

# 中華民國第 52 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

高中組 數學科

040404

雷格蒙塔努斯(Regiomontanus)的角度最大化  
問題之延伸思考

學校名稱：國立金門高級中學

|                                               |                  |
|-----------------------------------------------|------------------|
| 作者：<br><br>高二 陳羿軒<br><br>高二 楊子衡<br><br>高二 何志斌 | 指導老師：<br><br>楊玉星 |
|-----------------------------------------------|------------------|

關鍵詞：反演、切割線定理、算幾不等式

## 摘要

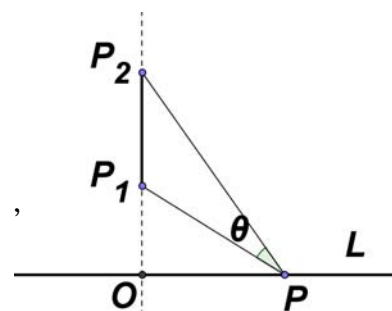
首先我們討論當直線  $P_1P_2$  和直線  $L$  垂直時(其中  $P_1$ 、 $P_2$  在  $L$  的同一側)，如何在  $L$  上找到一點  $P$  使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。接著，考慮直線  $P_1P_2$  和直線  $L$  的夾角從  $0^\circ$  到  $180^\circ$  的情形。再將直線  $L$  改成平面  $E$ 、圓  $O$  和球面  $S$ ，並試著在其上找到一點  $P$  使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角或最小的角。

## 壹、研究動機

在 1471 年，數學家 Johann Muller 向當時 Erfurt 大學的 Christian Roder 教授提出了這樣的一道數學問題(Regiomontanus 問題)：

給定一支垂直地懸掛在空中的竿，問在平面上的哪一點這支竿看起來是最長的呢？

換言之，若直線  $P_1P_2$  和平面  $E$  垂直(其中  $P_1$  及  $P_2$  在  $E$  的同一側)，求  $E$  上的一點  $P$  使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。



<圖 1>

設直線  $P_1P_2$  和平面  $E$  垂直於  $O$  點，我們還可以將此問題簡化為：在平面  $E$  上過  $O$  作一直線  $L$ ，求  $L$  上的一點  $P$  使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。

接著，如果線段  $P_1P_2$  足夠長，則平面上的點應視為球面上的點，那麼又該如何在球面上找一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角，甚至是最小的角？再將已知的「垂直」條件拿掉，那情形又該如何？

## 貳、研究目的

把 Regiomontanus 問題的已知條件稍作改變，如直線  $P_1P_2$  和  $L$  不垂直， $L$  不是一條直線，並設法在  $L$  上找一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角或最小的角。

## 參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、GeoGebra、網路

## 肆、研究過程或方法

### 一、預備引理

#### (一)反演變換的定義

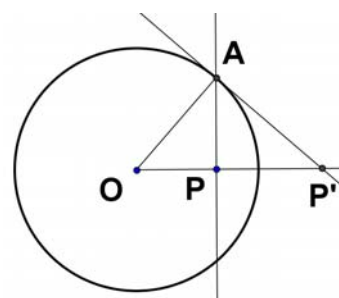
1. 平面上一半徑為  $k$  的定圓  $O$ ，記作圓  $O(k)$ ， $I$  是去掉  $O$  點的平面到其自身的變換，

如果對於平面上異於 $O$ 點的任一點 $P$ ，其對應點 $P'$ 在射線 $OP$ 上，且 $\overline{OP} \times \overline{OP'} = k^2$ ，那麼稱 $I$ 為關於圓 $O(k)$ 的反演變換，記為 $I(O, k^2)$ ，其中，圓 $O$ 叫做反演圓，圓心 $O$ 叫做反演極(反演中心)， $k^2$ 叫做反演冪。

2. 在反演變換 $I(O, k^2)$ 下，點 $P$ 變為 $P'$ ，圖形 $F$ 變為 $F'$ ，此時， $P'$ 叫做 $P$ 的反點，圖形 $F'$ 叫做圖形 $F$ 的反形。
3. 在反演變換 $I(O, k^2)$ 下，異於 $O$ 點的任一點 $P$ ，一定存在一個反點 $P'$ ，而反演極 $O$ 在歐氏平面上不存在它的反點。事實上，由於 $\overline{OP} \times \overline{OP'} = k^2 \neq 0$ ，當 $P$ 點充分接近點 $O$ 時，它的反點 $P'$ 遠離 $O$ 點而去，因此可以認為，反演極與無窮遠點相對應。

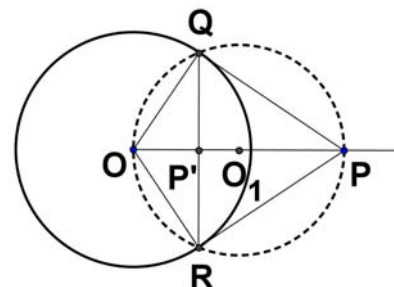
(二)給定反演圓 $O(k)$ ，對於平面上異於 $O$ 點的任一點 $P$ ，其反點的作法。

1. 若點 $P$ 在圓 $O(k)$ 內時，過 $P$ 點作直線 $OP$ 的垂線與圓 $O$ 相交，設交點之一為 $A$ ，過 $A$ 作圓 $O$ 的切線交射線 $OP$ 於 $P'$ ，則 $P'$ 點為 $P$ 點關於圓 $O(k)$ 的反點。



<圖 2>

2. 若點 $P$ 在圓 $O(k)$ 外時，自點 $P$ 作圓 $O$ 的切線 $PQ$ 、 $PR$ ( $Q$ 、 $R$ 為切點)，連接 $\overline{QR}$ ，交射線 $OP$ 於 $P'$ ，則 $P'$ 為 $P$ 點關於圓 $O(k)$ 的反點。



<圖 3>

(三)反演變換的性質

1. 在反演變換下，反演圓是不變點的集合，過反演極的直線是不變直線。  
與反演圓正交的圓是不變圖形。
2. 在反演變換下，不過反演中心的直線的反形是過反演中心的圓。
3. 在反演變換 $I(O, k^2)$ 下，不過反演中心 $O$ 的圓 $C_1(R_1)$ 的反形是不過中心的圓 $C_2(R_2)$ 。
4. 在反演變換下，兩條曲線在交點處交角保持不變，但方向相反(保角性)。  
(1)若兩直線平行，則其反形(兩圓或一圓一直線)相切於反演中心。  
(2)若兩圓相切(或一圓一直線相切)，則其反形相切或平行。  
(3)兩圓正交(或一圓一直線正交)，則反形亦正交。  
(4)過反演中心並且彼此相切的圓系，其反形是一束平行線。

## 二、探索過程

(一) 爲了解決 Regiomontanus 問題，我們將其特殊化，先討論直線的情形如下：

1. 已知直線  $P_1P_2$  和直線  $L$  相交於  $O$  點且  $P_1P_2 \perp L$  (其中  $P_1$ 、 $P_2$  在  $L$  的同一側)，求  $L$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  爲最大的角。

- (1) 首先我們引入直角坐標系統，設  $P(x, 0)$ ， $P_1(0, a)$  及  $P_2(0, b)$ ， $\angle OPP_1 = \alpha$ ， $\angle OPP_2 = \beta$ ， $\angle P_1PP_2 = \theta$ ，

$$\text{則 } \tan \theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} = \frac{\frac{b-a}{x}}{1 + \frac{b-a}{x} \cdot \frac{a}{x}} = (b-a) \frac{x}{x^2 + ab}。$$

- (2) 考慮  $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{b-a} \left( \frac{x^2 + ab}{x} \right) = \frac{1}{b-a} \left( x + \frac{ab}{x} \right)$

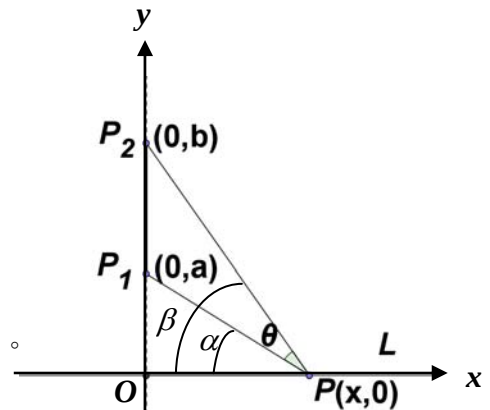
又由算幾不等式可知： $x + \frac{ab}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{ab}{x}} = 2\sqrt{ab}$

$$\text{故 } \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{b-a} \left( x + \frac{ab}{x} \right) \geq \frac{2\sqrt{ab}}{b-a} \Rightarrow \tan \theta \leq \frac{b-a}{2\sqrt{ab}}$$

等式成立當且僅當  $x = \frac{ab}{x}$ ，即  $x^2 = ab$ ， $x = \sqrt{ab}$ 。

故當  $x = \sqrt{ab}$  時， $\tan \theta = \frac{b-a}{2\sqrt{ab}}$  有最大值，

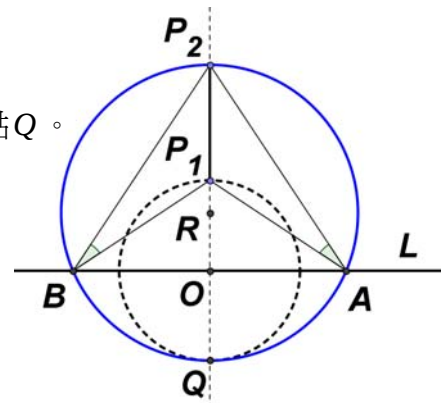
且  $\tan \theta$  在  $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$  時爲遞增函數，因此， $\theta$  也有最大值。



<圖 4>

### 【作法】

- (1) 以  $O$  爲圓心， $\overline{OP_1}$  爲半徑畫圓，交直線  $P_1P_2$  於另一交點  $Q$ 。
- (2) 再以  $\overline{P_2Q}$  爲直徑畫圓，設交直線  $L$  於  $A$ 、 $B$  兩點，則  $A$ 、 $B$  兩點即爲所求。



<圖 5>

### 【證明一】

- (1) 連接  $\overline{AQ}$ ， $\because \overline{P_2Q}$  爲直徑， $\therefore \angle P_2AQ$  爲直角。
- (2) 在直角  $\triangle AP_2Q$  中， $\because \overline{OQ} = \overline{OP_1} = a$ ，且  $\overline{OP_2} = b$ ，

$$\therefore \overline{OA}^2 = \overline{OQ} \times \overline{OP_2} = ab, \text{ 推得 } \overline{OA} = \sqrt{ab}。$$

故  $P = A$  時， $\angle P_1PP_2$  有最大的角。

同理， $P = B$  時， $\angle P_1PP_2$  也有最大的角。

## 【證明二】

- (1) 過  $A$ 、 $P_1$ 、 $P_2$  三點作一圓，

$$\therefore \overline{OA}^2 = \overline{OP_1} \times \overline{OP_2},$$

$\therefore$  由切割線定理知：此圓和直線  $L$  相切於  $A$  點。

- (2) 設  $P$  為直線  $L$  上異於  $A$  的點且  $P$ 、 $A$  在直線  $P_1P_2$  的同側，連接  $\overline{PP_1}$ 、 $\overline{PP_2}$ ，

設  $\overline{PP_1}$  交此圓於  $S$  點，連接  $\overline{SP_2}$ 。

- (3)  $\because \angle P_1AP_2$  和  $\angle P_1SP_2$  為對同弧  $P_1P_2$  的圓周角，

$\therefore \angle P_1AP_2 = \angle P_1SP_2$ ，又  $\angle P_1SP_2$  為  $\angle SPP_2$  的外角，

$\therefore \angle P_1SP_2 > \angle SPP_2 = \angle P_1PP_2$ ，故  $\angle P_1AP_2 > \angle P_1PP_2$ 。

- (4) 設  $P$  為直線  $L$  上異於  $B$  的點且  $P$ 、 $B$  在直線  $P_1P_2$  的同側，同理可證： $\angle P_1BP_2 > \angle P_1PP_2$ ，

又  $A$ 、 $B$  兩點以直線  $P_1P_2$  為軸左右對稱，

$\therefore \angle P_1AP_2 = \angle P_1BP_2$ 。

由上可知：

若  $P$  為直線  $L$  上任一點，則  $\angle P_1AP_2 = \angle P_1BP_2 \geq \angle P_1PP_2$ 。

故  $P = A$  或  $B$  時， $\angle P_1PP_2$  有最大的角。

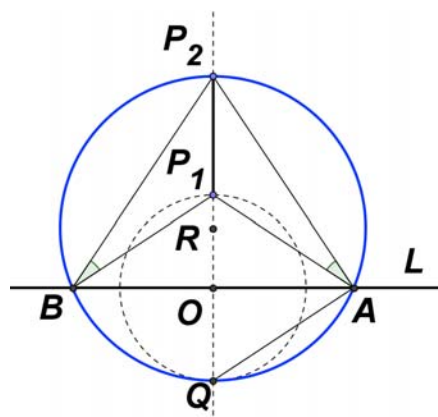
2. 已知直線  $P_1P_2$  和  $L$  相交於  $O$  點且不垂直(其中  $P_1$ 、 $P_2$  在直線  $L$  的同一側)，求  $L$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。

## 【作法】

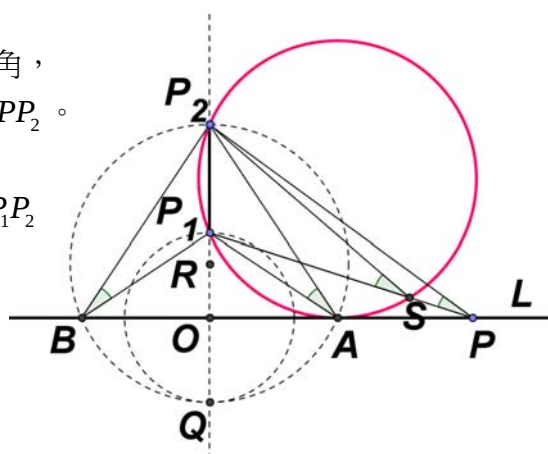
- (1) 過  $O$  點作直線  $L'$  垂直直線  $P_1P_2$ ，同(一)的作法可求得  $A$ 、 $B$  兩點。

