中華民國第52屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

佳作

040401

三角梅花五面開

學校名稱：花蓮縣私立海星高級中學

作者：	指導老師：
高一 曾怡嘉 高一 彭筱妤 高一 楊穎蓁	呂正基

關鍵詞：高斯、多項式、五邊形

摘 要

2004 年 Dragutin Svrtan, Darko Veljan and Vladimir Volenec 三位教授在 math.MG 上發表了一篇文章, 內容提到 18 世紀的幾何學家 Monge 將 Ptolemy 定理延伸到一般的五邊形, 而 Gauss 則利用這個結果證明了一個鮮為人知的有趣定理—“高斯五邊形定理”, 其內容是在說明如何從一個五邊形的”部份面積”算出”整體面積”。 此結果經由許志農教授重新編寫在《算術講義》第 19 講中, 同時也提出了一些新的問題。

我們則在這篇文章中解決了之前留下來的問題, 同時也發現了另一個與高斯五邊形定理等價且形式相似的結果—內五邊形定理, 再利用之前的文獻和本篇文章的結果便能證明了以下定理的等價關係：

Ptolemy 定理 ≡ 和角公式

|| ||

Monge 公式

|| ||

高斯五邊形定理 ≡ 內五邊形定理

壹、研究動機

一次專題課中，我們研讀了《算術講義》而認識高斯五邊形定理，發現圖形面積之間的關係，進而引發我們好奇，在一個圖形中，已知部分面積，是否可以找出它與整個圖形的關係？而講義尾聲留下的問題，啟發我們探討是否可以五邊形內部不同區域的面積而求得整體五邊形的面積？

我們更好奇推廣到其他的凸多邊形時，內部是否亦有關係式？此外，更致力於回歸到較純粹的手法，書寫證明時，以讀者容易了解為原則，期望對於學習數學上能夠有所助益。

貳、研究目的

1. 使用簡潔扼要的方式證明高斯五邊形定理
2. 改變已知條件：從五邊形內部不同的三角形求五邊形面積
3. 探討六邊形以上之圖形是否也有關係式

參、研究設備器材

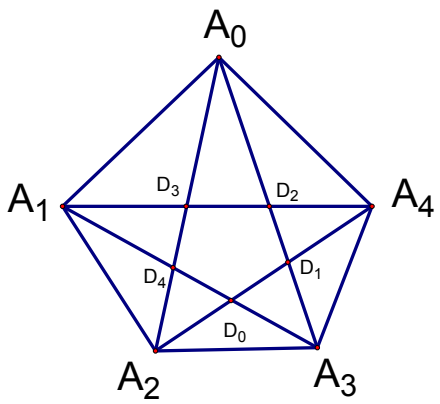
紙、筆、頭腦、電腦。

肆、研究過程或方法

本次作品的研究過程分為二部份。第一部份，對高斯五邊形定理證明，第二部份則推展出「內五邊形定理」，及內部面積的關係式。

【Part 1】

定理一：高斯五邊形定理



在五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 中，令符號 (ijk) 代表以 A_i, A_j, A_k 為頂點的三角形面積，其中以 c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 分別代表 $(401), (012), (123), (234), (340)$ 的值，再令

$$C_1 = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \text{ ， } C_2 = c_0c_1 + c_2c_3 + c_3c_4 + c_4c_0$$

若五邊形的面積為 A ，則

$$A^2 - C_1A + C_2 = 0$$

（即為方程式 $x^2 - C_1x + C_2 = 0$ 的根）

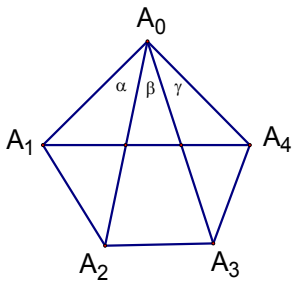
不過在證明高斯五邊形之前，我們必須要用一個引理：

引理一：Monge 定理——（法國數學家 Gaspard Monge）在任意凸五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 中，令符號 π_{ij} 代表頂點為 A_0, A_i, A_j 的三角形面積，則

$$\pi_{12} \times \pi_{34} + \pi_{23} \times \pi_{14} = \pi_{13} \times \pi_{24}$$

