中華民國第52屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　物理科

040104

由塑性力學解釋夾鏈袋之裝置形變誤差

學校名稱：國立馬祖高級中學

作者：	指導老師：
高一 李彥嬛 高二 黃琪鈞 高一 王千昉	李　中 劉繕榜

關鍵詞：相守、不定型包裝、夾鏈袋

摘要

本研究針對不固定的包裝方式下，物體擺放及內容物所占空間及實際體積做一番物理及數學分析探討。企圖進行塑膠減量的方式，以減少包裝時塑膠袋的使用，研究實驗以夾鏈袋及粉筆為實驗材料，並記錄相關的的實驗數據，再以實驗解析方式建立模型，提出相關結果及建議。

分析結論如下：由環保塑膠減量的角度思考，塑膠減量時若可以自由選擇裝載物品時，此時根據置入內容物的根數，以**四層混合置入**及**五層混合置入**是最好的選擇，且若推廣之日後物品的包裝應用時可以降少塑膠袋的使用，達到節能減碳的環保功能。

壹、前言(Introduction)

包裝問題是我們日常生活中常遇到的問題，在購物過程中更是不能避免，而生活中出現的包裝現象，多數是不規則的亦即它是一個 NP 問題，傳統的包裝體研究者都是利用固定型態的容器來進行[1][5]。Chen 等人曾於 1995 年以線性規劃的方式提出了一個分析模型，制定一般的集裝箱裝卸的問題，亦即在多個容器可以分成 0-1 的裝卸模型[1]。目前大部份的文獻僅就規則性包裝做探討[1][2][4][5][6]，而對於不規則包裝的研究，提及層面不多。

去年北市科展利用 Pick 定理[10]及物理的力學分析來分析單一塑膠袋的數學模型，以數學解析方式建立模型說明減少包裝時塑膠袋的使用[8]。本研究方向除了將規則性包裝延伸至不規則性包裝，利用夾鏈袋當 x 作不規則包裝體(即:以粉筆當作內容物)，以物理性質分析夾鏈袋之形變，提出一套如何改善包裝的方式進而達到塑膠袋減量，以找出對環保有益的生活應用。

貳、研究目的與方法(Materials and methods)

傳統的包裝體研究者都是利用固定型態的容器來進行[8][9]，本研究嘗試利用包裝袋這一種不固定的容器進行分析當作不規則包裝體，並以粉筆當作內容物，試圖由物理及數學分析角度，找出以不同角度的填充方式及最大置入法，加以深入討論，藉此找出問題之成因及關係式並進行數學建模的物理分析：

一、研究目的：

(一)如何使用最多的內容物，使得包裝物能夠裝的最飽滿，並以此來設計包裝方式已達到塑膠袋減量的實際效果。

(二)以物理方法實驗，分析與推導出對應之數學公式並將其結果做對照分析。

二、名詞與符號定義：

(一)包裝袋：本研究所使用的包裝袋（以此代替一般塑膠袋）乃市面上常見的夾鏈袋，在此我們使用兩種尺寸的夾鏈袋，分別設其$\boxed{\text{高}(h)(\text{cm})}\times\boxed{\text{長}(l)(\text{cm})}\times\boxed{\text{厚度}(t)(\text{cm})}$為 10×7×0.1 及 12×8.5×0.1 (如圖 2-1 及 2-2)。

(二)內容物：以粉筆來代替內容物，其$\boxed{\text{長}(u)(\text{cm})}\times\boxed{\text{半徑}(r)(\text{cm})}=5.3\times\frac{1}{2}$。

(三)測量長度(x)：將內容物置入包裝袋中，所能撐開之最大長度，稱為測量長度(如圖 2-3)。

(四)測量寬度(y)：將內容物置入包裝袋中，所能撐開之最大寬度，稱為測量寬度(如圖 2-3)。

(五)測量高度(z)：將內容物置入包裝袋中，內容物的最低點到夾鍊袋封口之垂直距離，稱為測量高度。

圖 2-1：10×7×0.1 包裝袋

圖 2-2：12×8.5×0.1 包裝袋

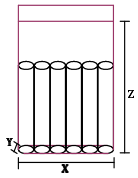


圖 2-3：測量位置示意圖

(六)層數(m、n、o)：將內容物置入包裝袋中，內容物底面三個面向之排列層數。如圖 2-4(a-c)所示，假設給定頂點座標均是整點（或正方形格點）的簡單多邊形，由 Pick 定理可以分析面積和內部格點數目及邊上格點數目的關係：因此本研究利用 Pick 定理來分析[3]，可以得知n=4，m=5，o=5。

