中華民國第 52 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040403

「0」「1」世界

學校名稱：基隆市立暖暖高級中學

作者：	指導老師：
高二 藍偉杰	蕭惠玲
高二 方柏崴	林如芊

關鍵詞：組合學

摘要

在一個$n\times n$的方格表中，每一格子填入數字 0 或 1，使得任意兩行和任意兩列相交的四個方格中，至少填入一個 0，試求可填入 1 的個數之最大值 (即$M(n)$)。研究方向主要是以排列組合的方法進行探討，並透過柯西不等式推導出$M(n)$的上界。在相同的限制條件下，推廣至任意的行數與列數所造的矩形方格表中，利用填入的 1 的技巧，及相關聯的數學通式，得出$M(m\times n)$之上、下界。

壹、研究動機

在進行數學學科能力競賽培訓時，練習的歷屆試題中，有個題目如下所述:『在一個13×13的方格表中，每一格子填入數字 0 或 1 的其中一個。假設任意兩行和任意兩列相交的四個方格中，至少要填入一個 0，那麼在此方格表內可以填入數字 1 的個數之最大值爲何？並證明你(妳)的答案。』【出處:九十八學年度高級中學數學能力競賽決賽-筆試(二)第三題】。

剛看到題目時，我們認爲這是個尋找規律的題目，於是利用畫圖的方式了解表格所形成的圖形、0 的個數及 1 的個數之間的關係，並嘗試找出數字擺放的規律性；另外進一步研究在$n\times n$或$m\times n$的方格狀態下，是否可以用通式表示出$M(n)$及$M(m\times n)$之範圍。

貳、 研究目的

一、給定$n\times n$或$m\times n$方格表中，欲使任意兩行和任意兩列相交的四格方格中，至少填入一個 0，在這樣的條件下，找出方格表內可以填入 1 的個數之最大值的範圍。

二、改變限制規則爲：欲使任意三行和任意三列相交的九格方格中，至少填入一個 0，在這樣的條件下，找出$n\times n$或$m\times n$方格表內可以填入 1 的個數之最大值的範圍。

參、研究設備及材料

紙、筆、電腦(EXCEL)

肆、研究過程及方法

一、比較「0」與「1」的擺放方法

(一) 以「0」爲主的擺放方式(如下圖 4-1、圖 4-2、圖 4-3、圖 4-4 所示)：

1. 3×3 方格

0		0
0		0

圖 4-1
1 的個數(非最大值)

0		
	0	
		0

圖 4-2
1 的個數(最大值)

2. 4×4 方格

0		0	
	0		0
0			0
	0	0	

圖 4-3
1 的個數(非最大值)

0	0		
0		0	
	0	0	
			0

圖 4-4
1 的個數(最大值)

(二) 以「1」爲主的擺放方式(如下圖 4-5、圖 4-6 所示)：

1. 3×3 方格

1	1	
1		1
	1	1

圖 4-5
1 的個數(最大值)

2. 4×4 方格

1	1		
1		1	
1			1
	1	1	1

圖 4-6
1 的個數(最大值)

(三) 小結

若擺放方式以「0」爲主，因對「0」的限制條件少，導致可能擺放的位置與情形變多，較容易擺放過多的「0」而無法達到「1」最多的情形。反觀若擺放方式以「1」爲主，較易檢驗限制條件，進而達到擺放最多「1」之目的。因此，之後在進行探討 $n\times n$ 的方格表或 $m\times n$ 的長方格表時，都是用擺放「1」的情形去討論。

二、進行實驗：

【定義 4.1】若 $n\times n$ 的方格中可以填入最多 1 的個數，記作 $M(n)$ 。

【定義 4.2】若 $m<n$ ，且在 $m\times n$ 的方格中可以填入最多 1 的個數，記作 $M(m,n)$ 。

(一) 在 $n\times n$ 的方格中，僅限制相鄰兩行及相鄰兩列相交的四個格子中至少填入 1 個 0 之情形

1. 當 n 爲偶數時，結果如下表 4-1 所示，

n	$M(n)$
2	$2^2-1^2=3$
4	$4^2-2^2=12$
6	$6^2-3^2=27$
⋮	⋮
$n=2k(k\in N)$	$(2k)^2-k^2=3k^2$

表 4-1

【實驗結果】:

(1)當 $\boldsymbol{n}=2$ 時，如圖 4-7 所示， $\boldsymbol{M}(2)=3$

1	1
1	0

圖 4-7

當 $\boldsymbol{n}=4$ 時，如圖 4-8 所示， $\boldsymbol{M}(4)=12$

1	1	1	1
1	0	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

圖 4-8

當 $\boldsymbol{n}=6$ 時，如圖 4-9 所示， $\boldsymbol{M}(6)=27$

1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0

圖 4-9

(2)【證明】：利用數學歸納法

當 $\boldsymbol{k}=1,\boldsymbol{n}=2$ 時， $\boldsymbol{M}(2)=2^2-1^2=3$ 成立

設 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{t},\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{t}$ ，t∈ N 時， $\boldsymbol{M}(2\boldsymbol{t})=(2\boldsymbol{t})^2-\boldsymbol{t}^2=3\boldsymbol{t}^2$ 成立

則當 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{t}+1,\boldsymbol{n}=2(\boldsymbol{t}+1)$ ，t∈ N 時， $\boldsymbol{M}(2(\boldsymbol{t}+1))=(2(\boldsymbol{t}+1))^2-(\boldsymbol{t}+1)^2$

$=\left(2\boldsymbol{t}\right)^2-\boldsymbol{t}^2+8\boldsymbol{t}+4-2\boldsymbol{t}-1=3\boldsymbol{t}^2+6\boldsymbol{t}+3=3(\boldsymbol{t}+1)^2$ 亦成立，

故根據以上數學歸納法得知： $\forall\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{N},\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{k},\boldsymbol{M}(\boldsymbol{n})=(2\boldsymbol{k})^2-\boldsymbol{k}^2=3\boldsymbol{k}^2$ 恆成立 □

2. 當 $\boldsymbol{n}$ 爲奇數時，結果如下表 4-2 所示，

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{n})$
3	$3^2-1^2=8$
5	$5^2-2^2=21$
7	$7^2-3^2=40$
⋮	⋮
$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{k}+1(\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{N})$	$(2\boldsymbol{k}+1)^2-\boldsymbol{k}^2=3\boldsymbol{k}^2+4\boldsymbol{k}+1$

表 4-2

【實驗結果】:

(1) 當 $n=3$ 時，如圖 4-10 所示， $M(3)=8$

1	1	1
1	0	1
1	1	1

圖 4-10

當 $n=5$ 時，如圖 4-11 所示， $M(5)=21$

1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

圖 4-11

當 $n=7$ 時，如圖 4-12 所示， $M(7)=40$

1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1

圖 4-12

(2) 利用數學歸納法證明

當 $k=1, n=3$ 時， $M(3)=3^2-1^2=8$ 成立

設 $k=t, n=2t+1$ ，t∈ N 時， $M(2t+1)=(2t+1)^2-t^2=3t^2+4t+1$ 成立

則當 $k=t+1, n=2(t+1)+1$ 時， $M(2(t+1)+1)=(2(t+1)+1)^2-(t+1)^2$

$=4t^2-t^2+12t+9-2t-1=\left(2t+1\right)^2-t^2+6t+7=3t^2+4t+1+6t+7$

$=3t^2+6t+3+4t+4+1=3(t+1)^2+4(t+1)+1$ 亦成立，

故根據以上數學歸納法得知：

$\forall k\in N, n=2k+1, M(n)=(2k+1)^2-k^2=3k^2+4k+1$ 恆成立 □

(二) 在 $n\times n$ 的方格中，任意兩行和任意兩列相交的四個格子中至少填入 1 個 0 之情形

1. 進行實驗：詳細擺放圖例及表格請見附錄。

2. $n\times n$的方格中$M(n)$的範圍

設$n\times n$的方格中，第i行擺放d_i個 1，所以$M(n)=d_1+d_2+\cdots+d_n$。若在某行中有 2 個 1，則在其餘每行中都不能再有 2 個 1 與前 2 個 1 分別在同列，如圖 4-13 所示。