證明：

如下圖，我們有三角形面積分別為



$$\Delta A_0A_1A_2 = \frac{\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2} \cdot \sin\alpha}{2} \text{ ， } \Delta A_0A_2A_3 = \frac{\overline{A_0A_2} \cdot \overline{A_0A_3} \cdot \sin\beta}{2} \text{ ，}$$

$$\Delta A_0A_3A_4 = \frac{\overline{A_0A_3} \cdot \overline{A_3A_4} \cdot \sin\gamma}{2} \text{ ， } \Delta A_0A_1A_3 = \frac{\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_3} \sin(\alpha+\beta)}{2} \text{ ，}$$

$$\Delta A_0A_2A_4 = \frac{\overline{A_0A_2} \cdot \overline{A_0A_4} \cdot \sin(\beta+\gamma)}{2} \text{ ， } \Delta A_0A_1A_4 = \frac{\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_4} \cdot \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{2}$$

再由和角公式可以證得下列關係式：

$$\sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)$$

因此

$$\frac{\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2} \cdot \sin\alpha}{2} \times \frac{\overline{A_0A_3} \cdot \overline{A_3A_4} \cdot \sin\gamma}{2} + \frac{\overline{A_0A_2} \cdot \overline{A_0A_3} \cdot \sin\beta}{2} \times$$

$$\frac{\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_4} \cdot \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{2} = \frac{\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_3} \sin(\alpha+\beta)}{2} \times \frac{\overline{A_0A_2} \cdot \overline{A_0A_4} \cdot \sin(\beta+\gamma)}{2}$$

等同於

$$\pi_{12} \times \pi_{34} + \pi_{23} \times \pi_{14} = \pi_{13} \times \pi_{24}$$

得證。 □

此為托勒密定理的延伸，利用 Monge 定理可容易證得高斯五邊形定理：

高斯五邊形定理的證明：

令符號 π_{ij} 代表頂點為 A_0, A_i, A_j 的三角形面積，則

$\pi_{12}=c_1$，$\pi_{34}=c_4$，$\pi_{23}=A-c_1-c_4$，$\pi_{14}=c_0$，$\pi_{13}=A-c_2-c_4$，$\pi_{24}=A-c_1-c_3$，

將上式代入 Monge 公式 $\pi_{12}\times\pi_{34}+\pi_{23}\times\pi_{14}=\pi_{13}\times\pi_{24}$，得

