中華民國第52屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　物理科

第三名

最佳創意獎

040106

水中舞者

學校名稱：臺北市立成功高級中學

作者：	指導老師：
高二 李依哲	游慈卉 邱育民

關鍵詞：流體力學、白努力方程、週期運動

摘要

本實驗將小型塑膠圓片置於水中以不同角度釋放，模擬落下樹葉在空氣中的左右擺動情形，藉由分析影片得到小型塑膠片的位置、速度、角度、角加速度等物理量，觀察後提出了「分流點」的假設，並結合白努力方程解釋塑膠片的規律性運動。

壹、 研究動機

走在路上，常常會看到有許多落葉左右擺動飄落，像極舞動翅膀的小天使，在空中跳著華爾滋，那看似規律又複雜的舞蹈，啟動我心中對研究這美妙舞姿的好奇心。於是，我決定對樹葉飄落的左右擺動做研究，期盼能解構這其中的奧秘。

我們先在空氣中釋放紙片，觀察紙片在空氣(流體)中自由飄落的情況，但因為空氣的流動容易受環境影響，於是決定將實驗的流體換成水，將釋放物換成鐵片，並改以電磁鐵來控制鐵片的釋放。經實驗後發現，鐵片的掉落速度太快，可觀察的擺動週期數太少，因此又將釋放物換成密度較小的塑膠片。為了可以讓塑膠片也用電磁鐵釋放，我們使用小螺帽夾住塑膠片後釋放，終於找到了適合的釋放方式。

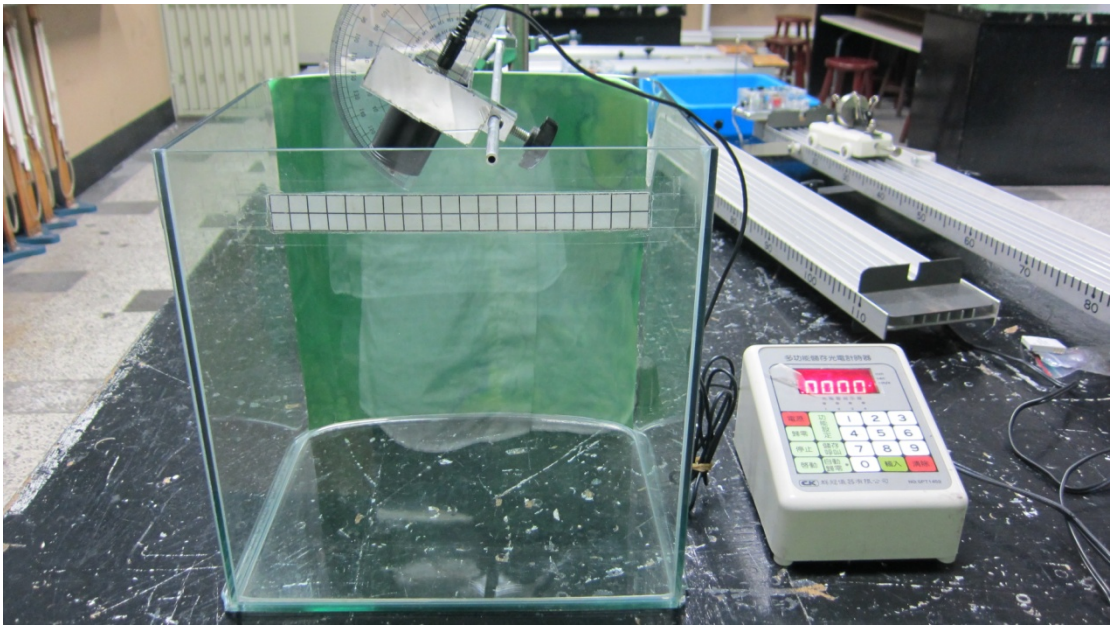
另外，在外面常常看到有小水流從上面流下，當遇到物體時就會分成兩道水流，分流後因受周圍水流之影響而有流速差，造成壓力差，因而產生力矩，所以我們認為這可能是造成樹葉擺動的原因，因此將分流點加入研究理論的假設。

貳、 研究目的

一、觀察數據並繪圖分析，找出物體左右擺動的運動規律性
二、提出分流點的假設，結合白努力方程推導理論解釋

參、 研究設備及器材

一、CD 片
二、 圓規刀
三、 直尺(精密度 0.1cm)
四、 玻璃水缸(29cm*31cm*24cm)
五、 電磁鐵
六、 小鐵片
七、 量角器
八、 鏡子
九、 吊有重物的鉛錘線
十、 相機

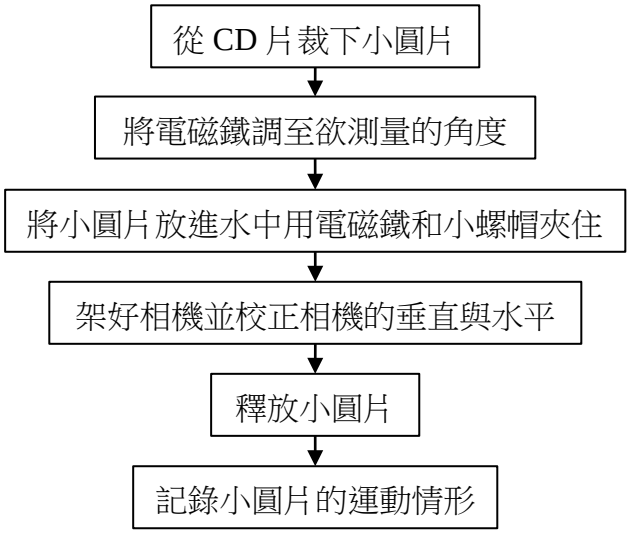


↑裝設完成的實驗裝置

肆、　研究過程或方法

一、實驗流程與步驟

(一)流程圖



(二)詳細步驟

1. 用圓規刀將 CD 片的塑膠部分裁下數個半徑不等的圓形，此為用來模擬樹葉的圓片。
2. 將水缸裝滿水，且盡量讓水溫保持在 14℃以下，可以減少在實驗中出現小氣泡，影響圓片運動的情況。待水平靜後，沿著水平線貼上比例尺，並利用相機的九宮格線校正相機的水平與垂直。
3. 將電磁鐵的角度利用鉛錘線、量角器與鏡子調整到固定角度後鎖緊，

並放入裝滿水的玻璃水缸中。

4. 將電磁鐵開關打開，小螺帽受磁力吸引，把圓片夾在電磁鐵上，並用滴管清除附著在圓片上的小氣泡。
5. 按下錄影鍵後關閉電磁鐵開關，小螺帽脫落後，待圓片掉落至水缸底部，結束錄影。

↑圓片以電磁鐵與小螺帽夾住

二、數據分析

(一)讀取數據：

1. 將錄製好的實驗影片放入電腦中，並用軟體「Tracker」開啟影片。
2. 利用 Tracker 分別將每一個影格中的圓片最左端和最右端質點位置手動標示出來，並將數據匯出。

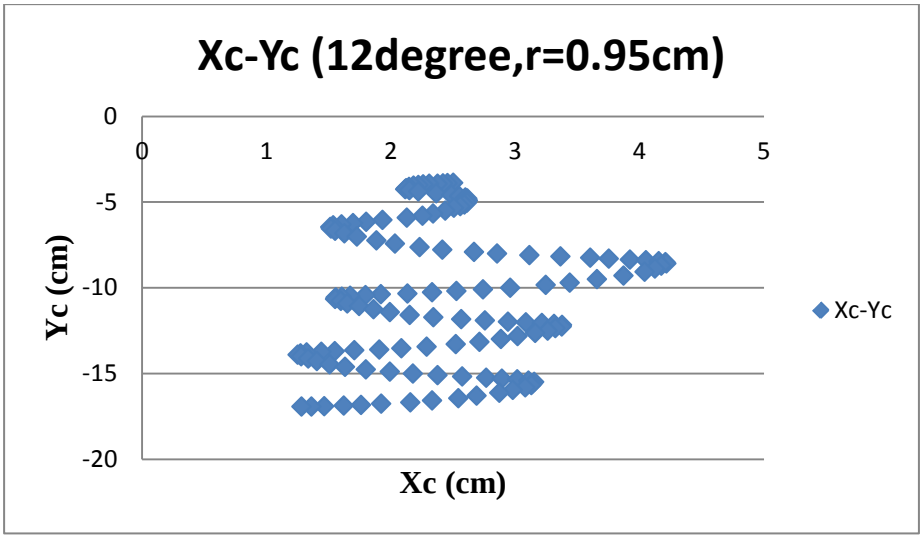
(二)數據處理：

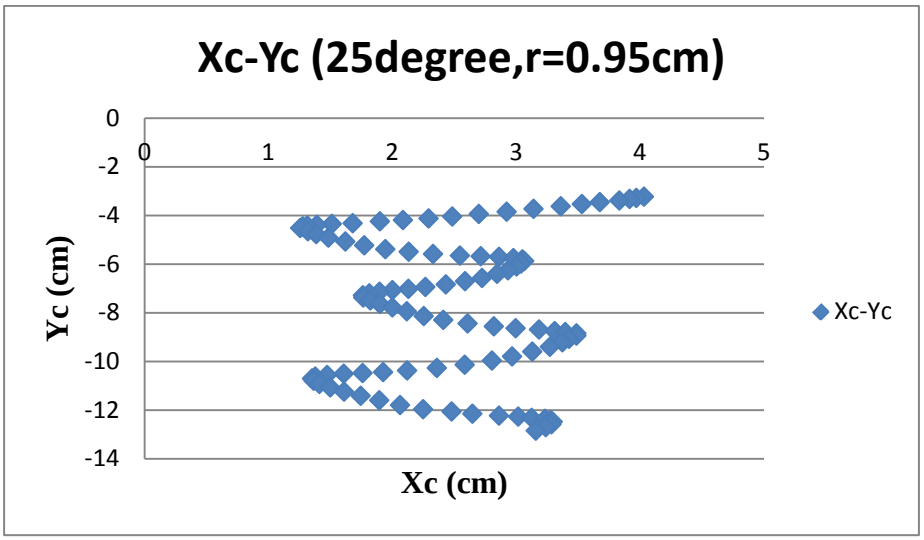
1. 因為每個影格的質點位置是手動標示出來的，為了減少誤差，將數據每 10 個做一次平均
2. 將每個影格最左端和最右端的位置數據做平均，可以得到圓片質心的水平位置(Xc)和鉛直位置(Yc)
3. 對每一組數據分別做質心的速率(v)和端點和質心連線與水平之夾角(θ或 Theta)