- (2) 如圖，以  $O$  為圓心， $\overline{OA}$  為半徑畫圓，

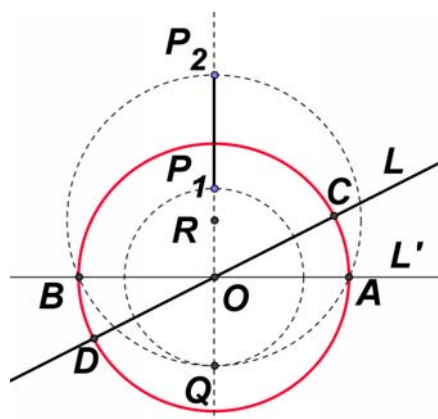
設交直線  $L$  於  $C$ 、 $D$  兩點，則  $C$  點即為所求。



<圖 6>



<圖 7>



<圖 8>

【證明】

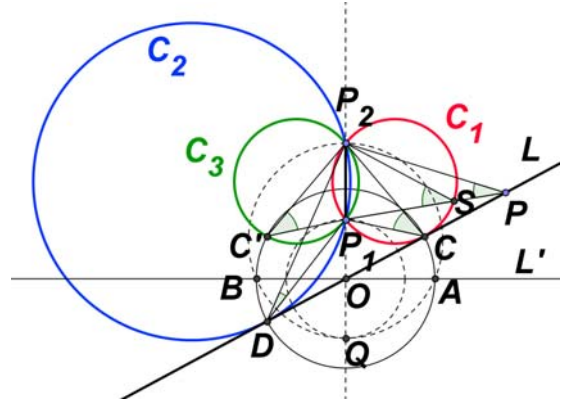
(1) 過  $C$ 、 $P_1$ 、 $P_2$  三點作一圓  $C_1$ ， $\because \overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 = \overline{OP_1} \times \overline{OP_2}$ ，

$\therefore$  由切割線定理知：此圓和直線  $L$  相切於  $C$  點。

(2) 設  $P$  為直線  $L$  上異於  $C$  的點且  $P$ 、 $C$  在直線  $P_1P_2$  的同側，連接  $\overline{PP_1}$ 、 $\overline{PP_2}$ ，

設  $\overline{PP_1}$  交此圓於  $S$  點，連接  $\overline{SP_2}$ 。

(3) 同 1. 的證明，可得  $\angle P_1CP_2 > \angle P_1PP_2$ 。



<圖 9>

(4) 過  $D$ 、 $P_1$ 、 $P_2$  三點作一圓  $C_2$ ， $\because \overline{OD}^2 = \overline{OA}^2 = \overline{OP_1} \times \overline{OP_2}$ ，

$\therefore$  由切割線定理知：此圓和直線  $L$  相切於  $D$  點。

設  $P$  為直線  $L$  上異於  $D$  的點且  $P$ 、 $D$  在直線  $P_1P_2$  的同側，

同理可證： $\angle P_1DP_2 > \angle P_1PP_2$ 。

(5) 以直線  $P_1P_2$  為鏡射軸，作出圓  $C_1$  的鏡射圓  $C_3$ ，點  $C$  的對稱點  $C'$ ，則  $\angle P_1CP_2 = \angle P_1C'P_2$ 。

在圓  $C_3$  中， $\because \angle P_1C'P_2$  和  $\angle P_1DP_2$  分別為對同弧  $P_1P_2$  的圓周角和圓外角，

$\therefore \angle P_1C'P_2 > \angle P_1DP_2$ 。

由上可知： $\angle P_1CP_2 = \angle P_1C'P_2 > \angle P_1DP_2$ ，故  $P = C$  時， $\angle P_1PP_2$  有最大的角。

【討論】

設圓  $C_1$  和圓  $C_2$  的半徑分別為  $R_1$  和  $R_2$ ， $\angle P_1CP_2 = \theta$ ， $\angle P_1DP_2 = \phi$ ，

$\because 0^\circ < \phi < \theta < 90^\circ$ ， $\therefore \sin \phi < \sin \theta$ ，

推得  $\sin \phi = \frac{\overline{P_1P_2}}{2R_2} < \frac{\overline{P_1P_2}}{2R_1} = \sin \theta$ ，故  $R_2 > R_1$ 。

此時，射線  $OD$  和直線  $P_1P_2$  的夾角  $>$  射線  $OC$  和直線  $P_1P_2$  的夾角。

3. 已知直線  $P_1P_2$  和直線  $L$  平行，求  $L$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。

【作法】

作  $\overline{P_1P_2}$  的中垂線，交  $L$  於  $A$  點，則  $A$  點即為所求。

【證明】

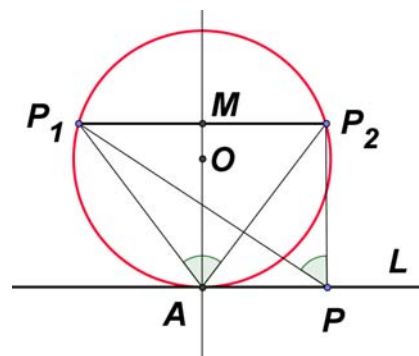
(1) 過  $A$ 、 $P_1$ 、 $P_2$  三點作一圓，

$\therefore$  此圓的圓心  $O$  必在  $\overline{P_1P_2}$  的中垂線上，

又直線  $P_1P_2$  和直線  $L$  平行， $\therefore$  此中垂線  $AM$  必和直線  $L$  垂直於  $A$  點，

推得圓半徑  $\overline{OA}$  必垂直直線  $L$  於  $A$  點，故此圓和直線  $L$  相切。

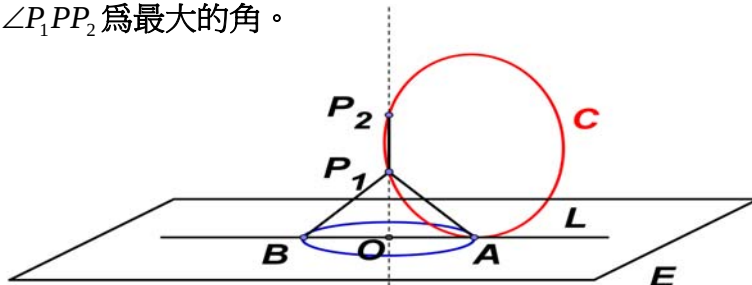
(2) 設  $P$  為直線  $L$  上異於  $A$  的點，連接  $\overline{PP_1}$ 、 $\overline{PP_2}$ ，則  $\angle P_1AP_2$  和  $\angle P_1PP_2$  分別為此圓的圓周角和圓外角，且對同弧  $P_1P_2$ ， $\therefore \angle P_1AP_2 > \angle P_1PP_2$ 。



<圖 10>

(二) 回到最初的 Regiomontanus 問題，再考慮將「垂直」的條件拿掉：

1. 已知直線  $P_1P_2$  和  $E$  相交於  $O$  點且  $P_1P_2 \perp E$  (其中  $P_1$ 、 $P_2$  在平面  $E$  的同一側)，求  $E$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。



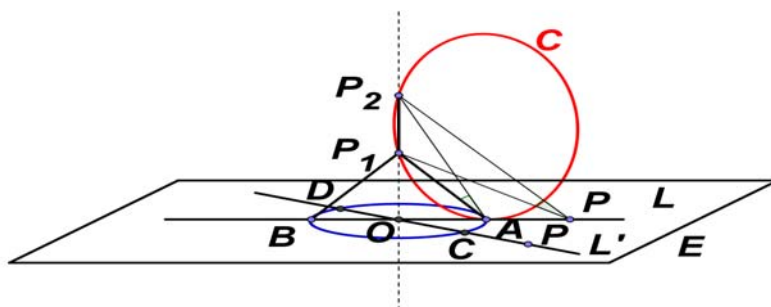
<圖 11>

【作法】

(1) 在平面  $E$  上過  $O$  點作一直線  $L$ ，則  $L$  必垂直直線  $P_1P_2$ 。

(2) 同(一)之 1，在直線  $P_1P_2$  和  $L$  所在的平面上，可作一圓  $C$  和  $L$  相切於  $A$  點。

(3) 在平面  $E$  上以  $O$  為圓心， $\overline{OA}$  為半徑作一圓  $O$ ，則此圓上所有點即為所求。



<圖 12>

**【證明】**

- (1) 設  $P$  為平面  $E$  上一點，但不在圓  $O$  上，若  $P$  在直線  $L$  上，  
同(一)之 1.可知： $\angle P_1AP_2 > \angle P_1PP_2$ 。

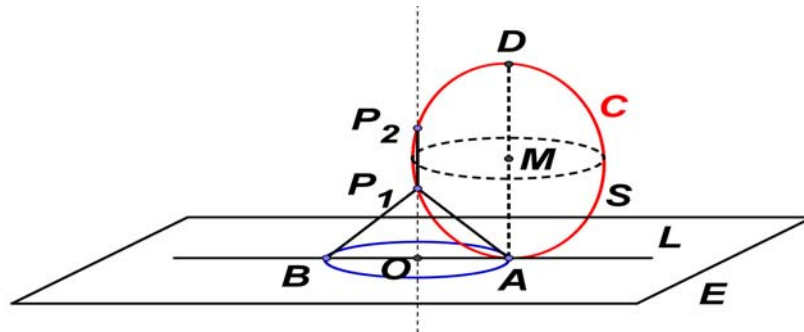
若  $P$  不在直線  $L$  上，可在平面  $E$  上過  $O$  點作一直線  $L'$ ，使得  $P$  在直線  $L'$  上，  
則直線  $L'$  同樣垂直直線  $P_1P_2$ ，

同(一)之 1.，在直線  $P_1P_2$  和  $L'$  所在的平面上，可作一圓和  $L$  相切於  $C$  點，  
則  $C$  點必在圓  $O$  上，同(一)之 1.可知： $\angle P_1CP_2 > \angle P_1PP_2$ 。

- (2) 又  $\angle P_1AP_2 = \angle P_1CP_2$ ，

若  $P$  為平面  $E$  上任一點， $A$  為圓  $O$  上任一點，則  $\angle P_1AP_2 \geq \angle P_1PP_2$ 。

故  $P$  為圓  $O$  上任一點時， $\angle P_1PP_2$  均有最大的角。



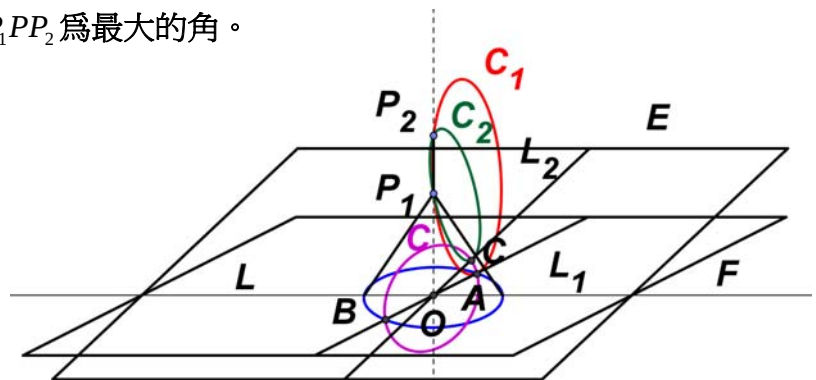
<圖 13>

**【討論】**

- (1) 過切點  $A$  作直線  $AD$  垂直平面  $E$ ，以直線  $AD$  為軸，將圓  $C$  旋轉  $180^\circ$  得一球面  $S$ ，  
則球面  $S$  和平面  $E$  也相切於  $A$  點。

- (2) 再以直線  $P_1P_2$  為軸，將球面  $S$  旋轉  $360^\circ$ ，則切點  $A$  在平面  $E$  上的軌跡正好是  
以  $O$  為圓心， $\overline{OA}$  為半徑的圓。

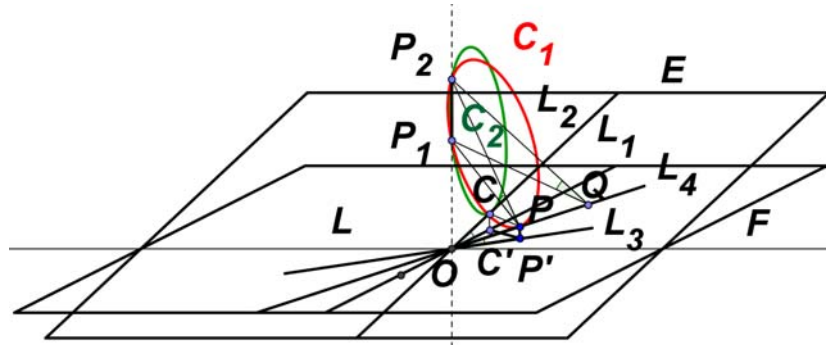
2. 已知直線  $P_1P_2$  和  $E$  相交於  $O$  點且不垂直(其中  $P_1$ 、 $P_2$  在平面  $E$  的同一側)，  
求  $E$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。



<圖 14>

**【作法】**

- (1) 在平面  $E$  上，過  $O$  作一平面  $F$  垂直直線  $P_1P_2$ ，設平面  $E$  和平面  $F$  的交線為直線  $L$ 。
- (2) 在平面  $F$  上，過  $O$  作直線  $L_1$ ，使得  $L_1 \perp L$ ，在直線  $P_1P_2$  和直線  $L_1$  所在平面上，  
同(一)之 2，過  $P_1$ 、 $P_2$  可作一圓  $C_1$  和直線  $L_1$  切於  $A$  點，再以  $\overline{OA}$  為半徑作一圓  $C$ 。
- (3) 設直線  $P_1P_2$  和直線  $L_1$  所在平面和平面  $E$  的交線為  $L_2$ ，若圓  $C$  和直線  $L_2$  交於  $C$  點，  
同(一)之 2，過  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $C$  作一圓  $C_2$  必和直線  $L_2$  切於  $C$  點，則  $C$  點即為所求。



