

中華民國第 52 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組 物理科

佳作

040109

Johnny the Random Walker

—振動平面上的顆粒運動

學校名稱：國立新竹高級中學

作者： 高二 范廷瀚 高二 溫禹昊	指導老師： 葉婉如
---------------------------------	------------------

關鍵詞：隨機運動、擴散係數、速率分布

摘要

顆粒在受垂直振動時有擴散、對流的現象，其中對流的情況較難觀察，但表面的擴散可用影像擷取分析系統來測量。本實驗利用喇叭作為顆粒振動的能量來源，將顆粒放入扁平的壓克力圓盒，再用攝影機、Image J 作為影像分析系統。同時透過顆粒數目與 Γ 值(振動台最大加速度與重力加速度的比值)兩種變因，分析兩變因對於擴散係數、平均自由徑及平均自由時間、速率分布的影響，探討顆粒在近似於平面上的運動行為。

壹、研究動機

在高中的物理及化學課程中，有提到氣體動力論，老師在微觀的觀點，用動力學推導理想氣體的性質。這時我們想，若將氣體的顆粒放大，不知是否能看到類似的行為。於是我們將圓形顆粒放在振動台上，藉由平台振動作為顆粒體的能量來源，觀察顆粒體在平台上的碰撞及擴散等狀況。

貳、研究目的

- 一、輸入電壓、頻率、顆粒數目對喇叭振動的影響:
 1. 電壓對振幅、平均速率的關係
 2. 頻率對最大 Γ 的影響
 3. 固定 Γ 下，顆粒數目對輸入電壓的影響
- 二、固定頻率下，探討「單一顆粒」的運動行為
 1. Γ 對單一顆粒的運動狀態的關係
 2. Γ 對平均速率與速率分布的影響
- 三、固定頻率下，探討「多顆粒」的擴散係數
 1. Γ 對擴散係數的影響
 2. 顆粒數目對擴散係數的影響
- 四、固定頻率下，探討「多顆粒」的平均自由徑、平均自由時間
 1. Γ 對平均自由徑、平均自由時間的影響
 2. 顆粒數目對平均自由徑，平均自由時間的影響
 3. 擴散係數與平均自由徑、平均自由時間的關係
- 五、固定頻率下，探討「多顆粒」的速率分布
 1. Γ 對速率分布的影響
 2. 顆粒數目對速率分布的影響

參、研究設備及器材

(一)低音喇叭	(八)壓克力圓盒(內徑 19cm、深 1.9cm)
(二)波形產生器(function generator)	(九)BB 彈(直徑 0.635cm，重 0.115g)
(三)三用電表	(十)奇異筆補充液
(四)攝影機	(十一)ImageJ
(五)三腳架	(十二)Windows Movie Maker、
(六)He-Ne 雷射	(十三)C++
(七)水平儀	(十四)Extra Movie To GIF

肆、研究過程與方法

一、研究原理

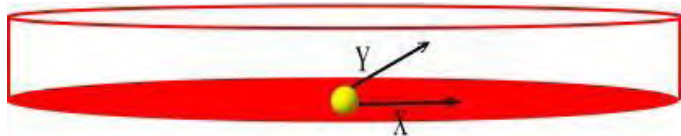
(一)顆粒系統

在振動平面上，顆粒系統的運動情形大致可分為四種：

1. 當顆粒的位置幾乎不變，沒有擴散情形，系統呈現類固體行為。
2. 當顆粒有位移，但擴散係數不大時，系統呈現黏稠流體行為。
3. 當顆粒的擴散係數大，但運動情形不類似理想氣體，系統處在複雜的擴散行為。
4. 當顆粒的運動行為類似理想氣體，系統呈現類氣體行為。

(二)類二維顆粒系統

一般的顆粒實驗中，無法創造完全二維的情況，因為顆粒是在三維空間下碰撞。這使得實驗複雜且難以觀察。但若使第三個維度大小接近顆粒尺寸，並且遠小於其他兩個維度，就可以完成一個類似平面的類二維顆粒系統，本實驗即在探討此類二維顆粒系統。



(三) Γ (振動床最大加速度與重力加速度的比值)

振動床以一個穩定的振幅 A 和角速度 ω 上下振動。我們可以把振動床的運動描述為

$$y(t) = A \sin(\omega t)$$

其中 $y(t)$ 為振動床的位置、 $\omega = 2\pi f$

而在此我們使用一個無因次的參數 Γ 描述振動

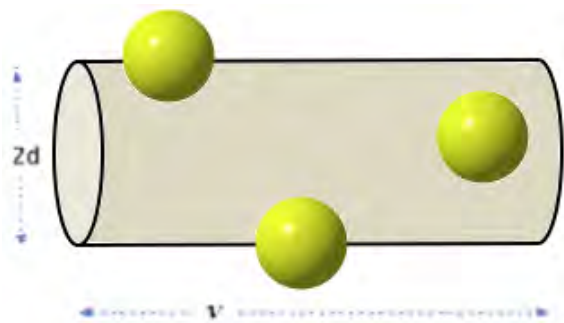
$$\Gamma = A \omega^2 / g$$

表示振動床的最大加速度與重力加速度的比值

(四)擴散行為

(一)平均自由徑、平均自由時間

在運動的顆粒中，若兩個顆粒的運動中心線距離小於兩倍半徑，則兩者將會發生碰撞。在三維運動中，顆粒可看成被一半徑為其直徑 d 的球包圍，所以在二維隨機擴散運動中，顆粒的碰撞等效面積 σ 為其直徑 d 的兩倍：



在 t 單位時間內所走的距離為 Vt ，所掃過的面積則為 $V\sigma t$ ，若顆粒的面密度為 ρ ，則 t 單位時間內所遇到的顆粒數為 $\rho V\sigma t$ 。設 τ 為兩次碰撞的平均時間，則在 t 時間內遇到的顆粒數為 t/τ ，遇到的顆粒數即為碰撞次數，所以：

$$\rho V\sigma t = \frac{t}{\tau} \quad \tau = \frac{1}{\sigma\rho V} = \frac{1}{2d\rho V} \quad \lambda = \tau V = \frac{1}{2d\rho}$$

其中 λ 為平均自由徑、 τ 為平均自由時間、 V 為速度

(二)擴散係數

當時間間隔 t 與平均平方位移 $\langle x^2 \rangle$ 呈線性關係時，其斜率稱為擴散係數 D 。

理想氣體中，擴散係數 D 和顆粒在空間中的密度 ρ 關係為：

$$D = \frac{\langle x^2 \rangle}{t} = \frac{\lambda^2}{\tau} = \frac{V}{\sigma\rho} = \frac{V}{2d\rho}$$

由此看出，在理想氣體中，擴散係數 D 和面密度 ρ 呈反比

二、背景及標記顆粒

(一)對於我們的壓克力圓盒，因為盒蓋在日光燈下會反光，所以我們在拍攝時用黑色垃圾袋將蓋子的反光消除。

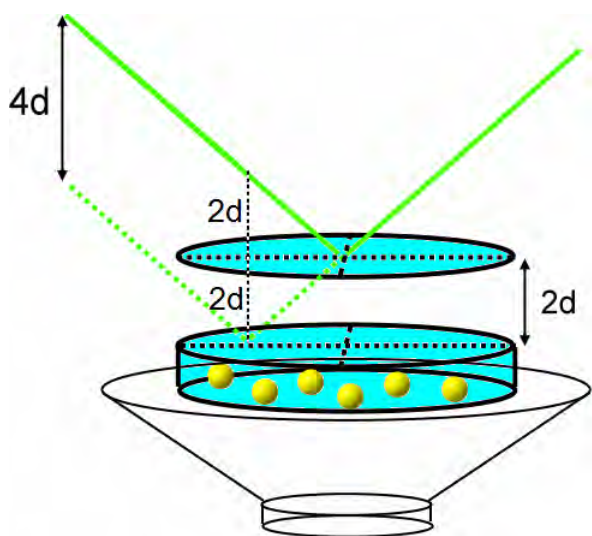
(二)我們將透明壓克力圓盒的底部噴漆成黑色，使拍攝時的背景成為單純的黑色

(三)因為普通的 BB 彈是黃色的，但 ImageJ 只能分析一顆顆粒，所以我們只留下一顆黃色的 BB 彈作為標記顆粒，其餘的染黑作為背景顆粒。在進行影像處理時我們能將背景顆粒消除，留下標記顆粒的位置進行分析。

三、比例尺測量

實驗中攝影機固定在振動台的上方，其拍攝出的相片，長度單位為像素，我們必須將像素轉換為普通的單位。我們在振動台上貼一張畫有 5cm、10cm 長度的白紙。用攝影機拍攝，再用相同的方法做影像分析，求出線段長度。

四、振幅測量



1.一道光射向振動平面，再反射到屏幕上，掃出一段距離。

2.設振幅為 d ，則振動台最低位置與最高位置相距 $2d$

3.垂直畫輔助線，會形成一平行四邊形，平行四邊形對邊相等，又等腰三角形垂線平分底邊，所以雷射光在屏幕上掃出的距離為 $4d$ 。

但實際上，光點打在屏幕上的長度為 0.3cm ，而光點掃出的直線的頭尾是半橢圓形，因此測量振幅時，我們先量出頭尾的長 L ，減去光點長度(去頭去尾)，得到光點實際移動的長度 $=L-0.3$ ，所以 **振幅** $=\frac{(L-0.3)}{4}$ 。

而為了確定振動平面 A 是否水平，我們在兩個不同的方向打雷射，測量時兩道雷射掃過的長度 L 有些微不同，所以我們將測量到的振幅數據取平均值。

五、裝置圖

(一)振動台



振動台是由壓克力圓盒用三秒膠水平黏在喇叭上所組成，其中壓克力圓盒有蓋子，限制顆粒在垂直方向的運動範圍(約只有三倍的 BB 彈直徑)，而圓盒外側底部使用黑色噴漆噴黑，製造黑色的背景。

(二)顆粒在振動台內的情形

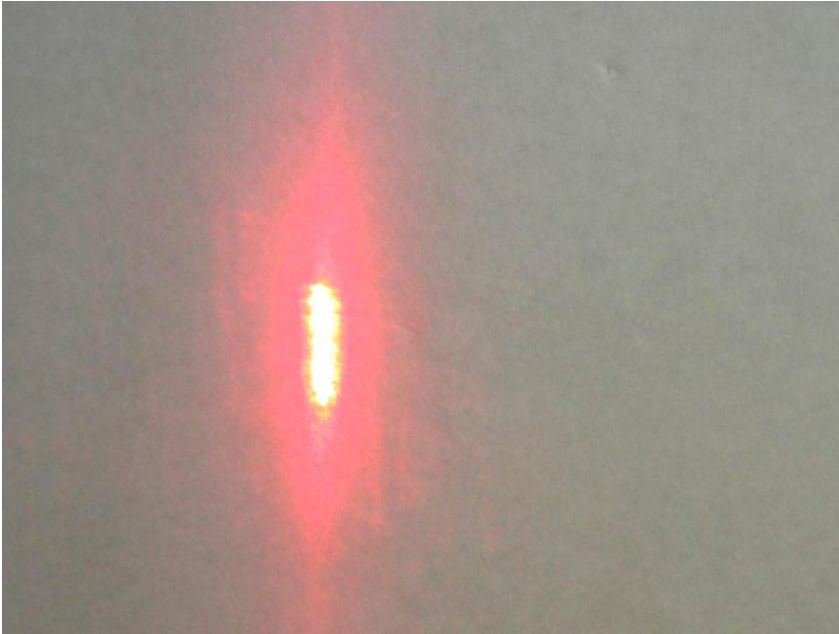


振動台在振動的任一時刻必須是水平的，所以我們須不時用水平儀調整。若為水平，那麼顆粒即分布均勻。若不水平則振動時全體顆粒會偏向，則無法觀察運動行為。

(三)振幅測量

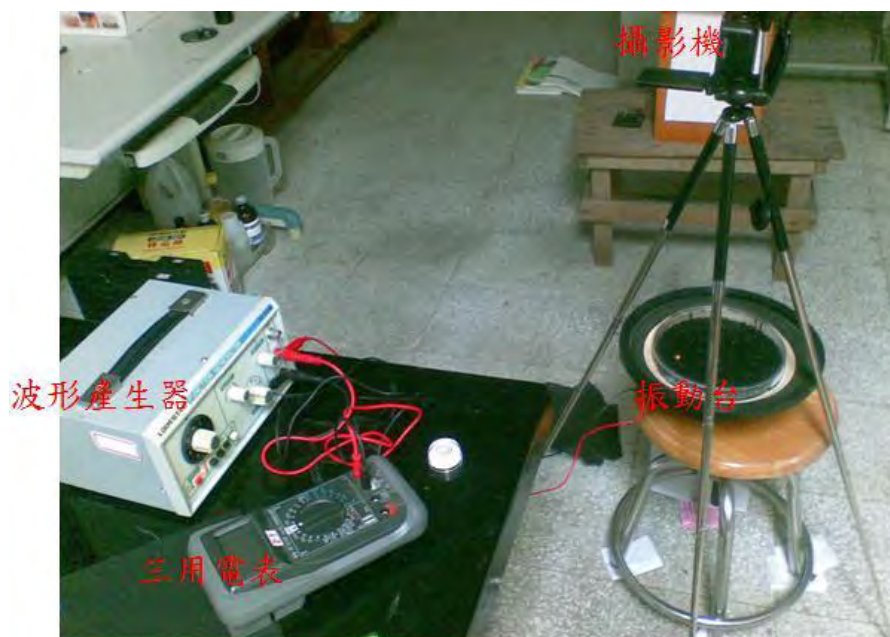


上圖為測量振幅時的裝置圖，因為拍照時曝光時間僅為 $1/60$ 秒，所以看不清楚光點移動的情形。



上圖為曝光時間 1/8 秒時拍攝得的光點移動圖，中央紅白色的是光點移動所掃出的直線，而周圍暗紅色是漫射到屏幕上的些微紅光。而我們又測量到在不同方向入射光線時，光點掃出的長度幾乎相同(約只相差 0.05cm)。這顯示振動台是幾乎是垂直振動，所以光點在不同方向掃出相同長度的直線。