1	1	0	0	0
1	0	1	1	0
1	0	0	0	1
0	1	1	0	0
0	1	0	1	1

圖 4-13
在第一行第一、二列出現過的 1，在其他行將不會重複出現在第一、二列。

由於每行有n個方格，且某行出現過的 2 個 1 不會重複在另一行，故最多只會產生C_2^n組 1。即$C_2^{d_1}+C_2^{d_2}+\cdots+C_2^{d_n}\le C_2^n$。

(1) 定理 4.1

在$n\times n$的方格中，第i行擺放d_i個 1，則$M(n)=d_1+d_2+\cdots+d_n\le\dfrac{n(1+\sqrt{4n-3})}{2}$

【證明】：

設$M(n)=d_1+d_2+\cdots+d_n$，且$C_2^{d_1}+C_2^{d_2}+\cdots+C_2^{d_n}\le C_2^n$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i(d_i-1)}{2}\le\frac{n(n-1)}{2}$$

展開可得$d_1(d_1-1)+d_2(d_2-1)+\cdots+d_n(d_n-1)\le n(n-1)$

$$\Rightarrow\left(d_1^2+d_2^2+\cdots+d_n^2\right)-(d_1+d_2+\cdots+d_n)\le n^2-n$$

$$\Rightarrow\left(d_1^2+d_2^2+\cdots+d_n^2\right)\le n^2-n+M(n)$$

利用柯西不等式可得

$$(d_1+d_2+\cdots+d_n)^2\le\left(d_1^2+d_2^2+\cdots+d_n^2\right)(\underbrace{1^2+1^2+\cdots+1^2}_{n})$$

$$\left(d_1^2+d_2^2+\cdots+d_n^2\right)(\underbrace{1^2+1^2+\cdots+1^2}_{n})\le(n^2-n+M(n))(\underbrace{1^2+1^2+\cdots+1^2}_{n})$$

$$\Rightarrow(M(n))^2\le n\times\left(d_1^2+d_2^2+\cdots+d_n^2\right)\le n(n^2-n+M(n))$$

$$\Rightarrow(M(n))^2\le n^3-n^2+nM(n)$$

$$\Rightarrow(M(n))^2-nM(n)-(n^3-n^2)\le 0$$

$$\Rightarrow-\frac{n(1+\sqrt{4n-3})}{2}\le M(n)\le\frac{n(1+\sqrt{4n-3})}{2}$$

$\because M(n)>0$

$$\therefore 0<M(n)\le\frac{n(1+\sqrt{4n-3})}{2}$$

(2) 定理 4.2

在$n\times n$的方格中，若$n=k^2-k+1(k\in N)$，此時每行可平均擺放k個 1，則$M(n)=\frac{n(1+\sqrt{4n-3})}{2}=nk$。

【證明】：

(i)由柯西不等式可知，當等號成立時$\Leftrightarrow (d_1,d_2,\cdots,d_n)=t(1,1,\cdots,1)$，

因此在每行均分的情形，可得到$M(n)=\frac{n(1+\sqrt{4n-3})}{2}$。

(ii)將$n=k^2-k+1$代入$M(n)=\frac{n(1+\sqrt{4n-3})}{2}$

$$\Rightarrow M(n)=\frac{n\left[1+\sqrt{4(k^2-k+1)-3}\right]}{2}=\frac{n[1+(2k-1)]}{2}=\frac{n(2k)}{2}=nk$$

根據以上可知，當$n=k^2-k+1(k\in N)$且每行擺放k個 1 時，可得最大值 □

(3) 如何求$n\neq k^2-k+1$的$M(n)$範圍

若$n\neq k^2-k+1$，且$(k-1)^2-(k-1)+1<n<k^2-k+1$的一般情形，則$M(n)$的上界爲$\left[\frac{n(1+\sqrt{4n-3})}{2}\right]$；但$M(n)$的下界可利用$M(k^2-k+1)$求得，說明如下：

【說明】：

爲令此說明更爲簡潔，將設$p=(k-1)^2-(k-1)+1$，$q=k^2-k+1$，且$p<n<q$。可利用$M(q)$扣除$(q-n)$行及$(q-n)$列，即可得到$n\times n$的方格，如下圖 4-14 所示。

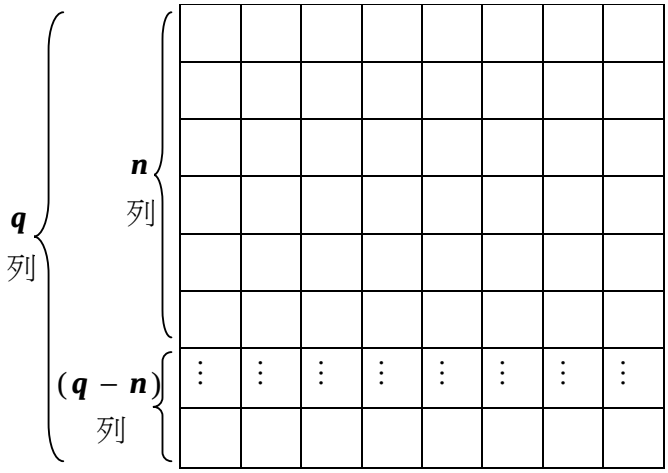


圖 4-14

欲使$M(n)$值最大，則需令欲扣除$(q-n)$行及$(q-n)$列中的 1 個數最少。又因$(q-n)$行及$(q-n)$列會交集$(q-n)\times(q-n)$個方格，這些交集的方格中 1 的個數會介於$[0,M(q-n)]$的區間內，當交集方格內的 1 之個數愈多，則需扣除$(q-n)$行及

$(q-n)$列中的 1 個數才會達到最少。

因此，在$q\times q$的方格表中，每行(列)平均擺放k個 1，$(q-n)$行及$(q-n)$列中至多可擺放$M(q-n)$個 1，故得出式 4.1

$$M(n)\geq M(q)-(2k(q-n)-M(q-n))\cdots\cdots\cdots(式4.1)$$

以$M(14)\sim M(20)$爲例：

當$k=4, n=4^2-4+1=13$，$k=5, n=5^2-5+1=21$，所以當$13<n<21$，利用21×21的方格扣除適當的行數及列數，則可得所求，結果如下表 4-3 所示。

k	n	$M(n)$的下界值
4	13	52
	14	$56=M(21)-(2\times(21-14)\times 5-M(7))=105-(70-21)$
	15	$61=M(21)-(2\times(21-15)\times 5-M(6))=105-(60-16)$
	16	$67=M(21)-(2\times(21-16)\times 5-M(5))=105-(50-12)$
	17	$74=M(21)-(2\times(21-17)\times 5-M(4))=105-(40-9)$
	18	$81=M(21)-(2\times(21-18)\times 5-M(3))=105-(30-6)$
	19	$88=M(21)-(2\times(21-19)\times 5-M(2))=105-(20-3)$
	20	$96=M(21)-(2\times(21-20)\times 5-M(1))=105-(10-1)$
5	21	105

表 4-3

3. $n\times n$的方格中最多 1 的擺放方式，並證明之

(1) 當$n=k^2-k+1$時，根據柯西不等式中等號成立的原則，每行擺放k個 1 時，會產生最大值$M(n)=nk$，以$n=13, M(13)=4\times 13=52$說明之。