$$c_1c_4+(A-c_1-c_4)c_0=(A-c_2-c_4)(A-c_1-c_3)\text{，}$$

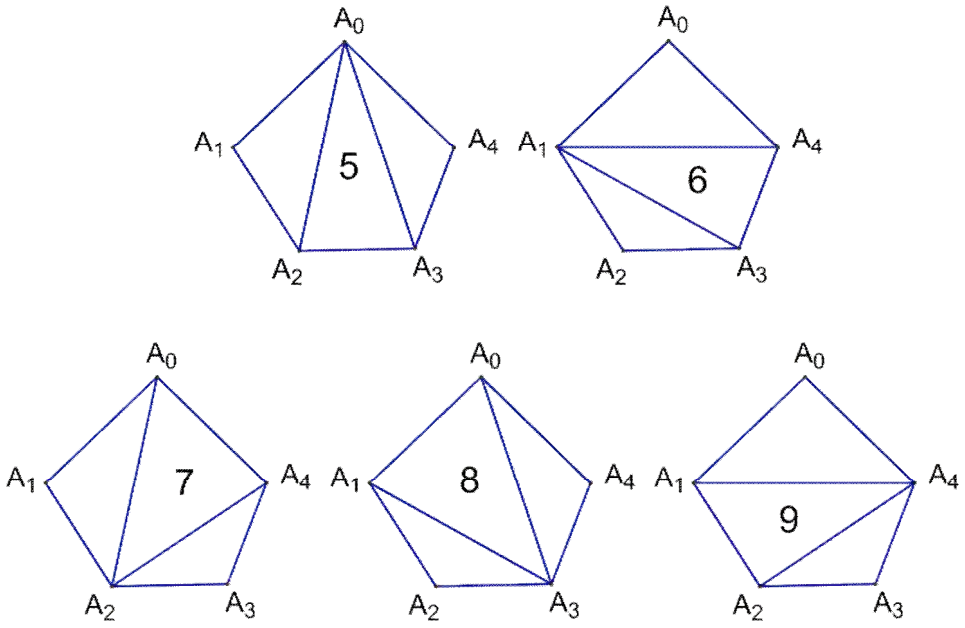
整理便能得到

$$A^2-C_1A+C_2=0 \qquad \square$$

顯然，由恆等式的逆推，可以得到 Monge 定理與高斯五邊形定理等價。

對於這個定理的結果，讓人不禁想問：六邊形乃至於多邊中，是否仍存在這樣的性質？可惜的是，到了六邊形後，周圍六個小三角形面積無法決定整個六邊形的面積。

同時從高斯五邊形定理中我們得到另一個啟示，即在五邊形中，能否由「部分」求得「整體」？例如，已知下列五個三角形的面積，是否能求出整個五邊形的面積？



答案是可以！於是循著高斯五邊形定理的模式，創建出「內五邊形定理」

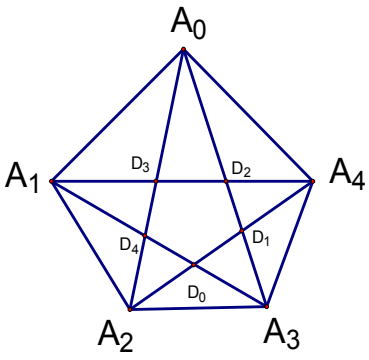
【Part 2：內五邊形定理】

目的：

在右下圖的凸五邊形中，令符號 (ijk) 代表以 A_i, A_j, A_k 為頂點的三角形面積，則在已知

$(203)=e_0,(314)=e_1,(420)=e_2,(031)=e_3,(140)=e_4$

的情形下($e_i, i=0,1,2,3,4$ 為已知數), 期能求得五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 的面積；更進一步地，希望能求得與高斯五邊形有類似形式的關係式。



想法：

首先，由高斯五邊形定理知 ：

「已知凸五邊形中五個頂三角形的面積，則可算得五邊形的面積」

因此我們先將 $e_i, i=0,1,2,3,4$ 以五邊形面積 A 及頂三角形 $c_i, i=0,1,2,3,4$ 表示，再試著套用高斯五邊形定理。

由圖知 $e_i = A - c_{i-1} - c_{i+1}$， $i=0,1,2,3,4$,

因為 $e_i, i=0,1,2,3,4$ 為已知，我們就能得到一個六元一次聯立方程組，

然後便可以嘗試將 A， $c_i, i=0,1,2,3,4$ 以一個參數 t 表示，這麼一來再代入高斯五邊形定理，求得 t ，也就求得 A 了!

以 $e_0=5, e_1=6, e_2=7, e_3=8, e_4=9$ 為例，可造出聯立方程組

$$\begin{cases} 5 = A - c_1 - c_4 \\ 6 = A - c_0 - c_2 \\ 7 = A - c_1 - c_3 \\ 8 = A - c_2 - c_4 \\ 9 = A - c_0 - c_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 5 = A - c_1 - c_4 & (1)\\ 6-8 = -c_0 + c_4 & (2)\\ 7-5 = -c_3 + c_4 & (3)\\ 8-5 = c_1 - c_2 & (4)\\ 9-7 = -c_0 + c_1 & (5)\end{cases}$$

再令 $c_0 = t$，可得 $c_1 = 2+t, c_2 = t-1, c_3 = t-4, c_4 = t-2, A = 2t+5$，

將以上參數式代入高斯五邊形定理，$x^2 - C_1x + C_2 = 0$

$$(2t+5)^2 - (t+2+t+t-1+t-4+t-2)(2t+5) +$$
$$[t(2+t)+(2+t)(t-1)+(t-1)(t-4)+(t-4)(t-2)+t(t-2)] = 0$$

$$(4t^2+20t+25)-(10t^2-15t+25)+(5t^2-10t+10) = 0$$

$$-t^2-5t+60 = 0$$

判別式 = $25-4\times1\times(-60) = 265$，即可求得 $t = \dfrac{-5\pm\sqrt{265}}{2}$。

所以五邊形面積 $A = 2t+5 = (2\cdot\dfrac{-5\pm\sqrt{265}}{2})+5 = \sqrt{265}$ □

1. 從上述的做法, 就想到不如先花一點時間來化簡一般式，
也就是將聯立方程式

$$\begin{cases} e_0 = A - c_1 - c_4\\ e_1 = A - c_0 - c_2\\ e_2 = A - c_1 - c_3\\ e_3 = A - c_2 - c_4\\ e_4 = A - c_0 - c_3\end{cases}$$

中的 c_i 由 e_i 及參數 t 來表示, 再求得 t 與 e_i 的關係($i = 0,1,2,3,4$)

不過中間的過程因為要動到太多變數，便使用了 mathematica 協助作計算。為了寫程式的方便，我們令 $e_0 = p, e_1 = q, e_2 = r, e_3 = s, e_4 = u$，然後將 A, c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 用 p,q,r,s,u 和參數 t 表示，再代入高斯五邊形定理整理，求出 t 的值，這麼一來 A 就可以用 p,q,r,s,u 表示了。仿照上面的想法作計算，我們經由一連串的化簡，可得到

$A =$ p-r+q-s+v+2t

$A^2 =$ p^2+2pq+q^2-2pr-2qr+r^2-2ps-2qs+2rs+s^2+4pt+4qt-4rt-4st
+4t^2+2pu+2qv-2ru-2su+4tu+u^2

