書的圖形轉換成數字與魔方陣之關係為何？

（二）洛書如何轉換為八卦，與八卦之關係為何？

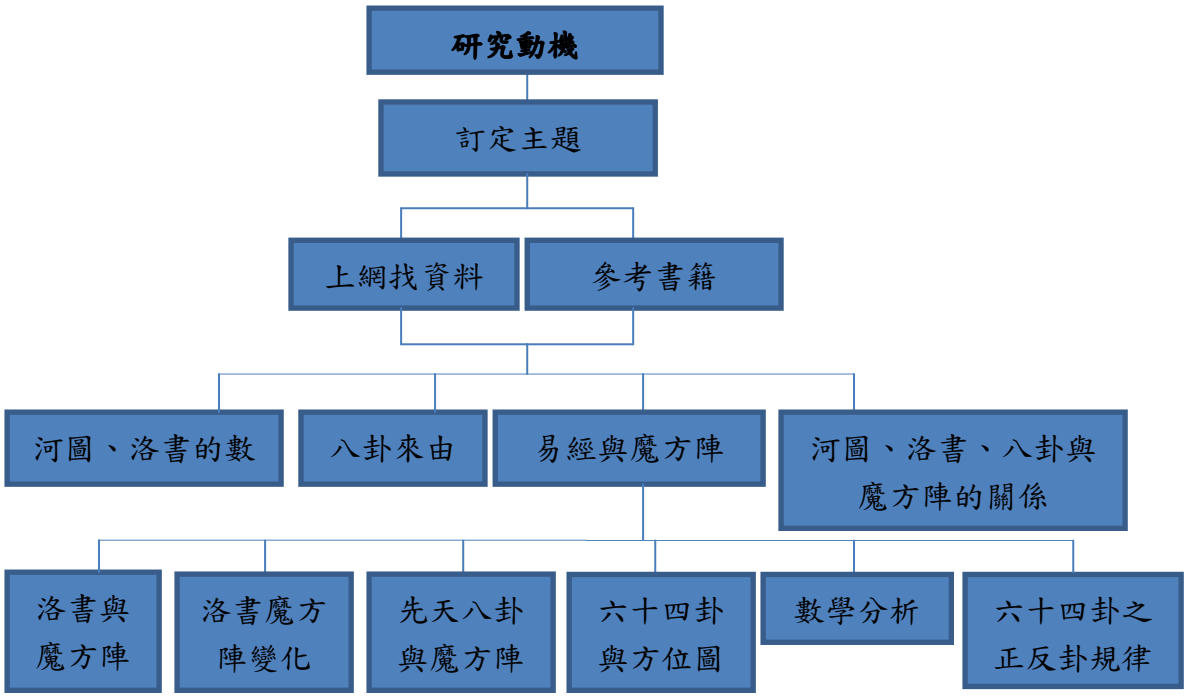
（三）卦位順序與二進位之關係？

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、MathType、小畫家

肆、研究過程或方法

圖 4-3：研究流程圖



一、八卦來由：

如圖 2-2，太極為渾沌之象，初分陰陽為兩儀，在以兩儀為底分別加上陰陽爻是為四象，最後以四象為底分別加上陰陽爻衍生成八卦，而圖 4-3 中的八卦從最右至最左分別為至陽到至陰。由此可知，一個卦象之最下爻影響其陰陽性質最大，就如地基對於房子來說是最重要的一樣。由於乾之能量為最高，故以乾 1、兌 2、離 3、震 4、巽 5、坎 6、艮 7、坤 9 作為先天八卦之排列(如圖 4-4)[2][7]。

圖 4-4：八卦

劃線將八卦（圖 4-4）依順序連起來，可得一太極圖。白色為陽、黑色為陰，顏色的面積

恰又與卦的陰陽能量相合，乾的白色面積最大、坤的黑色面積最大。陽極陰生、陰極陽生。又對角線互為反卦(如圖 4-4)。

河圖、洛書的數介紹：

看了許多的參考資料之後發現古人以 1、3、5、7、9 等奇數為陽，2、4、6、8 等偶數為陰；白色為陽，黑色為陰。易經來自河圖、洛書，而河圖、洛書中的圓點也可以用數字表示，於洛書的數字排列中發現其數字與魔方陣有關，例來說：由圖 4-1 對應至表 4-1；而圖 4-2 對應至表 4-2。我們觀察到洛書的黑色圓圈與白色圓圈的個數，和魔方陣相當吻合。進而探討其中關係[2]。