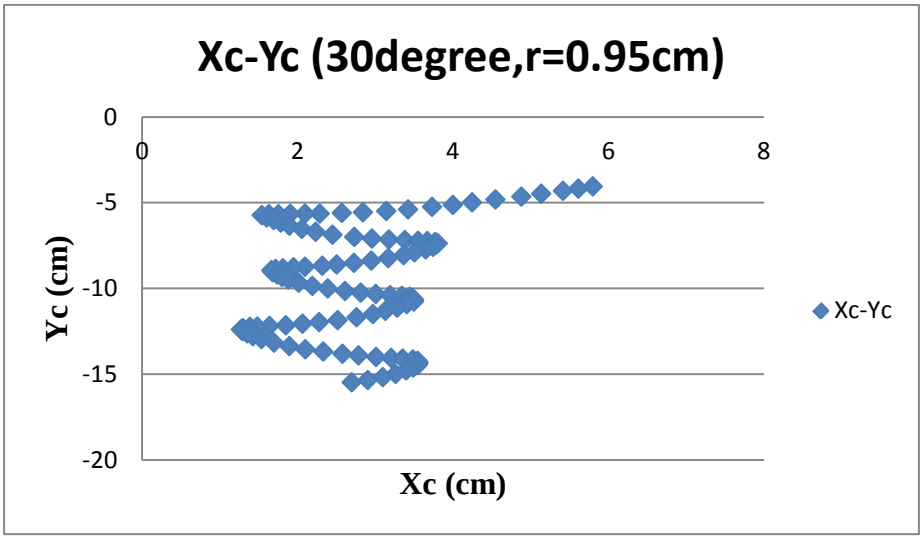
伍、　研究結果

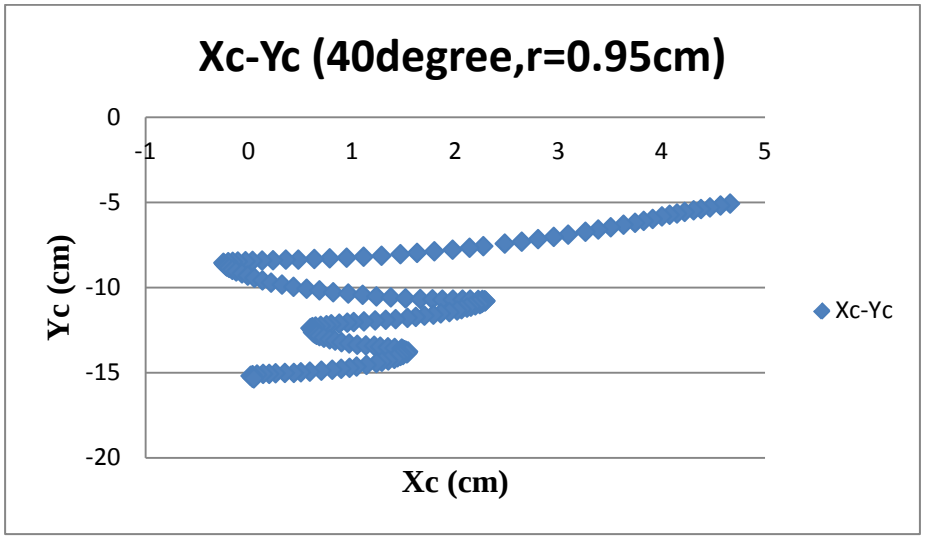
一、相同圓片大小，不同初始釋放角

(一) 質心運動軌跡(圖表標題內的括號為「初始釋放角大小,r=圓片半徑」)



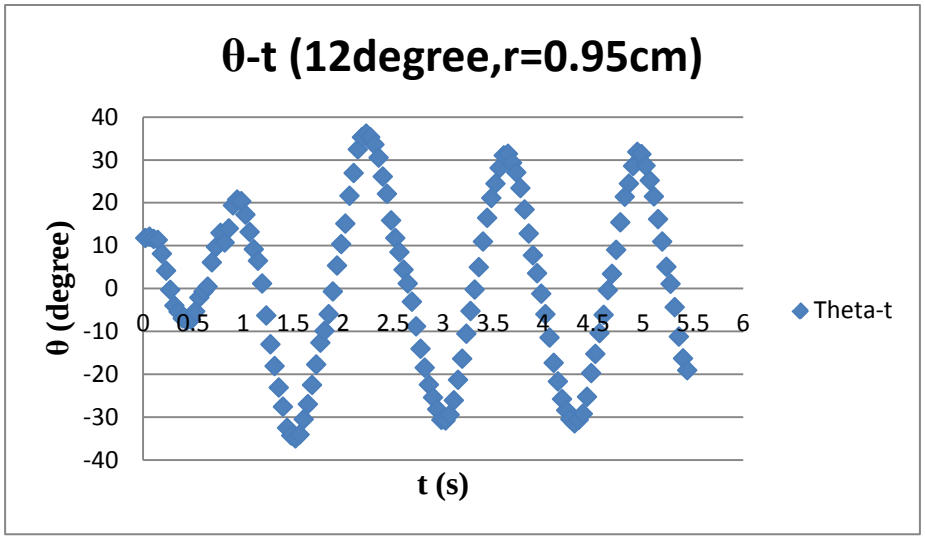


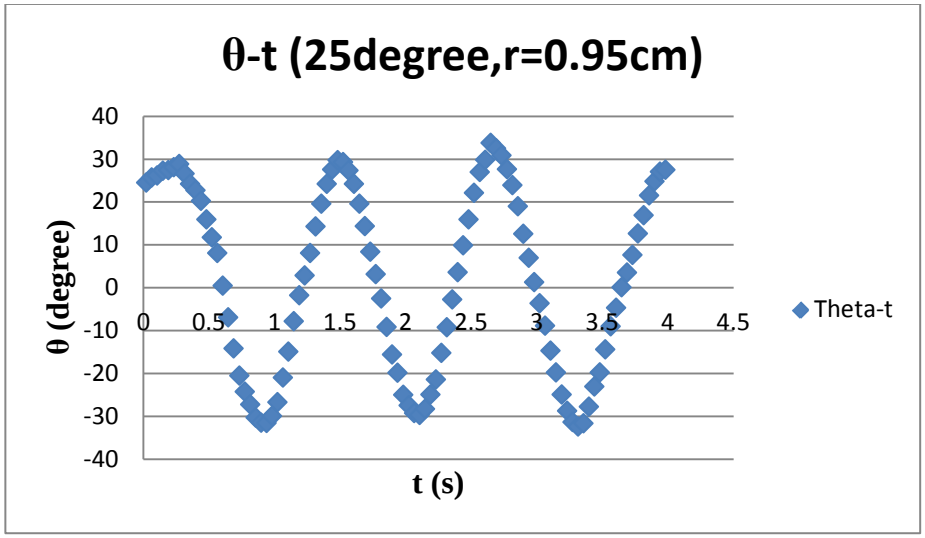


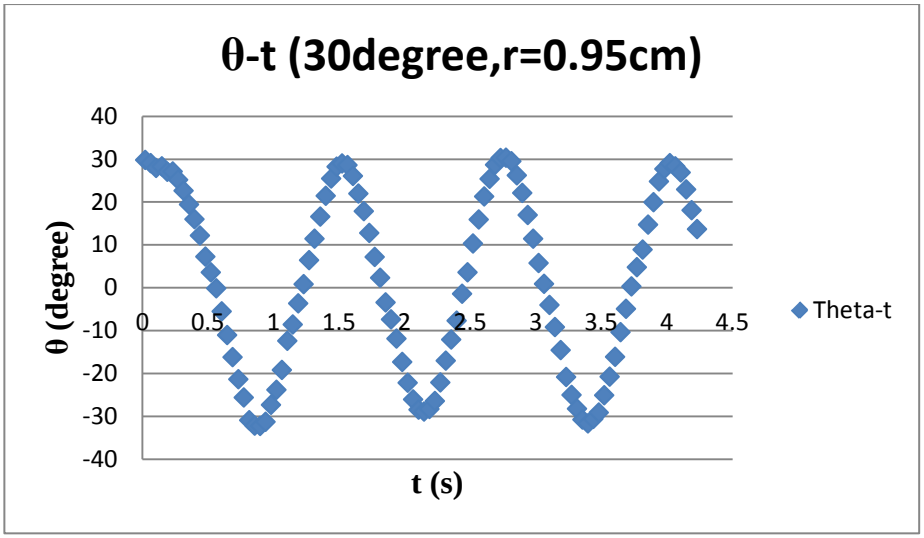


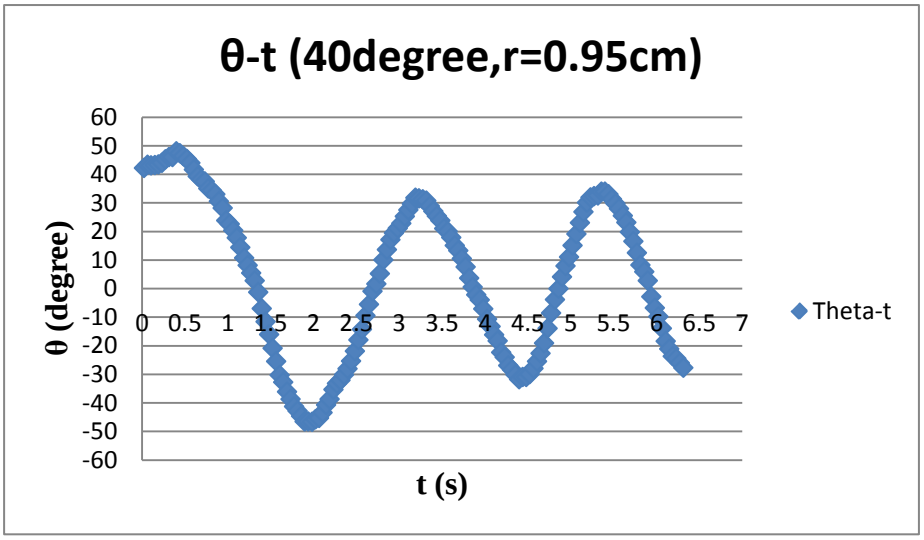
在比較不同初始釋放角的 Xc-Yc 圖後發現，不管初始釋放角為何，質心軌跡都呈現左右週期性擺動。