$C_1A =$ 2p^2+4pq+2q^2-5pr-5qr+3r^2-5ps-5qs+6rs+3s^2+9pt+9qt-11rt
-11st+10t^2+4pu+4qu-5ru-5su+9tu+2u^2

$C_2 =$ p^2+2pq+q^2-3pr-2qr+2r^2-3ps-3qs+4rs+2s^2+4pt+4qt-6rt-6st
+5t^2+2pu+qu-3ru-2su+4tu+u^2

將這些複雜的式子代入高斯五邊形定理

$$A^2 - C_1A + C_2 = 0$$

後，發現竟然可化簡為

qr-pt-qt+rt+st-t^2-qu+su-tu = 0

或

$$t^2 + (p-r+q-s+u)t - su + uq - qr = 0$$

解得 $t = \dfrac{-(p-r+q-s+u)+\sqrt{(p-r+q-s+u)^2+4(su-uq+qr)}}{2}$,

由上式，同乘 2，將$-(p-r+q-s+u)$移到等號左式，得

$$(p-r+q-s+u)+2t = \sqrt{(p-r+q-s+u)^2+4(su-uq+qr)}$$

即 $A = \sqrt{(p-r+q-s+u)^2+4(su-uq+qr)}$

進一步的整理根號內的符號，展開後再試著重新配成完全平方

$(p-r+q-s+u)^2+4(su-uq+qr)$
= p^2+2pq+q^2-2pr+2qr+r^2-2ps-2qs+2rs+s^2+2pu-2qu-2ru-2su+u^2
= $(p+q+r+s+u)^2$-4(pr+ru+uq+qs+sp)

終於我們得到了

$$A = \sqrt{(\sum_{i=0}^{4} e_i)^2 - 4\sum_{i=0}^{4} e_i e_{i+2}}\ .$$

恰為方程式 $x^2 - (\sum_{i=0}^{4} e_i)x + \sum_{i=0}^{4} e_i e_{i+2} = 0$ 的 $\sqrt{判別式}$ ，也就是等於兩根差！

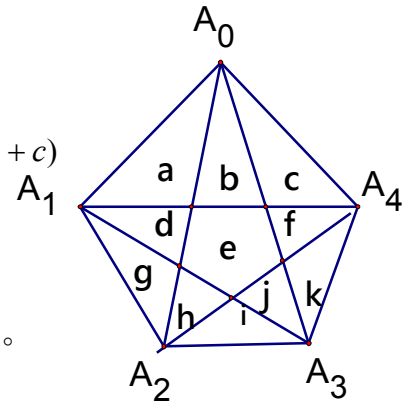
但興奮之餘也感到有所無力，因為這純粹是使用暴力算法，無任何技巧可言，於是我們便找尋下一個證明內五邊形定理的方法。

2．由高斯五邊形定理 在面積為 A 的凸五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 中，令

$$(401)=c_0,(012)=c_1,(123)=c_2,(234)=c_3,(340)=c_4 \text{，}$$

及 $C_1=\sum_{i=0}^{4}c_i$ ， $C_2=\sum_{i=0}^{4}c_ic_{i+1}$ （令 $c_5=c_0$），則方程式 $x^2-C_1x+C_2=0$ 的解為 A 及 (C_1-A) ，

若將五邊形內部各小塊以符號表示(如右下圖)， 則



$$C_1=c_0+c_1+c_2+c_3+c_4$$
$$=(a+b+c)+(a+d+g)+(g+h+i)+(i+j+k)+(k+f+c)$$
$$=(A-D)+(A-S)$$

如此便可以得到 $(C_1-A)=A-(S+D)$ ，其中 S 為星形 $A_0A_2A_4A_1A_3$ 的面積， D 為五邊形 $D_0D_1D_2D_3D_4$ 的面積。

又 $x^2-C_1x+C_2=0$ 所以由根與係數知

$C_1=2A-(S+D)$， $C_2=A(A-(S+D))$

若再令 $S+D=M$，則兩根亦可表示為 $A, A-M$ ，

且方程式係數可表示為 $C_1=2A-M$， $C_2=A^2-AM$ □

3. 在高斯五邊形定理中的方程式 $x^2-C_1x+C_2=0$ 中，

係數 C_1,C_2 可表示為 $C_1=2A-M$ ， $C_2=A^2-AM$

其中 S 為星形 $A_0A_2A_4A_1A_3$ 的面積， D 為五邊形 $D_0D_1D_2D_3D_4$ 的面積，

$M=S+D$

令 $E_1=\sum_{i=0}^{4}e_i$， $E_2=\sum_{i=0}^{4}e_ie_{i+2}$ （$e_i=e_{i+5}$），

$$E_1=e_0+e_1+e_2+e_3+e_4$$
$$=(A-c_4-c_1)+(A-c_0-c_2)+(A-c_1-c_3)+(A-c_2-c_4)+(A-c_1-c_0)$$
$$=5A-(c_4+c_1+c_0+c_2+c_3+c_1+c_2+c_4+c_1+c_0)$$
$$=5A-2\sum_{i=0}^{4}c_i$$