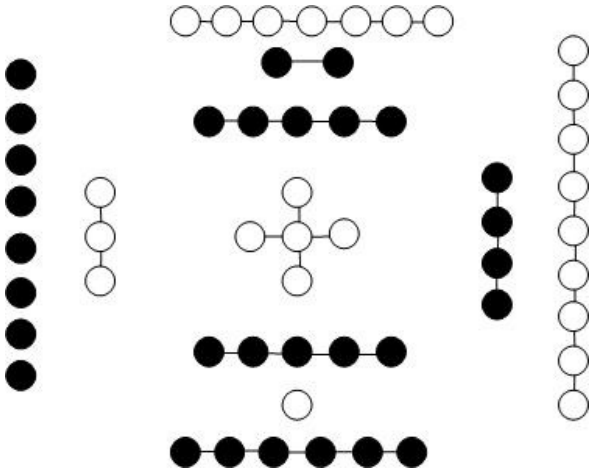


圖 4-1：河圖

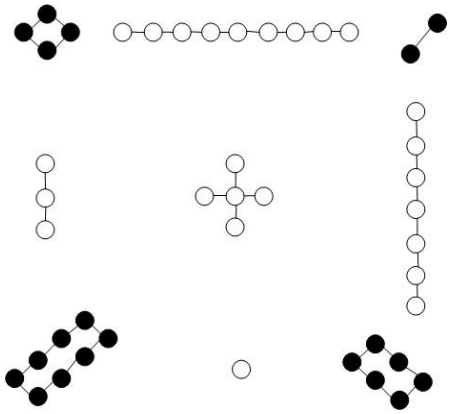


圖 4-2：洛書

表 4-1：河圖的數

		7		
		2		
8	3	10	4	9
		5		
		1		
		6		

表 4-2：洛書的數

4	9	2
3	5	7
8	1	6

我們由洛書的”數”進行數學推演並從洛書與魔方陣的關係開始探討[4]，並由魔方陣的運算

設計我們得出**魔方陣與洛書之間的關聯性推論**的結果。

（推論一）魔方陣與洛書之間的關聯性推論：洛書的數若為三乘三的九宮格。推論每一行、每一列、每一對角線的總和 k 都會相同，若將每一格以 X_1、X_2、X_3、X_4、X_5、X_6、X_7、X_8、X_9 來表示可得(如表 4-3)。

表 4-3：洛書轉換魔方陣

X_1	X_2	X_3
X_4	X_5	X_6
X_7	X_8	X_9

令 k 為各數值相加後的定值，且滿足下列關係式。

列：①$X_1+X_2+X_3=k$　②$X_4+X_5+X_6=k$　③$X_7+X_8+X_9=k$

行：①$X_1+X_4+X_7=k$　②$X_2+X_5+X_8=k$　③$X_3+X_6+X_9=k$

斜：①$X_1+X_5+X_9=k$　②$X_3+X_5+X_7=k$，其中 X_1~ X_9 分別為正整數 1~9。

證明：令 X_1、X_2、X_3、X_4、X_5、X_6、X_7、X_8、X_9 為未知數且為下列 X 矩陣的元素。並證明洛書絕對只是其中一組解，且可找出不同的最佳解。令 $X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix}$

$N=\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$，$N_1=\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$　$N_2=\begin{bmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{bmatrix}$　$N_3=\begin{bmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{bmatrix}$　$N_4=\begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix}$。在 N 矩陣中，以 5 為中心做旋轉，每次旋轉 90 度，分別得到四個不同的矩陣為 N_1、N_2、N_3、N_4。 再 $a=X\cdot N_1-x_5\cdot 5$ 即可得到下列順時針的式子 a，同理可證：$b=X\cdot N_2-x_5\cdot 5$　$c=X\cdot N_3-x_5\cdot 5$　$d=X\cdot N_4-x_5\cdot 5$。