<圖 15>

**【證明】**

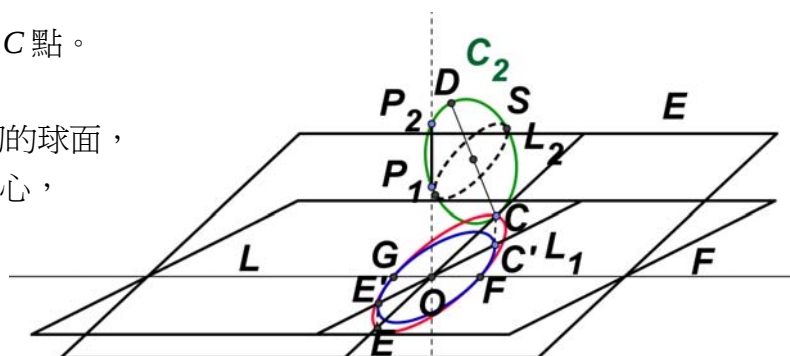
- (1) 在平面  $E$  上過  $O$  作直線  $L_4$ ，在  $L_4$  上取一點  $P$  使得  $\overline{OP} = \overline{OC}$ ，  
同(一)之 2，作一圓過  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P$ ，必和直線  $L_4$  切於  $P$  點。
- (2) 分別作  $C$ 、 $P$  在平面  $F$  上的投影點  $C'$ 、 $P'$ ，  
連接  $\overline{OC'}$ ， $\overline{OP'}$ ， $\overline{CC'}$ ， $\overline{PP'}$ ，此時  $\overline{OC'} < \overline{OP'}$ ，  
設  $\angle COC' = \alpha$ ， $\angle POP' = \beta$ ， $\cos \alpha = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}$ ， $\cos \beta = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}$ ，  
又  $\overline{OP} = \overline{OC}$ ， $\therefore \cos \alpha < \cos \beta$ ，推得  $\alpha > \beta$ ， $90^\circ - \alpha < 90^\circ - \beta$ ，  
即直線  $P_1P_2$  和直線  $L_2$  的夾角  $<$  直線  $P_1P_2$  和直線  $L_4$  的夾角，故  $\angle P_1CP_2 > \angle P_1PP_2$ 。
- (3) 若在  $L_4$  上取一點  $Q$  異於  $P$ ，則  $\angle P_1PP_2 > \angle P_1QP_2$ ， $\therefore \angle P_1CP_2 > \angle P_1QP_2$ 。  
因此，在直線  $L_4$  上任取一點  $P$ ，則  $\angle P_1PP_2 \leq \angle P_1CP_2$ ，  
又直線  $L_4$  為平面  $E$  上過  $O$  的任一直線，  
 $\therefore$  在平面  $E$  上任取一點  $P$ ，均滿足  $\angle P_1PP_2 \leq \angle P_1CP_2$ ，  
故  $P = C$  時， $\angle P_1PP_2$  有最大的角。

## 【討論】

- (1) 過切點  $C$  作  $\overline{CD}$  垂直平面  $E$ ，以直線  $CD$  為軸，將圓  $C_2$  旋轉  $180^\circ$  得一球面  $S$ ，則球面  $S$  和平面  $E$  也相切於  $C$  點。

- (2) 所有過  $P_1$ 、 $P_2$  和平面  $E$  相切的球面，其切點軌跡正好是以  $O$  為圓心，

$\overline{OC}$  為半徑的圓。而球面  $S$  是所有切球中最小的。



- (3) 平面  $E$  上的切點軌跡(圓)在平面  $F$  上的投影，

<圖 16>

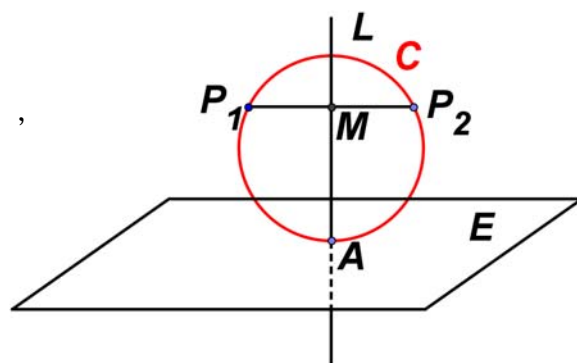
正好是以  $O$  為中心， $\overline{OC'}$  為半短軸， $\overline{OF}$  為半長軸的橢圓。

3. 已知直線  $P_1P_2$  和平面  $E$  平行，求  $E$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。

## 【作法】

取  $\overline{P_1P_2}$  的中點  $M$ ，過  $M$  作平面  $E$  的垂線  $L$ ，

設交平面  $E$  於  $A$  點，則  $A$  點即為所求。



<圖 17>

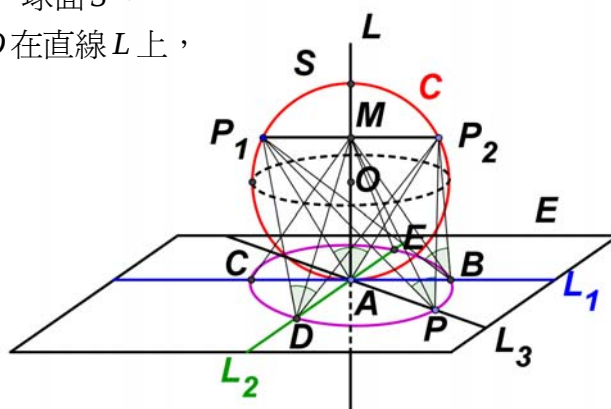
## 【證明】

- (1) 過  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $A$  作一圓  $C$  和平面  $E$  交於  $A$  點，再以直線  $L$  為軸，將圓  $C$  旋轉  $180^\circ$  得一球面  $S$ ，設球心為  $O$ ， $\because L \perp$  平面  $E$ ，且球心  $O$  在直線  $L$  上，

$\therefore \overline{OA} \perp$  平面  $E$  於  $A$  點，

故球面  $S$  和平面  $E$  相切於  $A$  點。

- (2) 設含圓  $C$  的平面和平面  $E$  的交線為  $L_1$ ， $\overline{P_1P_2}$  的中垂面和平面  $E$  的交線為  $L_2$ ，在平面  $E$  上過  $A$  作一直線  $L_3$ ，



<圖 18>

若在直線  $L_3$  上任取異於  $A$  的一點  $P$ ，再以  $A$  為圓心， $\overline{AP}$  為半徑，

在平面  $E$  上畫一圓，設交直線  $L_1$  於  $B$ 、 $C$  兩點，交直線  $L_2$  於  $D$ 、 $E$  兩點。

(3)  $\because L \perp \text{平面} E$ ，且  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$  為平面  $E$  上過  $A$  的直線，

$$\therefore L \perp L_1, L \perp L_2, L \perp L_3, \text{ 又 } \overline{AP} = \overline{AB} = \overline{AD}, \therefore \overline{PM} = \overline{BM} = \overline{DM}。$$

由平行四邊形定理知：

$$2(\overline{PP_1}^2 + \overline{PP_2}^2) = (2\overline{PM})^2 + \overline{P_1P_2}^2, \quad 2(\overline{BP_1}^2 + \overline{BP_2}^2) = (2\overline{BM})^2 + \overline{P_1P_2}^2,$$

$$2(\overline{DP_1}^2 + \overline{DP_2}^2) = (2\overline{DM})^2 + \overline{P_1P_2}^2, \therefore \overline{PP_1}^2 + \overline{PP_2}^2 = \overline{BP_1}^2 + \overline{BP_2}^2 = \overline{DP_1}^2 + \overline{DP_2}^2,$$

$$\text{又 } 0 = |\overline{DP_1} - \overline{DP_2}| < |\overline{PP_1} - \overline{PP_2}| < |\overline{BP_1} - \overline{BP_2}|,$$

$$\text{由算幾不等式可知：} \overline{DP_1} \times \overline{DP_2} > \overline{PP_1} \times \overline{PP_2} > \overline{BP_1} \times \overline{BP_2},$$

$$\text{設 } \angle P_1PP_2 = \alpha, \angle P_1BP_2 = \beta, \angle P_1DP_2 = \gamma,$$

$$\text{則 } \cos \alpha = \frac{\overline{PP_1}^2 + \overline{PP_2}^2 - \overline{P_1P_2}^2}{2\overline{PP_1} \times \overline{PP_2}}, \quad \cos \beta = \frac{\overline{BP_1}^2 + \overline{BP_2}^2 - \overline{P_1P_2}^2}{2\overline{BP_1} \times \overline{BP_2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{\overline{DP_1}^2 + \overline{DP_2}^2 - \overline{P_1P_2}^2}{2\overline{DP_1} \times \overline{DP_2}}, \therefore \cos \gamma < \cos \alpha < \cos \beta, \text{ 推得 } \gamma > \alpha > \beta。$$

(4) 在四面體  $ADP_1P_2$  中，設  $\angle P_1AP_2 = \theta$ ，則  $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\overline{P_1M}}{\overline{AM}}$ ，而  $\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{\overline{P_1M}}{\overline{DM}}$ ，

$$\text{又 } \angle DAM = 90^\circ, \therefore \overline{DM} > \overline{AM}, \text{ 推得 } \tan \frac{\theta}{2} > \tan \frac{\gamma}{2}, \frac{\theta}{2} > \frac{\gamma}{2}, \theta > \gamma,$$

故  $\theta > \gamma > \alpha > \beta$ ，即  $\angle P_1AP_2 > \angle P_1DP_2 > \angle P_1PP_2 > \angle P_1BP_2$ 。

因此，在直線  $L_3$  上任取一點  $P$ ，均滿足  $\angle P_1AP_2 \geq \angle P_1PP_2$ 。

(5) 又直線  $L_3$  為平面  $E$  上過  $A$  的任一直線， $\therefore$  在平面  $E$  上任取一點  $P$ ，也滿足  $\angle P_1AP_2 \geq \angle P_1PP_2$ ，故  $P = A$  時， $\angle P_1PP_2$  有最大的角。

(三) 如果線段  $P_1P_2$  足夠長，則平面上的點應視為球面上的點，為了解決球面的問題，我們先討論圓的情形如下：

如果  $P_1$  及  $P_2$  在圓  $O$  的外部且同側，可分成三種情形：

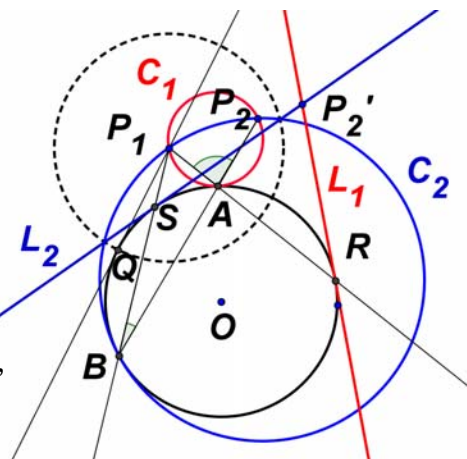
1. 已知  $P_1$  及  $P_2$  在圓  $O$  的外部且直線  $P_1P_2$  和圓  $O$  不相交，求圓  $O$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。

**【作法】**

- (1) 過  $P_1$  對圓  $O$  作一切線，設切點為  $Q$ ，

再以  $P_1$  為圓心， $\overline{P_1Q}$  為半徑作反演圓。

- (2)  $\because$  圓  $O$  和反演圓正交， $\therefore$  圓  $O$  的反形也是圓  $O$ 。  
設過  $P_1$ 、 $P_2$  的圓和圓  $O$  相切，又  $P_1$  為反演中心，  
 $\therefore$  此圓的反形為一直線，也會和圓  $O$  相切。



<圖 19>

- (3) 作出  $P_2$  的反點  $P_2'$ ，過  $P_2'$  對圓  $O$  作兩切線  $L_1$ 、 $L_2$ ，  
設切點分別為  $R$ 、 $S$ ，再作兩射線  $P_1R$  和  $P_1S$ ，分別交圓  $O$  於  $A$ 、 $B$  兩點。
- (4)  $\because$  圓  $O$  的反形是圓  $O$ ，且  $R$  為圓  $O$  上一點， $\therefore R$  的反點必在此圓上  
又反演中心、點、反點必共線，  
故射線  $P_1R$  與圓  $O$  的另一交點  $A$  必為  $R$  的反點，也是圓  $C_1$  和圓  $O$  的切點。  
同理， $B$  必為  $S$  的反點，也是圓  $C_2$  和圓  $O$  的切點。
- (5) 若直線  $L_1$  和圓  $O$  相切於  $R$  點，則過  $P_1$ 、 $P_2$  的圓  $C_1$  和圓  $O$  相切於  $A$  點；  
若直線  $L_2$  和圓  $O$  相切於  $S$  點，則過  $P_1$ 、 $P_2$  的圓  $C_2$  和圓  $O$  相切於  $B$  點。
- (6) 如圖，過  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $A$  作圓  $C_1$  和圓  $O$  外切於  $A$  點；過  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $B$  作圓  $C_2$   
和圓  $O$  內切於  $B$  點，則  $A$  點即為所求。

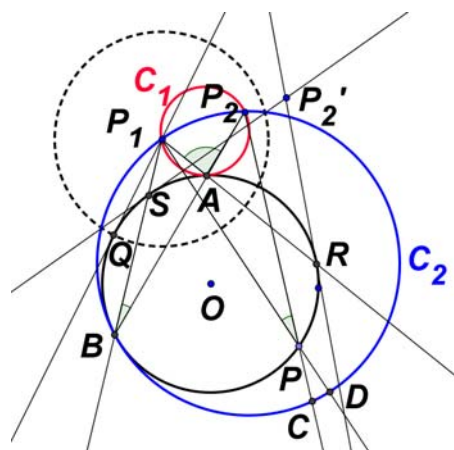
**【證明】**

- (1) 設  $P$  為圓  $O$  上異於  $A$ 、 $B$  的一點，延長

$\overline{P_1P}$ 、 $\overline{P_2P}$  分別交圓  $C_2$  於  $D$ 、 $C$  兩點，

$$\text{則 } \angle P_1PP_2 = \frac{1}{2}(\text{弧 } P_1P_2 + \text{弧 } CD),$$

$$\text{且 } \angle P_1BP_2 = \frac{1}{2}\text{弧 } P_1P_2, \therefore \angle P_1PP_2 > \angle P_1BP_2.$$



<圖 20>

- (2) 在圓  $C_1$  中， $\because \angle P_1AP_2$  與  $\angle P_1PP_2$  分別為對同弧  $P_1P_2$  的圓周角和圓外角，  
 $\therefore \angle P_1AP_2 > \angle P_1PP_2$ 。

由上可知：若  $P$  為圓  $O$  上任一點，則  $\angle P_1AP_2 \geq \angle P_1PP_2 \geq \angle P_1BP_2$ 。