(四)顆粒運動攝影

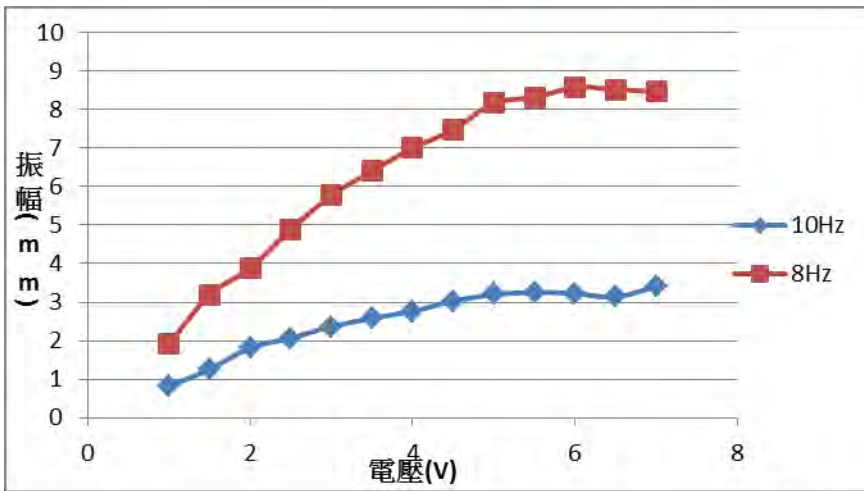


攝影機拍攝的時間為 10 秒，在這 10 秒內，若標記顆粒(圖中的黃色顆粒)打到圓盒的側壁，則情況變得複雜，我們會重拍。所以數據中的標記顆粒只與背景顆粒和振動台的上、下壁碰撞。

伍、研究結果

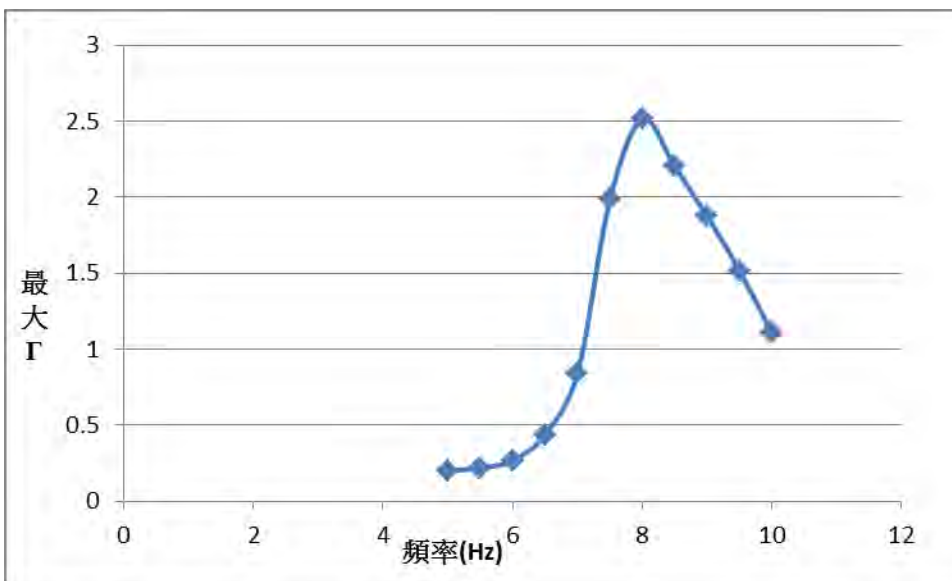
實驗一:電壓、頻率與喇叭振幅的關係

(一)電壓對振幅的關係



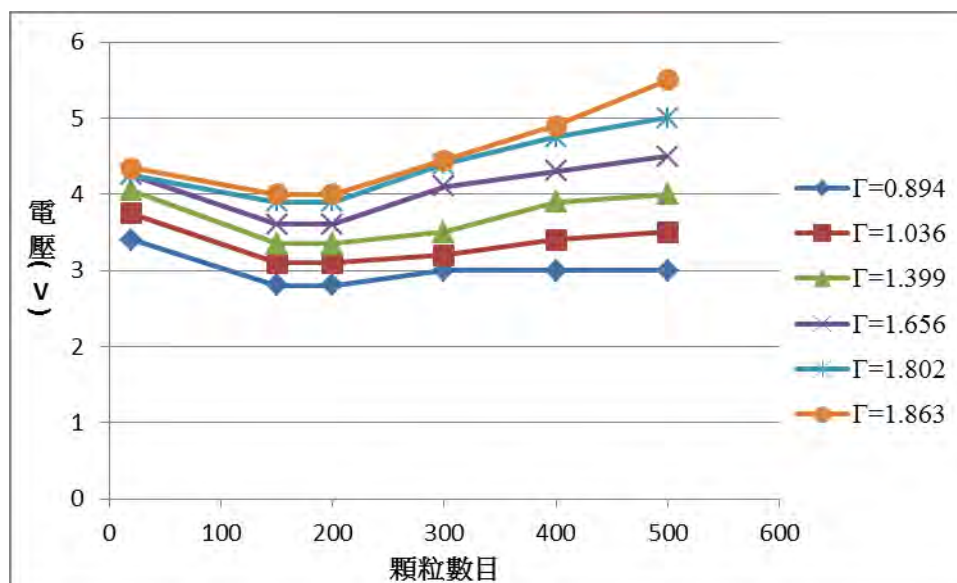
1. 我們僅測量兩組完整的數據，其中同電壓下 8Hz 的振幅>10Hz 的振幅
2. 由此圖可看出，輸入電壓與振幅呈正相關，但在約 5V 後，振幅增加程度減少，我們推測這和喇叭本身的限制有關。

(二)不同頻率對最大 Γ 的影響



1. 得知最大振幅有其限制後，我們測量不同頻率下，可達到的最大 Γ 。
2. 由上圖可知，8Hz 時可達到的 Γ 最大。因為 8Hz 以上振幅太小， Γ 小；8Hz 以下頻率太低，以致於 Γ 值太小。因此最後我們實驗固定振動頻率為 8Hz。

(三)固定 Γ 下，顆粒數目對輸入電壓的影響



1. 值得注意的是，並非顆粒數目越多，所需的電壓就越高；且顆粒數目 150 顆和 200 顆時的數據相同。這可能和顆粒與振動平面的交互作用有關。
2. 之後我們利用此數據固定 Γ 值，測量顆粒數目對擴散係數的關係。

實驗二: 固定頻率下，探討「單一顆粒」的運動行為

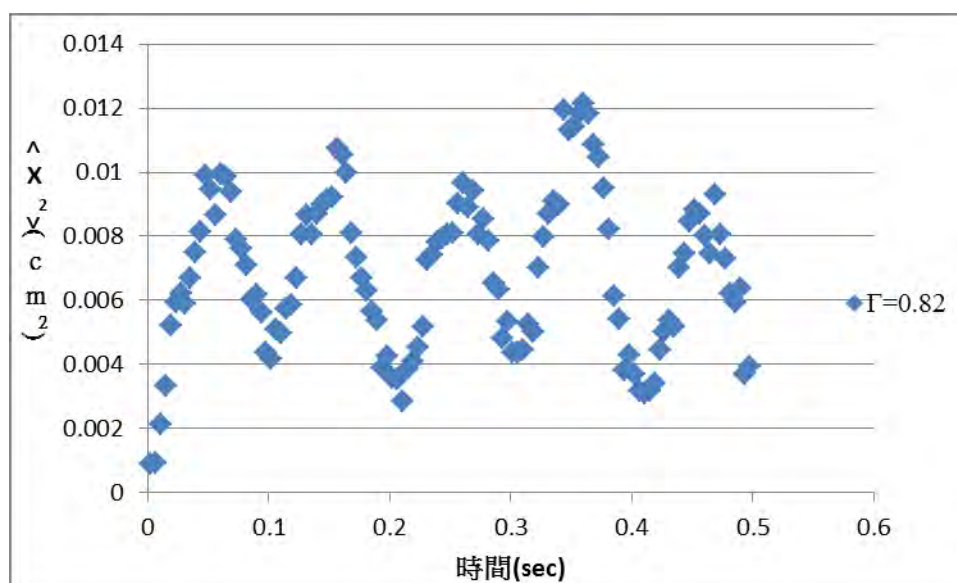
(一) Γ 對「單一顆粒」的運動影響

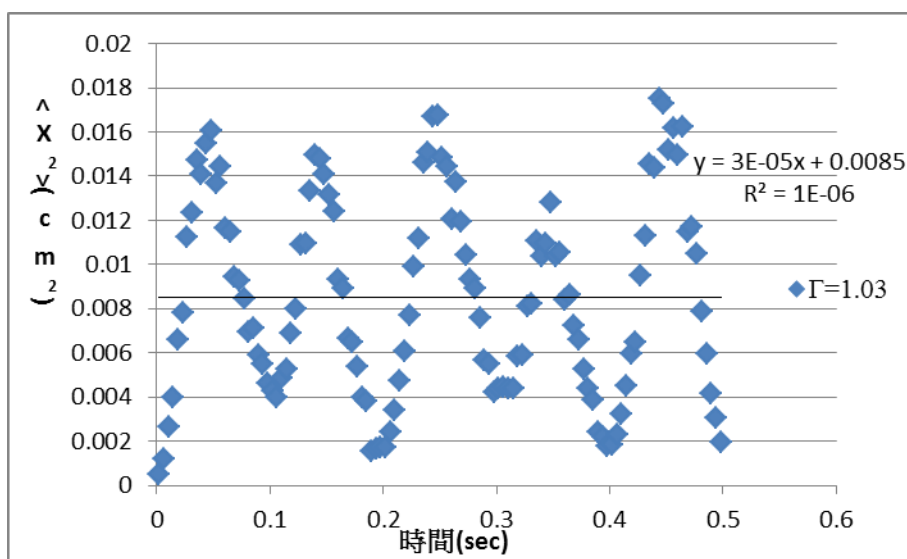
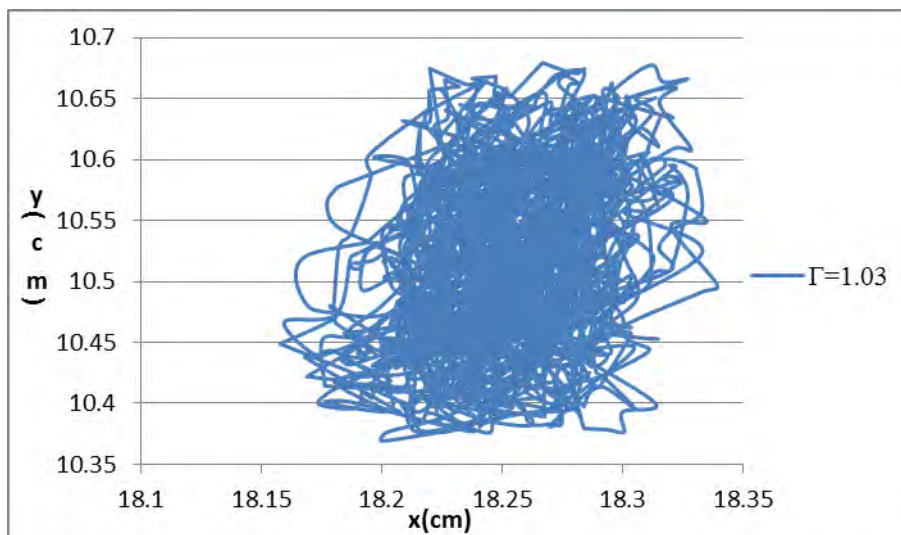
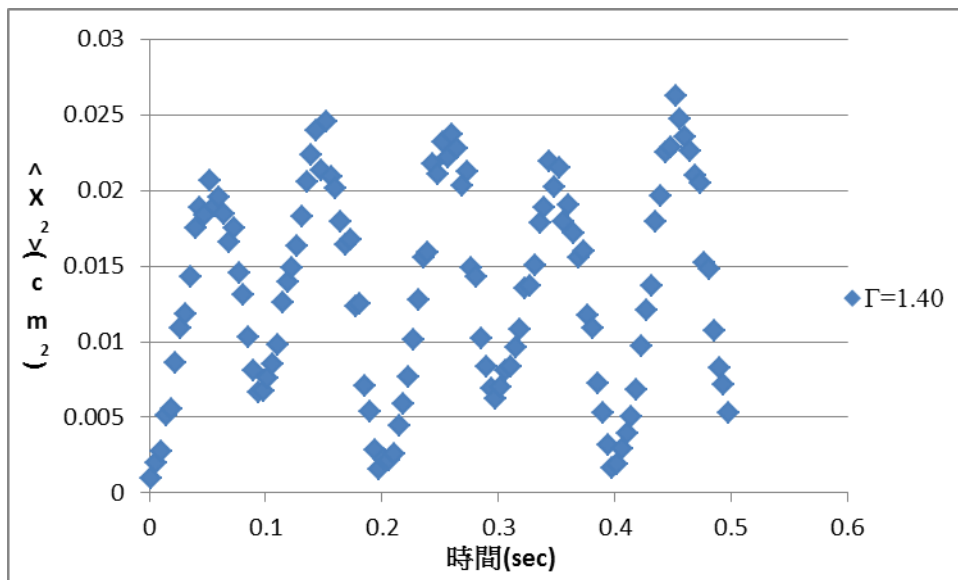
在我們的實驗中

- (1) $\Gamma < 1.5$ 時，顆粒會彈起，但沒有明顯的擴散(擴散係數 < 0.1)
- (2) $1.5 < \Gamma < 1.7$ 時，顆粒彈起，但沒有與上蓋碰撞
- (3) $\Gamma > 1.7$ 時，顆粒才能與上蓋碰撞