(二) θ 的規律性







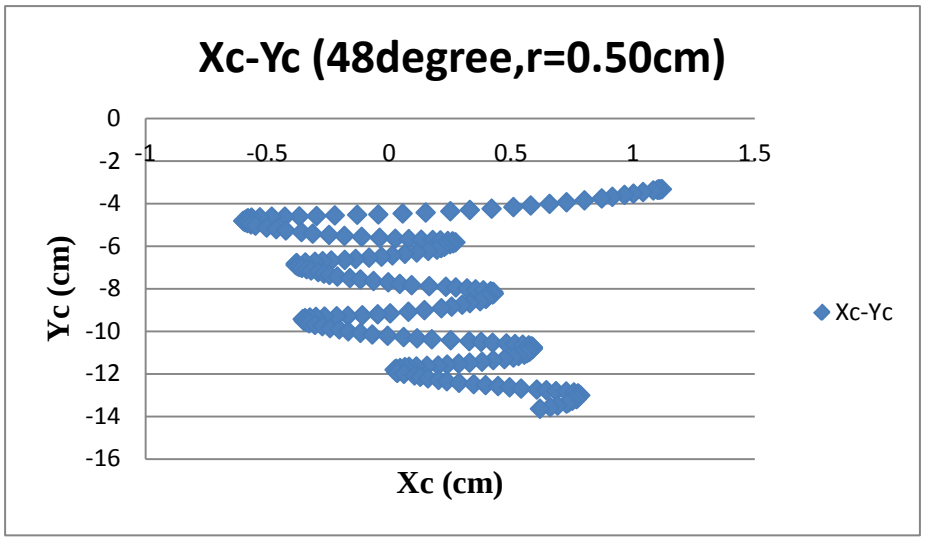


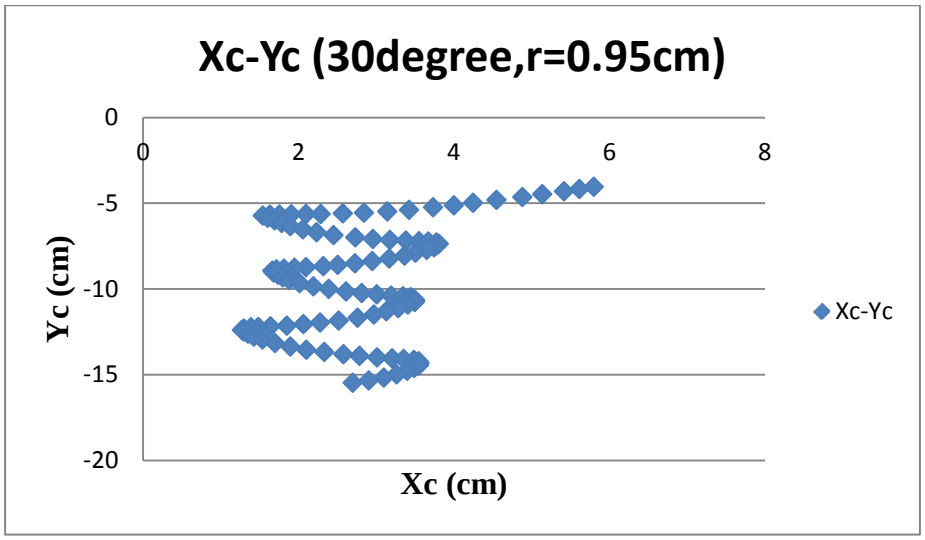
在比較不同初始釋放角的 θ-t 圖後發現，不管初始釋放角為何，最後極值的角度都會變化至約±30 度左右，表示圓片掉落的運動不管起始角怎麼變化，最後極值角度都會變化至一個固定的角度(穩定擺動角度)，在這個角度做週期性運動。