故  $P = A$  時， $\angle P_1PP_2$  有最大的角；而  $P = B$  時， $\angle P_1PP_2$  有最小的角。

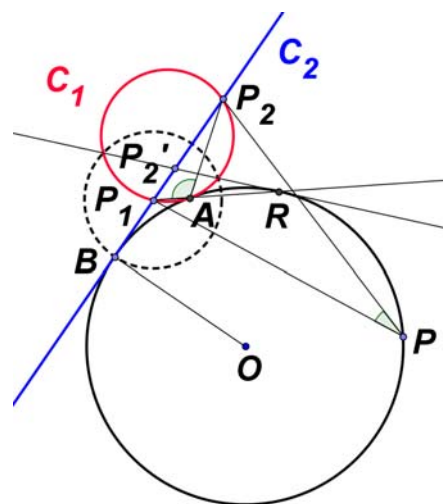
2. 已知  $P_1$  及  $P_2$  在圓  $O$  的外部且直線  $P_1P_2$  和圓  $O$  相切於  $B$  點， $B$  在線段  $P_1P_2$  外，求圓  $O$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。

**【作法】**

同 1.，此時  $B$  和  $S$  點重合，但  $A$  點才是所求。

**【證明】**

- (1) 當  $P = B$  時， $\angle P_1PP_2 = 0^\circ$  有最小的角。
- (2) 設  $P$  為圓  $O$  上異於  $A$ 、 $B$  的一點，在圓  $C_1$  中，  
 $\because \angle P_1AP_2$  與  $\angle P_1PP_2$  分別為對同弧  $P_1P_2$  的  
 圓周角和圓外角， $\therefore \angle P_1AP_2 > \angle P_1PP_2$ 。



<圖 21>

由上可知：

若  $P$  為圓  $O$  上任一點，則  $\angle P_1AP_2 \geq \angle P_1PP_2 \geq \angle P_1BP_2$ ，

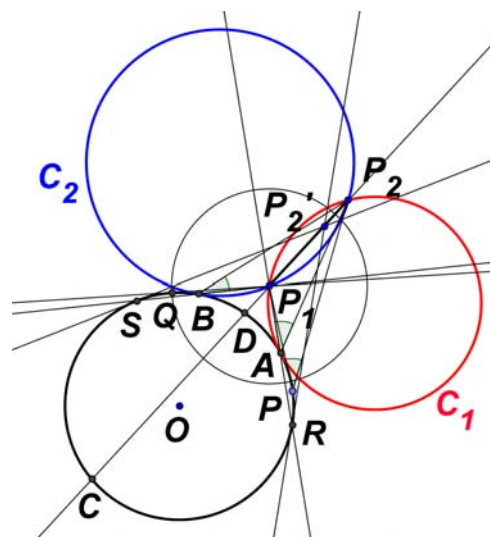
故  $P = A$  時， $\angle P_1PP_2$  有最大的角，而  $P = B$  時， $\angle P_1PP_2$  有最小的角。

3. 已知  $P_1$  及  $P_2$  在圓  $O$  的外部且直線  $P_1P_2$  和圓  $O$  相交  $C$ 、 $D$  兩點， $C$ 、 $D$  在線段  $P_1P_2$  外，求圓  $O$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。

**【作法】** 同 1.， $A$  或  $B$  點即為所求。

**【證明】**

- (1) 當  $P = C$  或  $D$  時， $\angle P_1PP_2 = 0^\circ$  有最小的角。
- (2) 如圖，在圓  $O$  上取異於  $A$ 、 $B$  的一點  $P$ ，  
 設  $P$  和  $A$  在直線  $P_1P_2$  的同側，  
 在圓  $C_1$  中， $\because \angle P_1PP_2$  與  $\angle P_1AP_2$  分別為對  
 同弧  $P_1P_2$  的圓外角和圓周角，  
 $\therefore \angle P_1PP_2 < \angle P_1AP_2$ 。



<圖 22>

(3) 設  $P$  和  $B$  在直線  $P_1P_2$  的同側，在圓  $C_2$  中，

$\because \angle P_1PP_2$  與  $\angle P_1BP_2$  分別為對同弧  $P_1P_2$  的圓外角和圓周角， $\therefore \angle P_1PP_2 < \angle P_1BP_2$ ，  
若圓  $C_1$  較小，則  $\angle P_1AP_2 > \angle P_1BP_2$ ， $\angle P_1AP_2$  為最大的角。

由上可知：若  $P$  為圓  $O$  上任一點，則  $0^\circ \leq \angle P_1PP_2 \leq \angle P_1AP_2$ ，

故  $P = C$  或  $D$  時， $\angle P_1PP_2$  有最小的角； $P = A$  或  $B$  時， $\angle P_1PP_2$  有最大的角。

### 【討論】

如果直線  $P_1P_2$  正好通過圓心  $O$ ，則圓  $C_1$  和圓  $C_2$  為等圓， $0^\circ \leq \angle P_1PP_2 \leq \angle P_1AP_2 = \angle P_1BP_2$ ，此時  $A$ 、 $B$  兩點均為所求。

如果  $P_1$  及  $P_2$  在圓  $O$  的外部且異側，可分成二種情形：

4. 已知  $P_1$  及  $P_2$  在圓  $O$  的外部且直線  $P_1P_2$  和圓  $O$  相切於  $A$  點， $A$  在線段  $P_1P_2$  內，  
求圓  $O$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。

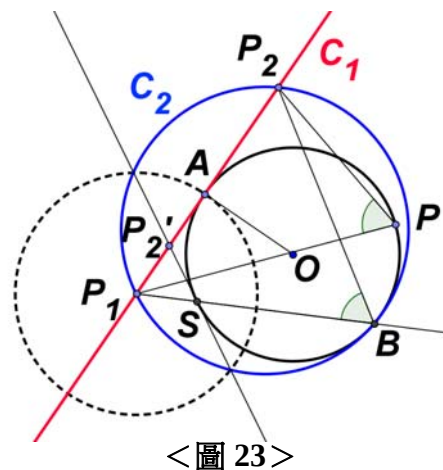
### 【作法】

同 1.，此時  $A$  和  $R$  點重合， $A$  點即為所求。

### 【證明】

- (1) 當  $P = A$  時， $\angle P_1PP_2 = 180^\circ$  有最大的角。

- (2) 設  $P$  為圓  $O$  上異於  $A$ 、 $B$  的一點，在圓  $C_2$  中，  
 $\because \angle P_1PP_2$  與  $\angle P_1BP_2$  分別為對同弧  $P_1P_2$  的圓內角和圓周角， $\therefore \angle P_1PP_2 > \angle P_1BP_2$ 。



由上可知：若  $P$  為圓  $O$  上任一點，則  $\angle P_1AP_2 \geq \angle P_1PP_2 \geq \angle P_1BP_2$ 。

故  $P = A$  時， $\angle P_1PP_2$  有最大的角，而  $P = B$  時， $\angle P_1PP_2$  有最小的角。

5. 已知  $P_1$  及  $P_2$  在圓  $O$  的外部且直線  $P_1P_2$  和圓  $O$  相交  $C$ 、 $D$  兩點， $C$ 、 $D$  在線段  $P_1P_2$  內，  
求圓  $O$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。

【作法】同 1.，但  $C$ 、 $D$  兩點才是所求。

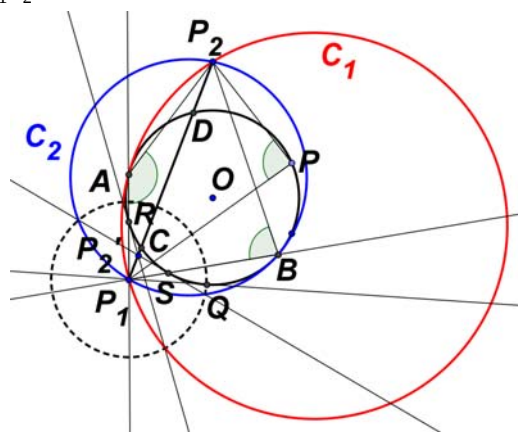
### 【證明】

- (1) 當  $P = C$  或  $D$  時， $\angle P_1PP_2 = 180^\circ$  有最大的角。

- (2) 如圖，在圓  $O$  上取異於  $A$ 、 $B$  的一點  $P$ ，設  $P$  和  $B$  在直線  $P_1P_2$  的同側，

在圓  $C_2$  中， $\because \angle P_1PP_2$  與  $\angle P_1BP_2$  分別為對同弧  $P_1P_2$  的圓內角和圓周角， $\therefore \angle P_1PP_2 > \angle P_1BP_2$ 。

- (3) 設  $P$  和  $A$  在直線  $P_1P_2$  的同側，在圓  $C_1$  中，  
 $\because \angle P_1PP_2$  與  $\angle P_1AP_2$  分別為對同弧  $P_1P_2$  的圓內角和圓周角，  
 $\therefore \angle P_1PP_2 > \angle P_1AP_2$ ，若圓  $C_2$  較小，  
則  $\angle P_1AP_2 > \angle P_1BP_2$ ， $\angle P_1BP_2$  為最小的角。



<圖 24>

由上可知：

若  $P$  為圓  $O$  上任一點，則  $\angle P_1BP_2 \leq \angle P_1PP_2 \leq 180^\circ$ ，

故  $P = C$  或  $D$  時， $\angle P_1PP_2$  有最大的角； $P = A$  或  $B$  時， $\angle P_1PP_2$  有最小的角。

### 【討論】

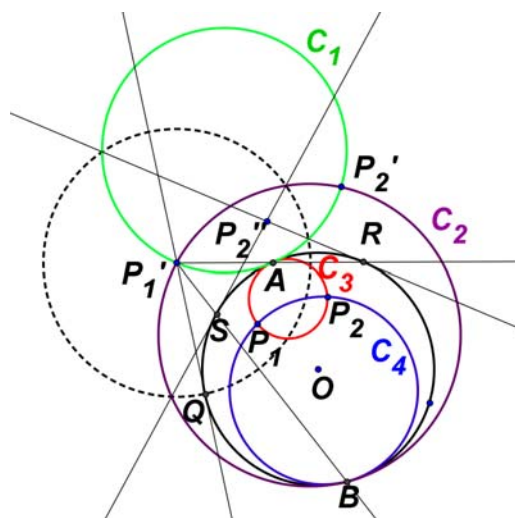
如果直線  $P_1P_2$  正好通過圓心  $O$ ，則圓  $C_1$  和圓  $C_2$  為等圓，  
 $\angle P_1AP_2 = \angle P_1BP_2 \leq \angle P_1PP_2 \leq 180^\circ$ ，因此  $P = A$  或  $B$  時， $\angle P_1PP_2$  均有最小的角。

如果  $P_1$  及  $P_2$  在圓  $O$  的內部，則只有一種情形：

6. 已知  $P_1$  及  $P_2$  在圓  $O$  的內部，求圓  $O$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。

### 【作法】

- (1) 以圓  $O$  為反演圓，分別作出  $P_1$ 、 $P_2$  的反點  $P_1'$ 、 $P_2'$ ，則  $P_1'$ 、 $P_2'$  必在圓  $O$  外。
- (2) 同 1. 作法，可分別作出過  $P_1'$ 、 $P_2'$  和圓  $O$  相切的兩圓  $C_1$ 、 $C_2$ ，設切點分別為  $A$ 、 $B$ 。
- (3) 以圓  $O$  為反演圓，則圓  $O$  的反形為本身，圓  $C_1$  的反形為圓  $C_3$ ，又圓  $O$  和圓  $C_1$  外切於  $A$  點， $\therefore$  圓  $O$  和圓  $C_3$  必內切於  $A$  點。
- (4) 同理可證，圓  $O$  和圓  $C_4$  必內切於  $B$  點，則  $A$  或  $B$  點即為所求。



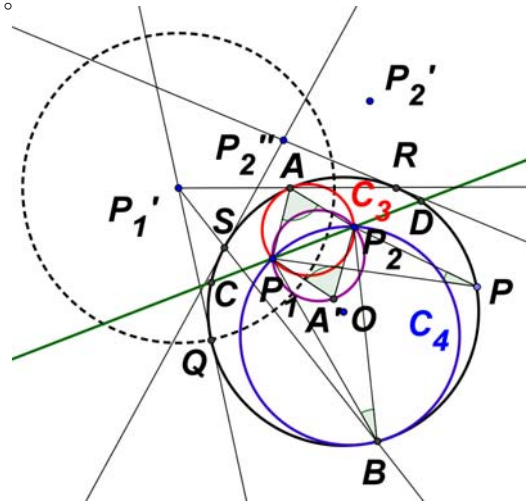
<圖 25>

**【證明】**

(1) 作直線  $P_1P_2$  交圓  $O$  於  $C$ 、 $D$  兩點，則  $\angle P_1CP_2 = \angle P_1DP_2 = 0^\circ$ ，  
 $\therefore P = C$  或  $D$  時， $\angle P_1PP_2 = 0^\circ$  有最小的角。

(2) 如圖，在圓  $O$  上取異於  $A$ 、 $B$  的一點  $P$ ，  
 設  $P$  和  $B$  在直線  $P_1P_2$  的同側，  
 在圓  $C_4$  中， $\angle P_1BP_2$  和  $\angle P_1PP_2$  分別為  
 對同弧  $P_1P_2$  的圓周角和圓外角，  
 $\therefore \angle P_1BP_2 > \angle P_1PP_2$ 。

(3) 設  $P$  和  $A$  在直線  $P_1P_2$  的同側，在圓  $C_3$  中，  
 $\angle P_1AP_2$  和  $\angle P_1PP_2$  分別為對同弧  $P_1P_2$  的  
 圓周角和圓外角， $\therefore \angle P_1AP_2 > \angle P_1PP_2$ ，  
 若圓  $C_3$  較小，則  $\angle P_1AP_2 > \angle P_1BP_2$ ， $\angle P_1AP_2$  為最大的角。



<圖 26>

由上可知：若  $P$  為圓  $O$  上任一點，則  $\angle P_1AP_2 \geq \angle P_1PP_2 \geq 0^\circ$ ，  
 故  $P = A$  或  $B$  時， $\angle P_1PP_2$  有最大的角； $P = C$  或  $D$  時， $\angle P_1PP_2$  有最小的角。