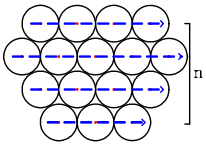


圖 2-4(a)：層數示意圖

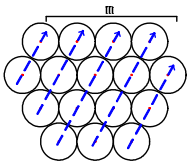


圖 2-4(b)：層數示意圖

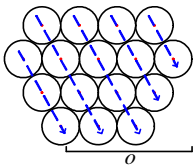


圖 2-4(c)：層數示意圖

(七) 外部裝填內容物個數(b)：接觸包裝袋的內容物個數，如圖 2-5(a)之藍色部分所示，$b=11$。

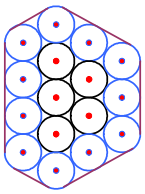


圖 2-5(a)：外部裝填內容物個數

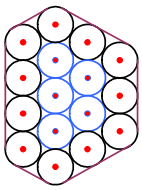


圖 2-5(b)：內部裝填內容物個數

(八) 內部裝填內容物個數(i)：非接觸包裝袋的內容物個數，如圖 2-5(b)之藍色部分所示，$i=5$。

(九)相守：將內容物置入包裝袋中，使得包裝袋充滿，假若包裝袋受到外力作用後，不會改變內容物的排列情形，此稱為相守。

(十)內部因為結構變型使袋子撐足的力稱為應力(σ)而造成的形變則稱為應變(ε)。當 σ 及 ε 兩者的力平衡，超過抗拉強度時，材料之截面積會有收縮之現象，此現象稱為頸化現象。

三、研究設計：

(一)基本假設：所有的包裝袋長，寬及內容物的長和半徑皆相同，並且考慮每個塑膠袋只使用一次。

(二)擷取樣本的長度：為了將包裝袋剛好撐開，我們擷取粉筆的長度為 5.3 公分，之所以為此長度，是經過反覆的實驗之後，發現此長度能夠符合我們的需求，所以決定了樣本的長度。

(三)探討置入的方法及種類

經過我們參考各種文獻[8]以及在市面上各種有關產品的裝置方法，我們依照粉筆(內容物)置入包裝袋(可變動的包裝袋)之方法分成三種類型：

1. 相守橫向置入　　2. 相守直向置入　　3. 相守混合置入

(四)實驗裝置：

對於實驗裝置概念雛型、如圖 2-6，實驗裝置主要針對本研究目的而製作。本研究將利用拉力計測試夾鏈袋塑膠材質的彈性，並對照塑膠特性表[11]，從而估計夾鏈袋包裝因形變所產生的誤差。

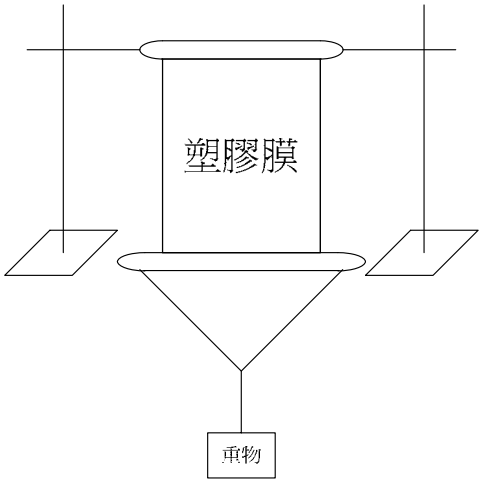


圖 2-6：概念實驗圖

(五)探討塑性力學及形變

本研究團隊先前做過相關的實驗，但卻發現無法使夾鏈袋之受力均勻，而導致有些部份產生皺褶之現象，所以這次藉由塑膠特性表[11]，在理想狀態(不考慮頸縮的情況下)，利用資料中的伸長率百分比計算出塑膠袋伸長之最大值及最小值，進而再以實驗做更進一步的探討，圖 2-7(*a*)及圖 2-7(*b*)為將要使用的實驗器材。