$$=5A-2C_1$$
$$=5A-2(2A-M)$$
$$=A+2M$$

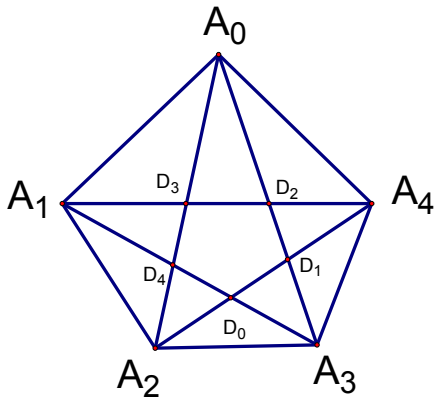
□

再由 $e_i=A-c_{i-1}-c_{i+1}$，得

$$E_1=5A-2C_1=A+2M \text{ 。}$$

到此，便可以正式開始證明「內五邊形定理」。

定理二：內五邊形定理



在面積為 A 的凸五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 中，令

$$E_1=\sum_{i=0}^{4}e_i,\quad E_2=\sum_{i=0}^{4}e_ie_{i+2}\quad (e_i=e_{i+5})\text{，則方程式}$$
$$x^2-E_1x+E_2=0$$

的解為 M 及 $(E_1-M)=A+M$ ，

兩根和 $=(-\frac{-E_1}{1})=E_1\Rightarrow$ 一根為 M，另一根為 E_1-M ，

故五邊形面積

$$A=\text{兩根差}=\sqrt{E_1^2-4E_2},$$

且 $E_1=A+2(S+D)=A+2M$， $E_2=(S+D)(A+S+D)=MA+M^2$

證明:

由 $e_i=A-c_{i-1}-c_{i+1}$，知

$$E_2=\sum_{i=0}^{4}e_ie_{i+2}=\sum_{i=0}^{4}(A-c_{i-1}-c_{i+1})(A-c_{i+1}-c_{i+3})$$
$$=\sum(A^2-(c_{i-1}+2c_{i+1}+c_{i+3})A+c_{i+1}^2+(c_{i-1}c_{i+1}+c_{i+1}c_{i+3})+(c_{i-1}c_{i+3}))$$
$$=5A^2-4C_1A+\sum c_i^2+2\sum c_ic_{i+2}+\sum c_ic_{i+1}$$
$$=5A^2-4C_1A+(\sum c_i^2+2\sum c_ic_{i+2}+2\sum c_ic_{i+1})-\sum c_ic_{i+1}$$
$$=5A^2-4C_1A+C_1^2-C_2$$

$$=(5A^2-5C_1A+5C_2)+C_1^{\ 2}+C_1A-6C_2$$

$$=C_1^{\ 2}+C_1A-6C_2$$

將 $C_1=2A-M$, $C_2=A^2-AM$ 代入上式,

得 $E_2=(2A-M)^2+(2A-M)A-6(A^2-AM)$

$$=4A^2-4AM+M^2+2A^2-MA-6A^2+6AM$$

$$=AM+M^2$$

$$=(A+2M)M-M^2$$

$$=E_1M-M^2$$

由上知 M 是方程式 $x^2-E_1x+E_2=0$ 的根，由根與係數求得另一根為

$$\frac{E_2}{M}=A+M\ .$$

所以五邊形的面積 $A=(A+M)-M=$ 兩根差 $=\sqrt{E_1^2-4E_2}$ ，得證 □

因為純粹由圖形加減計算就可以將 C_1 和 E_1 以 A,M 表示, 所以上述兩個五邊形定理的重點, 是在如何以 A,M 來表示 C_2 及 E_2, 只要找到了表示法, 那麼利用根與係數的方法自然就能求得兩方程式