所以我們分成 $0 < \Gamma < 1.5$; $1.5 < \Gamma < 1.7$; $1.7 < \Gamma < 2.2$ 四種情況討論

1. $0 < \Gamma < 1.5$

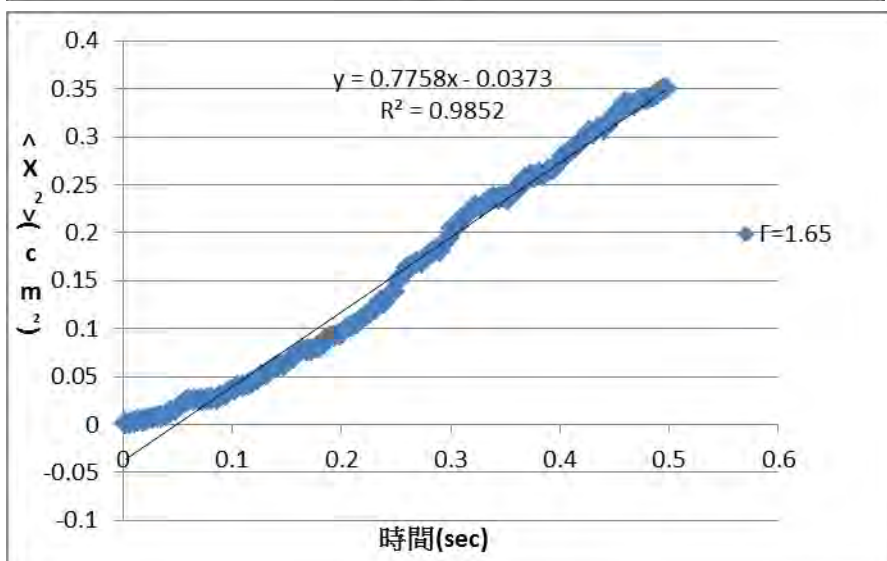
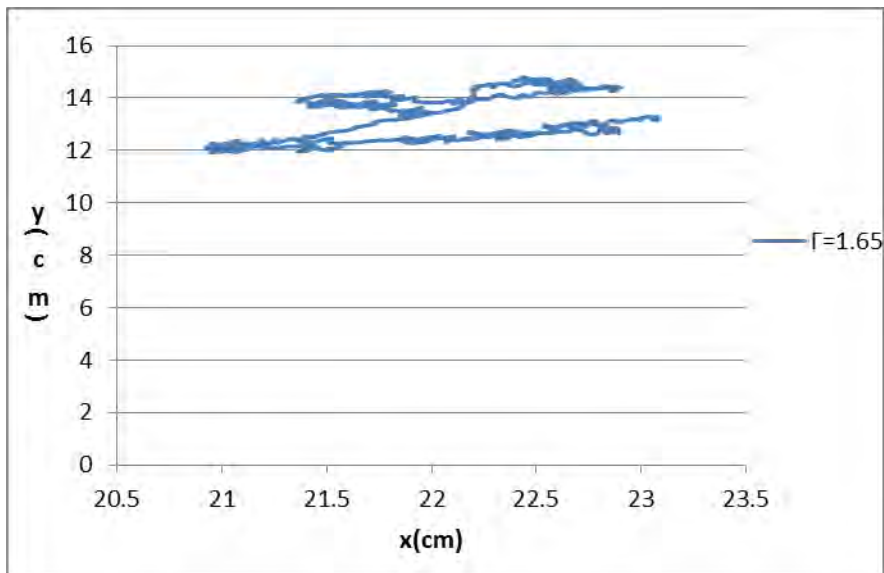
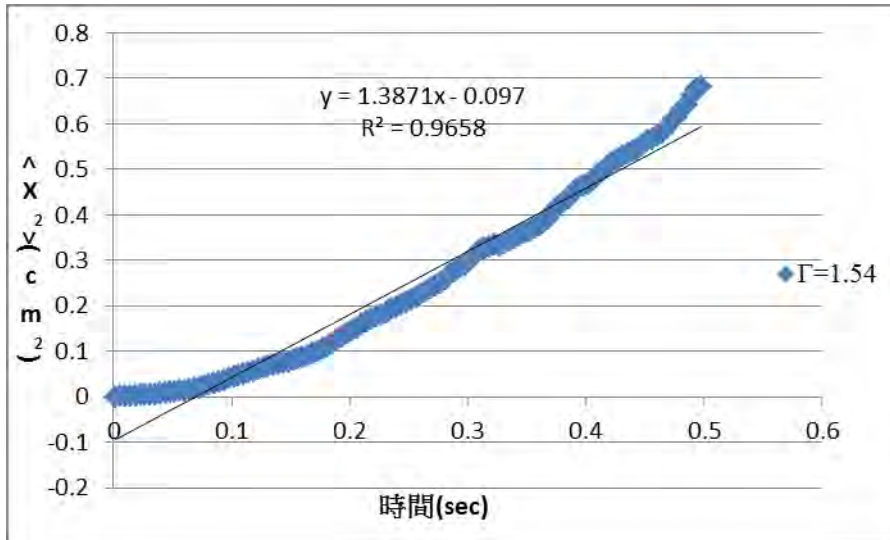




(1) 上兩圖分別為 $\Gamma=1.03$ 時的軌跡圖與 $\langle x^2 \rangle$ -t 圖，此範圍共做了三種 Γ ，分別為 0.82、1.03、1.40，其圖形皆和上圖類似。

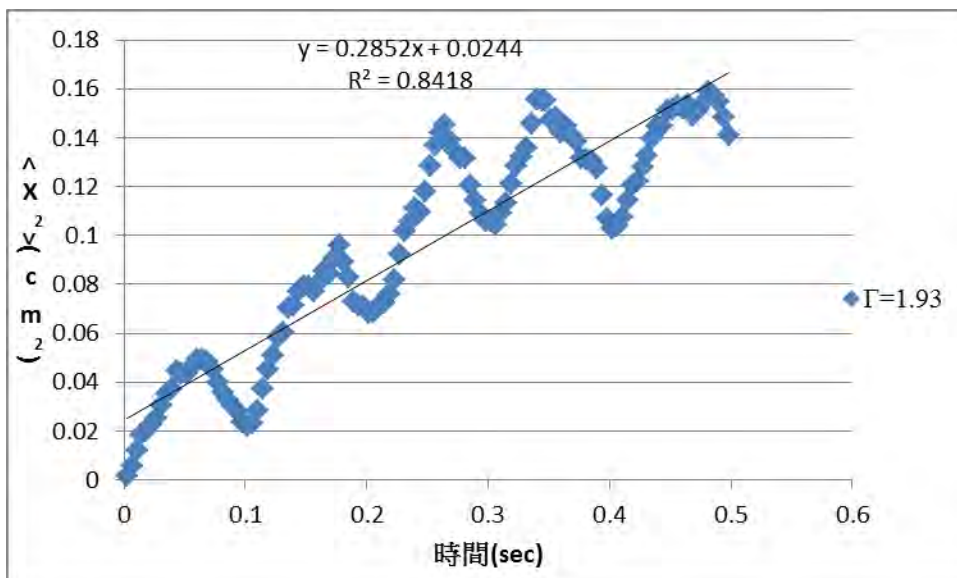
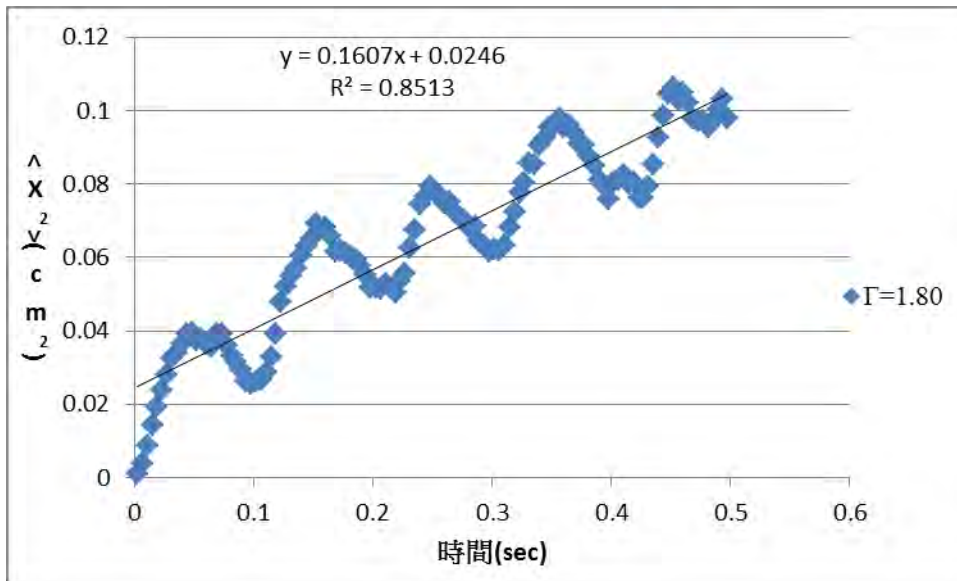
- (2) 運動軌跡圖顯示顆粒在原位置附近晃動； $\langle x^2 \rangle$ -t 圖顯示顆粒沒有整體的擴散現象。
- (3) 如此一下遠離原點，一下又回原點的狀態，我們稱作類固體行為。

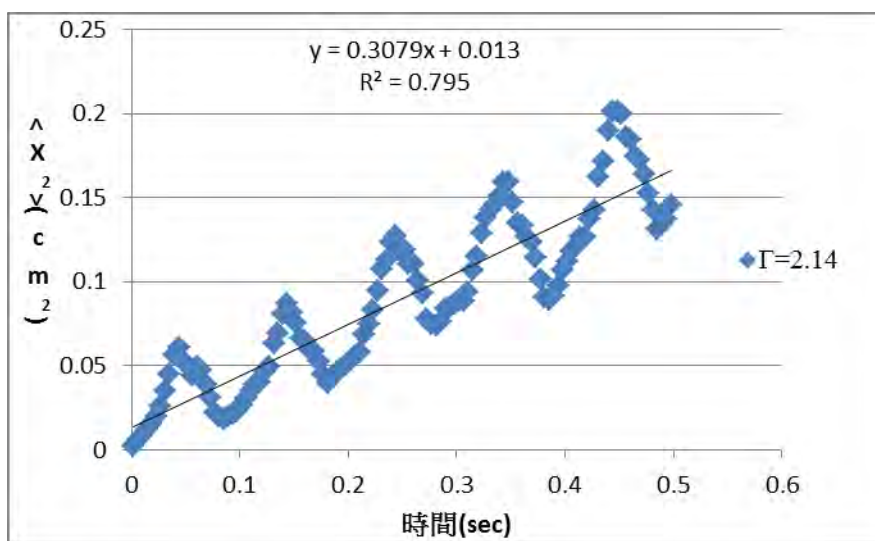
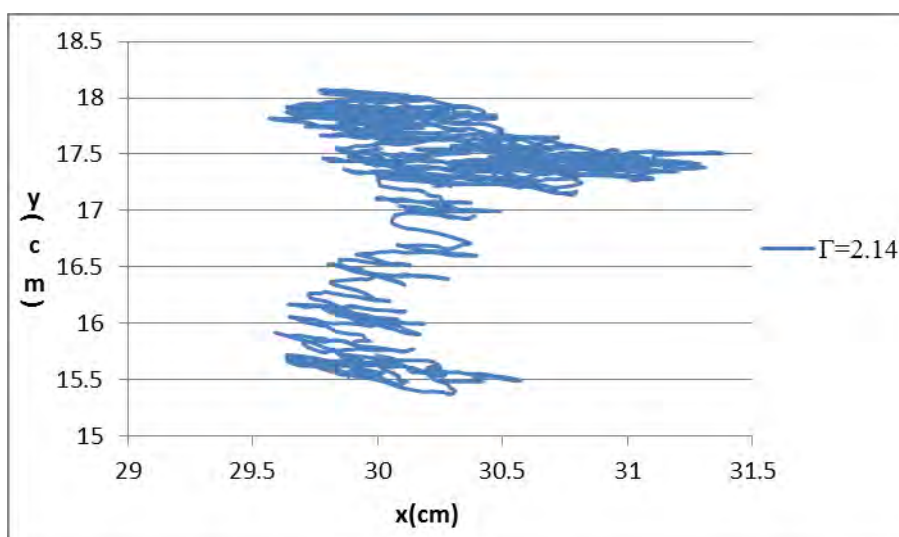
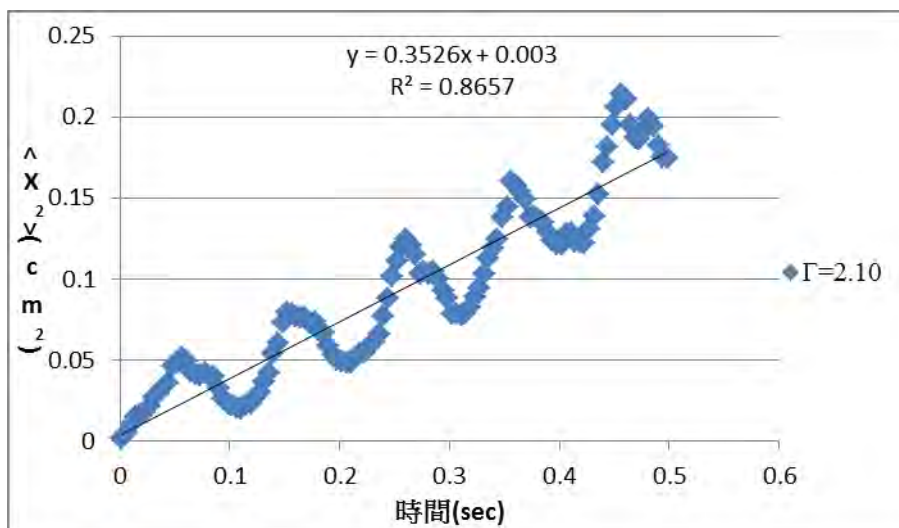
2. $1.5 < \Gamma < 1.7$



- (1) 上兩圖分別為 $\Gamma=1.65$ 時的軌跡圖和 $\langle x^2 \rangle - t$ 圖，此範圍共做兩種 Γ ，分別為 1.54 與 1.65，其圖形皆和上圖類似。
- (2) 運動軌跡圖中顯示顆粒 10 秒內轉折三次； $\langle x^2 \rangle - t$ 圖中顯示顆粒在 0.5 秒內會穩定地遠離原點，有擴散的現象。
- (3) 我們不能確定這是否是類氣體的性質(D 與 ρ 呈反比)。值得注意的是，這範圍內顆粒沒有明顯跳動，短時間內(0.5 秒)不容易打到圓盒上蓋，所以水平運動的能量是由圓盒底部碰撞摩擦所提供。
- (4) 顆粒有擴散行為，但擴散係數不大，我們稱此為黏稠流體行為。