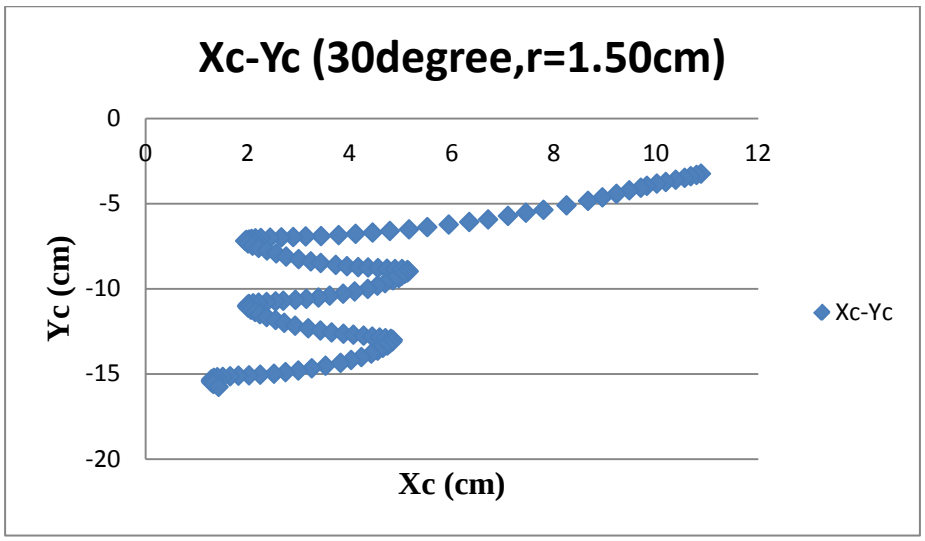
二、不同圓片大小

由上述可知，初始釋放角對相同大小的圓片，不會影響到圓片最後的穩定擺動角度的大小，因此我們以任意的釋放角度對不同大小的圓片進行實驗。

(一) 質心運動軌跡

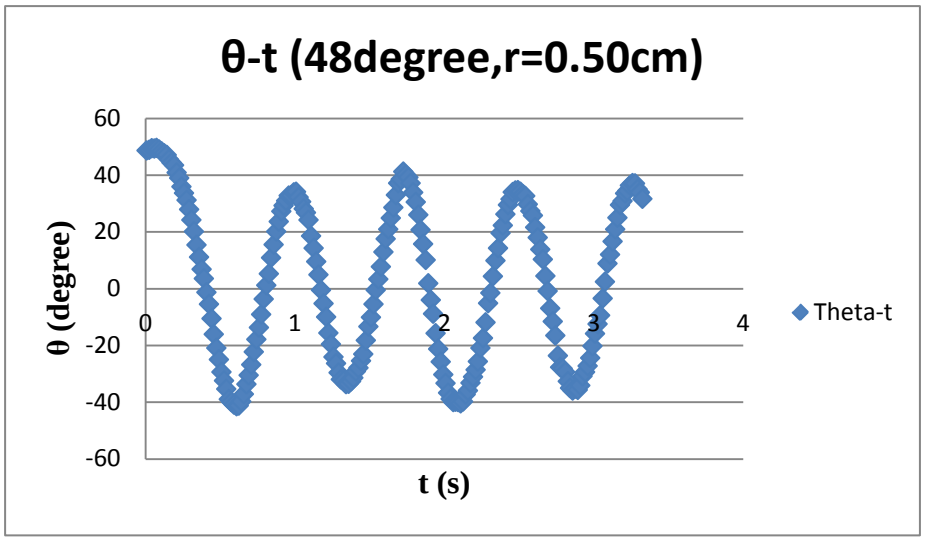


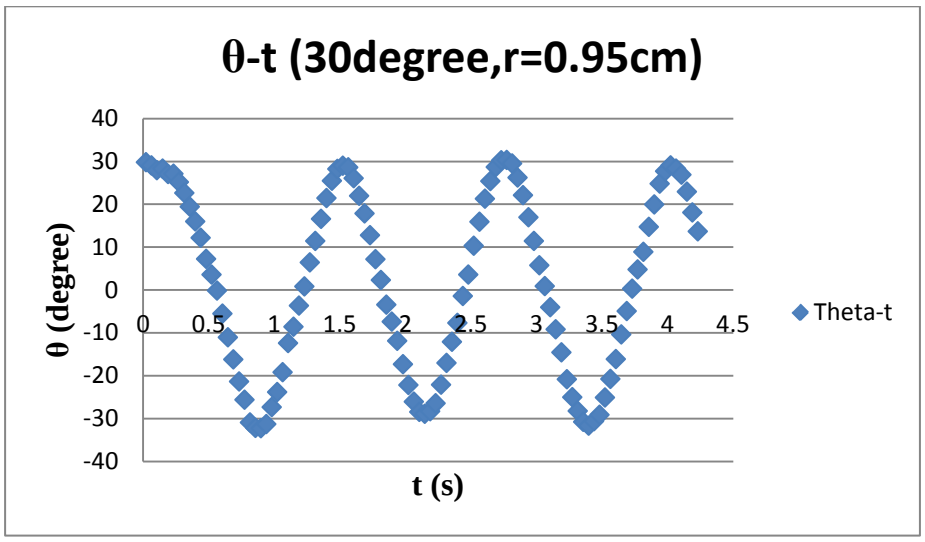


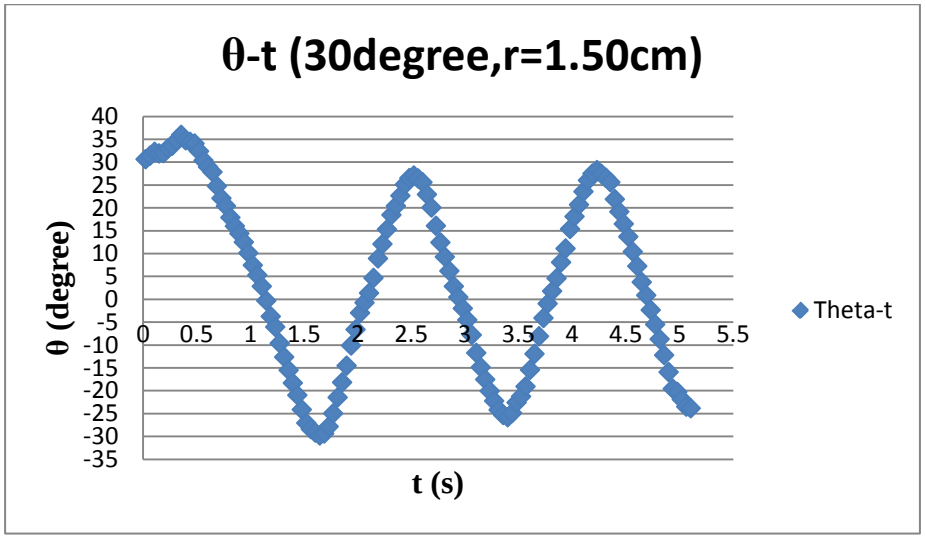


在比較不同圓片大小的 Xc-Yc 圖後發現，不管圓片大小為何，質心軌跡都呈現左右週期性擺動。

(二) θ-t 圖的比較





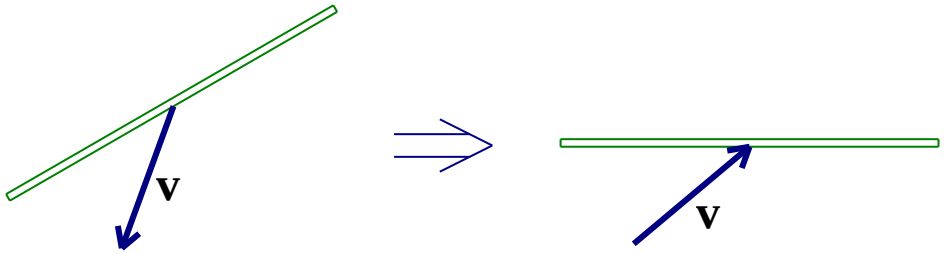


在比較不同圓片大小的 θ-t 圖後發現，不管圓片大小為何，最後極值的角度都會變化至一個固定的角度(穩定擺動角度)，在這個角度做週期性運動，而這個角度會隨著圓片增大而變小。

三、理論：

(一) 模型：水通過圓片時分流為左右兩股，因流速不同造成壓力差，引起圓片轉動。

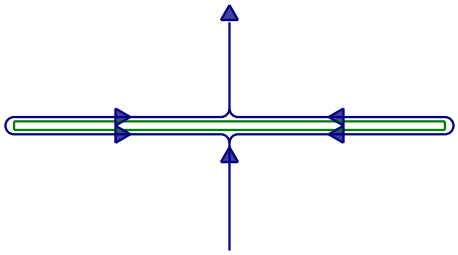
(二) 相對運動：如下圖，圓片以速率 v 運動時，可視為圓片保持水平且靜止不動，而水流以速率 v，斜向衝擊圓片



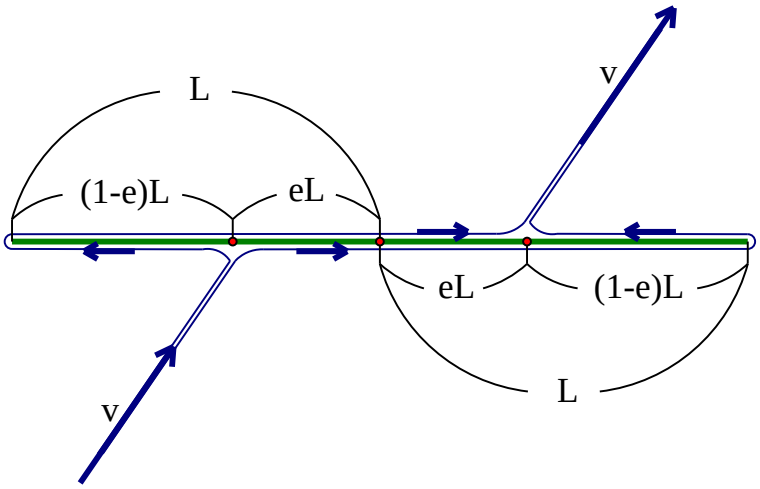
(三) 假設：

1. 如下圖，若水流由一側平行圓片衝擊，分流點在一端，會合點在另一端。

2. 如下圖，若水流垂直衝擊圓片，分流點和會合點均在中央。



3. 故可推論，若水流斜向衝擊，分流點位置及會合點位置，如圖(一)，設距離轉軸為固定比例 e，如圖(一)。



↑圖(一) 水流的分流位置圖

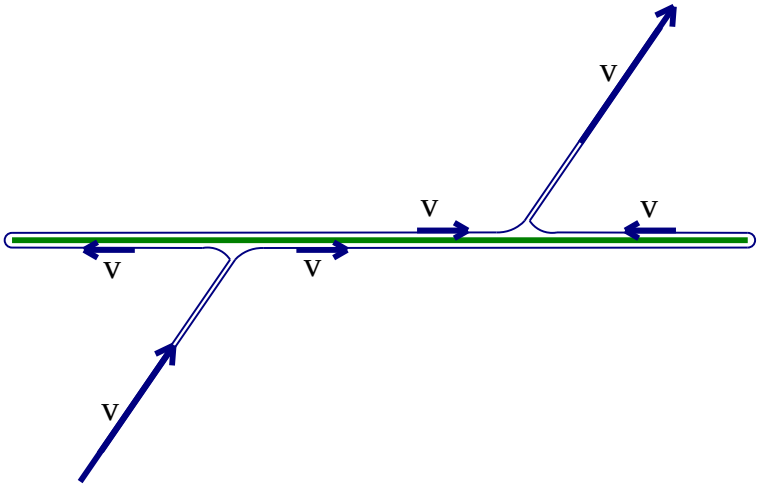
L：任一條分流線的長度的一半

v：水流相對於圓片運動之速率

e：$\dfrac{\text{分流點或會合點與轉軸距離}}{L}$

(四) 水流流速差：

1. 我們假設水流以速率 v 衝擊到圓片時，原本分流後的流速應都為 v，如圖(二)

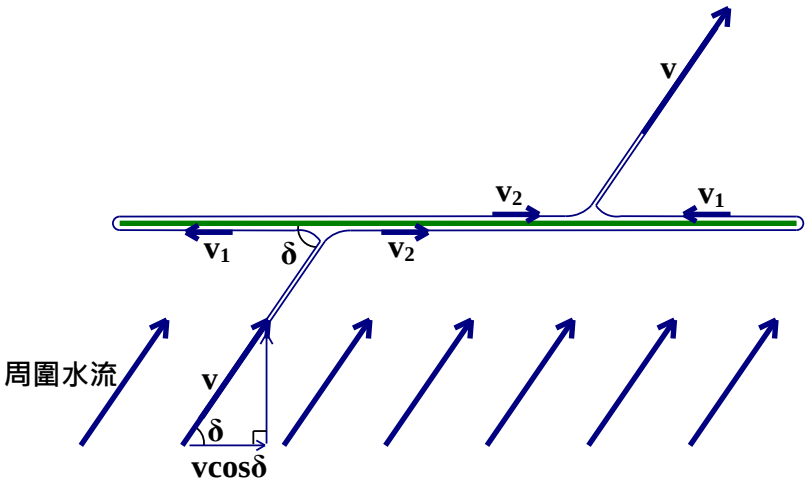


↑圖(二) 水流原本的流速示意圖

2. 但上述分流後的水流，因受到「周圍水流」在 x 方向上的影響，其流速會改變。向左的分流因為受到「周圍水流」在 x 方向分量$v\cos\delta$的影響而速度變小，向右的分流則是變大，如圖(三)。

故 $v_1 = v - v\cos\delta$

$v_2 = v + v\cos\delta$

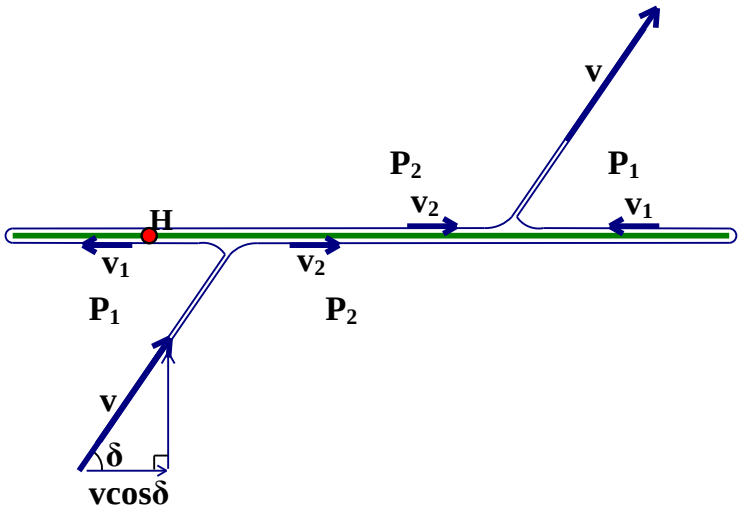


↑圖(三) 水流的流速示意圖

v：水流相對於圓片運動之速率
v_1：分流後向左流動的水流速率
v_2：分流後向右流動的水流速率
δ：水流衝擊圓片的夾角$(0° \leq \delta \leq 180°)$