$$x^2-C_1x+C_2=0 \quad 和 \quad x^2-E_1x+E_2=0$$

的解, 也自然找到面積 A 與係數間的關係式。

在上一個定義中, 我們知道了

(1) 已知 C_1,C_2,E_1 的表示式, 能求出 E_2 的表示式，

接著我們要證明

(2) 已知 E_1,E_2,C_1 的表示式, 能求出 C_2 的表示式，

如此便說明了「內五邊形定理」 與「高斯五邊形定理」等價。

***推論*：「內五邊形定理」 與「高斯五邊形定理」等價**

證明: $\Leftarrow$ 同上

$\Rightarrow$ 已知 $C_1=2A-M$, $E_1=A+2M$, $E_2=M^2+AM$,

由 $e_i=A-c_{i-1}-c_{i+1}$, $i=0,1,2,3,4$ 可解得

$$c_i = \frac{A + 2e_{i+2} + 2e_{i-2} - E_1}{2} = \frac{2e_{i+2} + 2e_{i-2} - 2M}{2} = e_{i+2} + e_{i+3} - M$$

則 $C_2 = \sum c_i c_{i+1} = \sum (e_{i+2} + e_{i+3} - M)(e_{i+3} + e_{i+4} - M)$

$= \sum (e_{i+2}e_{i+3} + e_{i+3}e_{i+4} + e_{i+3}^2 + e_{i+2}e_{i+4}) + \sum (e_{i+2} + 2e_{i+3} + e_{i+4})M - \sum M^2$

$= (E_1^2 - E_2) + 4E_1 M - 5M^2$

將 $E_1 = A + 2M$， $E_2 = M^2 + AM$ 代入上式, 化簡後可得

$$C_2 = A^2 - AM .$$

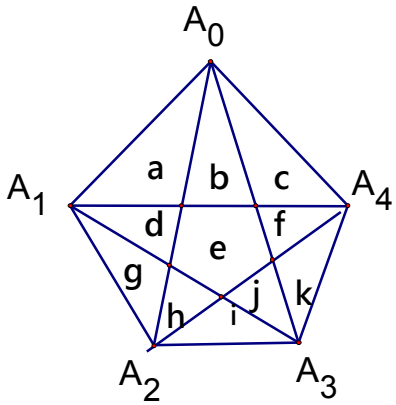
因此由 $A^2 - (2A - M)A + (A^2 - AM) = 0$ 知

A 為一元二次方程式 $x^2 - C_1 x + C_2 = 0$ 的一根，得證 □

到此，我們的內五邊形定理是建立於高斯五邊形定理成立的情形下所得，而現在要找尋 1.不需經由高斯五邊形定理得到內五邊形定理的證明方法，2.證明內五邊形定理與 Monge 定理等價。

在試過了很多方法後，我們找到了一個可能會成功的想法：

想法：內五邊形定理會不會只是面積代數的恆等式？



實驗一：（利用 mathematica）

e[1]=a+b+d+e+j e[2]=g+d+h+e+f

e[3]=i+j+h+e+b e[4]=k+j+f+e+d

e[5]=c+b+f+e+h

F[1]=e[1]+e[2]+e[3]+e[4]+e[5]

=a+3 b+c+3 d+5 e+3 f+g+3 h+i+3 j+k

F[2]=e[1]e[3]+e[3]e[5]+e[5]e[2]+e[2]e[4]+e[4]e[1]

=(b+c+e+f+h) (d+e+f+g+h)+(b+c+e+f+h) (b+e+h+i+j)+
(a+b+d+e+j) (b+e+h+i+j)+(d+e+f+g+h) (d+e+f+j+k)+
(a+b+d+e+j) (d+e+f+j+k)

M=b+d+h+j+f+2e

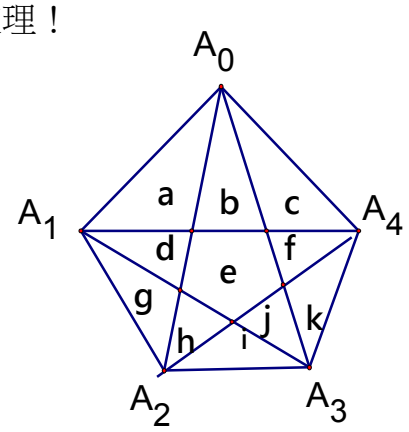
Expand[M^2-F[1]M+F[2]]

= -b d-b e-d e-e^2-b f-e f+c g+f g+c h-d h-e h+a i+b i+c i+a j-e j-f j-h j+a k+d k+g k

= (cg+fg+ch+ai+bi+ci+aj+ak+dk+gk)- (bd+be+de+bf+ef+dh+eh+ej+fj+hj + e^2)

結論：

1. 這不是代數恆等式
2. 這是五邊形圖形的性質→ 聯想到 Monge 定理！



實驗二： Monge 定理

p[1]=a+d+g

p[2]=c+f+k

p[3]=a+b+c

p[4]=b+e+h+j+i

p[5]=a+b+d+e+j

p[6]=c+b+f+e+h

Expand[p[1]p[2]+p[3]p[4]-p[5]p[6]]