**【討論】**

如果直線  $P_1P_2$  正好通過圓心  $O$ ，則圓  $C_1$  和圓  $C_2$  為等圓， $0^\circ \leq \angle P_1PP_2 \leq \angle P_1AP_2 = \angle P_1BP_2$ ，  
 此時  $A$ 、 $B$  兩點均為所求。

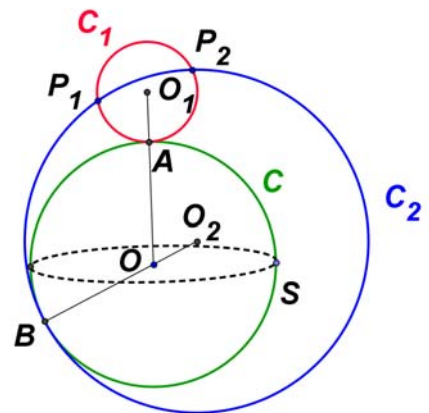
(四) 回到 Regiomontanus 問題之球面問題，我們討論如下：

如果  $P_1$  及  $P_2$  在球面  $S$  的外部且同側，可分成三種情形：

1. 已知  $P_1$  及  $P_2$  在球面  $S$  的外部且直線  $P_1P_2$  和球面  $S$  不相交，求球面  $S$  上的一點  $P$ ，  
 使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。

**【作法】**

- (1) 設球面  $S$  的球心為  $O$ ，過  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $O$  的平面  
 與球面  $S$  的截圓為一圓  $C$ 。
- (2) 同(三)之 1，過  $P_1$ 、 $P_2$  可作兩圓  $C_1$ 、 $C_2$  分別  
 和圓  $C$  外切於  $A$ 、內切於  $B$ ，則  $A$  點即為所求。



<圖 27>

**【證明】**

(1) 如圖，設圓  $C_1$ 、 $C_2$  的圓心分別為  $O_1$ 、 $O_2$ ，分別以直線  $OO_1$ 、 $OO_2$  為軸，旋轉  $180^\circ$  得兩球面  $S_1$ 、 $S_2$ ，則球面  $S_1$  和球面  $S$  外切於  $A$  點，球面  $S_2$  和球面  $S$  內切於  $B$  點。

(2) 設  $P$  為圓  $C$  上任一點，同(三)之 1.，可推得  $\angle P_1AP_2 \geq \angle P_1PP_2$ 。

在  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $O$  所在的平面上作  $\overline{P_1P_2}$  的中垂線，過  $P$  作一平面  $E$  垂直此中垂線，

設  $P$  為平面  $E$  和球面  $S$  交圓上的任一點，如圖，同(二)之 3. 可推得  $\angle P_1QP_2 > \angle P_1PP_2$ ，又  $\angle P_1RP_2 > \angle P_1QP_2$ ， $\angle P_1RP_2 = \angle P_1AP_2$ ， $\therefore \angle P_1AP_2 \geq \angle P_1PP_2$ 。

故  $P$  為球面  $S$  上任一點，均滿足  $\angle P_1AP_2 \geq \angle P_1PP_2$ 。

(3) 設  $P$  為圓  $C$  上任一點，

同(三)之 1. 可知： $\angle P_1PP_2 \geq \angle P_1BP_2$ 。

設  $P$  為平面  $E$  和球面  $S$  交圓上的任一點，

如圖，不妨設  $\angle P_1CP_2 \geq \angle P_1DP_2$

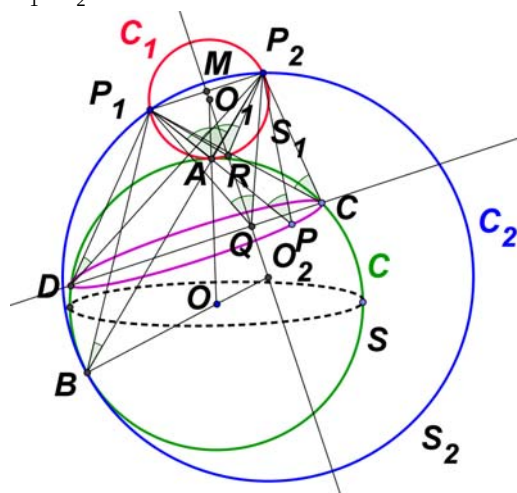
同(二)之 3. 可推得

$\angle P_1PP_2 \geq \angle P_1DP_2$ ，又  $\angle P_1DP_2 \geq \angle P_1BP_2$ ，

$\therefore \angle P_1PP_2 \geq \angle P_1BP_2$ 。

故  $P$  為球面  $S$  上任一點，均滿足

$\angle P_1PP_2 \geq \angle P_1BP_2$ 。



<圖 28>

由上可知：若  $P$  為球面  $S$  上任一點，則  $\angle P_1AP_2 \geq \angle P_1PP_2 \geq \angle P_1BP_2$ 。

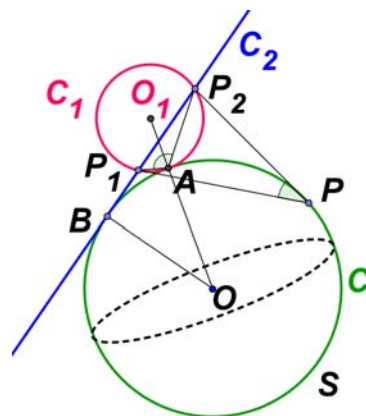
故  $P = A$  時， $\angle P_1PP_2$  有最大的角；而  $P = B$  時， $\angle P_1PP_2$  有最小的角。

2. 已知  $P_1$  及  $P_2$  在球面  $S$  的外部且直線  $P_1P_2$  和球面  $S$  相切於  $B$  點， $B$  在線段  $P_1P_2$  外，求球面  $S$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。

**【作法】**

(1) 設球面  $S$  的球心為  $O$ ，過  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $O$  的平面與球面  $S$  的截圓為一圓  $C$ 。

(2) 同(三)之 2.，過  $P_1$ 、 $P_2$  可作圓  $C_1$  和圓  $C$  外切於  $A$  點，則  $A$  點即為所求。



<圖 29>

**【證明】**

(1) 如圖，設圓  $C_1$  的圓心為  $O_1$ ，以直線  $OO_1$  為軸，旋轉  $180^\circ$  得一球面  $S_1$ ，則球面  $S_1$  和球面  $S$  外切於  $A$  點。

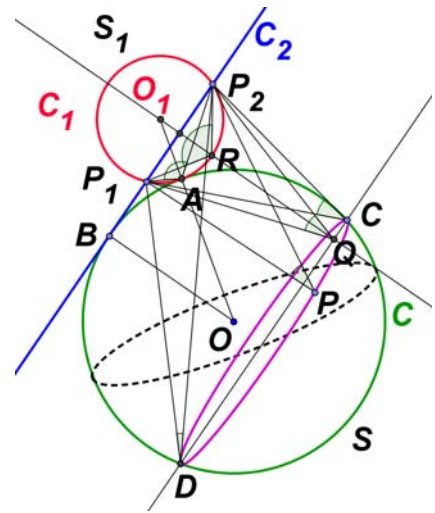
(2) 當  $P = B$  時， $\angle P_1PP_2 = 0^\circ$  有最小的角。

(3) 設  $P$  為圓  $C$  上任一點，同(三)之 2. 可推得  $\angle P_1AP_2 \geq \angle P_1PP_2$ 。

在  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $O$  所在的平面上作  $\overline{P_1P_2}$  的中垂線，

過  $P$  作一平面  $E$  垂直此中垂線，設  $P$  為平面  $E$  和球面  $S$  交圓上的任一點，同 1. 可推得  $\angle P_1AP_2 \geq \angle P_1PP_2$ 。

故  $P$  為球面  $S$  上任一點，均滿足  $\angle P_1AP_2 \geq \angle P_1PP_2$ 。



<圖 30>

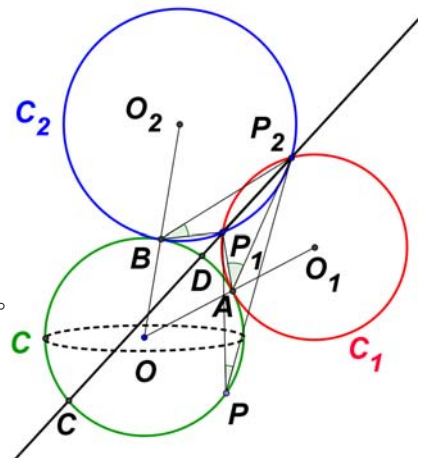
由上可知：若  $P$  為球面  $S$  上任一點，則  $\angle P_1AP_2 \geq \angle P_1PP_2 \geq \angle P_1BP_2$ ，故  $P = A$  時， $\angle P_1PP_2$  有最大的角，而  $P = B$  時， $\angle P_1PP_2$  有最小的角。

3. 已知  $P_1$  及  $P_2$  在球面  $S$  的外部且直線  $P_1P_2$  和球面  $S$  相交  $C$ 、 $D$  兩點， $C$ 、 $D$  在線段  $P_1P_2$  外，求球面  $S$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。

**【作法】**

(1) 設球面  $S$  的球心為  $O$ ，過  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $O$  的平面與球面  $S$  的截圓為一圓  $C$ 。

(2) 同(三)之 3.，過  $P_1$ 、 $P_2$  可作兩圓  $C_1$ 、 $C_2$  分別和圓  $C$  外切於  $A$ 、 $B$  兩點，則  $A$  或  $B$  點即為所求。



<圖 31>

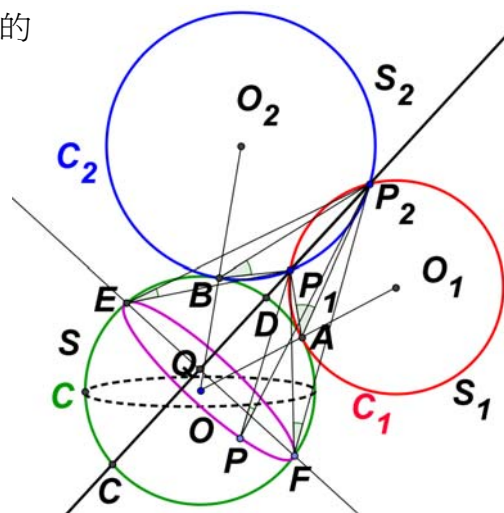
**【證明】**

(1) 如圖，設圓  $C_1$ 、 $C_2$  的圓心分別為  $O_1$ 、 $O_2$ ，分別以直線  $OO_1$ 、 $OO_2$  為軸，旋轉  $180^\circ$  得一球面  $S_1$ 、 $S_2$ ，則球面  $S_1$  和球面  $S$  外切於  $A$  點，球面  $S_2$  和球面  $S$  外切於  $B$  點。

(2) 當  $P = C$  或  $D$  時， $\angle P_1PP_2 = 0^\circ$  有最小的角。

(3) 設  $P$  為圓  $C$  上任一點，且  $P$  和  $A$  在直線  $P_1P_2$  的同側，同(三)之 3. 可推得  $\angle P_1PP_2 \leq \angle P_1AP_2$ 。

設  $P$  為圓  $C$  上任一點，且  $P$  和  $B$  在直線  $P_1P_2$  的同側，同(三)之 3. 可推得  $\angle P_1PP_2 \leq \angle P_1BP_2$ 。  
如圖，若圓  $C_1$  較小，則  $\angle P_1AP_2 > \angle P_1BP_2$ ，  
 $\angle P_1AP_2$  為最大的角。



<圖 32>

由上可知：若  $P$  為球面  $S$  上任一點，則  $0^\circ \leq \angle P_1PP_2 \leq \angle P_1AP_2$ ，  
故  $P = C$  或  $D$  時， $\angle P_1PP_2$  有最小的角； $P = A$  或  $B$  時， $\angle P_1PP_2$  有最大的角。

### 【討論】

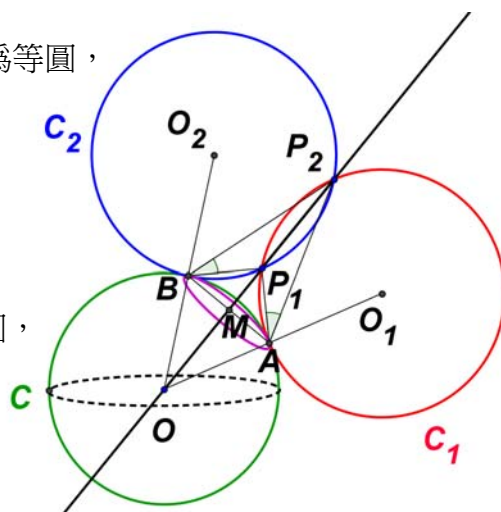
如果直線  $P_1P_2$  正好通過球心  $O$ ，則圓  $C_1$  和圓  $C_2$  為等圓，  
 $\angle P_1AP_2 = \angle P_1BP_2$  均為最大角，

$\because \overline{OA} = \overline{OB}$ ， $\therefore$  直線  $P_1P_2$  為  $\overline{AB}$  的中垂線，

設交點為  $M$ ，過  $M$  作一平面  $E$  垂直直線  $P_1P_2$ ，

在此平面  $E$  上，以  $M$  為圓心， $\overline{MA}$  為半徑作一圓，

則此圓上所有點均為所求。



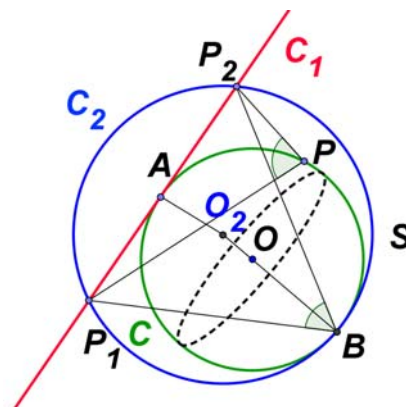
<圖 33>

如果  $P_1$  及  $P_2$  在圓  $O$  的外部且異側，可分成二種情形：

4. 已知  $P_1$  及  $P_2$  在球面  $S$  的外部且直線  $P_1P_2$  和球面  $S$  相切於  $A$  點， $A$  在線段  $P_1P_2$  內，  
求球面  $S$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。

### 【作法】

- (1) 設球面  $S$  的球心為  $O$ ，過  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $O$  的平面與球面  $S$  的截圓為一圓  $C$ 。
- (2) 同(三)之 4.，過  $P_1$ 、 $P_2$  可作圓  $C_2$  和圓  $C$  內切於  $B$  點，但  $A$  點才是所求。