(五) 計算壓力差和力矩：

1. 壓力差：
   如圖(四)，因上下兩側流速不同造成壓力差，計算點 H 上下兩側之壓力差如下



↑圖(四) 壓力差示意圖

v：水流相對於圓片運動之速率
v_1：分流後向左流動的水流速率
v_2：分流後向右流動的水流速率
P_1：圓片下方分流點左側和圓片上方會合點右側之壓力
P_2：圓片下方分流點右側和圓片上方會合點左側之壓力
δ：水流衝擊圓片的夾角$(0° \leq \delta \leq 180°)$

假設此為理想流體，故可以引用白努力方程(Bernoulli equation)計算水流流速差所造成的壓力差

由白努力方程式已知$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2$

移項後可得$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$

代入 v_1、v_2後得
$P_1 - P_2 = 2\rho v^2 \cos\delta$ ------式(1)

2. 力矩：

(1) 圓片上的分流點和會合點連線為橢圓形，證明如下：

我們設圓心為原點，圓心角為 ϕ，e 值為固定比例

計算分流點的 x, y 座標為

$$\begin{cases} x = er\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

將 x 座標移項後得

$$\cos\phi = \frac{x}{er}$$

$$\Rightarrow \sin\phi = \frac{\sqrt{(er)^2 - x^2}}{er}$$

代入 y 座標後可得

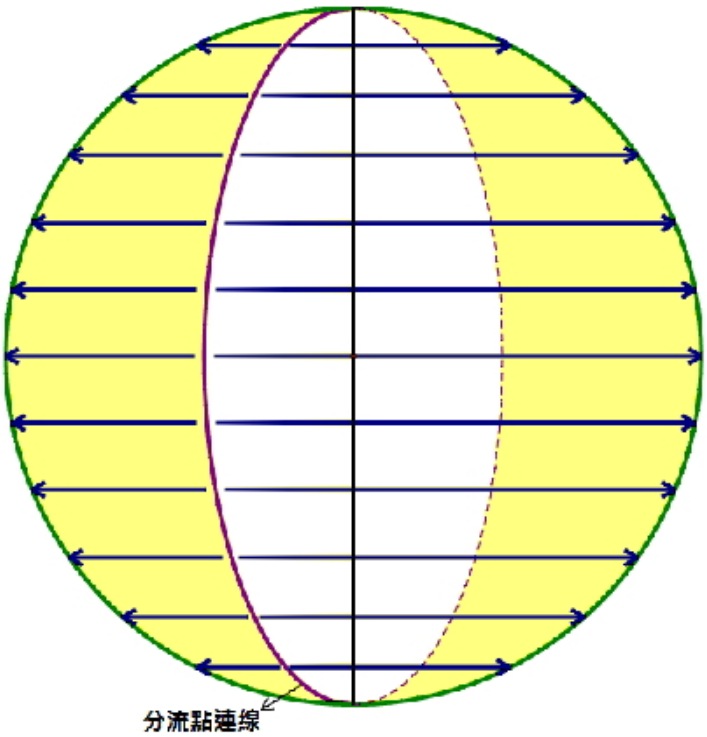
$$y = r \times \frac{\sqrt{(er)^2 - x^2}}{er}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{(er)^2 - x^2}}{e}$$

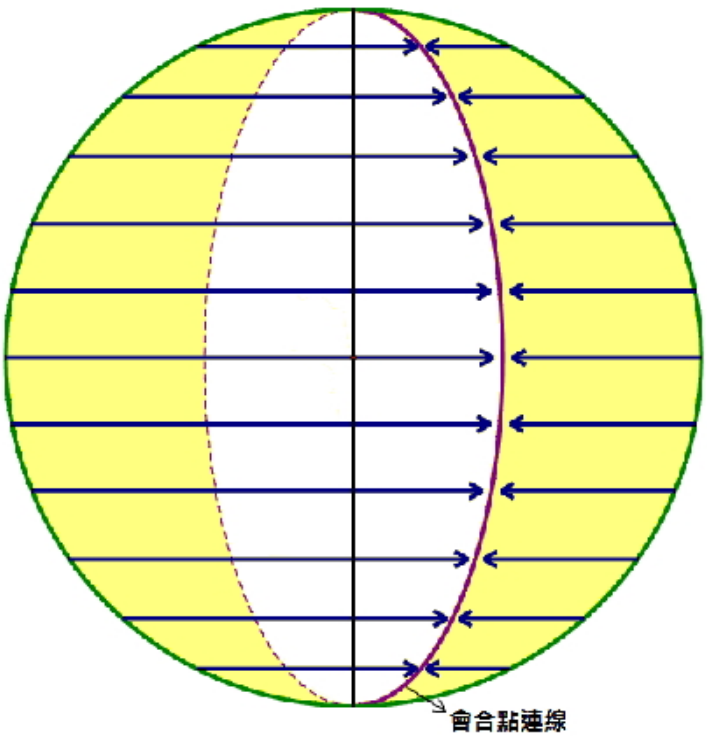
$$\Rightarrow (ey)^2 = (er)^2 - x^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{(er)^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

將該橢圓分流位置繪製於圖(五)、圖(六)



↑圖(五) 分流點連線仰視示意圖



↑圖(六) 會合點連線俯視示意圖

(2) 計算作用力：

由圖(三)可知，圖(五)和圖(六)中白色區域的流速均為v_2，不會造成壓力差，我們只需要計算圖(五)和圖(六)中黃色區域的壓力差所產生的作用力。

單邊黃色區域面積(A)

$$A = \frac{1}{2}\pi r^2 - \frac{1}{2}\pi \times (er) \times r$$

$$= \frac{1}{2}\pi r^2 (1 - e)$$

單邊黃色區域的作用力(F)即為

$$F = (P_1 - P_2) \times \frac{1}{2}\pi r^2 (1 - e)$$

代入式(1)可得

$$F = \rho v^2 \cos\delta\, \pi r^2 (1 - e)$$

(3) 計算力矩：

由壓力差產生之作用力，在圓片上的施力位置我們可視為在圖(五)中單邊黃色區域的重心位置。

A. 由積分得知：

半圓形的重心位置在直徑上距離圓心$\frac{4r}{3\pi}$

半橢圓形的重心位置在直徑上距離圓心 $\frac{4er}{3\pi}$

B. 計算重心位置：

我們假設單邊黃色區域的重心位置距離圓心為 x，M 為圓片的質量

$$eM \times \frac{4er}{3\pi} + (1-e)M \times x = M \times \frac{4r}{3\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{4e^2r}{3\pi} + (1-e)x = \frac{4r}{3\pi}$$

$$\Rightarrow (1-e)x = \frac{4r}{3\pi}(1-e^2)$$

$$\Rightarrow x = \frac{4r}{3\pi}(1+e)$$

C. 故總力矩τ為：

$\tau = (F \times x) \times 2$ *見註 1

$$\tau = \rho v^2 \cos\delta\, \pi r^2 (1-e) \times \frac{4r}{3\pi}(1+e) \times 2$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{8}{3}\rho v^2 \cos\delta\, r^3 (1-e^2) ------式(2)$$

將式(2)移項後可得

$$e = \pm\sqrt{1 - \frac{3\tau}{8\rho v^2 \cos\delta\, r^3}} ------式(3)$$

又 $\tau = I\alpha = \frac{1}{4}Mr^2\alpha$

則可將式(3)改為

$$e = \pm\sqrt{1 - \frac{3Mr^2\alpha}{32\rho v^2 \cos\delta\, r^3}} ------式(4)$$

故由實驗測得 v、α、δ 值，即可算出 e 值

*註 1：因圖形為對稱圖形，將單邊的力矩乘以 2 可得總力矩

(六) 最短時間原理求 e 值：

根據最短時間原理，我們認為水為何會選擇在那個分流點分流，是因為水由此點分流到上方匯聚，花費的總時間最短。

因此

$$t = \frac{(1-e)r}{v_1} + \frac{(1+e)r}{v_2}$$

$$= \frac{(1-e)r}{v - v\cos\delta} + \frac{(1+e)r}{v + v\cos\delta}$$

$$= \frac{(1-e)r}{v(1-\cos\delta)} + \frac{(1+e)r}{v(1+\cos\delta)}$$

符合最短時間原理：

$$\frac{\partial t}{\partial \delta} = 0$$

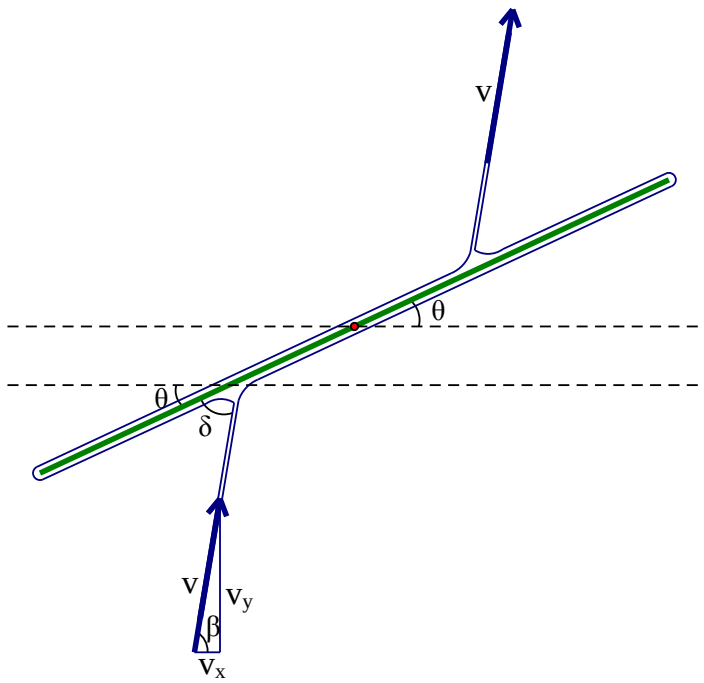
$$\Rightarrow -\frac{(1-e)r}{v(1-\cos\delta)^2} \times \sin\delta + \frac{(1+e)r}{v(1+\cos\delta)^2} \times \sin\delta = 0$$