= -b d-b e-d e-e^2-b f-e f+c g+f g+c h-d h-e h+a i+b i+c i+a j-e j-f j-h j+a k+d k+g k

→ 與前式相同！

意義即為內五邊形定理與 Monge 定理等價，只是同一個式子的不同表示法，所以一定存在一個便捷的證明方法！

用我們定義的符號重新表示 Monge 定理，即

$$c_1c_4 + c_0e_0 = e_3e_2$$

因為我們發現的內一高斯五邊形定理其係數皆為 e_i ，所以將上式的 c_i 換掉，恰有一個轉換公式

$$c_i = \frac{A + 2e_{i+2} + 2e_{i-2} - E_1}{2} = \frac{2e_{i+2} + 2e_{i-2} - 2M}{2} = e_{i+2} + e_{i+3} - M$$

所以，我們有 $c_1 = e_3 + e_4 - M$， $c_4 = e_1 + e_2 - M$， $c_0 = e_2 + e_4 - M$，代入後

$$(e_3 + e_4 - M)(e_1 + e_2 - M) + (e_2 + e_4 - M)e_0 = e_3e_2,$$

即

$$e_3e_1 + e_3e_2 - e_3M + e_4e_1 + e_4e_2 - e_4M - e_1M - e_2M + M^2 + e_2e_0 + e_4e_0 - e_0M = e_3e_2,$$

整理後為

$$M^2 - (e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + e_4)M + (e_0e_2 + e_2e_4 + e_4e_1 + e_1e_3 + e_3e_0) = 0,$$

換言之，我們證明了 M 為方程式 $x^2 - E_1x + E_2 = 0$ 的解！

再由根與係數知道，另一根為 $E_1 - M = (A + 2M) - M = A + M$ ，所以

$$\sqrt{E_1^2 - 4E_2} = \text{兩根差} = (A + M) - M = A$$

假設內五邊形定理成立，將以上的式子倒推回去，就推得 Monge 公式。

自此我們終於得到了直接證明內五邊形定理與 Monge 公式等價的方法，結合之前的證明，和參考資料，我們便得到了以下定理的等價關係：

$$\begin{array}{ccc} \textit{Ptolemy}\text{ 定理} & \equiv & \text{和角公式} \\ \| & & \| \\ & \textit{Monge}\text{ 公式} & \\ \| & & \| \\ \text{高斯五邊形定理} & \equiv & \text{內五邊形定理} \end{array}$$

伍、研究結果

(一) 高斯五邊形定理：

面積為 A 的凸五邊形， 以圖形外圍的頂三角形面積和 $C_1=\sum_{i=0}^{4}c_i$ ，與頂三角形面積兩兩相乘再相加 $C_2=\sum_{i=0}^{4}c_ic_{i+1}$ （令 $c_5=c_0$）為係數，圖形關係式為 $x^2-C_1x+C_2=0$，其解為 A 及 (C_1-A)，A 為五邊形面積，(C_1-A) 為五邊形面積 A－中央星形 S－小五邊形 D。

(二) 內五邊形定理：

面積為 A 的凸五邊形中，以內三角形面積和 $E_1=\sum_{i=0}^{4}e_i$ ，與內三角形面積兩兩相乘再相加 $E_2=\sum_{i=0}^{4}e_ie_{i+2}$ （$e_i=e_{i+5}$）為係數，圖形關係式為 $x^2-E_1x+E_2=0$ ，五邊形面積 $A=$ 兩根差 $=\sqrt{E_1^2-4E_2}$ 。

(三) 內五邊形定理與高斯五邊形定理等價

利用 C_1,C_2,E_1,的表示式導出 E_2 的表示式，已知 E_1,E_2,C_1 的表示式，能求出 C_2 的表示式，由此知道內五邊形定理與高斯五邊形定理等價。

陸、討論

高斯五邊形定理方程式係數 C_1 、 C_2 ，內五邊形定理方程式係數 E_1 、 E_2 ，五邊形面積 A ，五邊形內部星形與小五邊形之和 M ，彼此間存在著有趣的表示式，推演如下：

$$\begin{cases} C_1=2A-M \text{ ---------[1]} \\ E_1=A+2M \text{ ---------[2]} \end{cases}$$

$[2]\times 2-[1]=2E_1-C_1=5M=5\sqrt{C_1^{\,2}-4C_2}$ ，$\therefore E_1=\dfrac{C_1+5\sqrt{C_1^{\,2}-4C_2}}{2}$ ；同理