3. $1.7 < \Gamma < 2.2$



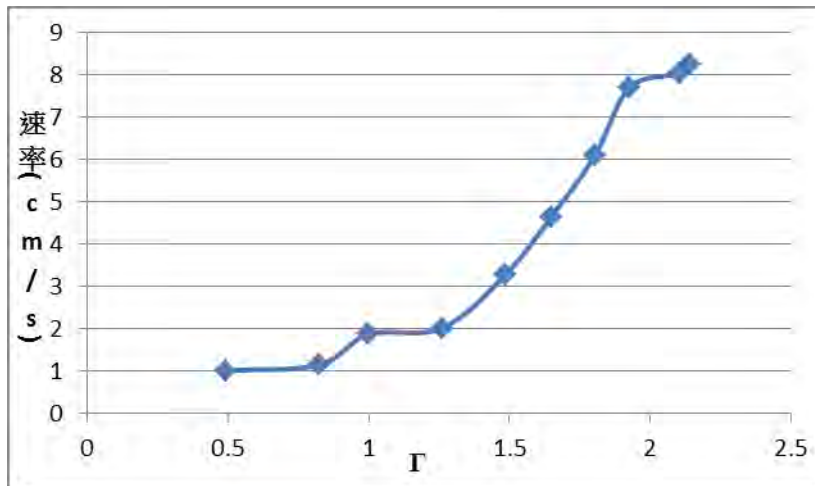


(1) 上兩圖為 $\Gamma=2.14$ 時顆粒的運動軌跡圖和 $\langle x^2 \rangle$ - t 圖，此範圍共做四種 Γ ，分別為 1.80、1.93、2.10、2.14，其圖形皆和上圖類似。

- (2) 運動軌跡圖中顯示顆粒在 10 秒內轉折相當多次； $\langle x^2 \rangle - t$ 圖中整體有擴散的趨勢，但往原點偏折。顆粒雖有擴散現象，但又會被干擾。
- (3) 我們認為這是因為顆粒打到上蓋，所以擴散會被干擾而折返。至於 $1.5 < \Gamma < 1.7$ 時，顆粒不常碰到上壁，所以擴散沒被干擾。
- (4) 顆粒有擴散行為，但擴散係數不大，我們稱此為黏稠流體行為。

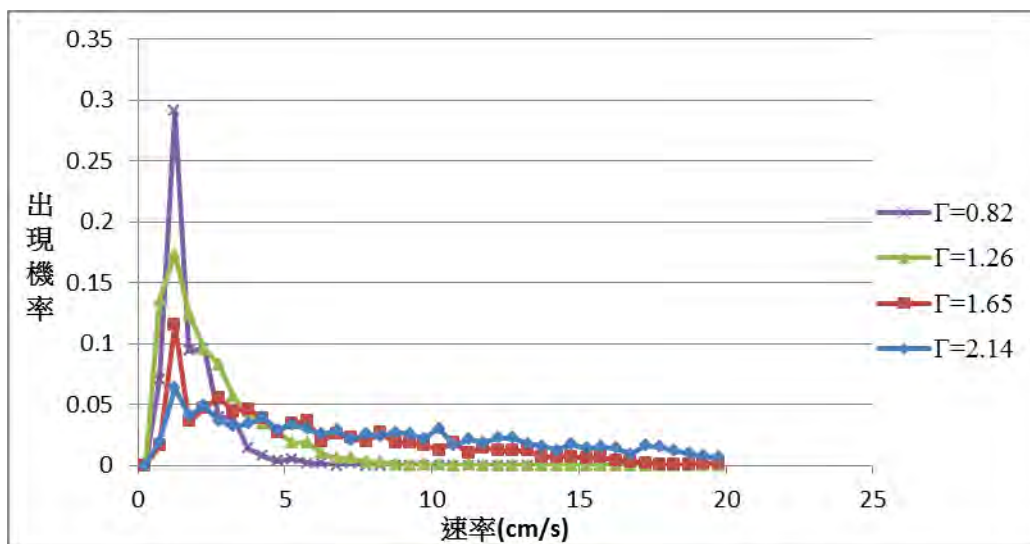
(二) Γ 對「單一顆粒」與盒子碰撞後的水平速率的影響

(1) Γ 對平均速率的影響



可以看出 Γ 越大與平均速率呈正相關，且 $\Gamma < 1.4$ 時增加幅度不明顯

(2) Γ 對速率分布的影響

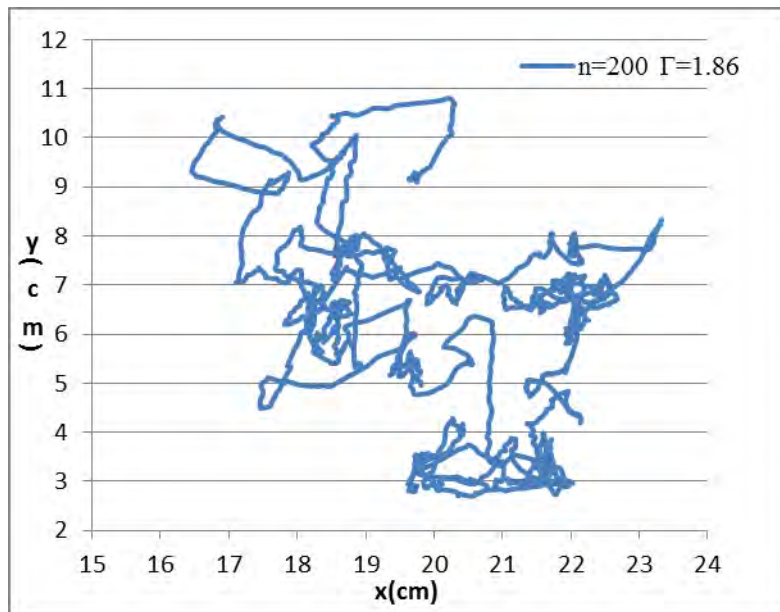


上圖為各速率在不同 Γ 下出現之機率分布圖，而可發現類固體($0 < \Gamma < 1.5$)和黏稠流體($1.5 < \Gamma < 2.2$)的分布都有共同特徵：

- i. Γ 越大，峰值越低，圖形漸為平緩向右
 - ii. 1.5cm/s 是顆粒與振動台碰撞後的最大可能速率
- 所以這些是「顆粒與振動台碰撞」的共同特徵。

實驗三:探討「多顆粒」的擴散係數

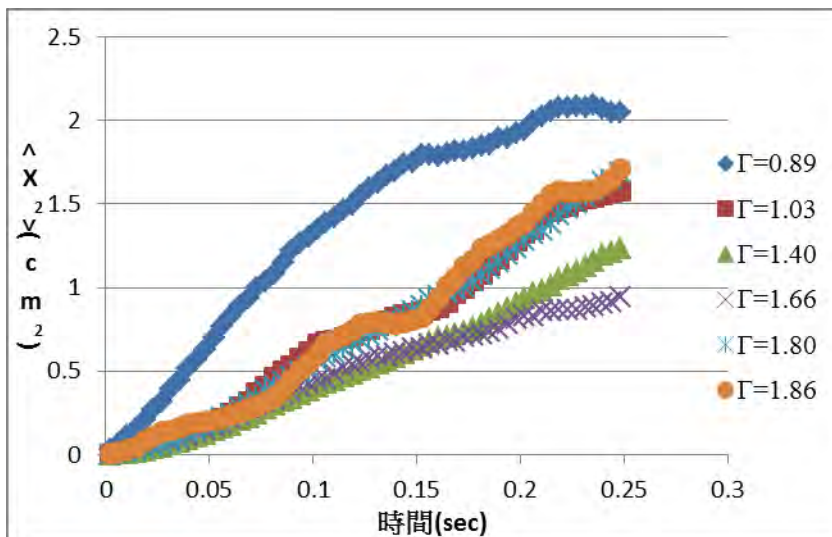
(一) 多顆粒的軌跡圖



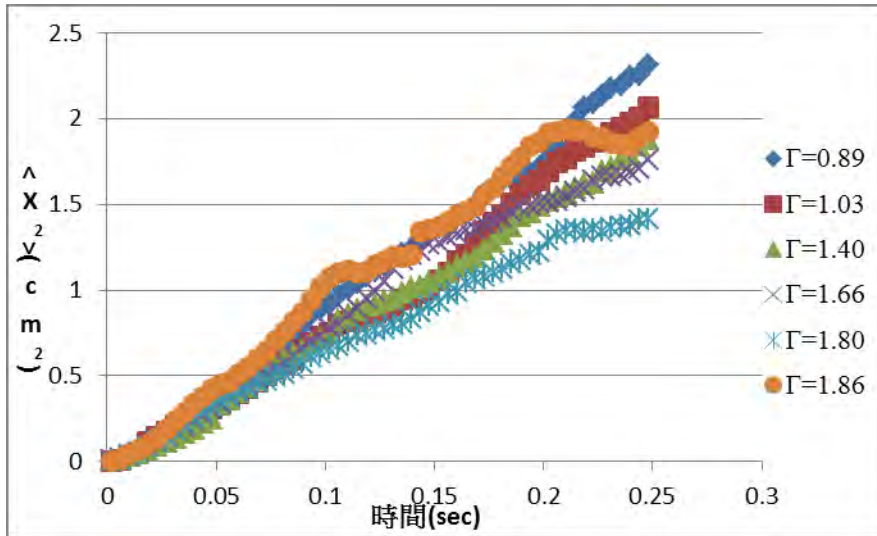
1. 以上是 200 顆， $\Gamma=1.86$ 時標記顆粒的軌跡圖。
2. 多顆粒時，所有軌跡圖都像上圖是隨機運動，因為標記顆粒受背景顆粒撞擊，且沒有固定的撞擊方向。

(二) Γ 對擴散係數的影響

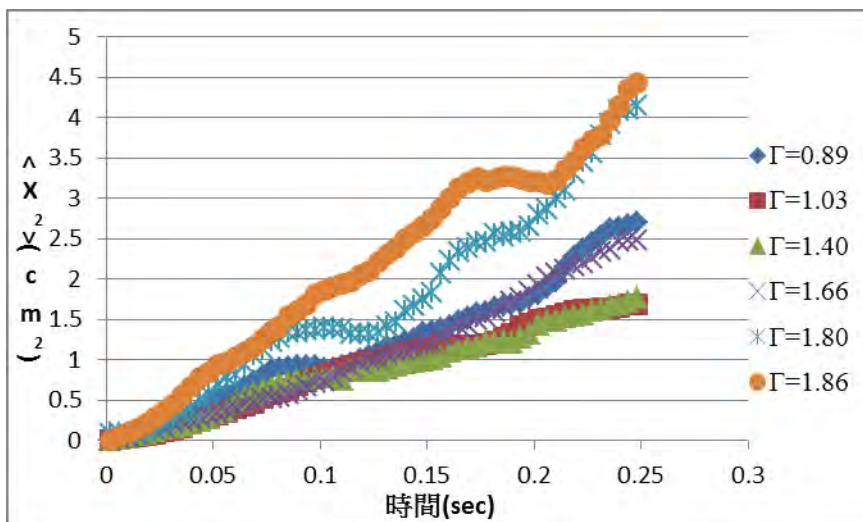
200 顆:



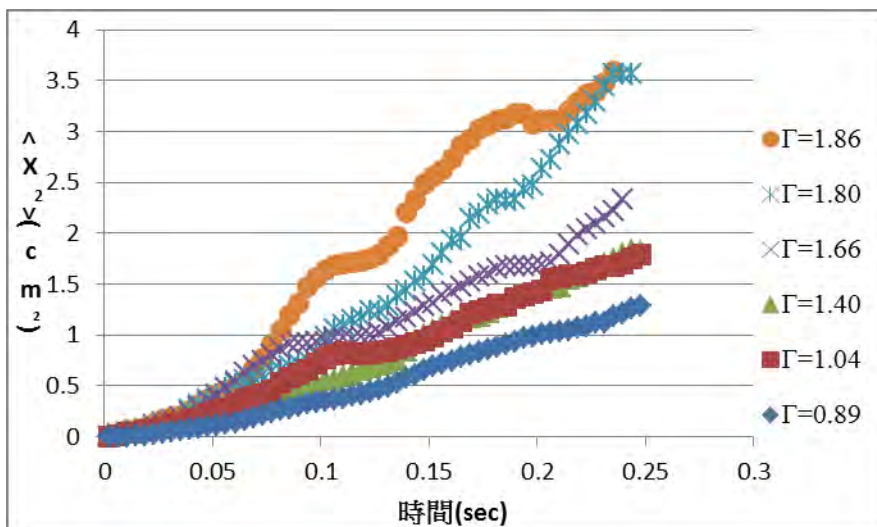
300 顆:

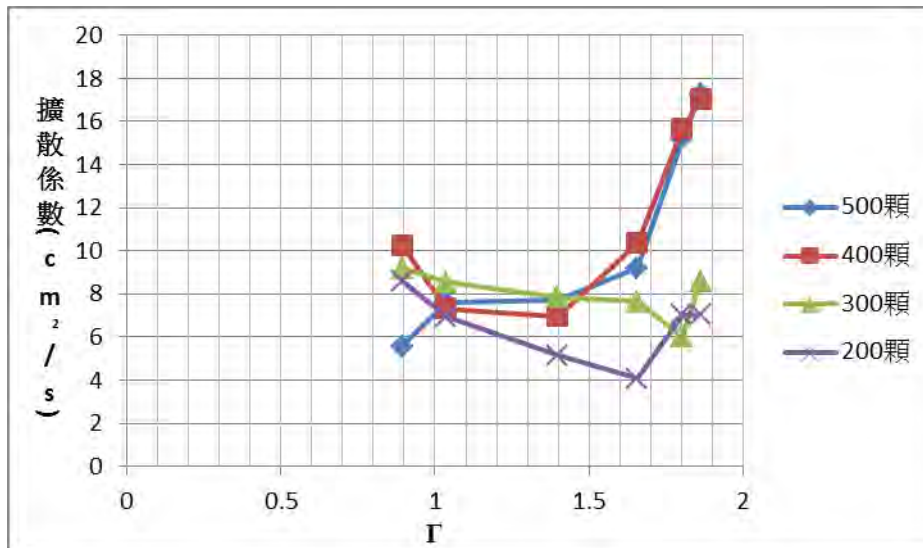


400 顆:



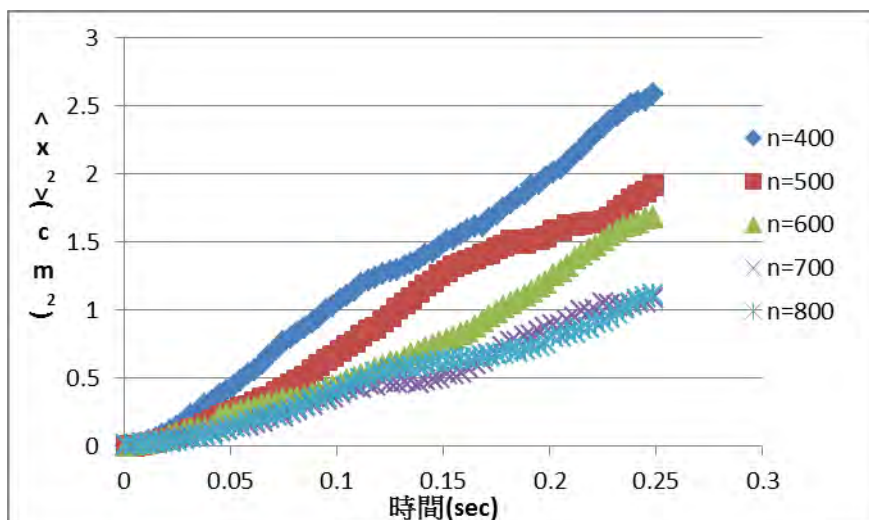
500 顆:

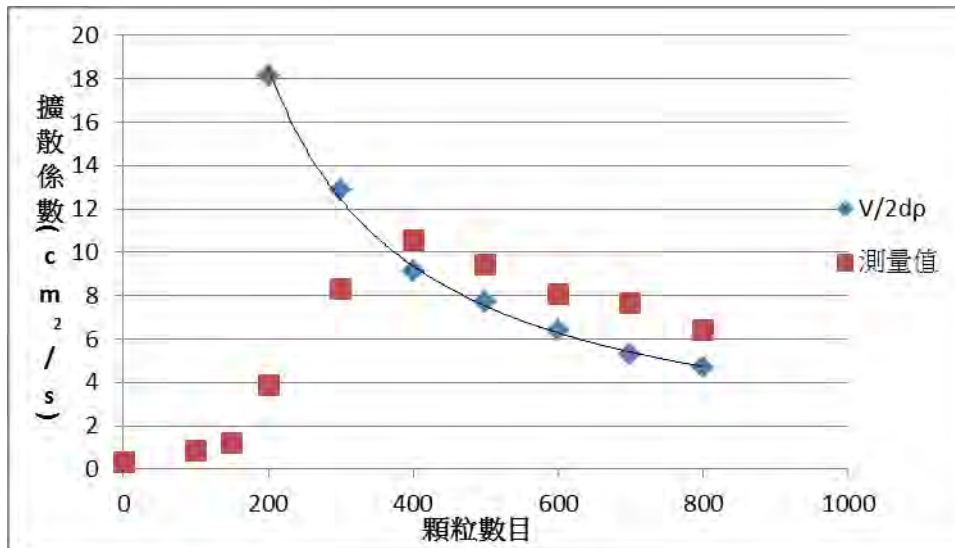




1. 多顆粒的擴散和單一顆粒有些不同。單一顆粒中， $\Gamma < 1.5$ 時不會有整體的擴散，但多顆粒有。因為顆粒基本上是在原位置無方向性的晃動，而多顆粒時顆粒晃動造成互相碰撞，所以有擴散現象。
2. 在顆粒數目 200~300 顆、 $0.9 < \Gamma < 1.7$ 時，擴散係數隨著 Γ 增加而減少。我們認為 Γ 越大，顆粒和盒子碰撞的強度越大，碰撞後速率更趨近於「顆粒與振動台碰撞後的速率」，因為「顆粒與振動台碰撞後的速率」遠小於「顆粒間碰撞後的速率」，所以平均速率降低，擴散係數也降低。
而在 $\Gamma > 1.7$ 時，雖然顆粒已和上蓋碰撞，水平速度會降低，但可能降低的程度不大，所以擴散係數增大。
3. 在顆粒數目 500 顆時， Γ 越大，顆粒間碰撞強度增強，使顆粒運動的水平速率增大，造成擴散係數增大。因此 Γ 與擴散係數呈正相關，表現出類氣體的行為。
4. 在顆粒數目 400 顆時，
 $\Gamma < 1.4$ 時擴散係數與 Γ 呈負相關，是複雜的碰撞行為。
 $\Gamma > 1.4$ 時擴散係數與 Γ 呈正相關，是類氣體行為。
 所以 400 顆時是類氣體與複雜碰撞行為的交界。

(三) 顆粒數目對擴散係數的影響





1. 我們固定 $\Gamma=1.66$ 並測量其擴散係數，圖中「 $V/2dp$ 」是氣體的擴散係數公式，「測量值」為 $\langle x^2 \rangle - t$ 圖的斜率。
2. 在顆粒數目 1~150 顆時，擴散係數的值很小，因為這時顆粒受振動台的影響較大，顆粒間很少碰撞，屬於黏稠流體行為。
3. 在顆粒數目 200~400 顆時，顆粒數目增加，顆粒間碰撞次數多而增速，所以擴散係數急遽增加，呈現複雜碰撞行為，
4. 在顆粒數目 400~800 顆時，測量值大約符合 $D=V/2dp$ ，緩慢遞減，呈現類氣體行為；而 400 顆時是類氣體與複雜碰撞行為的交界。

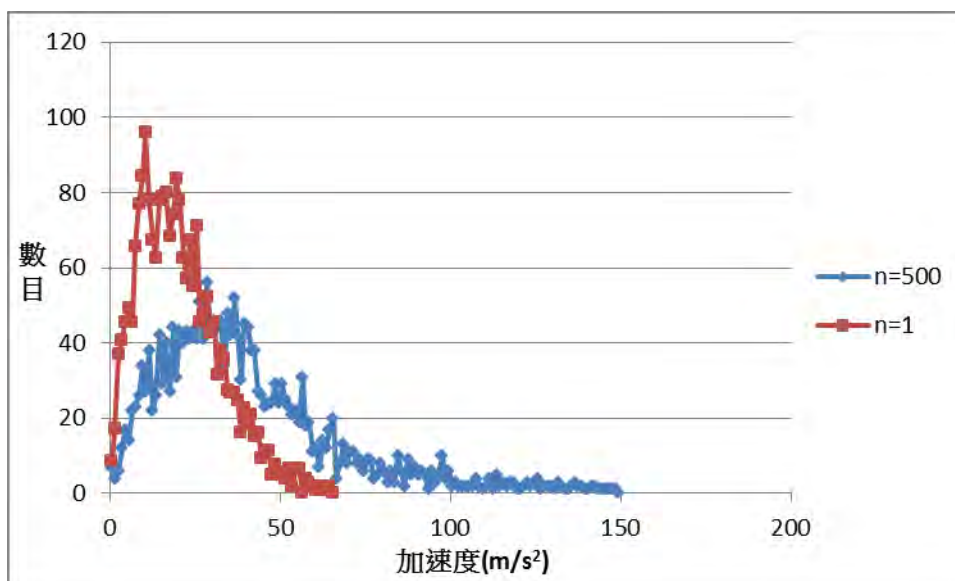
實驗四:探討「多顆粒」的平均自由徑、平均自由時間

(一) 分析方法

根據定義，平均自由徑=路徑長/碰撞次數；平均自由時間=總時間/碰撞次數

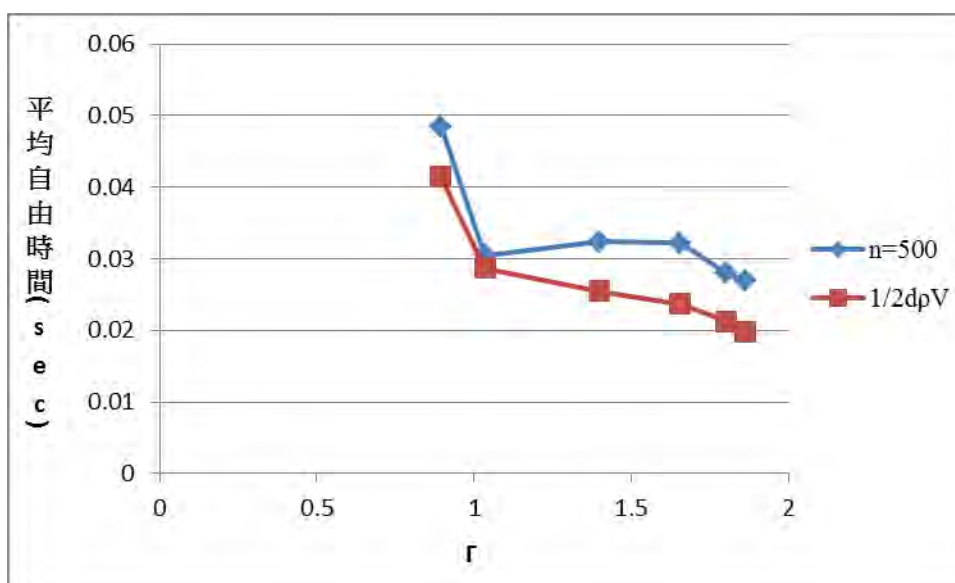
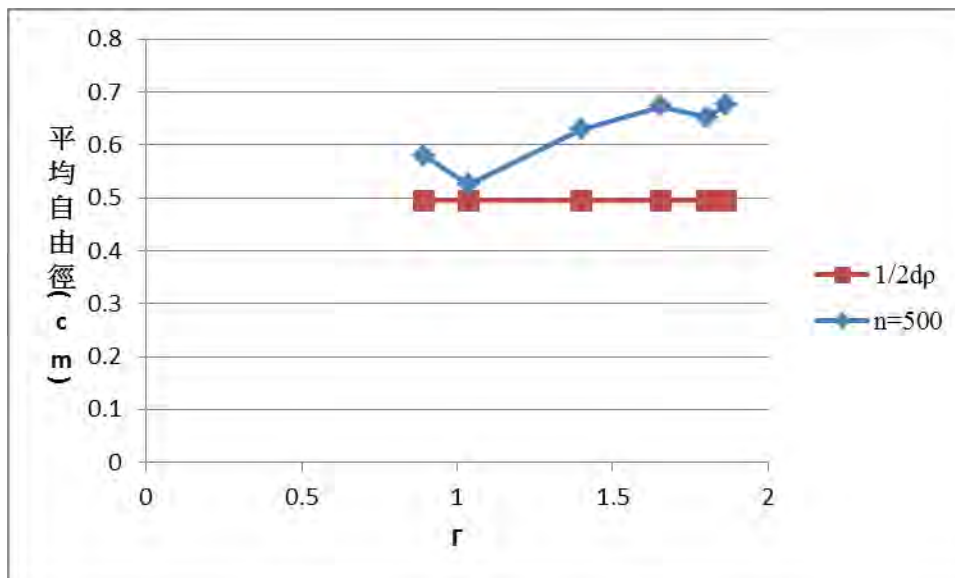
其中路徑長與總時間皆容易求得，而碰撞次數我們以加速度的數目來判斷：

顆粒每一次碰撞都會有加速度，其值會大於與振動台碰撞的(水平)加速度。因此我們先測量顆粒與振動台碰撞的加速度，在這範圍以外的加速度即假設為碰撞後的加速度。



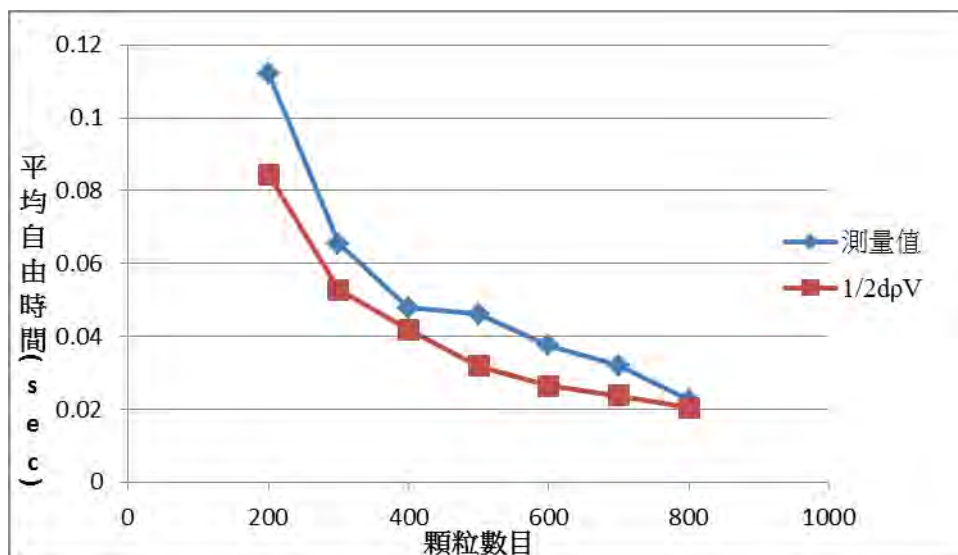
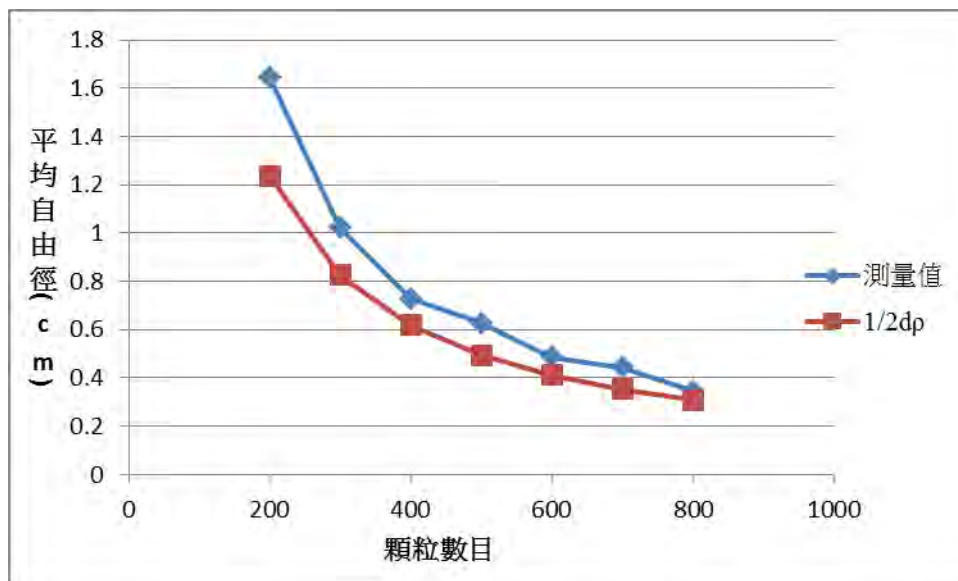
1. 上圖為 500 顆、 $\Gamma=1.86$ 時測量到的加速度之出現次數分布圖。
2. 因為標記顆粒可能被背景顆粒遮住，能分析的照片數目不一樣，所以測量到的速率數目不一樣。我們去掉前面幾個，固定速率數目=2280
3. $n=1$ 時的加速度是與振動台碰撞造成的。顆粒數目變成 500 顆後，圖形向右移且變平緩，顯示顆粒受到的水平加速度明顯增大許多，這是顆粒間碰撞造成的。
4. 以上圖 500 顆為例：
 - (1) $0 \leq a \leq 26.5$ 時， $n=500$ 時的加速度數目較 $n=1$ 時少，這是因為受顆粒間碰撞影響，與振動台的碰撞次數減少，受到的加速度增大。
 - (2) $26.5 \leq a \leq 64.5$ 時， $n=500$ 時的加速度數目較 $n=1$ 時多，這是因為顆粒間碰撞使水平速度增大，但顆粒一打到振動台後就會馬上減速，造成這範圍的加速度數目變多。
 - (3) $64.5 \leq a$ 時， $n=1$ 沒有分布，所以這範圍的數目即是 $n=500$ 時顆粒間碰撞的次數。