$$\Rightarrow e = \frac{2\cos\delta}{1+(\cos\delta)^2} ------式(5)$$

<u>我們將由式(4)得到的 e 值稱為「實驗 e 值」，式(5)得到的 e 值稱為「理論 e 值」</u>

陸、　研究討論

一、δ的討論

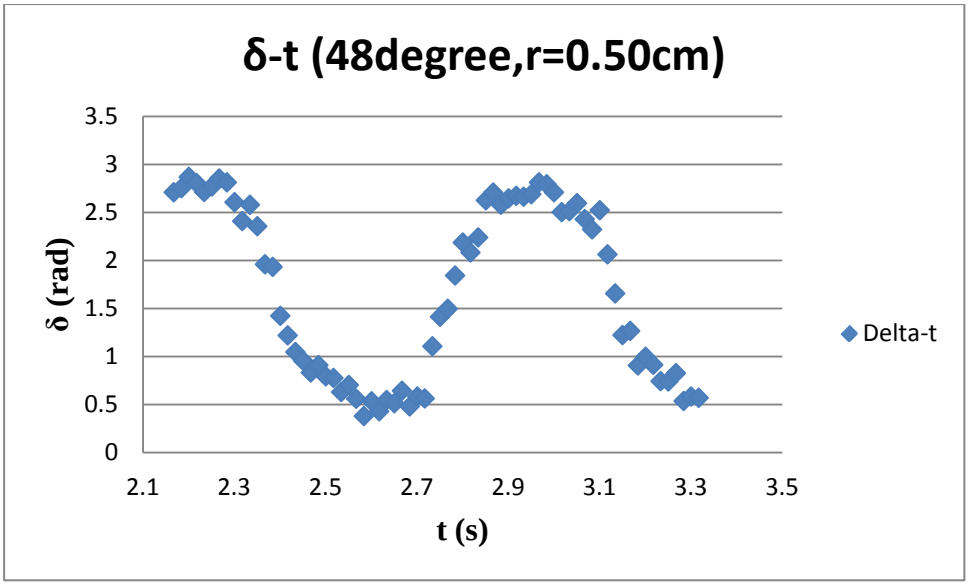


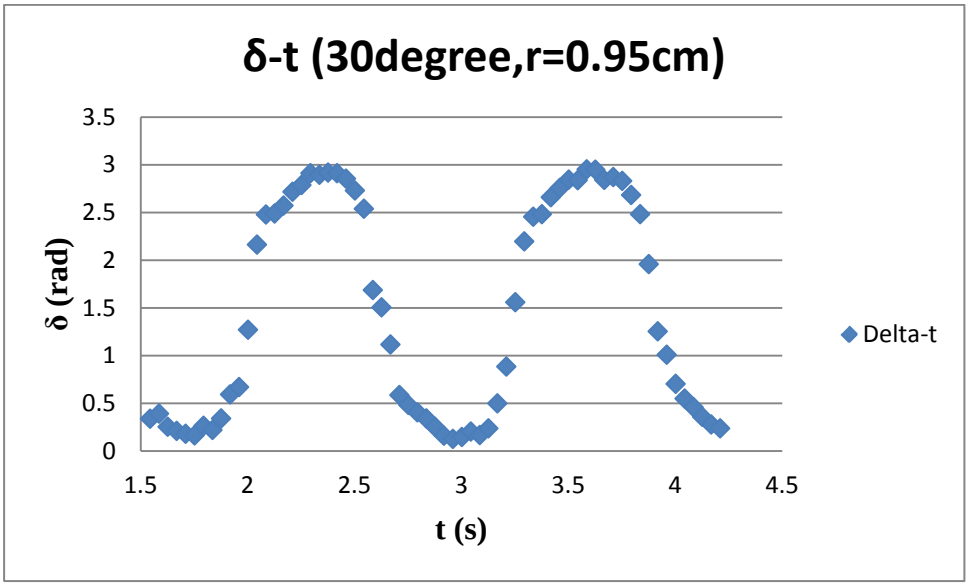
δ：水流衝擊圓片的夾角($0° \le \delta \le 180°$)

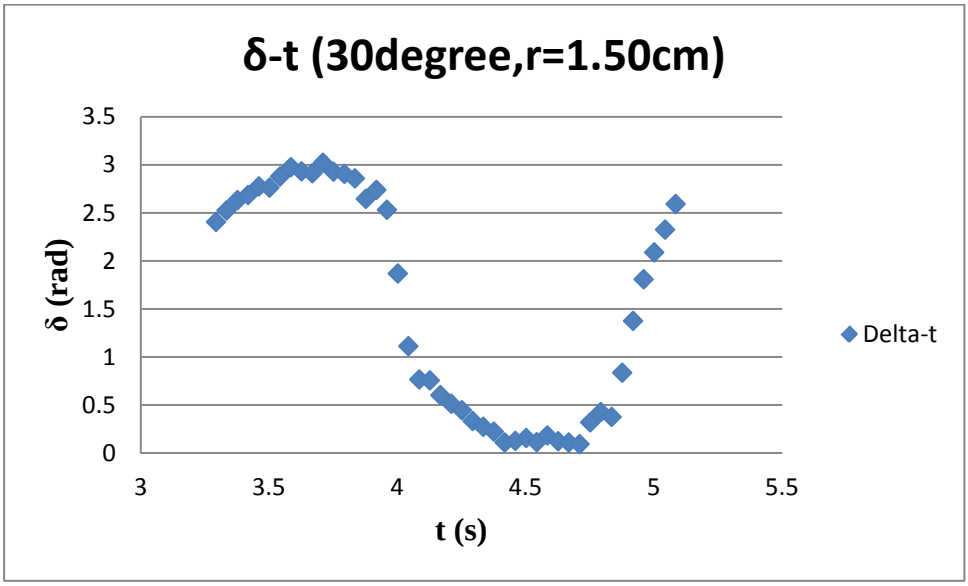
β：水流與水平的夾角

θ：圓片與水平的夾角

由上圖可知，$\delta = \beta - \theta$

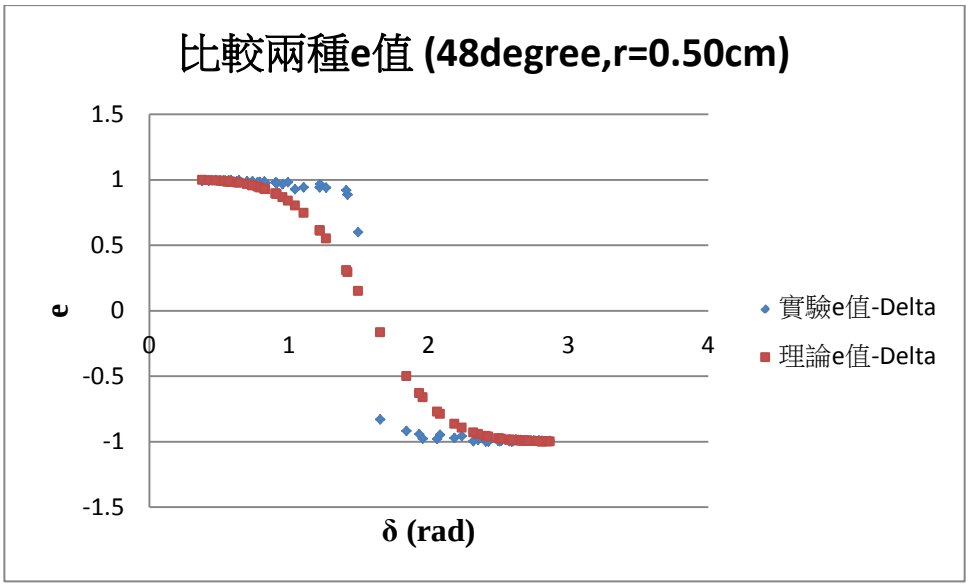

δ-t (48degree,r=0.50cm)
δ (rad)
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
2.1
2.3
2.5
2.7
2.9
3.1
3.3
3.5
t (s)
Delta-t


δ-t (30degree,r=0.95cm)
δ (rad)
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
t (s)
Delta-t

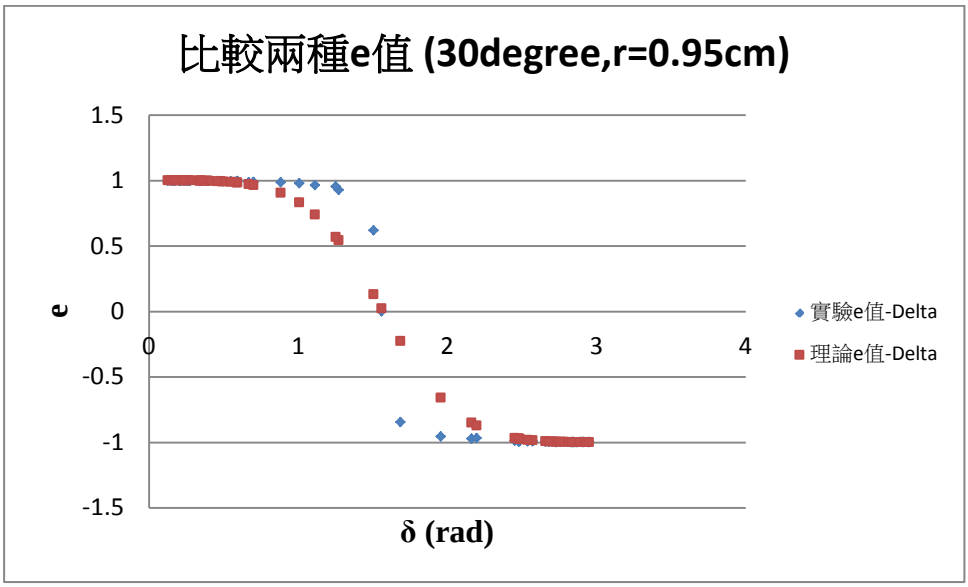

δ-t (30degree,r=1.50cm)
δ (rad)
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
3
3.5
4
4.5
5
5.5
t (s)
Delta-t