順時針旋轉 90 度：

$a=4X_1+9X_2+2X_3+3X_4+7X_6+8X_7+1X_8+6X_9$　　$b=8X_1+9X_2+4X_3+1X_4+9X_6+6X_7+7X_8+2X_9$

$c=6X_1+1X_2+8X_3+7X_4+3X_6+2X_7+9X_8+4X_9$　　$d=2X_1+7X_2+6X_3+9X_4+1X_6+4X_7+3X_8+8X_9$

將矩陣 N 轉置後每次逆時鐘旋轉 90 度亦可同理可證：得到下列式子：

$e=4X_1+3X_2+8X_3+9X_4+1X_6+2X_7+7X_8+6X_9$　　$f=8X_1+1X_2+6X_3+3X_4+7X_6+4X_7+9X_8+2X_9$

$g=6X_1+7X_2+2X_3+1X_4+9X_6+8X_7+3X_8+4X_9$　　$h=2X_1+9X_2+4X_3+7X_4+3X_6+6X_7+1X_8+8X_9$

#

①數字等和 $a+b+c+d=e+f+g+h$　　②平方等和 $a^2+b^2+c^2+d^2=e^2+f^2+g^2+h^2$

③立方等和 $a^3+b^3+c^3+d^3=e^3+f^3+g^3+h^3$

本研究得出的每組解只是依洛書中央的數 5 為轉軸，分別旋轉得到的，因為恰好是八組解，恰好滿足八卦的八種結果。

先天八卦與洛書的數

推論二：八卦的中心必是扣除 5 的 3×3 方陣，即滿足下列對照結果

八卦：乾兌離震◎巽坎艮坤

↓↓↓↓↓↓↓↓↓

數序：１２３４◎６７８９

證明：將這 3×3 的方陣內的數以未知數 *a~i* 來表示，對此方陣做整體的基本變換。

$$\text{令基本態}\begin{bmatrix}4&9&2\\8&5&7\\3&1&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$$

1.上列與下列的變換

<u>變換 A</u>

$$\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$$

<u>變換 A´</u>

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g&h&i\\d&e&f\\a&b&c\end{bmatrix}$$

2.左行與右行的變換

<u>變換 B</u>

$$\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$$

<u>變換 B´</u>

$$\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c&b&a\\d&e&f\\i&h&g\end{bmatrix}$$

3.行與列整體的變換

<u>變換 C</u>

$$\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$$

<u>變換 C´</u>

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

A：變換 A 是不變的，變換 A ´ 是交換最上列與最下列；B：變換 B 是不變的，變換 B ´ 是交換最左行與最右行；C：變換 C 是不變的，變換 C ´ 是行列的整體交換，以 a 與 i 為基準點作翻轉。

以這三種基本變換的合成，可以有以下八種組合：ABC；ABC ´ ；AB ´ C；AB ´ C ´ ；A ´ BC；A ´ BC ´ ；A ´ B ´ C；A ´ B ´ C ´ 。依照 ABC 的順序作方陣排列上的變化。

舉例來說 A ´ B ´ C

步驟一：先作變換 A ´ ，結果為：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

步驟二：再作變換 B ´ ，結果為：

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

步驟三：最後作變換 C，結果為：

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

以上面八種不同的組合對應出方陣變化的八個解，以下為各方陣之結果：

方陣之一：變換 ABC

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

方陣之二：變換 ABC ´

$$\left[\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

方陣之三：變換 AB ´ C

$$\begin{bmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&9&4\\7&5&3\\6&1&8\end{bmatrix}$$

方陣之四：變換 AB´C´

$$\left[\begin{pmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right]^T=\begin{pmatrix}2&7&6\\9&5&1\\4&3&8\end{pmatrix}$$