1	1	1	1									
1				1	1	1						
1							1	1	1			
1										1	1	1
	1			1			1			1		
	1				1			1			1	
	1					1			1			1
		1		1					1		1	
		1			1		1					1
		1				1		1		1		
			1	1				1				1
			1		1				1	1		
			1			1	1				1	

圖 4-15

【證明】:

假設 $\boldsymbol{M}(13)=52$ ，不失一般性，將多出的 1 擺放至第一行，

則 $\boldsymbol{C}_2^5+12\times\boldsymbol{C}_2^4=82\geq\boldsymbol{C}_2^{13}$ 產生矛盾，因此 $\boldsymbol{M}(13)=52$ □

(2) 當 $\boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{k}^2-\boldsymbol{k}+1$ 時，利用式 4.1 計算可得 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{n})$ 之範圍，以9×9及14×14的方格爲例。

(a) 9×9方格

利用13×13的方格，扣除其中 1 個數最少之 4 行、4 列，可得 $\boldsymbol{M}(9)=29$ ，如下圖 4-16 所示，並證明 $\boldsymbol{M}(9)=29$ 爲真。

1				1			1	
1		1			1			
1			1			1		1
	1					1		1
	1	1		1				
	1		1		1		1	
		1				1	1	
			1	1				1
				1	1	1		

圖 4-16

$\boldsymbol{M}(9)=3\times7+2\times4=29$

組合數計算如下：

$\boldsymbol{C}_2^3+\boldsymbol{C}_2^3+\boldsymbol{C}_2^3+\boldsymbol{C}_2^4+\boldsymbol{C}_2^3+\boldsymbol{C}_2^4+\boldsymbol{C}_2^3+\boldsymbol{C}_2^3\leq\boldsymbol{C}_2^9$

【證明】:

假設 $\boldsymbol{M}(9)=30$ ，

(i)若多出的 1 置入 1 個數爲 4 之行，則檢驗

$7\times\boldsymbol{C}_2^3+\boldsymbol{C}_2^4+\boldsymbol{C}_2^5=37>\boldsymbol{C}_2^9=36$ ，超出可容納之組合數，故不合。

(ii)若多出的 1 置入 1 個數只有 3 之行，先檢驗 $6\times\boldsymbol{C}_2^3+3\times\boldsymbol{C}_2^4=36=\boldsymbol{C}_2^9$ ，符合可容納之組合數，但無法依規定擺入 6 行 3 個 1 及 3 行 4 個 1，如下圖 4-17 所示

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	1		1						
2	1								
3	1								
4	1	1							
5	×	1	1						
6		1							
7		1							
8			1						
9			1						

圖 4-17

不失一般性，將兩行 4 個 1 的部分先置於第 A、B 行，當重複第 4 列(即紅色框線所圍之列)時，剩下的空間可以擺放較多的 1。若想在Ｃ行中置放 4 個 1，僅能在 C1、C2、C3 任選一個方格放置 1，同理在 C5、C6、C7 亦是如此，最後 2 個 1 就置放於 C8、C9。接下來的六行(D~I)內至多只能擺放 4 行 3 個 1。故 $\boldsymbol{M}(9)=29$ 得證。 □

(b)14×14 方格

利用 21×21的方格，扣除其中 1 個數最少之 7 行、7 列，可得 $\boldsymbol{M}(14)=56$ ，如下圖 4-18 所示，並證明 $\boldsymbol{M}(14)=56$ 爲真。

1	**1**	**1**	**1**										
1				**1**	**1**	**1**							
1							**1**	**1**	**1**				
1										**1**	**1**	**1**	
	1			**1**			**1**			**1**			
	1				**1**			**1**			**1**		
	1					**1**						**1**	**1**
		1		**1**				**1**				**1**	
		1			**1**		**1**						**1**
		1				**1**			**1**	**1**			
			1		**1**				**1**			**1**	
			1			**1**	**1**				**1**		
			1					**1**		**1**			**1**
				1					**1**		**1**		**1**

圖 4-18

【證明】:

假設 $\boldsymbol{M}(14)=57$ ，若多出的 1 置入其中一行，先檢驗

$\boldsymbol{C}_2^5+12\times\boldsymbol{C}_2^4=82<\boldsymbol{C}_2^{14}=91$ ，符合可容納之組合數。利用與9×9相同的方式可知在14×14的方格中無法依規定擺入 1 行 5 個 1 及 13 行 4 個 1，如下圖 4-19 所示。

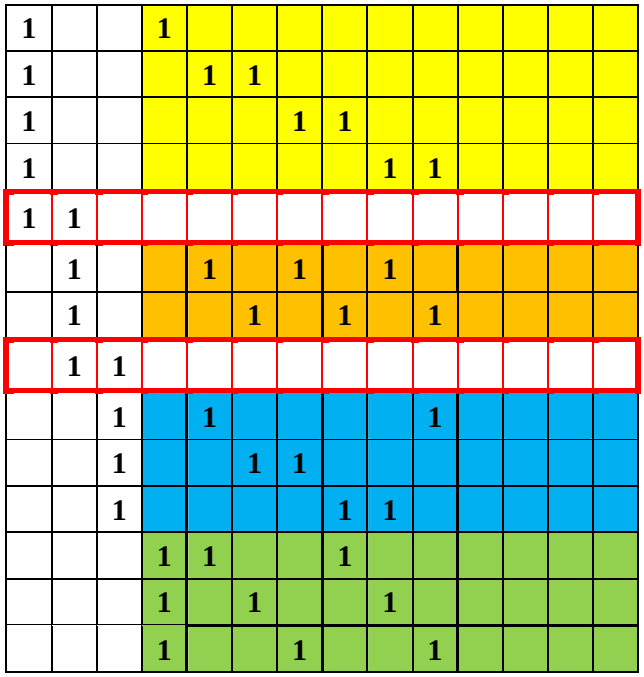


圖 4-19

故 $\boldsymbol{M}(14)=56$ 得證。 □

(三) 在 $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$($\boldsymbol{m}$ 爲列數、$\boldsymbol{n}$ 爲行數且 $\boldsymbol{m}<\boldsymbol{n}$)方格中，任意兩行及任意兩列相交的四個格子中至少填入 1 個 0 之情形

1. 當 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{C}_2^{\boldsymbol{m}}$ 時

(1) 實驗

(a)當 $\boldsymbol{m}=4$ 則 $\boldsymbol{n}=6$ ， $\boldsymbol{M}(4,6)=12$ ，擺放情形如下圖 4-20 所示。

1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1

圖 4-20

(b)當 $\boldsymbol{m}=5$ 則 $\boldsymbol{n}=10$ ， $\boldsymbol{M}(5,10)=20$ ，擺放情形如下圖 4-21 所示。

1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1		0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	1	0	1	1