二、e值的討論

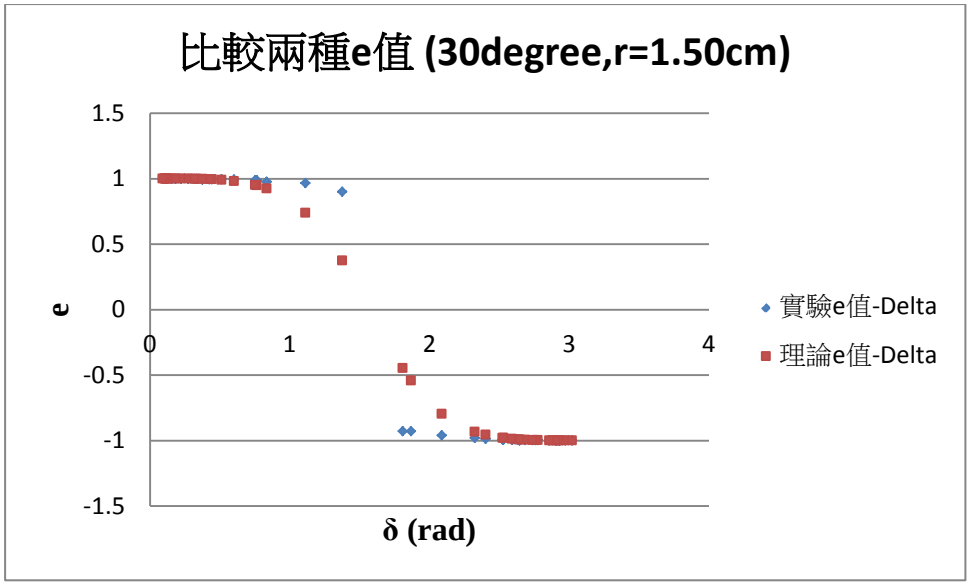
由實驗可測得圓片的 v、α、δ 值，將這些數值代入式(4)可得實驗 e 值。另外將不同的 δ 值代入式(5)可得理論 e 值，將上述兩種 e 值對 δ 繪製圖表，，並比較其差異。



↑圖(七)



↑圖(八)



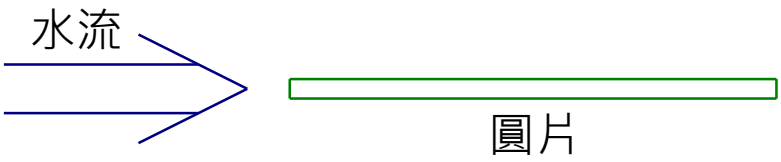
↑圖(九)

三、模型調整

在觀察 e 值和δ的關係圖後，我們發現實驗 e 值和理論 e 值相當的符合，但仍有些誤差。為了修正此誤差，我們認為模型應適當調整。

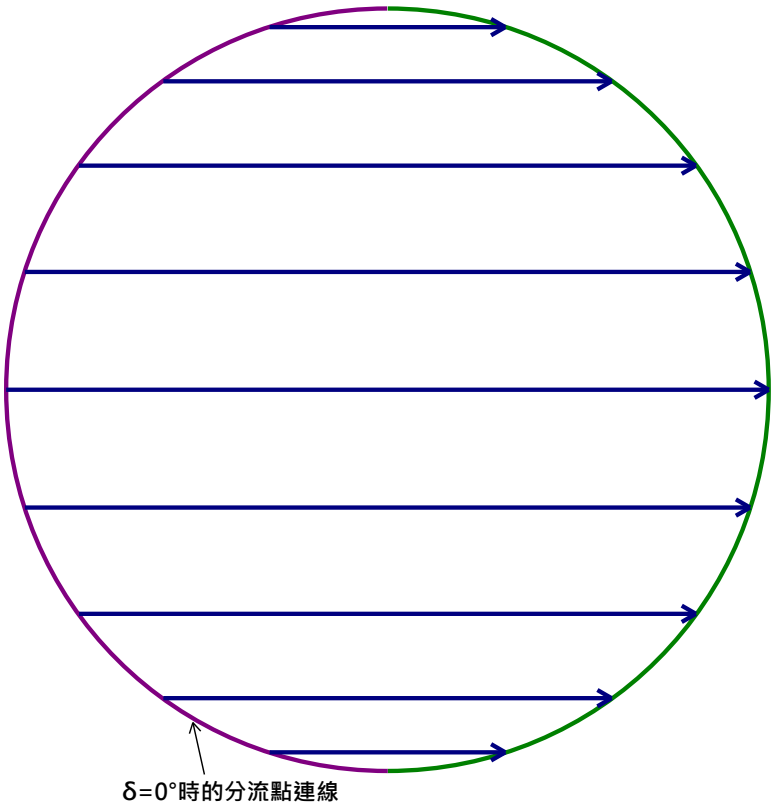
(一) 我們進行下面兩個分流實驗，以水流直接衝擊塑膠圓片

1. 水流以δ = 0°衝擊圓片，如下圖所示



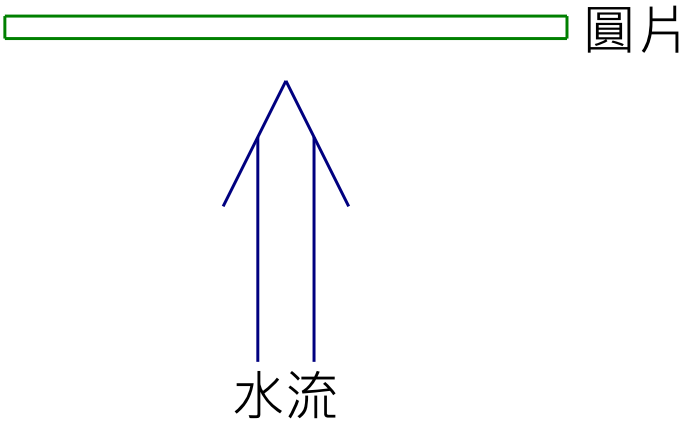
↑水流以δ = 0°衝擊圓片示意圖

分流點連線為半圓弧，如下圖，此即原先建立之模型，我們稱之為線分流



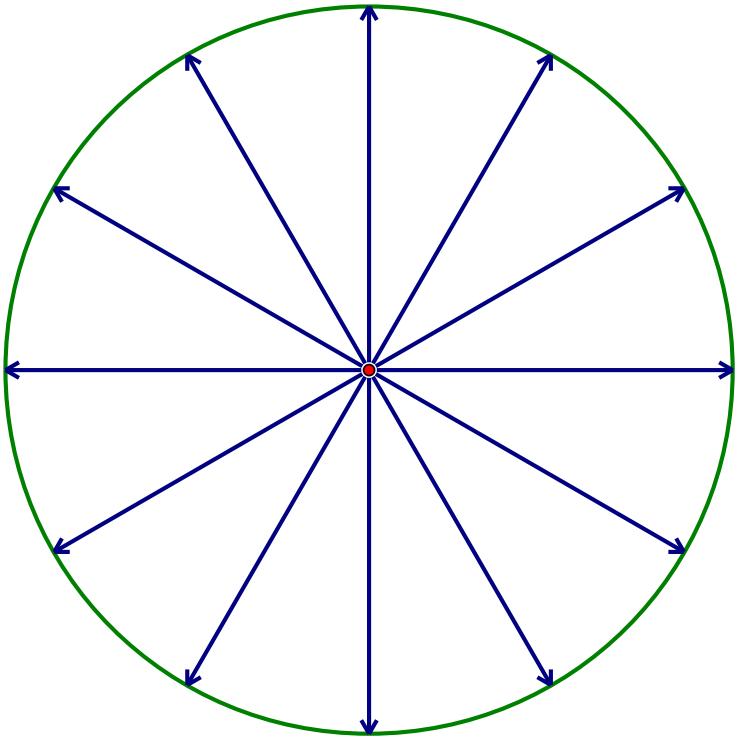
↑ $\delta = 0°$時的分流點連線為半圓弧

2. 水流以$\delta = 90°$衝擊圓片，如下圖所示



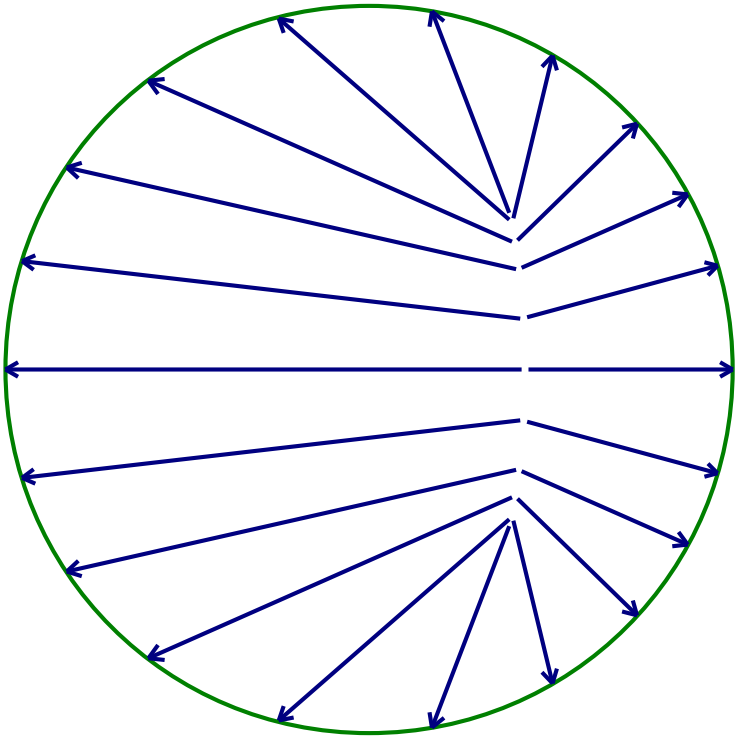
↑水流以$\delta = 90°$衝擊圓片示意圖

分流點位於圓片圓心，水的分流呈輻射狀，如下圖，我們稱之為點輻射分流



↑δ = 90°時的分流點位於圓片圓心，分流呈輻射狀

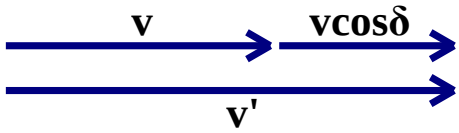
3. 若水流斜向衝擊圓片，我們推論水的分流應介於上述兩種分流之間，亦即為線分流與點輻射分流之混合模式，如圖(十)。而當δ越接近0°時，分流模式就越接近線分流；當δ越接近90°時，分流模式就越接近點輻射分流