方陣之五：變換 A´BC

$$\left[\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&1&6\\3&5&7\\4&9&2\end{pmatrix}$$

方陣之六：變換 A´BC´

$$\left\{\left[\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}^T=\begin{pmatrix}8&3&4\\1&5&9\\6&7&2\end{pmatrix}$$

方陣之七：變換 A´B´C

$$\left[\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&7&2\\1&5&9\\8&3&4\end{pmatrix}$$

方陣之八：變換 A´B´C´

$$\left\{\left[\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right\}^T=\begin{pmatrix}6&1&8\\7&5&3\\2&9&4\end{pmatrix}$$

由方陣一至方陣八我們可得證本推論為真**#**

將這八個方陣與八卦對映，將變換 A、B、C 當作 1，而 1 又看作陽爻；將變換 A´、B´、C´當作 0，而 0 又看作陰爻，那麼這些方陣變換，都可以化為二進位如下表示：

數陣之一：ABC→111→乾；數陣之二：ABC´→110→兌；數陣之三：AB´C→101→離；數陣之四：AB´C´→100→震；數陣之五：A´BC→011→巽；數陣之六：A´BC´→010→坎；數陣之七：A´B´C→001→艮；數陣之八：A´B´C´→000→坤。

八卦的二進位表示法

將陽爻以 1 代表、陰爻以 0 代表轉換成二進位，六爻之最上爻為二進位中第一位至最下爻為第六位，製作成下表（表 4-4）。

表 4-4：六十四卦轉二進位表

1 000000	***2*** 000001	***3*** 000010	***4*** 000011	***5*** 000100	***6*** 000101	***7*** 000110	***8*** 000111
9 001000	***10*** 001001	***11*** 001010	***12*** 001011	***13*** 001100	***14*** 001101	***15*** 001110	***16*** 001111
17 010000	***18*** 010001	***19*** 010010	***20*** 010011	***21*** 010100	***22*** 010101	***23*** 010110	***24*** 010111
25 011000	***26*** 011001	***27*** 011010	***28*** 011011	***29*** 011100	***30*** 011101	***31*** 011110	***32*** 011111
33 100000	***34*** 100001	***35*** 100010	***36*** 100011	***37*** 100100	***38*** 100101	***39*** 100110	***40*** 100111
41 101000	***42*** 101001	***43*** 101010	***44*** 101011	***45*** 101100	***46*** 101101	***47*** 101110	***48*** 101111
49 110000	***50*** 110001	***51*** 110010	***52*** 110011	***53*** 110100	***54*** 110101	***55*** 110110	***56*** 110111
57 111000	***58*** 111001	***59*** 111010	***60*** 111011	***61*** 111100	***62*** 111101	***63*** 111110	***64*** 111111

八卦占卜的數學分析

八卦占卜的過程中每一個卦象取得的機率為$\frac{1}{8}$

$$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \quad A \text{ 為轉移矩陣、 } Si(j)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 其中 } i=1\sim 8$$

以 $i=3$ 為例 $S_{3(0)}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$、$A=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\end{bmatrix}$、$S_{3(1)}=AS_{3(0)}=\begin{bmatrix}\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$

、

$$S_{3(2)}=AS_{3(1)}=\left(\frac{1}{8}\right)^2\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\left(\frac{1}{8}\right)^2\times 8\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}\end{bmatrix}$$

利用矩陣合併八種初始條件計算得：

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\end{bmatrix}\#$$

可將卦位順序（表 4-4）以數學公式表示。根據參考資料，可以以二進位算出相對應的卦位順序。令 X 為卦位順序，X_i 為卦之二進位表示[1]，將卦象轉為二進位後，再轉為十進位另外加一可得卦位順序。即

$$
\begin{aligned}
X &= f(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) \\
&= X_1 \times 2^0 + X_2 \times 2^1 + X_3 \times 2^2 + X_4 \times 2^3 + X_5 \times 2^4 + X_6 \times 2^5 + 1
\end{aligned}
$$