圖 4-21

(c)當 $m=6$則 $n=15$， $M(6,15)=30$ ，擺放情形如下圖 4-22 所示。

1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1

圖 4-22

(2) 討論

令d_k爲第k行出現1的個數，則第k行中每兩個1一組，共有$C_2^{d_k}=\frac{1}{2}d_k(d_k-1)$組。

∵某行中出現兩個1的一組在其他行不會再出現同位置的一組。

∴最多只能填入C_2^m組。

$$\Rightarrow C_2^{d_1}+C_2^{d_2}+C_2^{d_3}+\cdots+C_2^{d_{C_2^m}}\le C_2^m$$

$$\Rightarrow d_1(d_1-1)+d_2(d_2-1)+d_3(d_3-1)+\cdots+d_{C_2^m}\left(d_{C_2^m}-1\right)\le m(m-1)$$

$$\Rightarrow d_1^2+d_2^2+d_3^2+\cdots+d_{C_2^m}^2-\left(d_1+d_2+d_3+\cdots+d_{C_2^m}\right)\le m(m-1)$$

$$\left(令M(m,n)=d_1+d_2+d_3+\cdots+d_{C_2^m}\right)$$

$$\Rightarrow d_1^2+d_2^2+d_3^2+\cdots+d_{C_2^m}^2-M(m,n)\le m(m-1)$$

$$\Rightarrow d_1^2+d_2^2+d_3^2+\cdots+d_{C_2^m}^2\le m(m-1)+M(m,n)$$

$$\Rightarrow\left(d_1^2+d_2^2+d_3^2+\cdots+d_{C_2^m}^2\right)\underbrace{\left(1^2+1^2+1^2+\cdots+1^2\right)}_{C_2^m個}\le\left[m(m-1)+M(m,n)\right]\underbrace{\left(1^2+1^2+1^2+\cdots+1^2\right)}_{C_2^m個}$$

根據柯西不等式

$$\left(d_1+d_2+d_3+\cdots+d_{C_2^m}\right)^2\le\left(d_1^2+d_2^2+d_3^2+\cdots+d_{C_2^m}^2\right)\underbrace{\left(1^2+1^2+1^2+\cdots+1^2\right)}_{C_2^m個}$$

$$\le\left[m(m-1)+M(m,n)\right]\underbrace{\left(1^2+1^2+1^2+\cdots+1^2\right)}_{C_2^m個}$$

$$\Rightarrow(M(m,n))^2\le\left[m(m-1)+M(m,n)\right]C_2^m$$

$$\Rightarrow 2(M(m,n))^2-m(m-1)M(m,n)-m^2(m-1)^2\le 0$$

$$\Rightarrow\frac{m(m-1)-3m(m-1)}{4}\le M(m,n)\le\frac{m(m-1)+3m(m-1)}{4}$$

∵$M(m,n)$是所求的極大值∴負不合

$$\Rightarrow M(m,n)\le m(m-1)=2C_2^m$$

故當$n=C_2^m$時， 1的個數之最大值爲$2C_2^m$ 。

2. 當 $n > C_2^m$ 時

(1) 實驗

(a)當 m=2 則 n=2， $M(2,2)=3$ ，擺放情形如下圖 4-23 所示。

1	1
1	

圖 4-23

(b)當 m=3 則 n=4， $M(3,4)=7$ ，擺放情形如下圖 4-24 所示。

1	1		1
1		1	
	1	1	

圖 4-24

(c)當 m=6 則 n=16， $M(6,16)=31$ ，擺放情形如下圖 4-25 所示。

1	1	1	1	1											1
1					1	1	1	1							
	1				1				1	1	1				
		1				1			1			1	1		
			1				1			1		1		1	
				1				1			1		1	1	

圖 4-25

(2) 討論

令 d_k 爲第 k 行出現1的個數，則第 k 行中每兩個1一組，共有 $C_2^{d_k}=\frac{1}{2}d_k(d_k-1)$ 組。

∵某行中出現兩個1的一組在其他行不會再出現同位置的一組。

∴最多只能填入 C_2^m 組。

由當 $n=C_2^m$ 的結論可推得 $n>C_2^m$ 時，所以第 C_2^m+1 行到第 n 行，每行都只能填入1個1，

因此可推出，$M(m,n)$ 爲 $2C_2^m+1\times\left(n-C_2^m\right)=C_2^m+n$

故當 $n>C_2^m$ 時，$M(m,n)=C_2^m+n$ 。

3. 當 $m+1\le n<C_2^m$ 時

利用 $n\times n$ 的 $M(n)$ 扣除選取 $(n-m)$ 行中所佔1的個數最少之情形，即可得 $M(m,n)$。

以8×9矩形(圖 4-26)爲例：

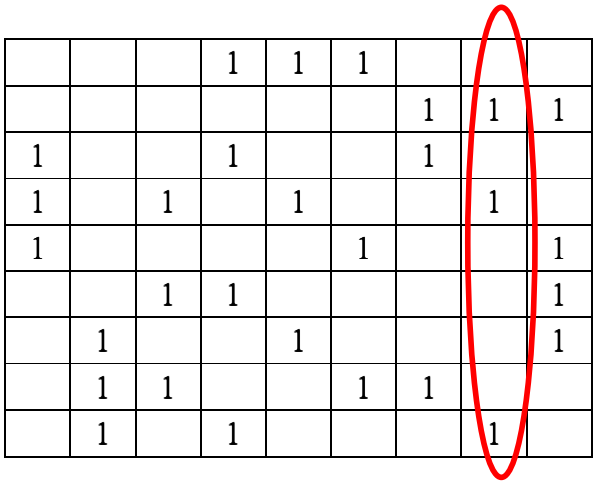


圖 4-26

$$M(8,9)=M(9)-3=26$$

(四) 改變規則——在$n\times n$方格，相鄰三行和相鄰三列相交的九個格子中至少填入 1 個 0 之情形

1.結果如下表 4-4 所示

k	n	$M(n)$	k	n	$M(n)$	k	n	$M(n)$
1	3	8	1	4	15	1	5	24
2	6	32	2	7	45	2	8	60
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
k	$3k$	$(3k)^2-k^2$ $=8k^2\cdots<1>$	k	$3k+1$	$(3k+1)^2-k^2$ $=8k^2+6k+1\cdots<2>$	k	$3k+2$	$(3k+2)^2-k^2$ $=8k^2+12k+4\cdots<3>$

表 4-4

【證明】:

不失一般性，我們僅證明$n=3k$

當$k=1$，$n=3$時，$M(3)=3^2-1^2=8\times1^2$，成立

設$k=t$，$n=3t$，$t\in N$時，$M(3t)=(3t)^2-t^2=8t^2$，成立

則當$k=t+1$，$n=3(t+1)$，$t\in N$時，

$M(3(t+1))=(3(t+1))^2-(t+1)^2=(3t)^2-t^2+18t+9-2t-1$

$=8t^2+16t+8=8(t+1)^2$，亦成立，

故根據以上數學歸納法得知:$\forall k\in N$時，原式皆成立

$n=3k+1$和$n=3k+2$同理可證 □

(五) 在$n\times n$方格，任意三行和任意三列相交的九個格子中至少填入 1 個 0 之情形

1. 實驗

(1) 當$n=3$時，$M(3)=8$擺放情形如下圖 4-27 所示

1	1	1
1	1	1
1	1	0

圖 4-27

(2) 當 $n=4$ 時，$M(4)=13$ 擺放情形如下圖 4-28 所示

1	1	1	1
1	1	1	0
1	0	1	1
0	1	1	1

圖 4-28

(3) 當 $n=5$ 時，$M(5)=20$ 擺放情形如下圖 4-29 所示

1	1	1	1	0
1	1	1	0	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1

圖 4-29

(4) 當 $n=6$ 時，$M(6)=26$ 擺放情形如下圖 4-30 所示

1	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1

圖 4-30

2. 討論

由前面的圖形中數字 1 的擺放方式，由於任意三行和任意三列相交的九個格子中至少填入 1 個 0 之規則下，同一行中任意 3 個 1 至多可重複兩次，如下圖 4-31 所示：

1	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1

圖 4-31

因此我們利用5×5的方格表中作了以下的討論：

(1) 在黃色區塊(L 型區塊)的交會處(紅色粗線區塊)，皆擺放 1 時，會造成 $(5-2)\times(5-2)$的方格表(藍色區塊)中，都只能擺放「0」。在，我們發現了以下的排法。如圖 4-32 所示