$[1]\times 2+[2]=2C_1+E_1=5A=5\sqrt{E_1^{\,2}-4E_2}$ ，$\therefore C_1=\dfrac{-E_1+5\sqrt{E_1^{\,2}-4E_2}}{2}$

$$\begin{cases} C_2=A^2-AM \\ E_2=AM+M^2 \end{cases}$$

$E_2+C_2=A^2+M^2=E_1^{\,2}-4E_2+C_1^{\,2}-4C_2$ --------[3]

$$5C_2=E_1^{\,2}-5E_2+C_1^{\,2}=E_1^{\,2}-5E_2+\frac{E_1^{\,2}-10E_1\sqrt{E_1^{\,2}-4E_2}+25E_1^{\,2}-100E_2}{4}$$

$$C_2=\frac{3(E_1^{\,2}-4E_2)-E_1\sqrt{E_1^{\,2}-4E_2}}{2}=\frac{3A^2-AE_1}{2}$$

同理，由[3]

$$5E_2=E_1^{\,2}+C_1^{\,2}-5C_2=\frac{C_1^{\,2}+10C_1\sqrt{C_1^{\,2}-4C_2}+25C_1^{\,2}-100C_2+C_1^{\,2}-5C_2}{4}$$

$$E_2=\frac{3(C_1^{\,2}-4C_2)+C_1\sqrt{C_1^{\,2}-4C_2}}{2}=\frac{3M^2-MC_1}{2}$$ □

柒、結論

在凸五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 中：

結論一：令 $C_1=\sum_{i=0}^{4}c_i, C_2=\sum_{i=0}^{4}c_ic_{i+1}, E_1=\sum_{i=0}^{4}e_i, E_2=\sum_{i=0}^{4}e_ie_{i+2}$，則

$C_1=2A-M$，$C_2=A(A-M)$，$E_1=A+2M$，$E_2=M(A+M)$.

結論二：方程式 $x^2-C_1x+C_2=0$ 的兩根為 $A, A-M$，

方程式 $x^2-E_1x+E_2=0$ 的兩根為 $M, A+M$.

結論三：$M=\sqrt{C_1^2-4C_2}$ ，$A=\sqrt{E_1^2-4E_2}$

結論四：

$C_1 = 2A - M = \dfrac{-E_1 + 5\sqrt{E_1^2 - 4E_2}}{2}$	$E_1 = A + 2M = \dfrac{C_1 + 5\sqrt{C_1^2 - 4C_2}}{2}$
$C_2 = A^2 - AM = \dfrac{3A^2 - AE_1}{2}$	$E_2 = AM + M^2 = \dfrac{3M^2 - MC_1}{2}$

其中 C_1 、 C_2 為高斯五邊形定理方程式係數， E_1 、 E_2 為內五邊形定理方程式係數，A 為五邊形面積，M 為五邊形內星形 S 與小五邊形 D 之和。

結論五：以下為等價關係

Ptolemy 定理 ≡ 和角公式

|| ||

Monge 公式

|| ||

高斯五邊形定理 ≡ 內高斯五邊形定理

捌、參考資料及其他

[1] 許志農，高斯五邊形定理，算術講義，第 19 講，2004 年 12 月。

[2] 呂正基（2004）。《從高斯五邊形定理出發》。台灣師範大學數學系碩士論文，未出版，台北市。

[3] Dragutin Svrtan, Darko Veljan and Vladimir Volenec (2004),《Geometry of pentagons: from Gauss to Robbins》, math.MG .

[4] 蘇惠玉, 〈三角形公式的托勒密方法〉, HPM 通訊第四卷第五期, 取自：http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/vol4no5e.htm .

[5] 樂嗣康（2002）, 〈托勒密(Ptolemy)定理與”三弦定理”的關係〉, 數學傳播 26 卷 第一期, 取自: http://www.math.sinica.edu.tw/math_media/d261/26109.pdf .

[6]《Gauss and The Regular Pentagon》：
http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1949-8594.1987.tb11709.x/abstract

[7]《Draft Translation of Gauss' Fragmentary Notes on the Pentagramma Mirificum》：
http://www.wlym.com/~animations/security/ben/Reference/Gauss%20Fragments.doc

【評語】040401

作品最引人注目的是一幅十分對稱的完全五邊形。然而，作品最有價值之處在於面對非對稱的五邊形其結論亦真。作者應該為其作品的強而有力的特點作宣傳。

作品之架構符號、及內容與參考文獻所登錄的碩士論文十分雷同。然而若仔細閱讀其細節，我們注意到其內容包含一些與該碩士論文中沒有出現的「內三角形」。