(二) Γ 對平均自由徑、平均自由時間的影響



1. 理想氣體的平均自由徑，在二維情況是 $\frac{1}{2d\rho}$ ，所以理論上平均自由徑不隨顆粒速率改變，也就是不受 Γ 影響。由上個實驗得知 $n=500$ 時是類氣體，我們分析這時的平均自由徑，發現變化不大，平均為 0.622cm ，比理論值多 25% 。
2. 理想氣體的平均自由時間，在二維情況是 $\frac{1}{2d\rho v}$ ，隨著速率增加而減少，又 Γ 與速率呈正相關，所以理論上平均自由時間與 Γ 呈負相關，由圖得知，測量和理論趨勢相近。
3. 雖然平均自由徑、平均自由時間都比理論值大，但其趨勢和理論是符合的，所以 $n=500$ 是類氣體行為。

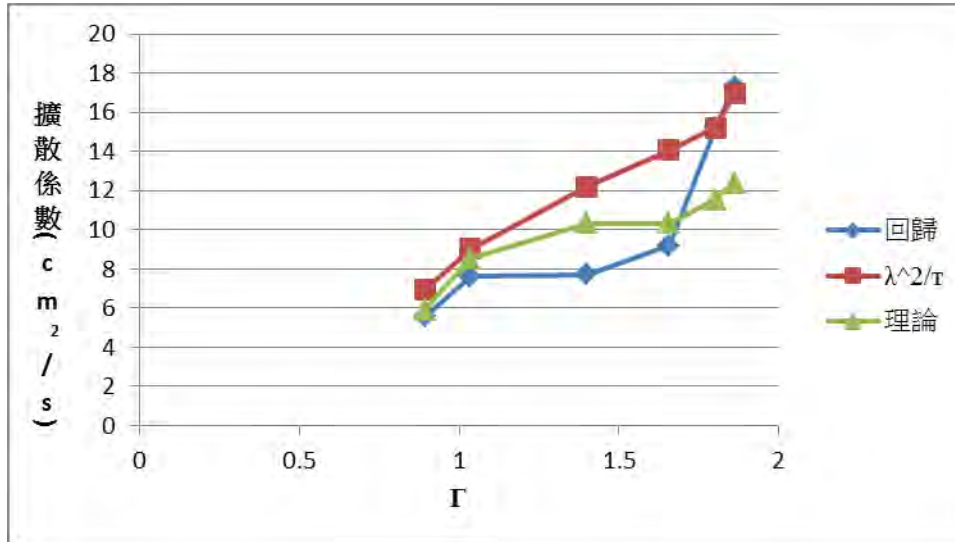
(三)顆粒數目對平均自由徑，平均自由時間的影響



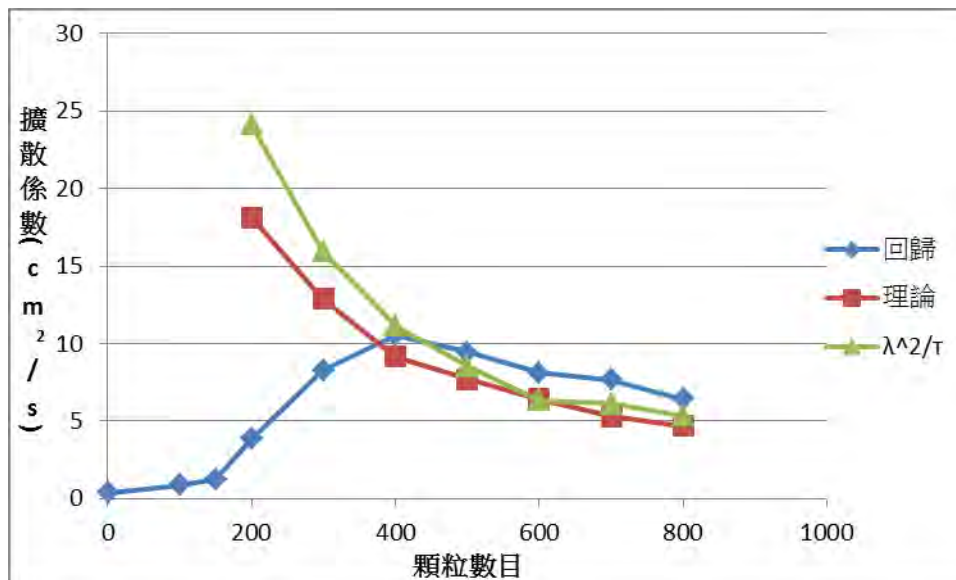
1. 理想氣體的平均自由徑 $=\frac{1}{2d\rho}$ ，平均自由時間 $=\frac{1}{2d\rho v}$ ，皆和密度呈反比。平均自由徑和平均自由時間的理論值和實驗值的趨勢皆與密度呈反比。

2. 在顆粒數目 200~400 時，測量值和理論值相差較大，顆粒數目為 400~800 時與理論相差較小，可以看出兩個範圍間的差異，但就趨勢來說，兩者都很類似反比關係，所以分析平均自由徑、平均自由時間不好分辨複雜碰撞行為與類氣體行為。

(四)擴散係數與平均自由徑、平均自由時間的關係



1. “回歸”代表用 $\langle x^2 \rangle - t$ 關係圖算出的擴散係數，
 λ^2/τ 代表用測量出的平均自由徑、平均自由時間算出的擴散係數，
“理論”代表用算出的擴散係數 $D = \frac{v}{2d\rho}$
2. 三者在 $0.89 \leq \Gamma \leq 1$ 時相當接近，之後就分散開，其中 λ^2/τ 和理論的圖形較相似，這應是因為用類似的方法分析。
3. 在 $0.89 \leq \Gamma \leq 1.66$ 時回歸曲線與理論較接近，在 $1.8 \leq \Gamma \leq 1.9$ 回歸曲線與 λ^2/τ 較接近，所以回歸曲線可以說是和 λ^2/τ 理論的綜合。
4. 三種分析方法都有其一定的準確性，而且趨勢相近，所以在類氣體中，擴散係數和平均自由徑、平均自由時間的關係約是 $D = \frac{\lambda^2}{\tau}$



1. 此圖是將實驗三-2 的擴散係數加上 λ^2/τ 所得的擴散係數做比較。
2. 相同地， λ^2/τ 和理論的圖形最相似，因為都用類似的公式分析，只是參數不同而已。
3. 由此很容易得知在 $n=1\sim150$ 、 $n=200\sim400$ 時，擴散係數和 λ^2/τ 不合，它不屬於類氣體行為，因為 $n=1\sim150$ 為黏稠流體、 $n=200\sim400$ 是複雜碰撞行為。
4. 三者在 $n=400\sim800$ 時曲線匯合，且趨勢皆相近，因此在此範圍它屬於類氣體行為。

實驗五:探討「多顆粒」的速率分布

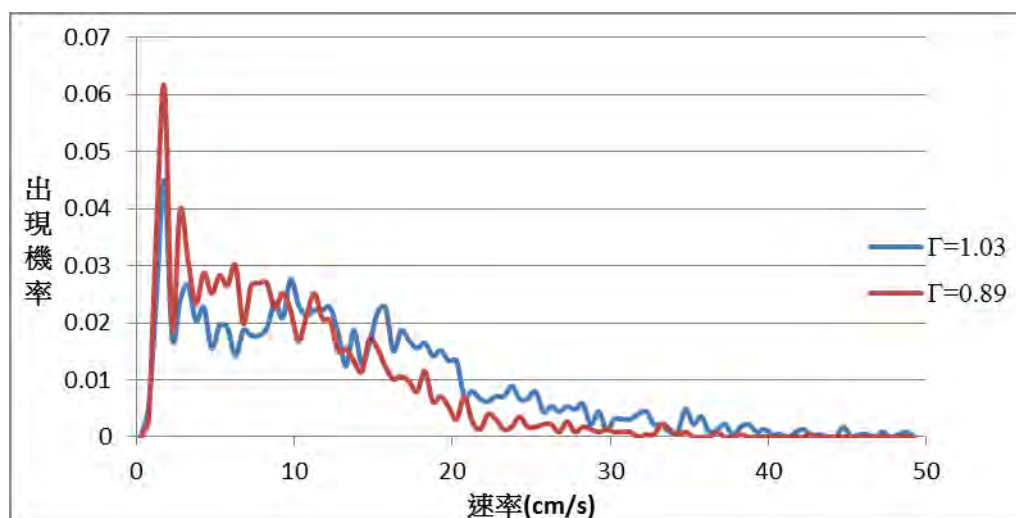
我們已知 500 顆時有類氣體行為，但光看一些參數的相對變化不夠嚴謹，因此直接做出速率分布圖，再與理想氣體中的馬克士威-波茲曼分布的圖形做比較，即可得知顆粒的狀態。

分析速率分布圖有幾個重點需注意：

1. 速率=1.5 的點 $p(1.5)$ 。「顆粒與振動台的碰撞」中， $V=1.5$ 時機率遠高於其他速率。
2. 「連續圖形」中的最高點(除了 $p(1.5)$)，即波茲曼分布中的最大可能速率 V_p 。
3. 整個圖形的形狀是否類似波茲曼分布

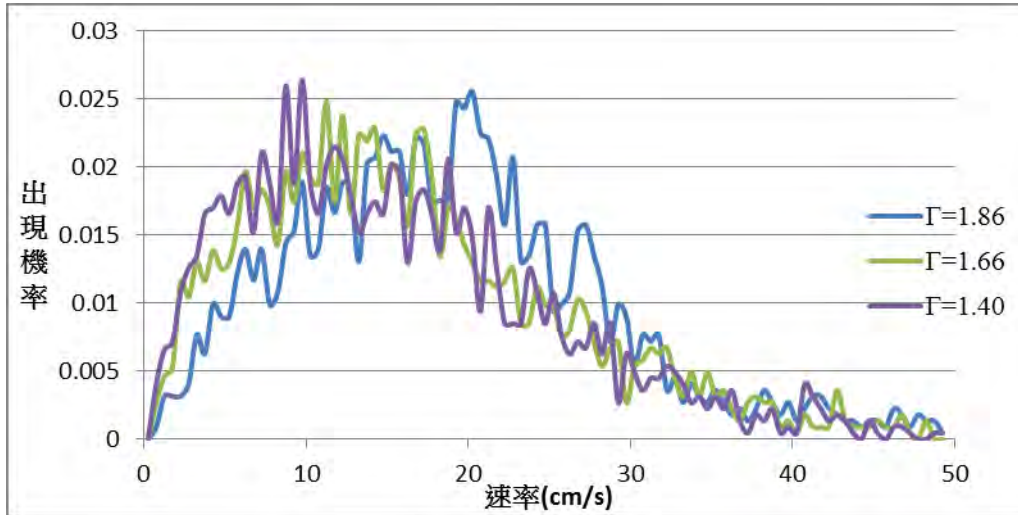
(一) Γ 對速率分布的影響(固定顆粒數目=500 顆)

1. $0 < \Gamma < 1.2$



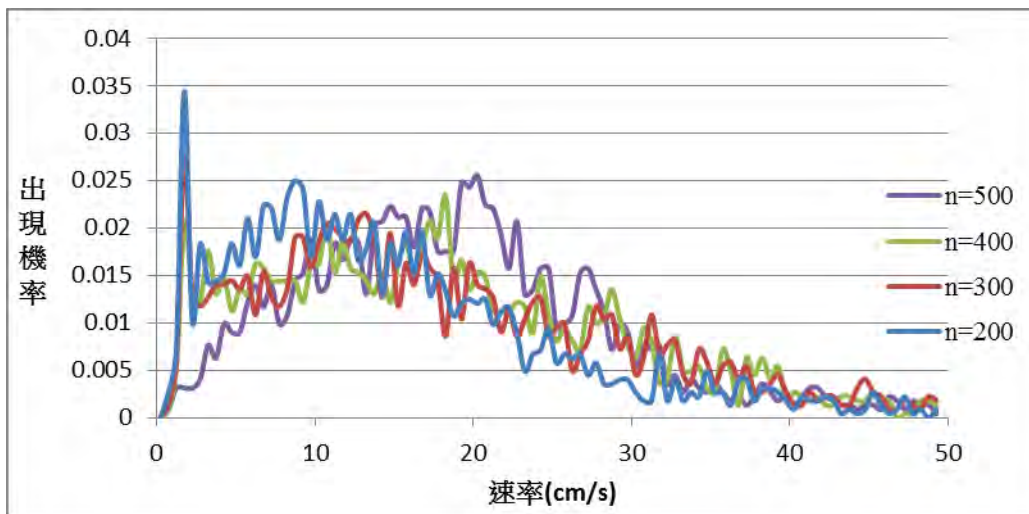
- (1) $p(1.5)$ 突出於其他連續分布的點，所以在這狀態中，顆粒受振動台的影響較大。
- (2) 整個圖形有顆粒與振動台碰撞的特徵($p(1.5)$ 較突出)，但 V_p 不明顯，圖形不類似波茲曼分布。
- (3) 因為 Γ 小，顆粒運動的能量不大，顆粒間碰撞不明顯。所以若要處於類氣體或複雜碰撞行為， Γ 須大於 1.2，如此顆粒間才能有效碰撞。