↑圖(十)線分流與點輻射分流之混合模式示意圖

(二) 承上，關於水的分流，我們建立了線分流及點輻射分流之混合模型，如圖(十)，藉以取代原先單純的「線分流模型」。

1. 原先線分流模型下，水分流後水流速度限制在 x 方向上，受到周圍水流的影響(詳見圖(三))，水流速度變化情形如圖(十一)所示



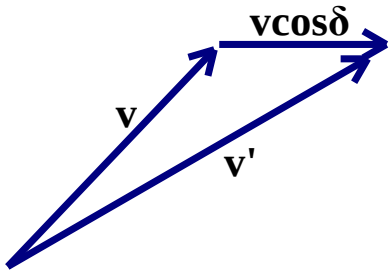
↑圖(十一) 線分流模型下之水流速度變化情形

v：原水流速度

$v\cos\delta$ ：周圍水流 x 方向分量(詳見圖(三))

v'：受周圍水流影響後的水流速度

2. 混合模型下，水流速度不再限制於 x 方向，而是任意方向的，則水流速度變化情形如圖(十二)所示



↑圖(十二) 混合模型下之水流速度變化情形

3. 由上可知，混合模型下，水流速率變化量較小，而我們原先建立的理論(詳見 p.11)認為：「速率變化造成壓力差，進而產生力矩。」<u>故在混合模型下，圓片所受力矩 τ 較線分流模型下的小</u>。

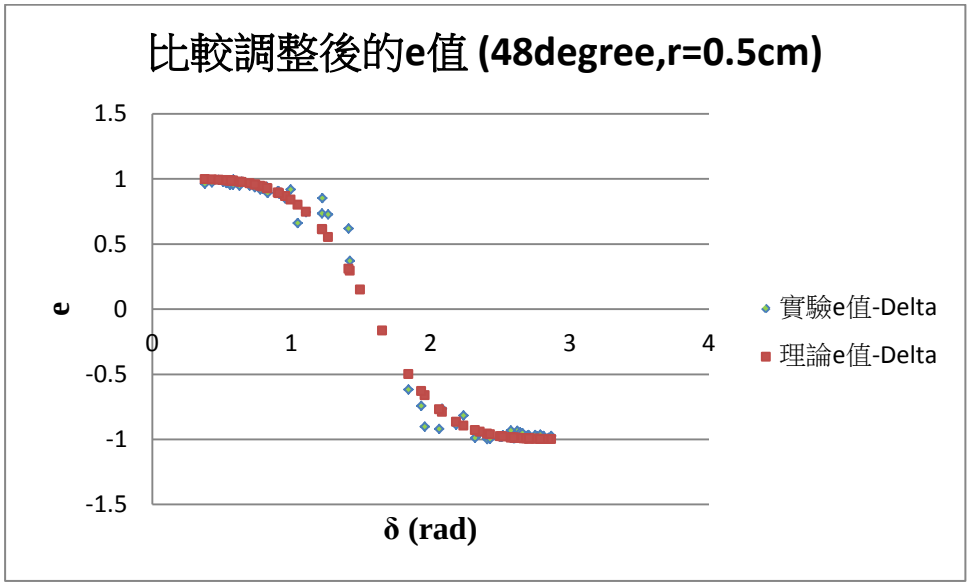
4. 在混合模型下，δ 越接近0°時，圓片所受力矩 τ 與線分流差距較小，e 值與原本模型的實驗 e 值較接近；δ 越接近90°時，圓片所受力矩 τ 與線分流差距較大，e 值較不接近原本模型的實驗 e 值，此與圖(七)~圖(九)的實驗結果相符。

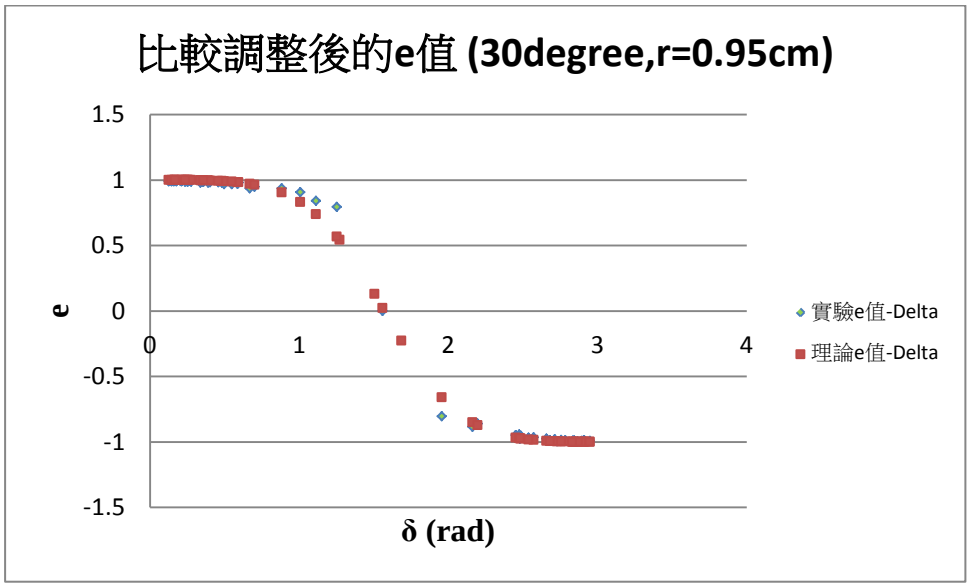
(三) 由以上論述得知，在混合模型下，圓片受到的力矩較小，於是我們嘗試將式(2)：$\tau = \frac{8}{3}\rho v^2 \cos\delta\, r^3(1-e^2)$調整成較小的力矩，如下式：

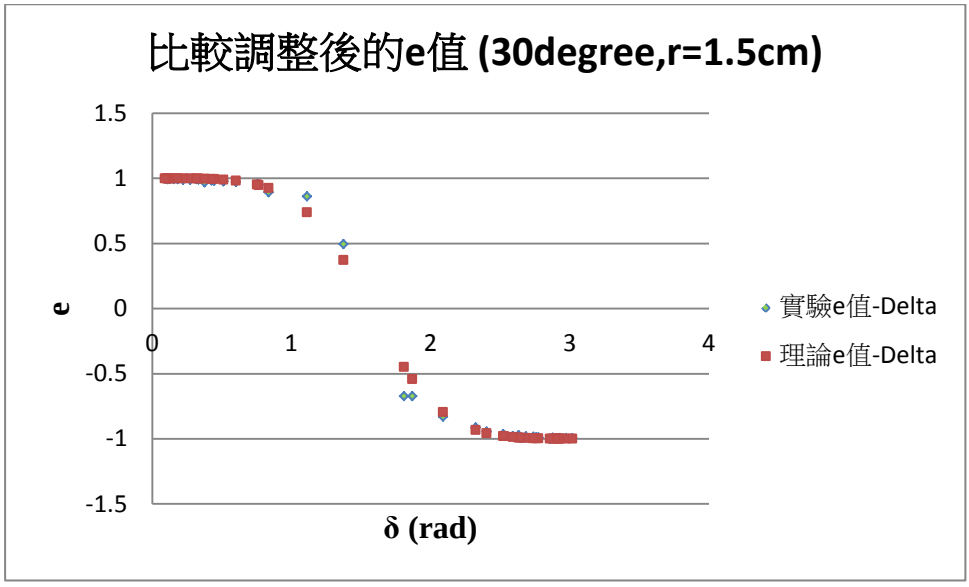
$$\tau = \frac{2}{3}\rho v^2 \cos\delta\, r^3(1-e^2)$$

則 $e = \pm\sqrt{1-\frac{3\tau}{2\rho v^2 \cos\delta\, r^3}}$

發現這樣調整後的實驗 e 值極為接近理論 e 值，如下表：







柒、　結論

本實驗以在水中釋放的小圓片模擬樹葉在空氣中左右擺動的運動，經由上述討論，我們可以得出以下的結論：

一、塑膠圓片在水中的運動具有週期性。

二、不論塑膠圓片的大小、初始釋放角為何，端點和質心連線與水平夾角之角度的極值都會趨近一個穩定擺動角度。

三、穩定擺動角度會受到圓片大小的影響，圓片越大，穩定擺動角度越小。

四、力矩和分流點e值(實驗e值)的關係式為：$\tau = \frac{8}{3}\rho v^2 \cos\delta\, r^3(1-e^2)$

五、根據最短時間原理，e值(理論e值)和δ的關係式為：$e = \frac{2\cos\delta}{1+(\cos\delta)^2}$

六、比較後並驗證實驗e值和理論e值相當的符合。

七、在經實驗後發現，水的分流應該是線分流和點輻射分流綜合的混合分流，且δ越接近0°時，分流模式就越接近線分流；當δ越接近90°時，分流模式就越接近點輻射分流。

八、經測試後得到調整的力矩和實驗e值的關係式為：$\tau = \frac{2}{3}\rho v^2 \cos\delta\, r^3(1-e^2)$

捌、　參考資料及其他

一、王行達、田麗文、李佳榮(譯)(民 97)。物理(原作者：David Halliday ,Robert Resnick and Jearl Walke)。新北市：全華圖書

二、林明瑞。高中物理。台北市：南一書局

【評語】040106

1. 本研究步驟能由“觀察”、“數據”、“理論模型”符合科學精神。

2. 在液體（氣體）中，所受流體動力學，應有所謂氣動力中心（升力、阻力共同作用點）。

3. 而氣動力中心隨攻角而變，升力、阻力亦隨攻角而變，與本研究自創原理不盡相同。

4. 自創“最短時間原理”能解釋部分實驗現象，但是尚有些現象未能以此原理解釋。