1	1	0	0	0
1	1	0	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

圖 4-32

(2) 黃色區塊(L 型區塊)的交會處(紅色粗線區塊)，任一方格擺放 0，其餘皆擺放 1 時，會造成$(5-2)\times(5-2)$的方格表(藍色區塊)中，每列最多只能擺放 1 個「1」。如圖 4-33 所示

1	1	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

圖 4-33

(3) 黃色區塊(L 型區塊)的交會處(紅色粗線區塊)，任意一行或一列皆擺放 0 時，會造成$(5-2)\times(5-2)$的方格表(藍色區塊)中，每列最多只能擺放 1 個「1」。如圖 4-34 所示

1	1	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	0	0	1
0	0	1	1	1
1	1	1	1	1

圖 4-34

(4) 黃色區塊(L 型區塊)的交會處(紅色粗線區塊)，對角線的兩個方格皆擺放 0 時，

會造成$(5-2)\times(5-2)$的方格表(藍色區塊)中，每列最多只能擺放 2 個「1」。如圖 4-35 所示

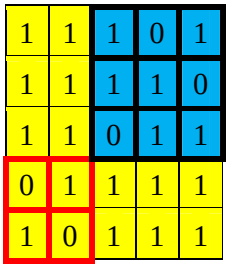


圖 4-35

(5) 黃色區塊(L 型區塊)的交會處(紅色粗線區塊)，皆擺放 0 時，會造成$(5-2)\times(5-2)$的方格表(藍色區塊)中，每列最多只能擺放 2 個「1」。如圖 4-36 所示

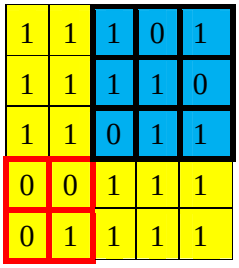


圖 4-36

(6) 黃色區塊(L 型區塊)的交會處(紅色粗線區塊)，任三個方格擺放 0 時，會造成$(5-2)\times(5-2)$的方格表(藍色區塊)中，每列最多只能擺放 2 個「1」。如圖 4-37 所示

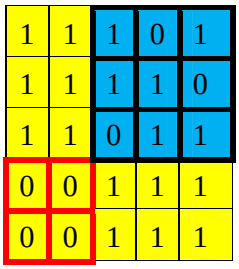


圖 4-37

3.結論:

從這六種情形來分析，我們發現(4)的擺法能置放最多的「1」，因爲限制了重複的部分，根據先前的經驗，須檢驗 $\boldsymbol{n}$ 在何種範圍內會滿足此種放法(即組合數小於等於$2\boldsymbol{C}_2^{\boldsymbol{n}}$)。

【說明】:

$$2C_3^{n-1}+(n-2)C_3^4 \le 2C_3^n$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}+4(n-2) \le \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)(n-3)}{3}+4 \le \frac{n(n-1)}{3}$$

$$\Rightarrow (n-1)(n-3)+12 \le n(n-1)$$

$$\Rightarrow n \ge 5$$

故當n ≥ 5時，1 的個數之最大值爲6n −10

$\therefore M(n)=4(n-2)+2+2(n-2)=6n-10\ (n \ge 5)$ □

(六) 推廣在 $m \times n$ 方格中，任意三行和任意三列相交的九個格子中至少填入 1 個 0 之情形

1. 實驗

(1) 當 $m=3$ 時，擺放情形如下圖 4-38 所示

1	1	1	1	…	1
1	1	1	1	…	1
1	1	0	0	…	0

圖 4-38

(2) 當 $m=4$ 時，擺放情形如下圖 4-39 所示

1	1	1	1	0	0	…	0
1	1	1	0	1	0	…	0
1	0	1	1	1	1	…	1
0	1	1	1	1	1	…	1

圖 4-39

(3) 當 $m=5$ 時，擺放情形如下圖 4-40 所示

1	1	1	1	0	0	…	0
1	1	1	0	1	0	…	0
1	1	0	1	1	0	…	0
1	0	1	1	1	1	…	1
0	1	1	1	1	1	…	1

圖 4-40

(4) 當 $m=6$ 時，擺放情形如下圖 4-41 所示

1	1	1	0	1	0	0	…	0
1	1	1	0	0	1	0	…	0
1	1	0	1	0	1	0	…	0
1	1	0	1	1	0	0	…	0
1	0	1	1	1	1	1	…	1
0	1	1	1	1	1	1	…	1

圖 4-41

2. 討論

若要將$n\times n$推廣到$m\times n$，從圖形可以知道，僅在4×4時，擺放方式會有不同於其他幾組的變化，3×3方格中因爲只有1個0，所以向外延伸一行，只要加1個0，即可符合規則，所以每擴一行最大值會增加2，即$M(3,n+1)=M(3,n)+2$。

但在4×4方格中，用去左下的L型後剩下的4格並未用完全部的排列數，所以當它擴成4×5矩形時，最大值會增加3(如圖4-39)

$M(4,5)=M(4)+3=13+3=16$；若$n\geq 5$時，最大值僅會增加2，即

$M(4,n+1)=M(4,n)+2$。

至於由$n\geq 5$的方形外擴成矩形時，最大值則是規律的增加2，是由於原來的$n\times n$方格中排列數已經排盡，所以擴充的每行中最多只能增加2個1，所以其最大值規律皆是加2。

3. 結論

在$m\times n$ $(m\leq n)$方格中，任意三行和任意三列相交的九個格子中至少填入1個0之情形，可利用$n\times n$的方格向外擴展1行，當$n\geq 3$時，每增加1行，$M(m,n)$會增加2；惟4×5矩形與4×4方格在外擴1行時，$M(m,n)$會增加3。

伍、研究結果

一、 在$n\times n$的方格中，相鄰兩行和相鄰兩列相交的四個格子中至少填入1個0之情形：

1. 當$n=2k(k\in N)$時，$M(n)=3k^2$
2. 當$n=2k+1(k\in N)$時，$M(n)=3k^2+4k+1$。

二、 在$n\times n$的方格中，任意兩行和任意兩列相交的四個格子中至少填入1個0之情形：

$M(n)$的上界爲$\left[\dfrac{n\left(1+\sqrt{4n-3}\right)}{2}\right]$

1. 當$n=k^2-k+1$時，$M(n)=\dfrac{n\left(1+\sqrt{4n-3}\right)}{2}$
2. 當$n\neq k^2-k+1$時，需利用上式特殊情形去扣除求出所需的$M(n)$之下界。

三、 在$m\times n$(m為列數、n為行數且$m<n$)的矩形中，任意兩行和任意兩列相交的四個格子中至少填入 1 個 0 之情形：

1. 當$n=C_2^m$時， $M(m,n)=2C_2^m$

2. 當$n>C_2^m$時， $M(m,n)=C_2^m+n$

3. 當$m+1\le n<C_2^m$，利用$n\times n$的$M(n)$扣除選取$(n-m)$行中所佔 1 的個數最少之情形，即可得$M(m,n)$。

四、在$n\times n$的方格中，相鄰三行和相鄰三列相交的九個格子中至少填入 1 個 0 之情形：

1. 當$n=3k(k\in N)$時， $M(n)=9k^2$
2. 當$n=3k+1(k\in N)$時， $M(n)=8k^2+6k+1$
3. 當$n=3k+2(k\in N)$時， $M(n)=8k^2+12k+4$

五、在$n\times n$的方格中，任意三行和任意三列相交的九個格子中至少填入 1 個 0 之情形：

1. 當$n=3$時， $M(n)=8$
2. 當$n=4$時， $M(n)=13$
3. 當$n\ge 5$時， $M(n)=6n-10$

六、在$m\times n$(m為列數、n為行數且$m<n$)的矩形中，任意三行和任意三列相交的九個格子中至少填入 1 個 0 之情形：

除列數為 4 外，從4×4向外擴展成4×5時，$M(4,5)$比$M(4)$多 3，其餘情形皆由$n\times n$自外擴充一行時，最大值會增加 2。

陸、未來展望

一、了解在$n\times n$或$m\times n$的方格表中，每一格子填入數字 0 或 1 的其中一個。欲使任意k行和任意k列相交的k^2格方格中，至少填入一個 0，在這樣的條件下，找出方格表內可以填入 1 的個數之最大值的通式。如圖 6-1、圖 6-2 所示