$1.2 < \Gamma < 1.9$



- (1) $p(1.5)$ 較不突出於連續分布的點，所以這個狀態中，「顆粒與振動台的碰撞」不是影響顆粒運動的主因。
- (2) V_p 由 Γ 低到高為 9、11、20，與 Γ 呈正相關
- (3) 圖形類似波茲曼分布，且在 $\Gamma=1.86$ 時最典型，所以「顆粒間碰撞」主宰顆粒體的運動，呈現類氣體行為

(二)顆粒數目對速率分布的影響(固定 $\Gamma=1.86$)



- (1) $p(1.5)$ 在 $n=200\sim400$ 時突出於各點，但在 $n=500$ 時並無此關係
- (2) V_p 由 Γ 低到高為 9、13、18、20，皆是與 Γ 呈正相關。

- (3) 在 $n=200\sim 400$ 時，因為 $p(1.5)$ 突出而且右方圖形類似波茲曼分布，所以「**顆粒與振動台碰撞**」和「**顆粒間碰撞**」同時影響顆粒體，是複雜碰撞行為
- (4) $n=500$ 時 $p(1.5)$ 不突出，僅主要有「**顆粒間碰撞**」影響顆粒體，是類氣體行為。
- (5) $n=400$ 時為交界處，速率分布較不連續。

陸、討論

一、實驗結果討論

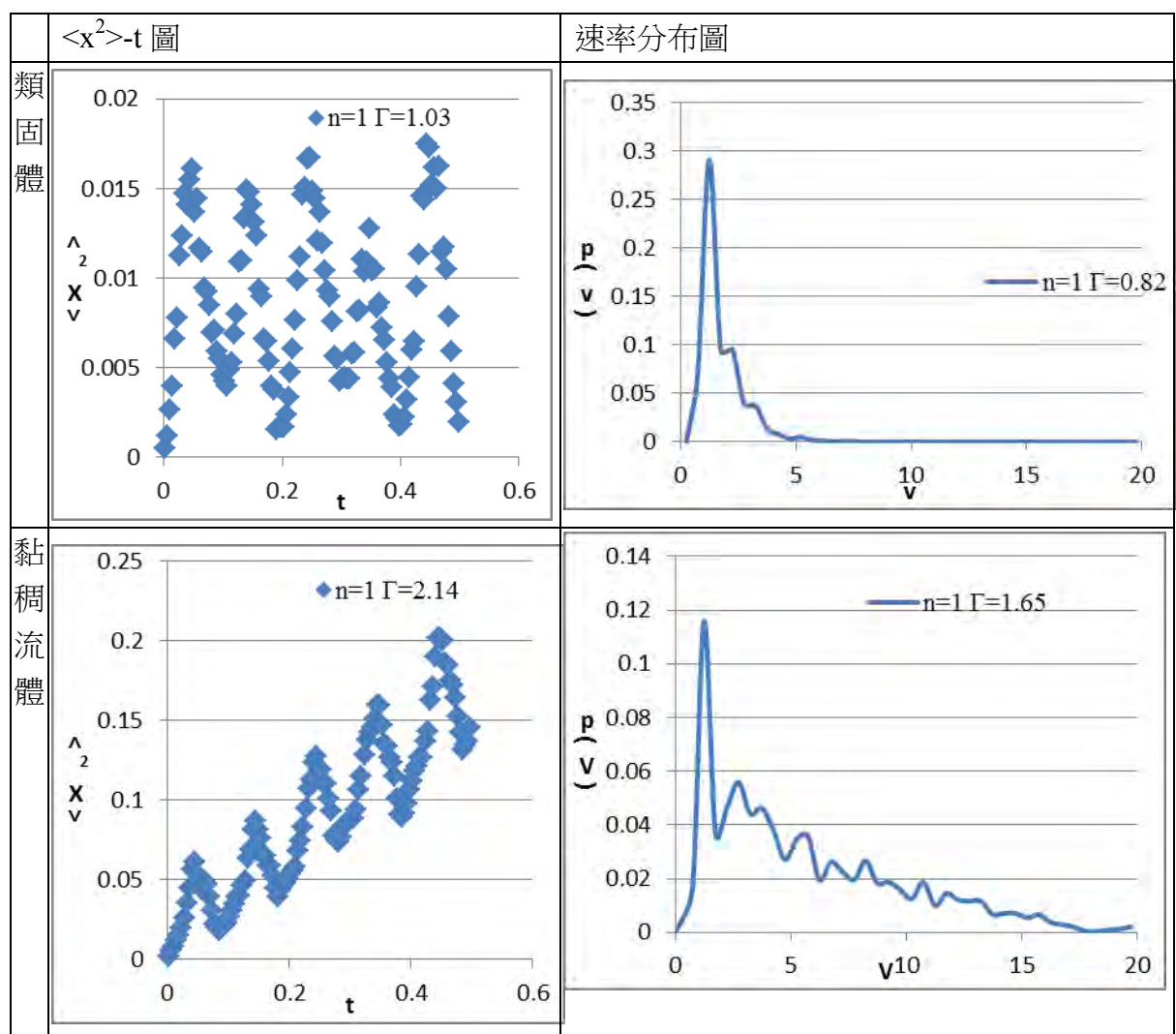
本實驗用了兩種變因： Γ 和顆粒數目，三種指標：**擴散係數**、**平均自由徑和平均自由時間**、**速率分布**，討論振動平面上的顆粒運動。而最後又可以將顆粒運動的狀態分成四種：**類固體**、**黏稠流體**、**複雜碰撞**、**類氣體行為**。以下是整理表格

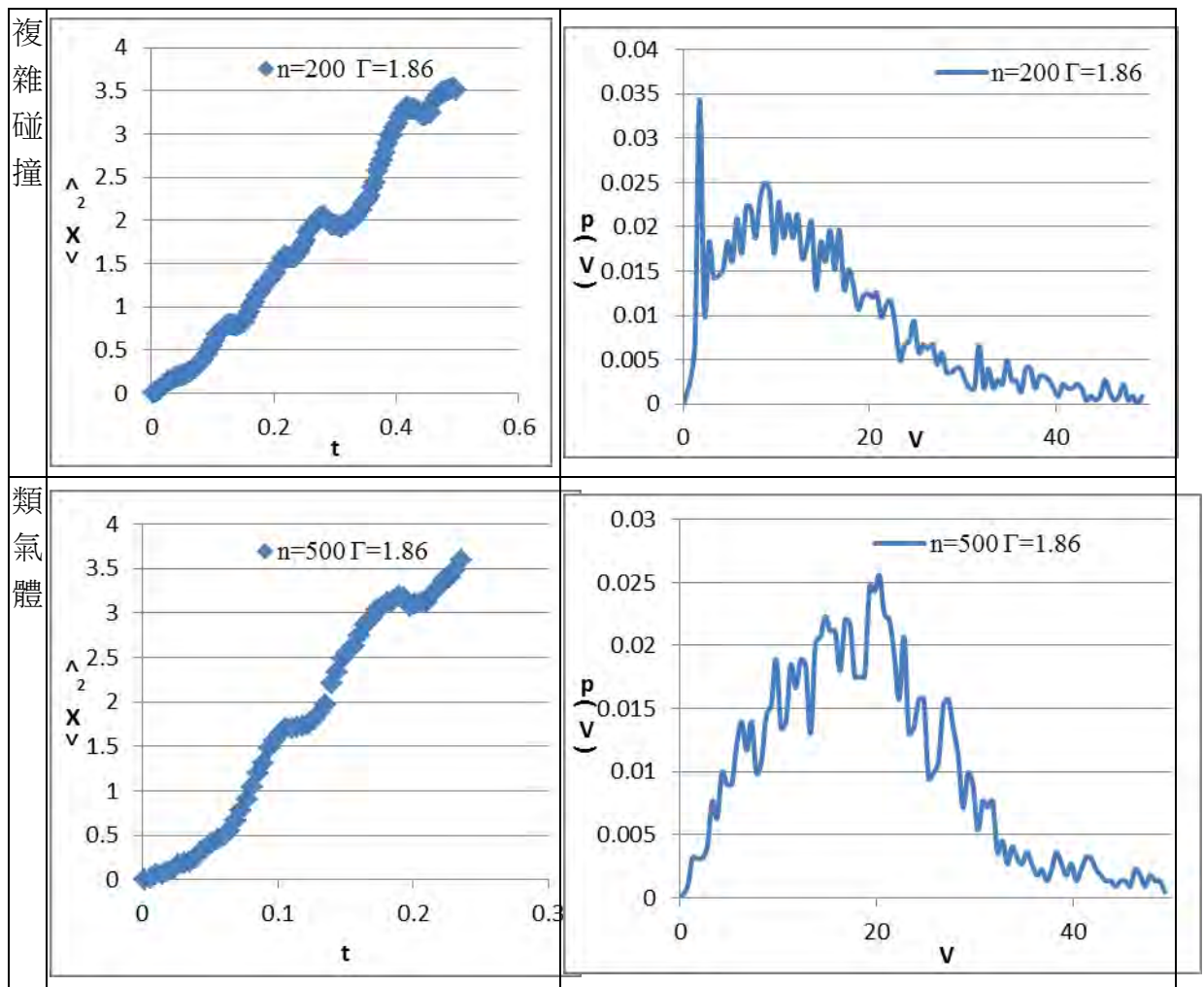
1. $\langle x^2 \rangle - t$ 圖與速率分布圖

從下表可看出，每種狀態皆有它對應的圖，所以類固體、黏稠流體、複雜碰撞、類氣體四種狀態可以用 $\langle x^2 \rangle - t$ 圖與速率分布圖分辨出來。

「**顆粒與振動台碰撞**」的特徵是，速率=1.5 時出現的機率最大。

「**顆粒間碰撞**」的特徵是，速率分布圖類似波茲曼分布。





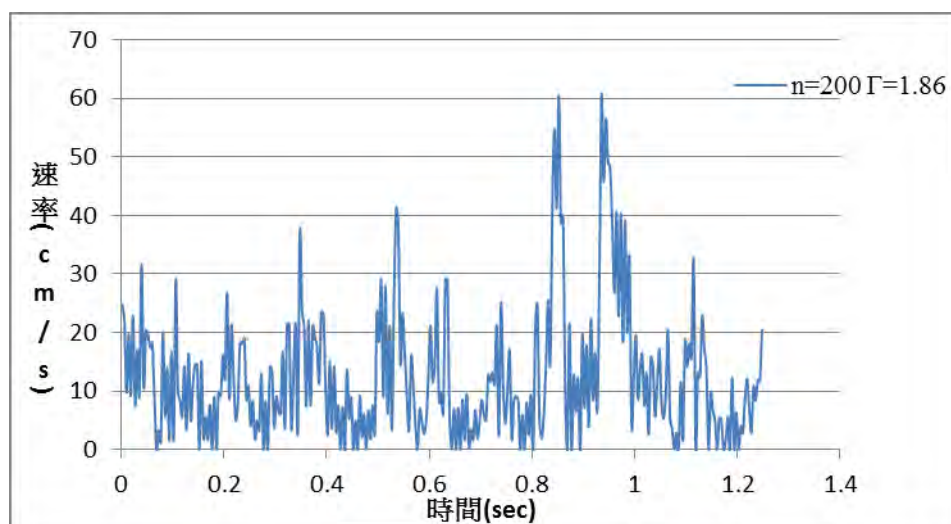
2. 平均自由徑和平均自由時間

從分析平均自由徑和平均自由時間，可以分辨部分複雜碰撞與類氣體。但不能分辨類固體和黏稠流體，因為這兩種狀態不存在平均自由徑與平均自由時間。

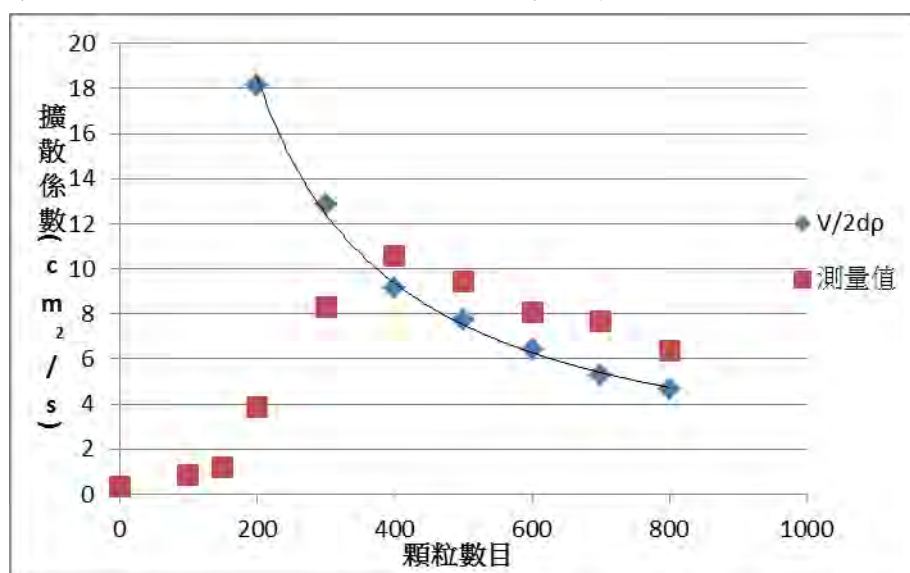
	類固體	黏稠流體	複雜碰撞	類氣體
平均自由徑和平均自由時間	X (無碰撞)	X (碰撞次數過少)	與 n 、 Γ 呈負相關 (約為反比)	1. 與 n 、 Γ 呈負相關 (約為反比) 2. $D=\lambda^2/\tau$