其中 $1 \le X \le 64$

舉例來說：

欲求出（0,1,0,0,1,1）為第幾卦？

由右到左 $1\times 2^0 + 1\times 2^1 + 0\times 2^2 + 0\times 2^3 + 1\times 2^4 + 0\times 2^5 + 1 = 20$ 所以為第 20 卦渙卦。

六十四卦之正反卦規律

正反卦定義:陰、陽爻相互交換。

舉例來說：

(0,1,0,1,0,1)的反卦為(1,0,1,0,1,0)

以下互為正反卦（括弧中數字為卦位順序）：(1,64)(2,63)(3,62)…(28,37)(29,36)

觀察到它們位置的對稱關係，將它們用線連起來就成為一螺旋狀之圖形(如圖 4-6)。

1 000000	2 000001	3 000010	4 000011	5 000100	6 000101	7 000110	8 000111
9 001000	10 001001	11 001010	12 001011	13 001100	14 001101	15 001110	16 001111
17 010000	18 010001	19 010010	20 010011	21 010100	22 010101	23 010110	24 010111
25 011000	26 011001	27 011010	28 011011	29 011100	30 011101	31 011110	32 011111
33 100000	34 100001	35 100010	36 100011	37 100100	38 100101	39 100110	40 100111
41 101000	42 101001	43 101010	44 101011	45 101100	46 101101	47 101110	48 101111
49 110000	50 110001	51 110010	52 110011	53 110100	54 110101	55 110110	56 110111
57 111000	58 111001	59 111010	60 111011	61 111100	62 111101	63 111110	64 111111

圖 4-6：正反卦的對稱關係

河圖、洛書、八卦與魔方陣的關係

八卦圖與魔方陣的出現源於河圖和洛書，後人將數字加入九宮格中，而形成魔方陣；由九宮格又發展出八卦圖。

伍、趣味占卜

我們從最簡單的錢卦開始嘗試占卜，現在只需要一個錢幣，在擲錢幣前，取卦之方式為：假設正面是陽爻，反面是陰爻，便可以開始擲錢幣。把錢幣用雙手包著，集中精神想著要占卜的問題，雙手慢慢搖動，然後打開雙手，讓錢幣掉下來，看看是正面還是反面，並記錄結果。連續擲出六次，直至六次擲完由下而上記錄結果，就算完成整個求卦的個程。

圖 5-1：錢卦

將前三爻組合成下卦，後三爻組合成上卦，例如第一次擲出陽爻，第二次擲出陰爻，第三次擲出陽爻，得到下卦為「火」，第四次擲出陽爻，第五次擲出陽爻，第六次擲出陽爻，得到上卦為「天」，整合起來，你就得到「天火同人」的卦。

<u>天火同人</u>

離火歸魂卦***(解卦)***

同人象德:天在火上，火勢是向上的，有向上的同性，故人亦有愛好上進和向上之心。又中卦離巽，火勢得風動威，向上接近於天。有內文明， 外剛健，中正而正應。象徵君子正心誠意，與人和同之象。

正月卦: 春平 夏吉 秋平 冬吉

評曰: 闔夜捐燈之象，管鮑分金之意 。

判斷: 同人親也，人之和同，相親近之意，凡事有得便宜、遂志之時，然此卦有為正道無邪曲之卦, 故有不善之志者得此卦不可言吉。得此卦者，若與人共事，上下皆和，功就名揚 ，且可得上輩提拔 ， 廣結社交 ，興家立業之象 。然切勿頑固氣極 ，偏私失止 。

故得此卦時，若不佳者 ， 斷定以與他人爭執 ， 或固執己見而遭挫折者多 。

斷之婚姻 ， 若為再嫁之友則吉 ，夫婦互敬互愛之美滿良緣 。但此卦如末出嫁之女子得之則不利 ，具同情之心 ， 恐有損節之害 。 此卦宜公正無私吉 ， 密謀隱事則有破 。