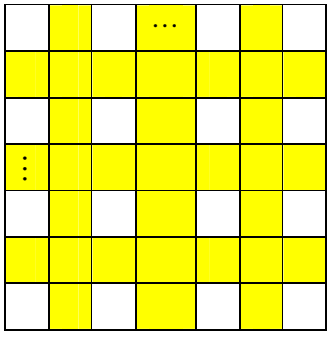


圖 6-1

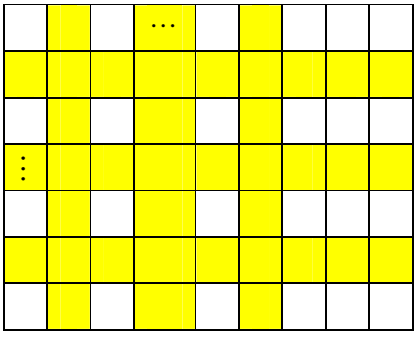


圖 6-2

二、了解在$n\times n$或$m\times n$的方格表中，每一格子填入數字 0 或 1 的其中一個。欲使任意a行和任意b列相交的$a\times b$格方格中，至少填入一個 0，在這樣的條件下，找出方格表內可以填入 1 的個數之最大值的通式。如圖 6-3 所示

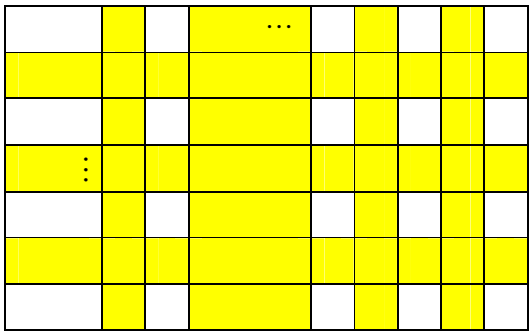


圖 6-3

柒、參考資料

一、九十八學年度高級中學數學能力競賽決賽-筆試(二)第三題。

二、李成章(民 95)。紅點問題的解法和新進展。中等數學。7，16-20。

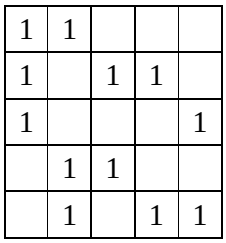
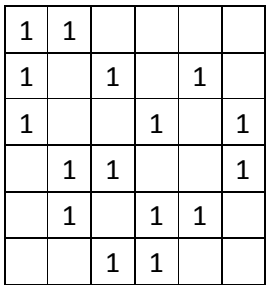
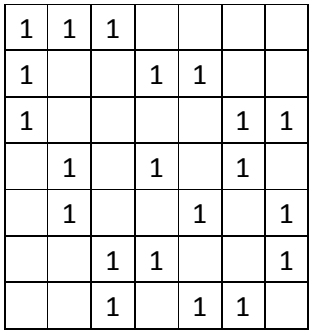
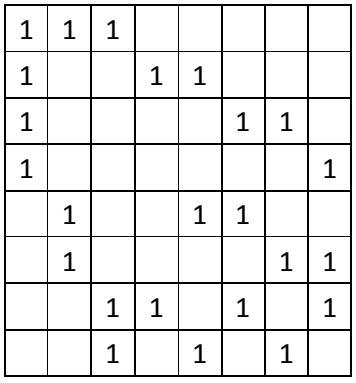
三、李佳晉(民 101)。點到"圍"止-矩形方格染色的探討。丘成桐中學數學獎得獎作品。

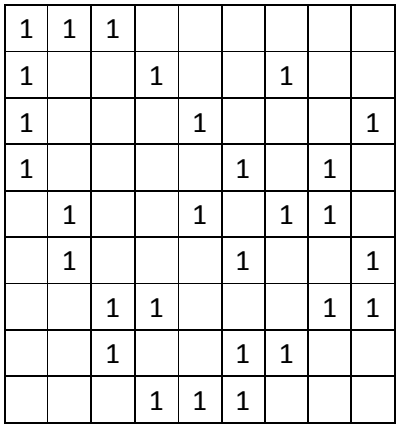
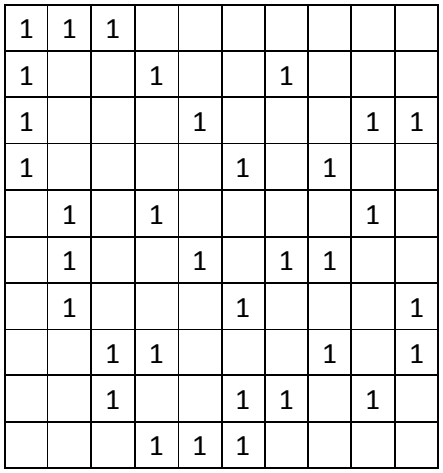
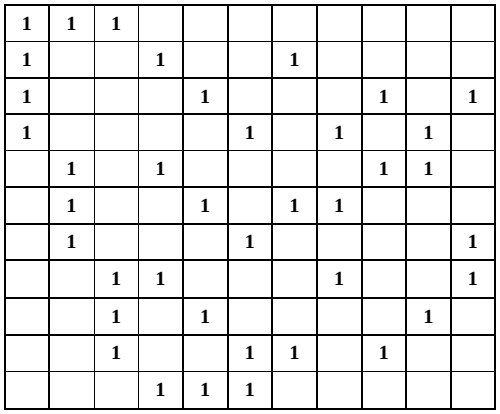
四、全華版高中數學第二冊課本：第二章排列組合。

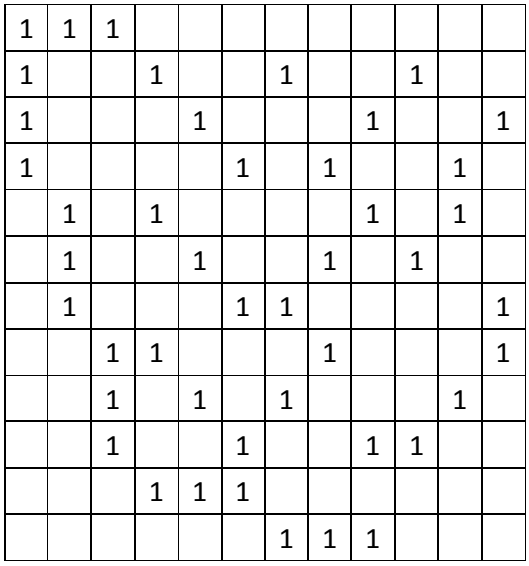
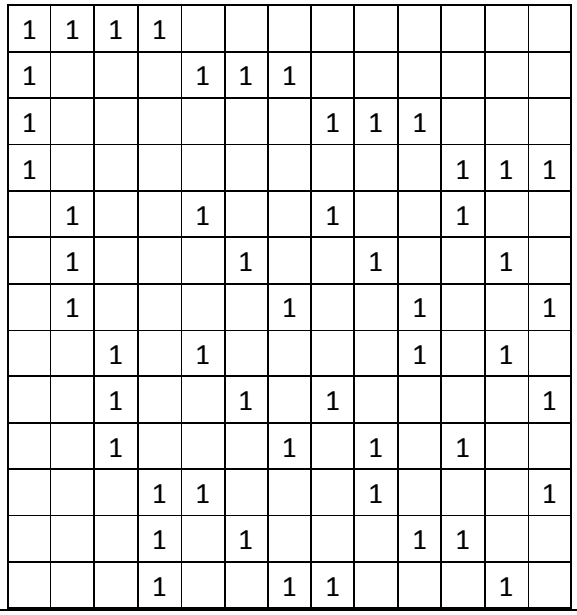
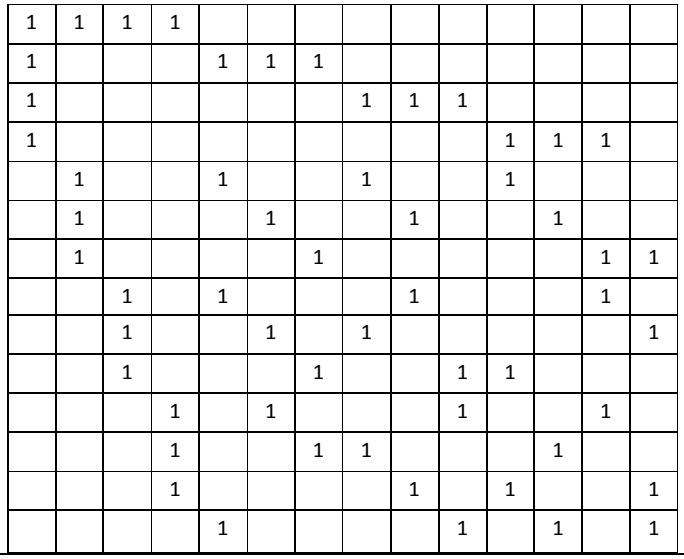
捌、附錄