<圖 34>

**【證明】**

- (1) 如圖，設圓  $C_2$  的圓心為  $O_2$ ，以直線  $OO_2$  為軸，旋轉  $180^\circ$  得一球面  $S_2$ ，則球面  $S_2$  和球面  $S$  內切於  $B$  點。

- (2) 當  $P = A$  時， $\angle P_1PP_2 = 180^\circ$  有最大的角。

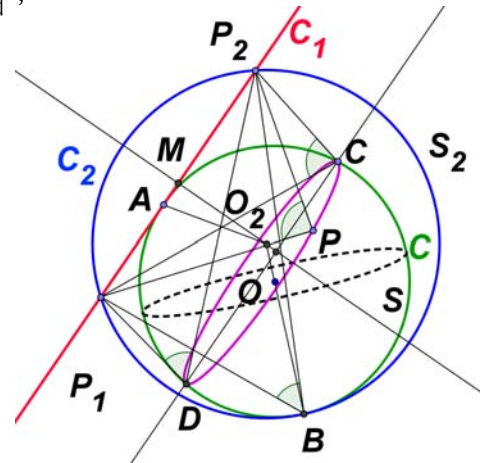
- (3) 設  $P$  為圓  $C$  上任一點，同(三)之 4. 可推得  $\angle P_1PP_2 \geq \angle P_1BP_2$ 。

在  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $O$  所在的平面上作  $\overline{P_1P_2}$  的中垂線，

過  $P$  作一平面  $E$  垂直此中垂線，設  $P$  為平面  $E$

和球面  $S$  交圓上的任一點，同 1. 可推得  $\angle P_1PP_2 \geq \angle P_1BP_2$ 。

故  $P$  為球面  $S$  上任一點，均滿足  $\angle P_1PP_2 \geq \angle P_1BP_2$ 。



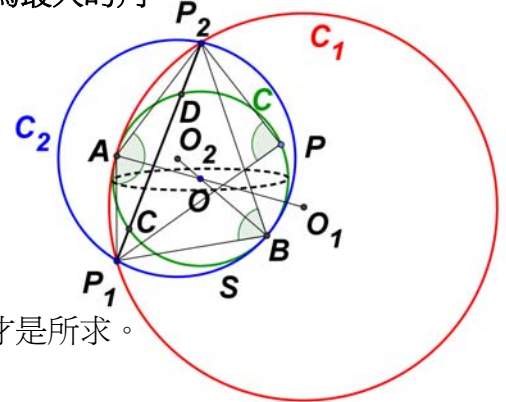
<圖 35>

由上可知：若  $P$  為球面  $S$  上任一點，則  $\angle P_1AP_2 \geq \angle P_1PP_2 \geq \angle P_1BP_2$ 。  
故  $P = A$  時， $\angle P_1PP_2$  有最大的角，而  $P = B$  時， $\angle P_1PP_2$  有最小的角。

5. 已知  $P_1$  及  $P_2$  在球面  $S$  的外部且直線  $P_1P_2$  和球面  $S$  相交  $C$ 、 $D$  兩點， $C$ 、 $D$  在線段  $P_1P_2$  內，求球面  $S$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。

**【作法】**

- (1) 設球面  $S$  的球心為  $O$ ，過  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $O$  的平面與球面  $S$  的截圓為一圓  $C$ 。
- (2) 同(三)之 5.，過  $P_1$ 、 $P_2$  可作兩圓  $C_1$ 、 $C_2$  分別和圓  $C$  內切於  $A$ 、 $B$  兩點，但  $C$ 、 $D$  兩點才是所求。



<圖 36>

**【證明】**

- (1) 如圖，設圓  $C_1$ 、 $C_2$  的圓心分別為  $O_1$ 、 $O_2$ ，分別以直線  $OO_1$ 、 $OO_2$  為軸，旋轉  $180^\circ$  得一球面  $S_1$ 、 $S_2$ ，則球面  $S_1$  和球面  $S$  內切於  $A$  點，球面  $S_2$  和球面  $S$  內切於  $B$  點。

- (2) 當  $P = C$  或  $D$  時， $\angle P_1PP_2 = 180^\circ$  有最大的角。

- (3) 設  $P$  為圓  $C$  上任一點，且  $P$  和  $B$  在直線  $P_1P_2$  的同側，同(三)之 5. 可推得  $\angle P_1PP_2 \geq \angle P_1BP_2$ 。

在  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $O$  所在的平面上作  $\overline{P_1P_2}$  的中垂線，

過  $P$  作一平面  $E$  垂直此中垂線，

設  $P$  為平面  $E$  和球面  $S$  交圓上的任一點，

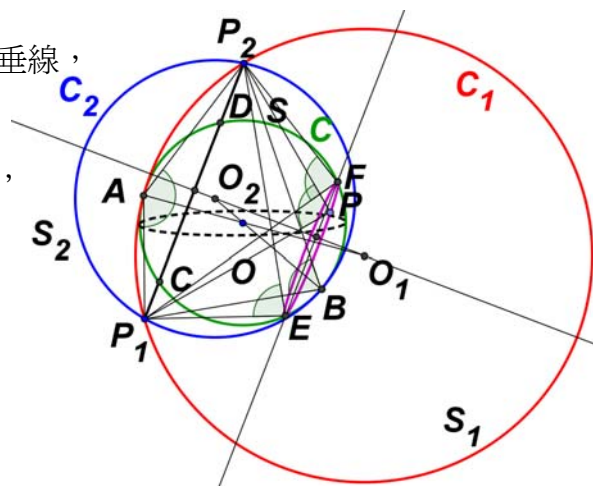
同 1. 可推得  $\angle P_1PP_2 \geq \angle P_1BP_2$ 。

設含直線  $P_1P_2$  且垂直此中垂線的平面

為  $F$ ，則  $P$  為球面  $S$  上任一點，

且  $P$  和  $B$  在平面  $F$  的同側，

均滿足  $\angle P_1PP_2 \geq \angle P_1BP_2$ 。



<圖 37>

(4) 設  $P$  為圓  $C$  上任一點，且  $P$  和  $A$  在直線  $P_1P_2$  的同側，

同 (三) 之 5. 可推得  $\angle P_1PP_2 \geq \angle P_1AP_2$ 。

設  $P$  為平面  $E$  和球面  $S$  交圓上的任一點，同 1. 可推得  $\angle P_1PP_2 \geq \angle P_1AP_2$ 。

故  $P$  為球面  $S$  上任一點，且  $P$  和  $A$  在平面  $F$  的同側，均滿足  $\angle P_1PP_2 \geq \angle P_1AP_2$ 。

若球  $S_2$  較小，則  $\angle P_1AP_2 > \angle P_1BP_2$ ， $\angle P_1BP_2$  為最小的角。

由上可知：若  $P$  為球面  $S$  上任一點，則  $\angle P_1BP_2 \leq \angle P_1PP_2 \leq 180^\circ$ ，

故  $P = C$  或  $D$  時， $\angle P_1PP_2$  有最大的角； $P = A$  或  $B$  時， $\angle P_1PP_2$  有最小的角。

### 【討論】

如果直線  $P_1P_2$  正好通過球心  $O$ ，則圓  $C_1$  和圓  $C_2$  為等圓，

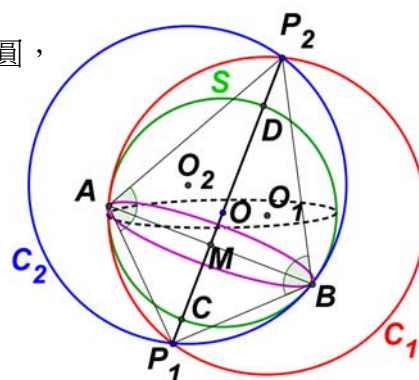
$\angle P_1AP_2 = \angle P_1BP_2$  均為最小角，

$\because \overline{OA} = \overline{OB}$ ， $\therefore$  直線  $P_1P_2$  為  $\overline{AB}$  的中垂線，

設交點為  $M$ ，過  $M$  作一平面  $E$  垂直直線  $P_1P_2$ ，

在此平面  $E$  上，以  $M$  為圓心， $\overline{MA}$  為半徑作一圓，

則此圓上所有點  $P$ ，滿足  $\angle P_1PP_2$  有最小角。



<圖 38>

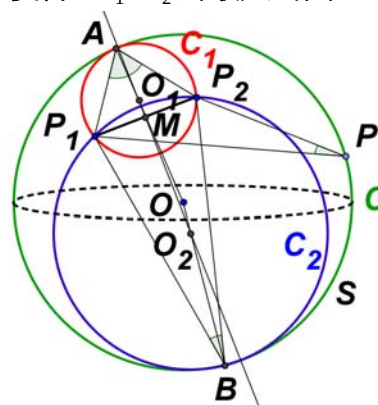
如果  $P_1$  及  $P_2$  在球面  $S$  的內部，則只有一種情形：

6. 已知  $P_1$  及  $P_2$  在球面  $S$  的內部，求球面  $S$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。

### 【作法】

(1) 設球面  $S$  的球心為  $O$ ，過  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $O$  的平面與球面  $S$  的截圓為一圓  $C$ 。

(2) 同(三) 之 6.，過  $P_1$ 、 $P_2$  可作兩圓  $C_1$ 、 $C_2$  分別和圓  $C$  內切於  $A$ 、 $B$  兩點，則  $A$  或  $B$  點即為所求。



<圖 39>

**【證明】**

(1) 如圖，設圓  $C_1$ 、 $C_2$  的圓心分別為  $O_1$ 、 $O_2$ ，分別以直線  $OO_1$ 、 $OO_2$  為軸，旋轉  $180^\circ$  得兩球面  $S_1$ 、 $S_2$ ，則球面  $S_1$  和球面  $S$  內切於  $A$  點，球面  $S_2$  和球面  $S$  內切於  $B$  點，不妨設球  $S_1$  較小。

(2) 作直線  $P_1P_2$  交球面  $S$  於  $C$ 、 $D$  兩點，則  $\angle P_1CP_2 = \angle P_1DP_2 = 0^\circ$ ，  
 $\therefore P = C$  或  $D$  時， $\angle P_1PP_2 = 0^\circ$  有最小的角。

(3) 在  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $O$  所在的平面上作  $\overline{P_1P_2}$  的中垂線，如圖，過  $P$  作一平面  $E$  垂直

此中垂線，截球面  $S$  於一圓  $C_3$ ，再作  $\overline{P_1P_2}$  的中垂面  $F$ ，截球面  $S$  於一圓  $C_4$ ，

設  $P$  為圓  $C_3$  上的任一點，且  $Q$  為圓  $C_3$  和圓  $C_4$  的一交點，

如圖，同 1. 可推得  $\angle P_1PP_2 \leq \angle P_1QP_2$ ，

(4) 設在  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $O$  所在的平面上作  $\overline{P_1P_2}$  的中垂線分別

交圓  $C_1$ 、 $C_2$  於  $A'$ 、 $A''$  點，

則  $\angle P_1A''P_2 \leq \angle P_1A'P_2 = \angle P_1AP_2$ ，

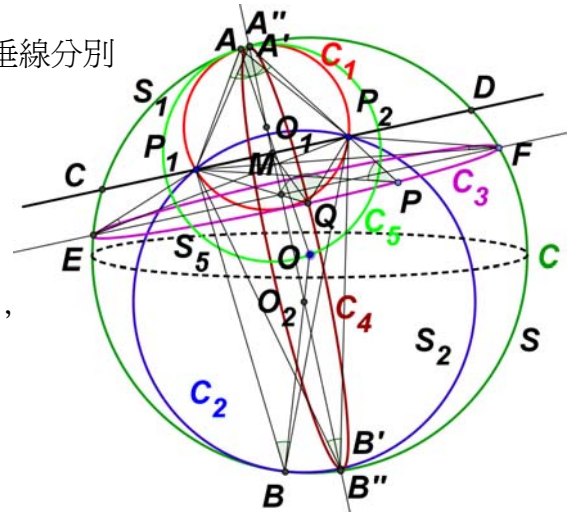
以  $M$  為圓心， $\overline{MA'}$  為半徑畫圓  $C_5$ ，

再以直線  $MO_1$  為軸，旋轉  $180^\circ$  得一球面  $S_5$ ，

則  $\overline{QM} \geq \overline{A''M} \geq \overline{A'M}$ ，

$\therefore \angle P_1QP_2 \leq \angle P_1A''P_2 \leq \angle P_1A'P_2$ ，

故  $\angle P_1PP_2 \leq \angle P_1AP_2$ 。



<圖 40>

由上可知：若  $P$  為球面  $S$  上任一點，則  $\angle P_1AP_2 \geq \angle P_1PP_2 \geq 0^\circ$ ，

故  $P = A$  時， $\angle P_1PP_2$  有最大的角； $P = C$  或  $D$  時， $\angle P_1PP_2 = 0^\circ$  有最小的角。

**【討論】**

如果直線  $P_1P_2$  正好通過球心  $O$ ，則圓  $C_1$  和圓  $C_2$  為等圓，

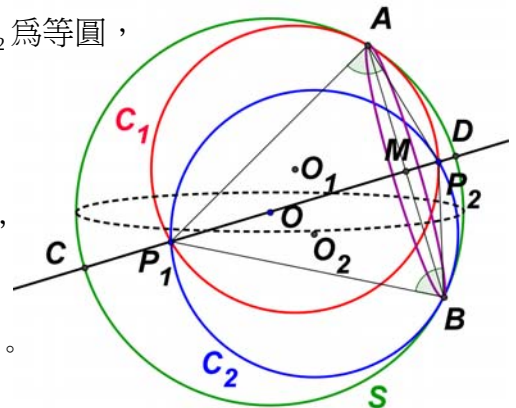
$\angle P_1AP_2 = \angle P_1BP_2$  均為最大角，

$\therefore \overline{OA} = \overline{OB}$ ， $\therefore$  直線  $P_1P_2$  為  $\overline{AB}$  的中垂線，