參考: 此卦有親和之象 ，上乾金 ， 下離火 ， 以火煉金必有所成就 ，然若火勢過猛，則金必有所 然若火勢過猛 ， 則金必有損 ， 其益必失 ， 故此卦雖得繁榮之勢 ， 不可火氣太焰 。 又離火剋乾金 ， 兩氣皆屬陽剛， 故此卦斷婚姻 ， 必因個性不合而離異之女 。 又火煉金定有所得 ， 故必定再三嫁娶万為吉耳。末出嫁之女，婚姻平。

【總結批論】

同人：表有志一同，相和而成。主吉象。理念相同共處愉快。事業投資、感情皆是和睦融洽。最適合找人合夥事業或尋求認同自己理念的吉卦。

疾病，因此卦為「歸魂卦」，概與亡靈有關，屬前世業因為重，醫藥無功效，與「火天大有」相似，需參拜神佛來化解。

應用:

運勢：得此卦為諸事開通、平安、吉祥、如意之象，有同情心，互愛、亨通之象，故宜好好掌握時機，維持盛泰。若有稍涉偏私或為私情之愛則有破兆，應以事業為重。

愛情:互悅其情，彼此間謙和以禮互敬，魚之得水，定成美眷。切忌氣盛，宜和。

家運:上下和樂，運勢亨通，可得意外之財，亦可促進開展事業之樞機，宜把握良機，努力求取。

胎孕:無礙。男兒。與六親和睦。得緣之吉卦。

子女:兒女眾多，上下皆能和睦之象。

週轉:順利，並可進取大業，利也。

買賣:利益大，與人共事吉，宜木字口字姓之人同相利濟更吉。

疾病：雖有病，但需是動爻而論。為腦部、神經衰弱或呼吸之疾病，心神恍惚、失眠、心火氣旺之象，宜多調養、修持參佛。

等人：一定會來，且會帶來好消息。

尋人：此人非故意出走，自己會回來。

失物:很快可以找到。

旅行：利，放心。

訟詞糾紛:與人爭端無益，他侵我或我傷他皆不利。和解了事為上策。

求事求職：吉利。

考試成績：優良。

改行：開業者均吉利亨通。

下圖為地方圖將第一次所擲的三個錢幣對應直行得到一個卦象，再將第二次所擲的三個錢幣對應橫列所得的另一個卦象結合得到一個完整的卦。(圖 5-2)

		天	☰	澤	☱	火	☲	雷	☳	風	☴	水	☵	山	☶	地	☷
天	☰	䷀	乾	䷉	履	䷌	同人	䷘	無妄	䷫	姤	䷅	訟	䷠	退	䷋	否
澤	☱	䷪	夬	䷹	兌	䷰	革	䷐	隨	䷛	大過	䷮	困	䷞	咸	䷬	萃
火	☲	䷍	大有	䷥	睽	䷝	離	䷔	噬嗑	䷱	鼎	䷾	未濟	䷷	旅	䷢	晉
雷	☳	䷡	大壯	䷵	歸妹	䷧	豐	䷲	震	䷟	恒	䷧	解	䷣	小過	䷏	豫
風	☴	䷈	小畜	䷼	中孚	䷤	家人	䷩	益	䷸	巽	䷺	渙	䷴	漸	䷓	觀
水	☵	䷄	需	䷻	節	䷾	既濟	䷂	屯	䷯	井	䷦	坎	䷦	蹇	䷇	比
山	☶	䷙	大畜	䷨	損	䷕	賁	䷚	頤	䷑	蠱	䷃	蒙	䷳	艮	䷖	剝
地	☷	䷊	泰	䷒	臨	䷣	明夷	䷗	復	䷭	升	䷆	師	䷎	謙	䷁	坤

圖 5-2：錢卦 64 卦爻

所謂「易者，數也」，易經既然是一種二進位碼的引伸，訂出八卦的順序後，數目字一到八可以分別對應到八卦中的一卦。舉凡摘花、拔草、拋米等，都可以進行占卜。基本上只

要是可與數字扯上關係，例如車牌號碼、姓名筆畫、甚至英文字母，都可以找出它相對應的卦，如果數字超過八的，可以用八來除，取其餘數。例如車牌號碼、姓名筆畫，比可以把這些數字群分成兩部分，讓它們分別與上卦和下卦相對應，例如將姓的筆畫對應上卦，將名字的筆畫對應到下卦，那麼就可以用易經來算姓名或公司的名字。一般認為凡事僅能占卜一次，因為占卜沒有必然性，再占出的卦非常可能與前一卦不同（機率是六十四分之六十三）。其實如果能夠靈活而融會的解釋後卦與前卦，自然不會有前後矛盾的情形。

陸、討論與結論

討論

（一）太極與八卦之關係?