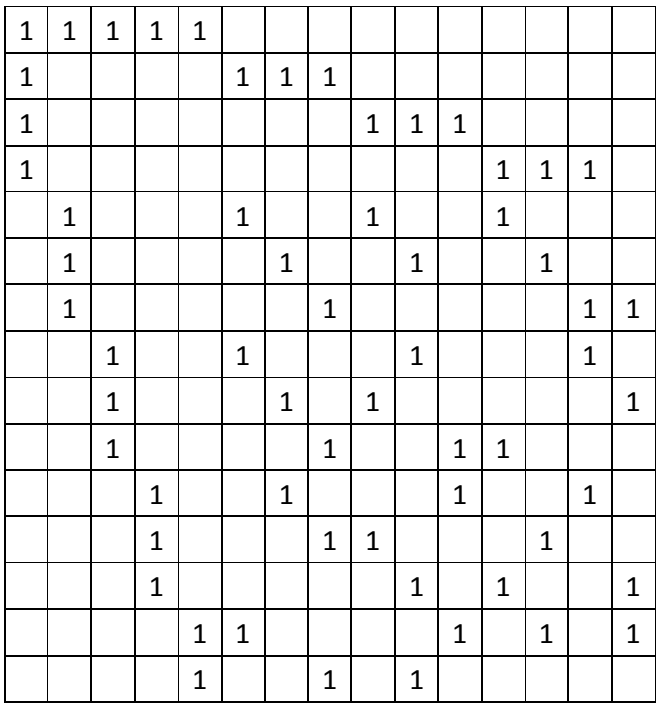
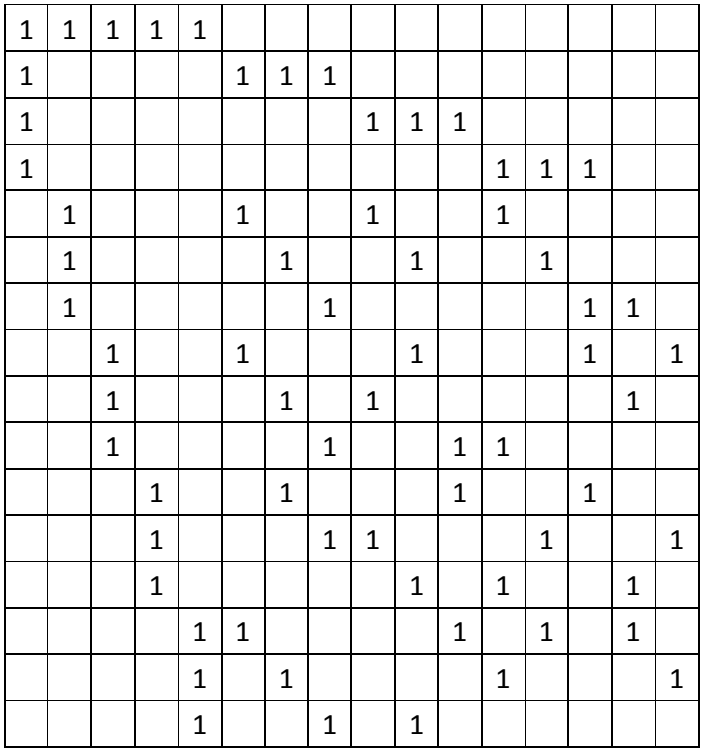
在$n\times n$的方格中，任意兩行和任意兩列相交的四個格子中至少填入 1 個 0 之情形

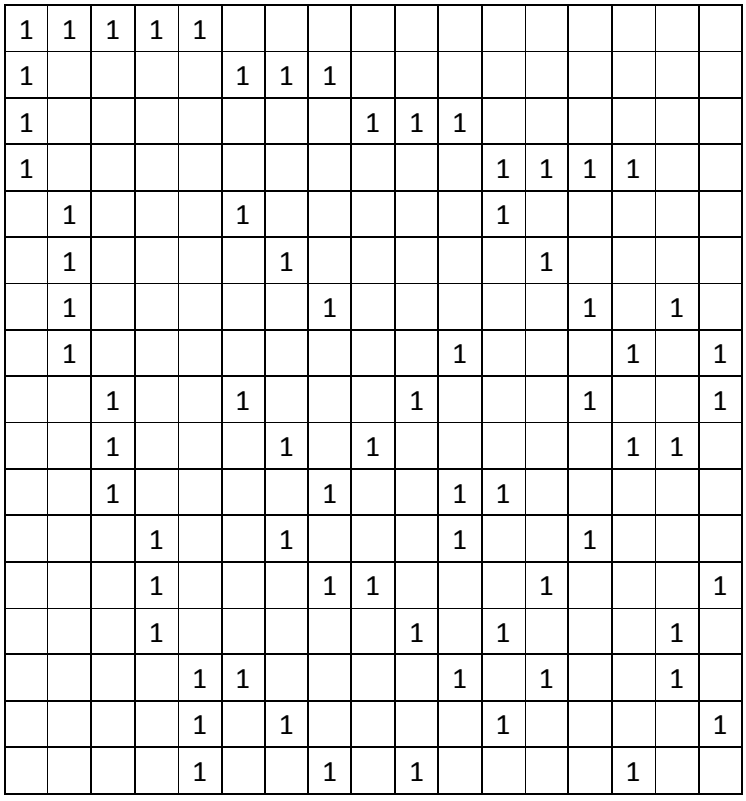
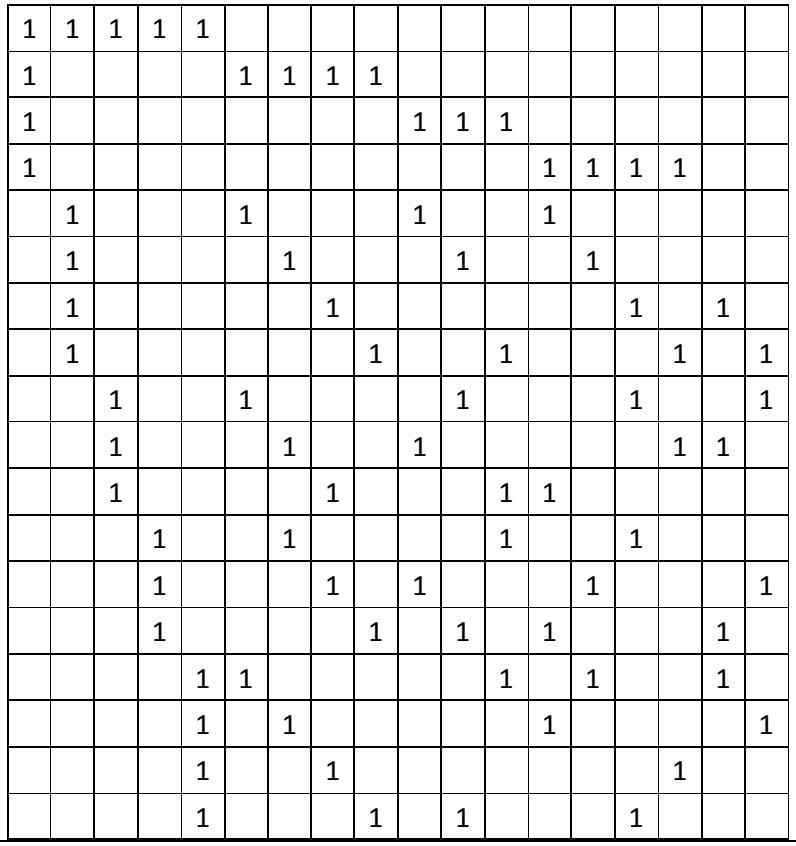
n	圖　　例	$M(n)$
2	1 1 1	3
3	1 1 1 1 1 1	6
4	1 1 1 1 1 1 1 1 1	9