設交點為  $M$ ，過  $M$  作一平面  $E$  垂直直線  $P_1P_2$ ，

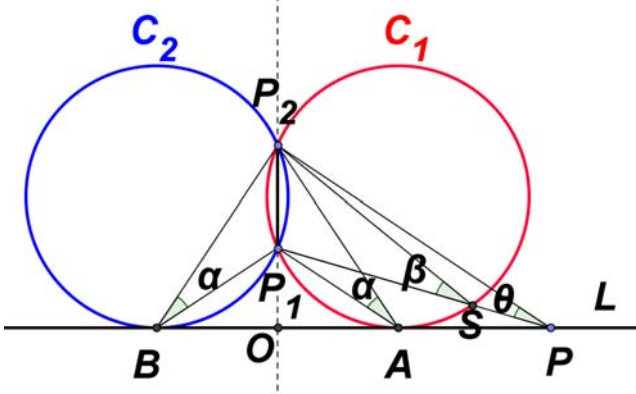
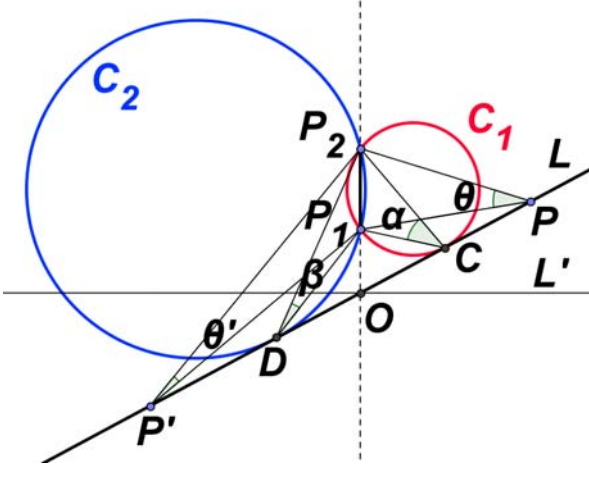
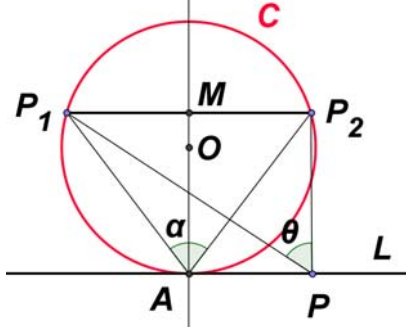
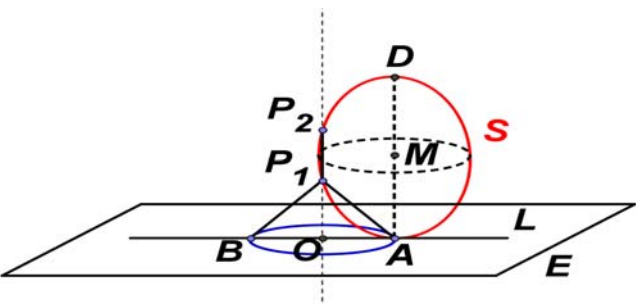
在此平面  $E$  上，以  $M$  為圓心，

$\overline{MA}$  為半徑作一圓，則此圓上所有點均為所求。



<圖 41>

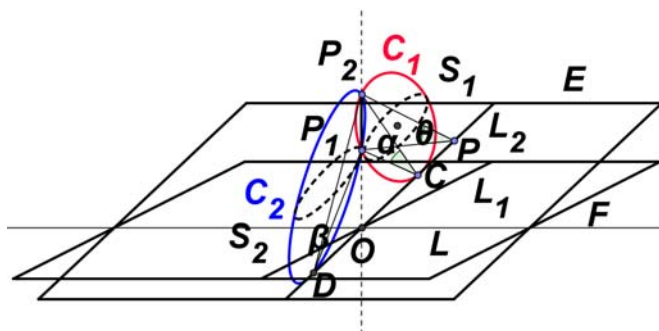
## 伍、研究結果

| 已知條件下的最大解或最小解                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 圖解                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>一、已知直線 <math>P_1P_2</math> 和直線 <math>L</math> 相交於 <math>O</math> 點且 <math>P_1P_2 \perp L</math> (其中 <math>P_1</math>、<math>P_2</math> 在 <math>L</math> 的同一側)，求 <math>L</math> 上的一點 <math>P</math>，使得 <math>\angle P_1PP_2</math> 為最大的角。</p> <p>【解】<br/>過 <math>P_1</math>、<math>P_2</math> 作兩圓 <math>C_1</math>、<math>C_2</math> 和直線 <math>L</math> 相切，設切點為 <math>A</math>、<math>B</math>，則 <math>\angle P_1AP_2</math> 與 <math>\angle P_1BP_2</math> 均為最大的角。而 <math>\angle P_1OP_2 = 0^\circ</math> 為最小的角。</p>                                                                |    |
| <p>二、已知直線 <math>P_1P_2</math> 和 <math>L</math> 相交於 <math>O</math> 點且不垂直 (其中 <math>P_1</math>、<math>P_2</math> 在直線 <math>L</math> 的同一側)，求 <math>L</math> 上的一點 <math>P</math>，使得 <math>\angle P_1PP_2</math> 為最大的角。</p> <p>【解】<br/>在銳夾角一側，過 <math>P_1</math>、<math>P_2</math> 作一圓 <math>C_1</math> 和直線 <math>L</math> 相切，設切點為 <math>C</math>，則 <math>\angle P_1CP_2</math> 為最大的角。在鈍夾角一側，過 <math>P_1</math>、<math>P_2</math> 作一圓 <math>C_2</math> 和直線 <math>L</math> 相切，設切點為 <math>D</math>，則 <math>\angle P_1DP_2</math> 為局部最大的角。而 <math>\angle P_1OP_2 = 0^\circ</math> 為最小的角。</p> |   |
| <p>三、已知直線 <math>P_1P_2</math> 和直線 <math>L</math> 平行，求 <math>L</math> 上的一點 <math>P</math>，使得 <math>\angle P_1PP_2</math> 為最大的角。</p> <p>【解】<br/>過 <math>P_1</math>、<math>P_2</math> 作一圓 <math>C</math> 和直線 <math>L</math> 相切，設切點為 <math>A</math>，則 <math>\angle P_1AP_2</math> 為最大的角。而 <math>\angle P_1PP_2</math> 沒有最小的角。</p>                                                                                                                                                                                                                                                      |  |
| <p>四、已知直線 <math>P_1P_2</math> 和 <math>E</math> 相交於 <math>O</math> 點且 <math>P_1P_2 \perp E</math> (其中 <math>P_1</math>、<math>P_2</math> 在平面 <math>E</math> 的同一側)，求 <math>E</math> 上的一點 <math>P</math>，使得 <math>\angle P_1PP_2</math> 為最大的角。</p> <p>【解】<br/>過 <math>P_1</math>、<math>P_2</math> 作球面 <math>S</math> 和平面 <math>E</math> 相切，設切點為 <math>A</math>，則 <math>\angle P_1AP_2</math> 為最大的角，且球面 <math>S</math> 和平面 <math>E</math> 的切點軌跡為一圓。而 <math>\angle P_1OP_2 = 0^\circ</math> 為最小的角。</p>                                                                                  |  |

五、已知直線  $P_1P_2$  和  $E$  相交於  $O$  點且不垂直(其中  $P_1$ 、 $P_2$  在平面  $E$  的同一側)，求  $E$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。

【解】

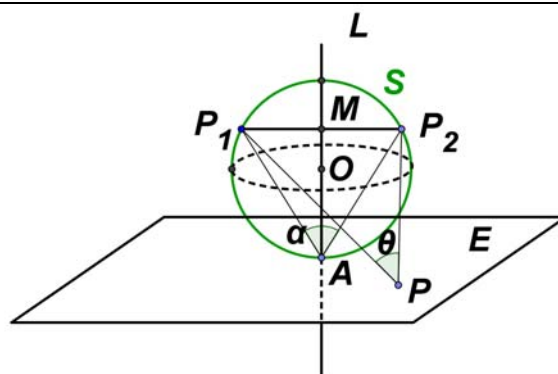
設直線  $P_1P_2$  在平面  $E$  上的投影為直線  $L_2$ ，兩直線在銳夾角一側，過  $P_1$ 、 $P_2$  作圓  $C_1$  和直線  $L$  相切，設切點為  $C$ ，則  $\angle P_1CP_2$  為最大的角。在鈍夾角一側，過  $P_1$ 、 $P_2$  作圓  $C_2$  和直線  $L$  相切，設切點為  $D$ ，則  $\angle P_1DP_2$  為局部最大的角。且分別過切點  $C$ 、 $D$  可作出兩切球  $S_1$ 、 $S_2$ 。而  $\angle P_1OP_2 = 0^\circ$  為最小的角。



六、已知直線  $P_1P_2$  和平面  $E$  平行，求  $E$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。

【解】

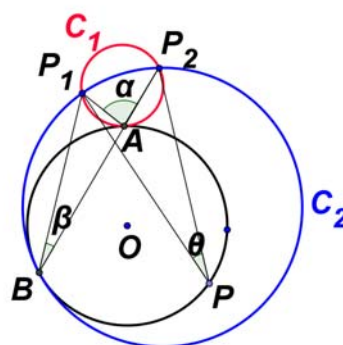
過  $P_1$ 、 $P_2$  作球面  $S$  和平面  $E$  相切，設切點為  $A$ ，則  $\angle P_1AP_2$  為最大的角。而  $\angle P_1PP_2$  沒有最小的角。



七、已知  $P_1$  及  $P_2$  在圓  $O$  的外部且直線  $P_1P_2$  和圓  $O$  不相交，求圓  $O$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。

【解】

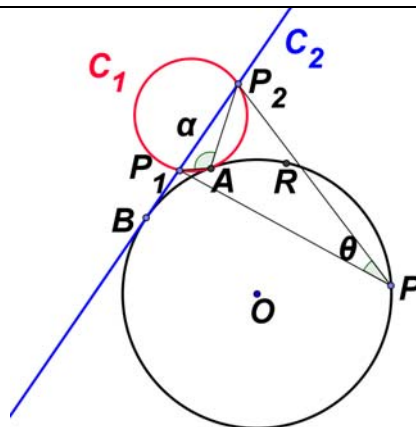
過  $P_1$ 、 $P_2$  作一外切圓  $C_1$  和圓  $O$  相切，設切點為  $A$ ，則  $\angle P_1AP_2$  為最大的角。而過  $P_1$ 、 $P_2$  作一內切圓  $C_2$  和圓  $O$  相切，設切點為  $B$ ，則  $\angle P_1BP_2$  為最小的角。



八、已知  $P_1$  及  $P_2$  在圓  $O$  的外部且直線  $P_1P_2$  和圓  $O$  相切於  $B$  點， $B$  在線段  $P_1P_2$  外，求圓  $O$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。

【解】

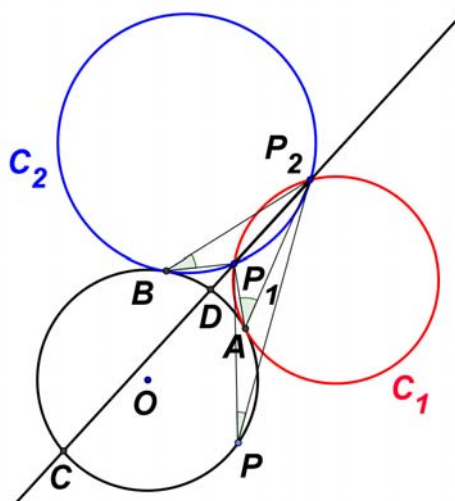
過  $P_1$ 、 $P_2$  作一外切圓  $C_1$  和圓  $O$  相切，設切點為  $A$ ，則  $\angle P_1AP_2$  為最大的角。而  $\angle P_1BP_2 = 0^\circ$  有最小的角。



九、已知  $P_1$  及  $P_2$  在圓  $O$  的外部且直線  $P_1P_2$  和圓  $O$  相交  $C$ 、 $D$  兩點， $C$ 、 $D$  在線段  $P_1P_2$  外，求圓  $O$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。

【解】

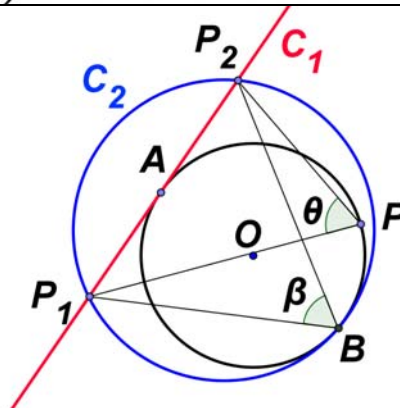
過  $P_1$ 、 $P_2$  作兩外切圓  $C_1$ 、 $C_2$  和圓  $O$  相切，設切點分別為  $A$ 、 $B$ ，  
若圓  $C_1$  較小，則  $\angle P_1AP_2$  為最大的角。  
而  $\angle P_1CP_2 = \angle P_1DP_2 = 0^\circ$  為最小的角。



十、已知  $P_1$  及  $P_2$  在圓  $O$  的外部且直線  $P_1P_2$  和圓  $O$  相切於  $A$  點， $A$  在線段  $P_1P_2$  內，求圓  $O$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。

【解】

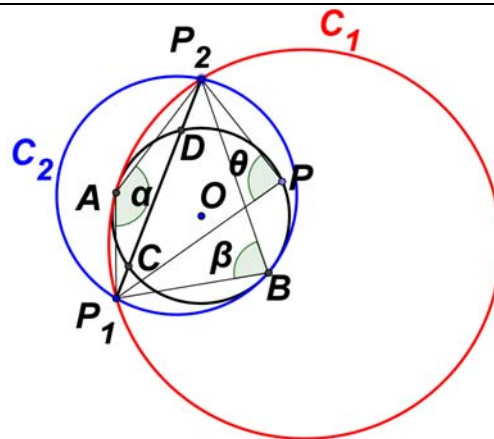
$\angle P_1AP_2 = 180^\circ$  為最大的角。  
而過  $P_1$ 、 $P_2$  作一內切圓  $C_2$  和圓  $O$  相切，設切點為  $B$ ，則  $\angle P_1BP_2$  為最小的角。



十一、已知  $P_1$  及  $P_2$  在圓  $O$  的外部且直線  $P_1P_2$  和圓  $O$  相交  $C$ 、 $D$  兩點， $C$ 、 $D$  在線段  $P_1P_2$  內，求圓  $O$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。