太極衍生成兩儀：陽儀及陰儀，之後在陽儀分別疊上陽儀、陰儀，陰儀分別疊上陽儀、陰儀，就由兩儀衍生成四象，在四象上再分別疊上陽儀、陰儀，就行成了八卦。

（二）洛書與魔方陣之關係?

洛書的數行、列、對角線相等都為 15，因魔方陣行、列、對角線之合亦相同，由本研究的推論一及證明得知八卦可由 3×3 魔方陣來分析。

（三）洛書與八卦之關係？

得知洛書與魔方陣有關係後，並由推論二計算將其數字轉換為矩陣的形式。先定義矩陣的轉換，A：不作變換；A´：上列與下列的對換；B：不作變換；B´：左行與右行的對換；C：不作變換；C´：矩陣的轉置。將原矩陣經三次變換，第一次從 A、A´擇其一，第二次從 B、B´擇其一，第三次從 C、C´擇其一，總共得出八種變換：ABC；ABC´；AB´C；AB´C´；A´BC；A´BC´；A´B´C；A´B´C´正好滿足推論一。將八種變換轉成二進位的形式，再轉成十進位，得到的數字就可與八卦的順序相對應。

（四）八卦與六十四卦及卦位順序與二進位之關係?

將一組八卦為下、一組八卦為上，分別組合成六十四種排列，形成六十四卦。六十四卦中一卦由六個爻組成，令陽爻為 1、陰爻為 0，六爻之最上爻為第一位至最下爻為第六位，轉換為一個二進位之六位數字。此時可以發現，卦位的順序是配合二進位的大小依序增加的。且由數學分析可知以八卦或六十四卦在機率轉移過程均是滿足相同的機率值，因此在八卦進行占卜等過程可以算是一種具有隨機性的統計結果。

結論

一、洛書的數行、列、對角線相等，知與魔方陣有關係。

二、以洛書之方陣變化轉二進位表示，可推出八卦。

三、六十四卦可轉換為二進位來表示。

四、六十四卦之正反卦具有對稱關係。

五、占卜只是機率及統計問題不用太在意最後結果，只要努力仍然會有不同的結局。

柒、參考資料及其它

[1]佚名(2008)。易經的周流不殆。取自 http://www.taiwannet.de/members/8e1.htm。

[2]陳文德(2011)。破解易經。遠流出版社。台北市。

[3]馮貝葉(2010)。數學拼盤和斐波那契魔方。哈爾濱工業大學。

[4] 九數 (2009) 。 算術漫談 ： 先天八卦與後天八卦 。 取自 http://big5.zhengjian.org/articles/2009/5/5/59355.html

[5]許志農(2011)。高中數學第四冊。龍騰文化事業股份有限公司。

[6]鄧宇，朱栓立，徐彭，五行陰陽的特徵與新英譯，中國中西醫結合雜誌，2000，20，12

[7]鄧宇等，數理陰陽與實質,數理醫藥學雜誌 1999 年。

[8]鄧宇等，陰陽的科學本質及數理化建構，中國中醫基礎醫學雜誌，1998，2:59-61。

[9]司馬談，論六家要旨，史記/列傳/卷一百三十/太史公自序第七十。

[10] 劉向、劉歆，漢書，藝文志。

【評語】040405

本文的目地是要找出易經的數學架構。首先，本文將易經中的陰陽用 01 代替，看起來除了數的二進位表示法以外，實在看不出有太多數學。另外，又談及洛書，這個三階魔方陣，看起來，作者對魔方陣的一般知識所知甚少，值得加強這方面的瞭解。