5		12
6		16
7		21
8		24

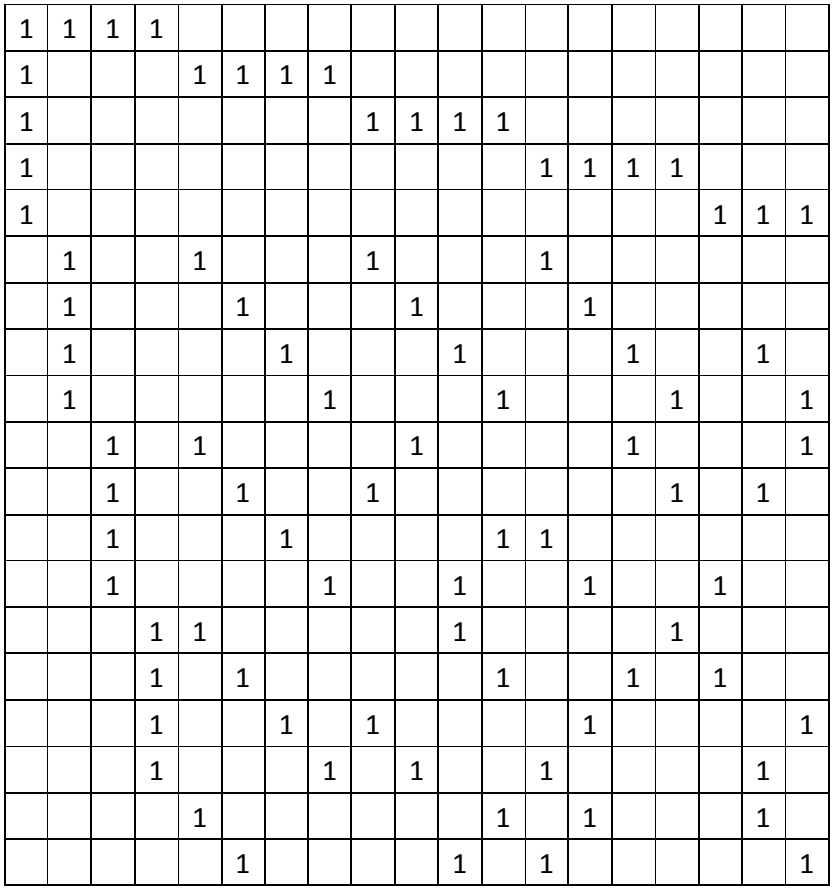
9		29
10		34
11		39

12		45
13		52
14		56

15		61
16		67

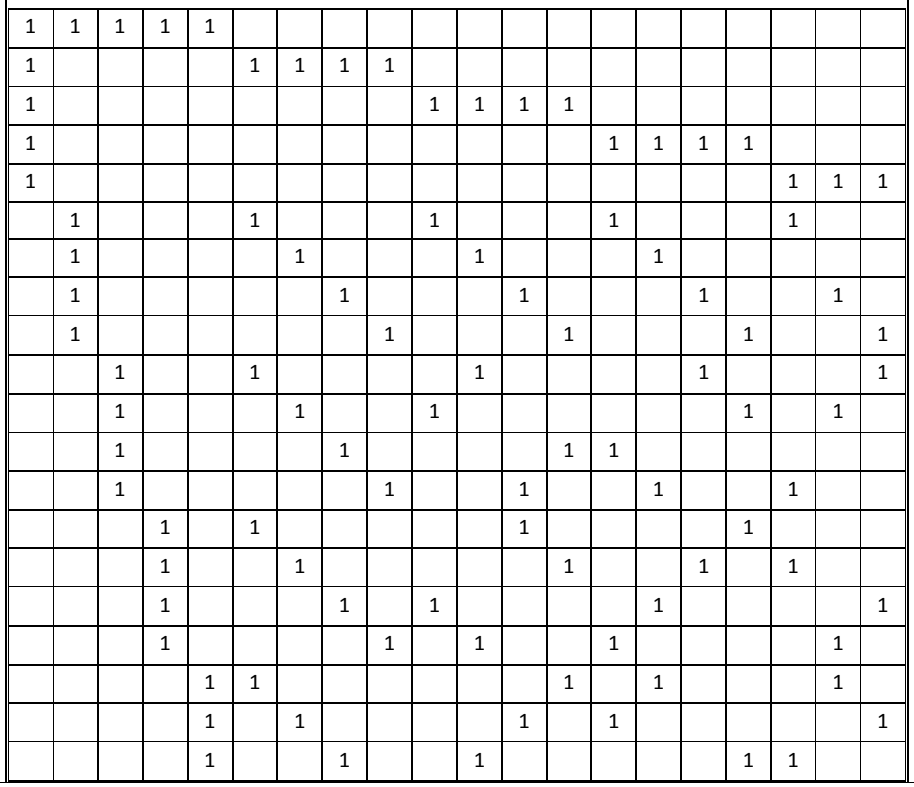
17		74
18		81

19



88

20



96

	1	1	1	1	1																
	1					1	1	1	1												
	1									1	1	1	1								
	1													1	1	1	1				
	1																	1	1	1	1
		1				1				1				1				1			
		1					1				1				1				1		
		1						1				1				1				1	
		1							1				1				1				1
21			1			1					1					1					1
			1				1			1							1			1	
			1					1					1	1					1		
			1						1			1			1			1			
				1		1						1					1		1		
				1			1						1			1		1			
				1				1		1				1							1
				1					1		1			1						1	
					1	1							1		1					1	
					1		1					1		1							1
					1			1			1						1	1			
					1				1	1									1		

105

【評語】040403

一般而言,數學研究分兩階段,首先是做實驗觀察或猜測結果，再來是證明答案的正確性，數學之不同於其他科學，在於除了觀察之外也很重視證明，因此這篇文章中除了觀察之外，初看令人心動的是有許多證明。只可惜許多證明是不嚴謹的。整體來說本文實驗觀察到不少數據是可以稱道的部分。這些都提供了 $M(n)$的下界，也可能是很好的答案。上界的證明論述可再加強。