【解】

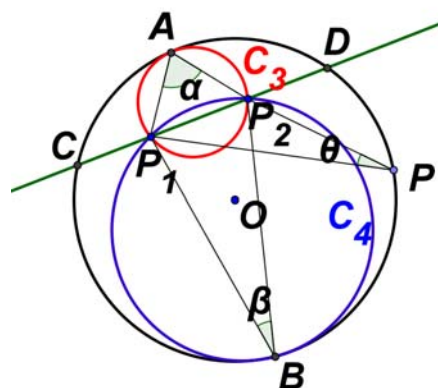
$\angle P_1CP_2 = \angle P_1DP_2 = 180^\circ$  為最大的角。  
而過  $P_1$ 、 $P_2$  作兩內切圓  $C_1$ 、 $C_2$  和圓  $O$  相切，設切點分別為  $A$ 、 $B$ ，  
若圓  $C_2$  較小，則  $\angle P_1BP_2$  為最小的角。



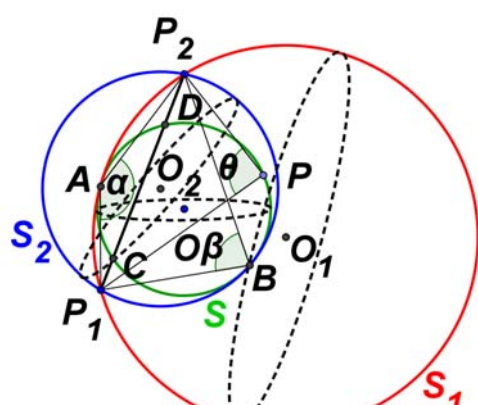
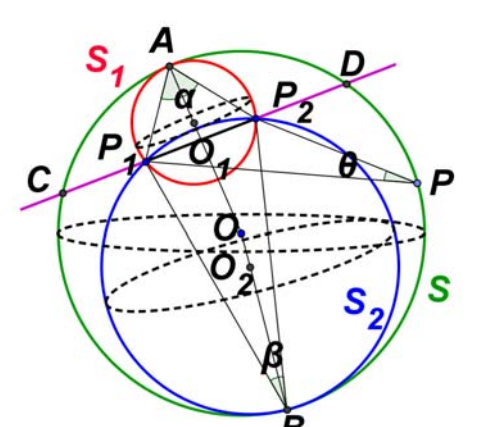
十二、已知  $P_1$  及  $P_2$  在圓  $O$  的內部，求圓  $O$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle P_1PP_2$  為最大的角。

【解】

過  $P_1$ 、 $P_2$  作兩內切圓  $C_3$ 、 $C_4$  和圓  $O$  相切，設切點分別為  $A$ 、 $B$ ，  
若圓  $C_3$  較小，則  $\angle P_1AP_2$  為最大的角。  
而  $\angle P_1CP_2 = \angle P_1DP_2 = 0^\circ$  為最小的角。



|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <p>十三、已知<math>P_1</math>及<math>P_2</math>在球面<math>S</math>的外部且直線<math>P_1P_2</math>和球面<math>S</math>不相交，求球面<math>S</math>上的一點<math>P</math>，使得<math>\angle P_1PP_2</math>為最大的角。</p> <p>【解】<br/> 過<math>P_1</math>、<math>P_2</math>作一外切球<math>S_1</math>和球面<math>S</math>相切，設切點為<math>A</math>，則<math>\angle P_1AP_2</math>為最大的角。<br/> 而過<math>P_1</math>、<math>P_2</math>作一內切球<math>S_2</math>和球面<math>S</math>相切，設切點為<math>B</math>，則<math>\angle P_1BP_2</math>為最小的角。</p>                                                                             |  |
| <p>十四、已知<math>P_1</math>及<math>P_2</math>在球面<math>S</math>的外部且直線<math>P_1P_2</math>和球面<math>S</math>相切於<math>B</math>點，<math>B</math>在線段<math>P_1P_2</math>外，求球面<math>S</math>上的一點<math>P</math>，使得<math>\angle P_1PP_2</math>為最大的角。</p> <p>【解】<br/> 過<math>P_1</math>、<math>P_2</math>作一外切球<math>S_1</math>和球面<math>S</math>相切，設切點為<math>A</math>，則<math>\angle P_1AP_2</math>為最大的角。<br/> 而<math>\angle P_1BP_2 = 0^\circ</math>為最小的角。</p>                                                                                                             |  |
| <p>十五、已知<math>P_1</math>及<math>P_2</math>在球面<math>S</math>的外部且直線<math>P_1P_2</math>和球面<math>S</math>相交<math>C</math>、<math>D</math>兩點，<math>C</math>、<math>D</math>在線段<math>P_1P_2</math>外，求球面<math>S</math>上的一點<math>P</math>，使得<math>\angle P_1PP_2</math>為最大的角。</p> <p>【解】<br/> 過<math>P_1</math>、<math>P_2</math>作兩外切球<math>S_1</math>、<math>S_2</math>和球面<math>S</math>相切，設切點分別為<math>A</math>、<math>B</math>，<br/> 若球<math>S_1</math>較小，則<math>\angle P_1AP_2</math>為最大的角。<br/> 而<math>\angle P_1CP_2 = \angle P_1DP_2 = 0^\circ</math>為最小的角。</p> |  |
| <p>十六、已知<math>P_1</math>及<math>P_2</math>在球面<math>S</math>的外部且直線<math>P_1P_2</math>和球面<math>S</math>相切於<math>A</math>點，<math>A</math>在線段<math>P_1P_2</math>內，求球面<math>S</math>上的一點<math>P</math>，使得<math>\angle P_1PP_2</math>為最大的角。</p> <p>【解】<br/> <math>\angle P_1AP_2 = 180^\circ</math>為最大的角。<br/> 而過<math>P_1</math>、<math>P_2</math>作一內切球<math>S_2</math>和球面<math>S</math>相切，設切點為<math>B</math>，則<math>\angle P_1BP_2</math>為最小的角。</p>                                                                                                           |  |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>十七、已知<math>P_1</math>及<math>P_2</math>在球面<math>S</math>的外部且直線<math>P_1P_2</math>和球面<math>S</math>相交<math>C</math>、<math>D</math>兩點，<math>C</math>、<math>D</math>在線段<math>P_1P_2</math>內，求球面<math>S</math>上的一點<math>P</math>，使得<math>\angle P_1PP_2</math>為最大的角。</p> <p>【解】<br/> <math>\angle P_1CP_2 = \angle P_1DP_2 = 180^\circ</math> 為最大的角。<br/> 而過<math>P_1</math>、<math>P_2</math>作兩內切球<math>S_1</math>、<math>S_2</math>和球面<math>S</math>相切，設切點分別為<math>A</math>、<math>B</math>，<br/> 若球<math>S_2</math>較小，則<math>\angle P_1BP_2</math>為最小的角。</p> |   |
| <p>十八、已知<math>P_1</math>及<math>P_2</math>在球面<math>S</math>的內部，求球面<math>S</math>上的一點<math>P</math>，使得<math>\angle P_1PP_2</math>為最大的角。</p> <p>【解】<br/> 過<math>P_1</math>、<math>P_2</math>作兩內切球<math>S_1</math>、<math>S_2</math>和球面<math>S</math>相切，設切點分別為<math>A</math>、<math>B</math>，<br/> 若球<math>S_1</math>較小，則<math>\angle P_1AP_2</math>為最大的角。<br/> 而<math>\angle P_1CP_2 = \angle P_1DP_2 = 0^\circ</math> 為最小的角。</p>                                                                                                                                |  |

## 陸、結論

### 一、直線 $P_1P_2$ 和 $P$ 點所在的圖形垂直：

(一)若 $P$ 點在直線 $L$ 上，則有兩點使 $\angle P_1PP_2$ 達到最大值，有一點使 $\angle P_1PP_2$ 達到最小值。

(二)若 $P$ 點在平面 $E$ 上，則有一圓上的點使 $\angle P_1PP_2$ 達到最大值，有一點使 $\angle P_1PP_2$ 達到最小值。

(三)若 $P$ 點在圓 $O$ 上：

- 1.當 $P_1$ 、 $P_2$ 在圓外同側時，則各有兩點使 $\angle P_1PP_2$ 達到最大和最小值。
- 2.當 $P_1$ 、 $P_2$ 在圓外異側時，則各有兩點使 $\angle P_1PP_2$ 達到最大和最小值。
- 3.當 $P_1$ 、 $P_2$ 在圓內時，則各有兩點使 $\angle P_1PP_2$ 達到最大和最小值。

(四)若 $P$ 點在球面 $S$ 上：

- 1.當 $P_1$ 、 $P_2$ 在球面外同側時，則有一圓上的點使 $\angle P_1PP_2$ 達到最大值，有兩點使 $\angle P_1PP_2$ 達到最小值。
- 2.當 $P_1$ 、 $P_2$ 在球面外異側時，則有兩點使 $\angle P_1PP_2$ 達到最大值，有一圓上的點使 $\angle P_1PP_2$ 達到最小值。

- 3.當  $P_1$ 、 $P_2$  在球面內時，則有一圓上的點使  $\angle P_1PP_2$  達到最大值，有兩點使  $\angle P_1PP_2$  達到最小值。

## 二、直線 $P_1P_2$ 和 $P$ 點所在的圖形不相交：

(一)若  $P$  點在直線  $L$  上，則有一點使  $\angle P_1PP_2$  達到最大值， $\angle P_1PP_2$  沒有最小值。

(二)若  $P$  點在平面  $E$  上，則有一點使  $\angle P_1PP_2$  達到最大值， $\angle P_1PP_2$  沒有最小值。

(三)若  $P$  點在圓  $O$  上，則各有一點使  $\angle P_1PP_2$  達到最大和最小值。

(四)若  $P$  點在球面  $S$  上，則各有一點使  $\angle P_1PP_2$  達到最大和最小值。

## 三、直線 $P_1P_2$ 和 $P$ 點所在的圖形相交但不垂直：

(一)若  $P$  點在直線  $L$  上，則各有一點使  $\angle P_1PP_2$  達到最大和最小值。

(二)若  $P$  點在平面  $E$  上，則各有一點使  $\angle P_1PP_2$  達到最大和最小值。

(三)若  $P$  點在圓  $O$  上：

- 1.當  $P_1$ 、 $P_2$  在圓外同側，直線  $P_1P_2$  和圓  $O$  相切時，則各有一點使  $\angle P_1PP_2$  達到最大和最小值。
- 2.當  $P_1$ 、 $P_2$  在圓外同側，直線  $P_1P_2$  和圓  $O$  相交兩點時，則有一點使  $\angle P_1PP_2$  達到最大值，有兩點使  $\angle P_1PP_2$  達到最小值。
- 3.當  $P_1$ 、 $P_2$  在圓外異側，直線  $P_1P_2$  和圓  $O$  相切時，則各有一點使  $\angle P_1PP_2$  達到最大和最小值。
- 4.當  $P_1$ 、 $P_2$  在圓外異側，直線  $P_1P_2$  和圓  $O$  相交兩點時，則有兩點使  $\angle P_1PP_2$  達到最大值，有一點使  $\angle P_1PP_2$  達到最小值。
- 5.當  $P_1$ 、 $P_2$  在圓內，則有一點使  $\angle P_1PP_2$  達到最大值，有兩點使  $\angle P_1PP_2$  達到最小值。

(四)若  $P$  點在球面  $S$  上：

- 1.當  $P_1$ 、 $P_2$  在球面外同側，直線  $P_1P_2$  和球面  $S$  相切時，則各有一點使  $\angle P_1PP_2$  達到最大和最小值。
- 2.當  $P_1$ 、 $P_2$  在球面外同側，直線  $P_1P_2$  和球面  $S$  相交兩點時，則有一點使  $\angle P_1PP_2$  達到最大值，有兩點使  $\angle P_1PP_2$  達到最小值。
- 3.當  $P_1$ 、 $P_2$  在球面外異側，直線  $P_1P_2$  和球面  $S$  相切時，則各有一點使  $\angle P_1PP_2$  達到最大和最小值。
- 4.當  $P_1$ 、 $P_2$  在球面外異側，直線  $P_1P_2$  和球面  $S$  相交兩點時，則有兩點使  $\angle P_1PP_2$  達到最大值，有一點使  $\angle P_1PP_2$  達到最小值。
- 5.當  $P_1$ 、 $P_2$  在球面內，則有一點使  $\angle P_1PP_2$  達到最大值，有兩點使  $\angle P_1PP_2$  達到最小值。

## 柒、未來展望

1. 證明出  $P$  點所在的圖形爲三角形、四邊形、多邊形、拋物線、橢圓、雙曲線的情形。
2. 證明出  $P$  點所在的圖形爲四面體、六面體、多面體、拋物面、橢球面、雙曲面的情形。

## 捌、參考資料

1. 許志農主編，高中數學課本第一冊，初版，台北，龍騰文化事業股份有限公司，P14，99 年出版。
2. 許志農主編，高中數學課本第三冊，初版，台北，龍騰文化事業股份有限公司，P2~9、P32~38、P46~51、P 126~127、P182，99 年出版。
3. 許志農主編，高中數學課本第四冊，初版，台北，龍騰文化事業股份有限公司，P2~10、P70、P185、P216~217，99 年出版。
4. 黃衡之·潘建強著，在足球場上遇上 Regiomontanus，數學傳播 35 卷 3 期，中央研究院數學研究所，P39~45，100 年 9 月。
5. 左銓如·季素月著，反演變換，初等幾何研究，一版一刷，九章出版社，P156~170，87 年 5 月出版。

## 【評語】 040404

雷格蒙塔努斯問題起於十五世紀，它是說，已知直線  $AB$  和直線  $L$  垂直相交於  $O$  點，其中  $A$  和  $B$  在  $L$  的同一側，求  $L$  上的一點  $P$ ，使得  $\angle APB$  為最大的角。本文先給了此問題的作法，並給出兩種證明方法。由此開始，研究各種變型問題，例如，直線  $AB$  和直線  $L$  不垂直的變型、將直線  $L$  換成平面  $E$  的變型（分直線  $AB$  和平面  $E$  垂直和不垂直兩種）、將直線  $L$  換成圓的變型、將直線  $L$  換成球面的變型等等。本文亦用到反演變換。整體來說，這篇文章做了許多情況，雖然不是很困難的結論，確也花了不少精神。唯這麼多個案，是否可以有比較一致性的定理，可以涵蓋不同情況，寫出比較一般性的結果，作者可以考慮看看。