3. Γ 和顆粒數目所對應的顆粒狀態

顆粒與振動台碰撞後，顆粒大約會具有一個固定的水平速率(下圖中，在 0~20cm/s 範圍的速率)。顆粒間碰撞後的水平速率較大(下圖中的峰值)，一旦與振動台碰撞後就會減速到近乎一個固定值。如此形成增速-減速的循環。



當 $\Gamma=1.66$ ，顆粒有足夠的能量表現出黏稠流體或複雜碰撞或類氣體行為，則可以從擴散係數對顆粒數目的關係圖中，由其趨勢判別顆粒的狀態。



- (1) 顆粒數目 < 200 時，顆粒間碰撞次數很少，主宰顆粒速率的是振動台，呈現黏稠流體行為
- (2) 顆粒數目介於 $200 \sim 400$ 時，顆粒越多，顆粒間碰撞增數越多，但仍受振動台減速的影響，所以處於複雜的碰撞行為。
- (4) 顆粒數目 > 500 時，主宰顆粒速率的是顆粒間的碰撞，形成類氣體行為。

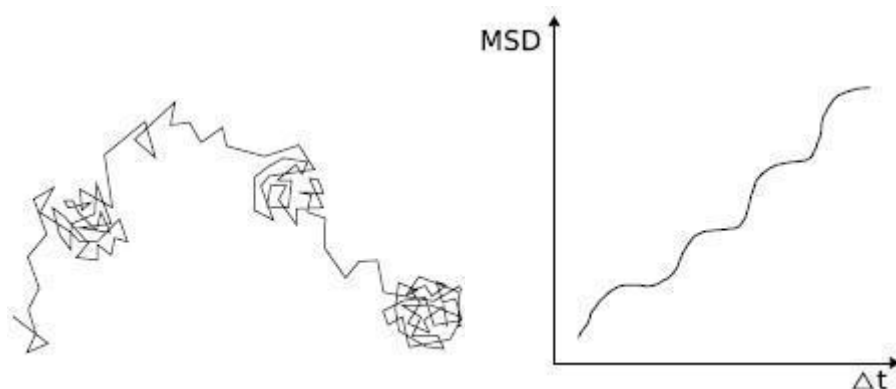
所以我們的實驗觀察及結果中，改變狀態的因素主要是顆粒數目。但若 Γ 小於於某個臨界值，則顆粒運動的能量不夠，不能表現出黏稠流體或複雜碰撞或類氣體行為。

以下是最後整理出 Γ 和顆粒數目所對應的顆粒狀態：

	類固體 ($D \approx 0$)	黏稠流體 ($0 < D < 2$)	複雜碰撞 ($4 < D < 11$)	類氣體 ($6 < D < 11$)
顆粒數目 n	$1 < n < 150$	$1 < n < 150$	$200 < n < 400$	$400 < n < 800$
Γ	$0 < \Gamma < 1.5$	$1.5 < \Gamma < 2.2$	$1.2 < \Gamma < 1.9$	$1.2 < \Gamma < 1.9$

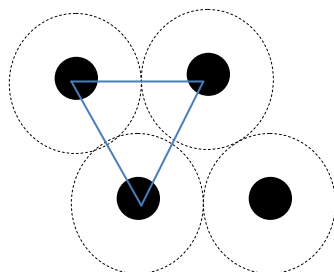
二、其他討論

1. 本實驗中利用喇叭作為振動源，它的好處是容易改變頻率與振幅，但喇叭的設計畢竟不是用來作為振動台的，所以 Γ 值改變的範圍有限。
2. 單一顆粒與振動台的碰撞中， $1.7 < \Gamma < 2.2$ 時圖形有擴散的趨勢，也有週期性的折返。這現象，根據參考資料是 random walk 中的跳動 hopping，顆粒隨機移動的範圍每隔一段時間會更換，是造成週期性的主要原因。



3. 在 $0 < \Gamma < 1.5$ 時顆粒在原地晃動，但顆粒間不一定會碰撞。關於是否會碰撞，有個簡單的估計方法：

假設在振動台中顆粒平均分布，顆粒晃動掃過的面積視為一個圓。在固定顆粒數目下，掃過的圓若彼此不相交，則此情況顆粒間不碰撞。若圓彼此相交，則顆粒間會碰撞。而其臨界點就是圓彼此相切的情況。



假設相切時圓的直徑為 R 、顆粒數目為 n 、
顆粒直徑為 d

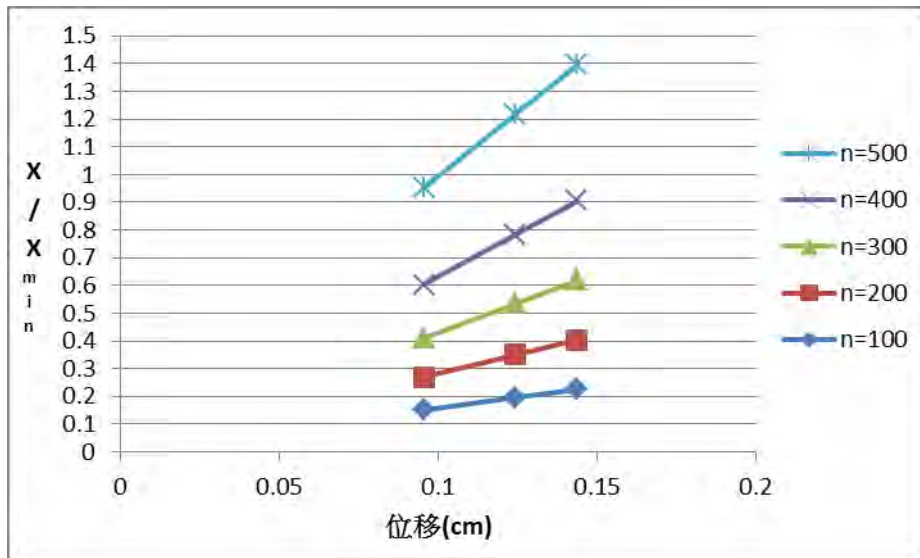
而相切時中間有空隙，所以用正三小形面積的
兩倍估計圓面積加上空隙的面積。

$$\frac{\text{振動台面積}}{n} = \text{兩倍正三角形面積} = 2 \times R^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$(R-d)/2$ 為碰撞所需的最小位移量 $X_{\min}$

而顆粒的位移量 X 從 $n=1$ 、 $0 < \Gamma < 1.5$ 的 $\langle x^2 \rangle - t$ 圖中，第一個 $\langle x^2 \rangle$ 峰值得到。因為其他的峰值是由離原點相近的位置向外擴散而得，不是從原點向外擴散，較不準。

根據我們的計算結果



$n=100$ 時， $X/X_{\min}$ 比值較低，不常碰撞，為類固體行為。

$n=200 \sim 300$ 時呈現為複雜碰撞行為。

$n=400$ 時，因為 $0 < \Gamma < 1.5$ ，且 $X/X_{\min}$ 比值小於 1，所以它較接近複雜碰撞行為

$n=500$ 時， $X/X_{\min}$ 比值幾乎大於 1，呈現類氣體行為

顆粒數目越大， $X/X_{\min}$ 比值變化的斜率越明顯，這也可以說明碰撞的頻率將會大幅增加，使顆粒間碰撞主宰顆粒體的運動。

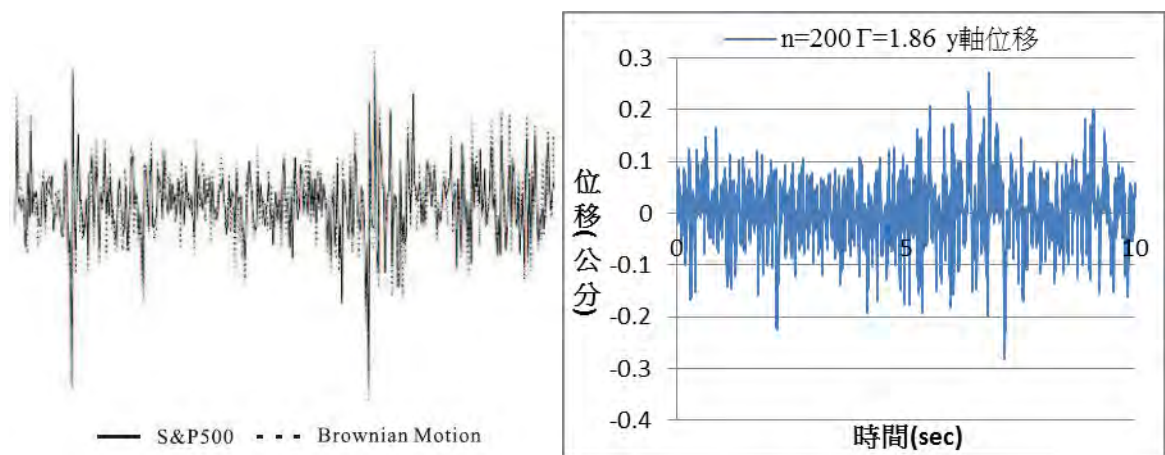
4. 本實驗中平均自由徑、平均自由時間皆大於理論值。這是估計的缺陷造成的。顆粒間碰撞很難和「顆粒與振動台碰撞」區隔，估計到的碰撞次數較少。所以平均自由徑、平均自由時間、 λ^2/τ 圖形應要向下平移。

三、未來展望

1. 本實驗是觀察顆粒在振動平面上的隨機運動，建立一種隨機運動的模型。隨機運動可以應用的範圍很大。只要有隨機性質的行為，都可以和我們的實驗做連結，諸如天氣預報、統計物理、天文物理、運籌決策、經濟數學、安全科學、人口理論。其中最廣為人知的是經濟學上的股票漲落。

左圖是參考資料中，用布朗運動模擬股票的報酬率比較圖。可以發現，股票的報酬率與布朗運動沒有差異。事實上，亦有研究結果指出，股票價值隨時間波動的範圍與時間的二分之一次方成正比的結論。這與布朗運動中，速度和時間的二分之一次方成正比相似。

右圖是其中一組位移變動的數據，和布朗運動的模擬也很相似。



2. 除了經濟上的類比應用，尚有隨機過程應用的具體例子:

(1) 在生物化學的應用:分子馬達與離子泵浦

生物體內的蛋白質利用布朗運動成為奈米尺度下的微小馬達，進而驅動細胞的運動、分裂，以及調節細胞內部的離子濃度。

(2) 在生物物理的應用:自發性圖案

利用擴散與化學反應產生圖案的生成機制，以及利用此機制來解釋如瓢蟲到獵豹的斑紋產生的過程。

(3) 在通訊上的應用:雜訊

訊號在傳輸過程中，受到一些外在能量所產生訊號干擾，產生雜訊。最典型的白雜訊即符合隨機運動的特性。

柒、結論

一、電壓與振幅的關係

1. 輸入電壓與振幅呈正相關，但輸入電壓大於 5V 後振幅達到極限
2. 頻率為 8Hz 時獲得最大的 Γ 。

二、單一顆粒的運動行為

1. $1.0 < \Gamma < 1.5$ 時顆粒呈現類固體行為
 $1.5 < \Gamma < 1.7$ 時顆粒有擴散行為；
 $1.7 < \Gamma < 2.2$ 時顆粒有擴散和跳動的行為。
2. Γ 與單一顆粒的平均速率呈正相關，但 $\Gamma < 1.4$ 時，平均速率的增加幅度不明顯。
3. 速率的分布圖顯示「顆粒與振動台碰撞」的特徵為， $V=1.5$ 時出現機率最大。

三、多顆粒時的運動行為

1. 顆粒數目 1~150 擴散係數與 Γ 呈正相關，與顆粒數目呈正相關，是黏稠流體行為
2. 顆粒數目 200~400 時，擴散係數與 Γ 呈負相關，與顆粒數目呈正相關，屬於複雜碰撞行為。
3. 顆粒數目 400~800 時，擴散係數與 Γ 呈正相關，與顆粒數目呈負相關，屬於類氣體行為。
4. 顆粒數目 400 是複雜碰撞與類氣體行為的交界， $0 < \Gamma < 1.5$ 時屬於複雜碰撞行為， $\Gamma > 1.5$

時屬於類氣體行為。

5.在類氣體中，平均自由徑與 Γ 無相關，平均自由時間與 Γ 呈負相關。

6.在類氣體中，平均自由徑、平均自由時間與顆粒數目的關係呈反比，且在複雜碰撞行為時的趨勢也近似於反比。

7.在類氣體行為中，擴散係數和平均自由徑、平均自由時間的關係為 $D = \frac{\lambda^2}{\tau}$ ，而在複雜碰撞行為中則無此關係。

四、多顆粒時的速率分布

1.類固體與黏稠流體主要受「顆粒與振動台的碰撞」影響。

2.複雜碰撞同時受「顆粒與振動台碰撞」和「顆粒間碰撞」影響。

3.類氣體主要受「顆粒間碰撞」影響。

4.形成類氣體行為或複雜碰撞行為時， Γ 須大於 1.2。

捌、參考資料及其他

1.賈魯強、黎璧賢(民 90)。漫談顆粒體物理。物理雙月刊

2.陳文楠(民 97)。類二維顆粒氣體的運動性質實驗與探討。國立清華大學物理系碩士論文

3.方啟守(民 93)。振動床於弱振動下顆粒分離機制研究。國立中央大學機械工程碩士論文

4.杜其永(民 94)。布朗溫度計與顆粒流體之溫度。物理雙月刊

5.陳宣毅(民 94)。布朗運動：從花粉的無規行走走到生物與天文。物理雙月刊

6.陳仁遶(民 91)。布朗運動：從物理學到財務學。數學傳播

7.Harris Benson。普通物理學。歐亞圖書

8. Jakob C. Schweizer。Practical Course : Single-Particle-Tracking。Technical University of Dresden

9.阿簡的生物筆記:ImageJ 教學(網路資源)。

取自:http://a-chien.blogspot.com/2007/09/imagej_03.html

【評語】 040109

1. 對所建立系統為二維物理量之主張似乎有可討論空間。
2. 能以大量數據討論隨機運動之模式，但並未在討論及展示上顯現，以利主張其通用性。
3. 系統的運動源除喇叭運動外，應再考量上蓋及相互碰撞所引起的影響。