圖 2-7(*a*)：強力磁鐵及夾鏈袋

圖 2-7(*b*)：測量受力之儀器

四、建立數學模型

本研究將以 Maple 15 數學軟體從事計算工作。並根據以上定義及假設，利用 Pick 定理[10]及數學解析方法求出內容物所占空間體積及實際體積。從而探討擺放方式與體積之間的關係。再利用塑性力學之原理，進一步減少實驗誤差。

五、問題分析：

(一)找出內容物置入包裝袋後底部的面積通式。

(二)找出置入包裝袋的內容物根數以及包裝高度的關係。

(三)找出內容物置入包裝袋後的高度通式。

(四)算出置入內容物後包裝袋的體積。

(五)要如何利用最少的內容物，使得包裝物看起來能夠最飽滿，此方式是最浪費塑膠袋使用的現象。

(六)要如何利用最多的內容物，使得包裝物能夠裝的最飽滿，獲得最多的裝填物，並達到真正塑膠袋減量，以提供一種最節省塑膠袋的包裝方法來達成節能減碳的效果。

(七)運用力學原理及實驗找出有關塑膠變形以及何種底部結構可以造成形變量最大並以數學解析所推出的實驗模型。

六、研究設備及器材

一、硬體部分：紙、筆、圓規、包裝袋、粉筆及相機、長尾夾、尺、電子磅秤、軟磁鐵、拉力計。

二、軟體部分：Visio、小畫家、Word 文書處理、Excel 試算表、Maple15。

叁、研究過程(Process)

我們假設所有裝在塑膠袋的粉筆都可以自由旋轉，使粉筆在袋子的邊緣平行放置到塑膠袋的邊緣。且在不失一般性，它也假定，所有的塑膠袋尺寸數據是滿足唯一約束每個粉筆可放置到袋內至少在六個位置之一。且進一步的限制袋子內的粉筆會斷裂及損毀，這需要的模式，這樣的項目可以可通過連續的塑膠袋的任一面來獲得。

一、探討置入的方法及種類

經過我們參考各種文獻[2]及調查在台灣市面上各種有關塑膠袋的包裝方法，我們依照粉筆(內容物)置入包裝袋(可變動的包裝袋)之方法分成三種類型，且以下情形皆滿足相守的條件：

(一)相守橫向置入：

如圖 3-1，內容物以橫向雙層方式置入包裝袋，因此命之為 **TYPE-A**。

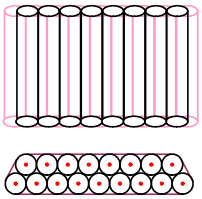


圖 3-1：雙層橫向置入圖

圖 3-2：雙層橫向實物置入圖

圖 3-3：雙層橫向實物置入圖(側面)

(二)相守直向置入：

如圖 3-11，內容物以雙層直向方式置入包裝袋，命名為 **TYPE-B**。同理，圖 3-4、3-16 以三層直向方式置入包裝袋，為 **TYPE-C**，圖 3-5、3-17 以四層直向方式置入包裝袋為 TYPE-D，圖 3-10 以五層直向方式置入包裝袋為 **TYPE-E**。

依照外部裝填內容物個數(b)，我們可將相守直向置入分為b=12 及b=11 討論。理論計算，包裝袋內約可直向置入$\frac{2l-2\pi r}{2r}\approx 11$支粉筆(其中$l$, r分別為包裝袋長度及粉筆半徑)，但實驗結果卻能置入 12 支粉筆，因此討論兩種情形，發現此時夾鍊袋產生塑性形變現象，導致原本應該只能裝 11 支變成 12 支(因為產生了形變)，經文獻研究調查，我們發現此時因袋內受力導致形變發生，因此使得袋內容量變大，因此實際值和估計值誤差加大。

以下為兩種可能置入的情形：

1. b =12 的情形

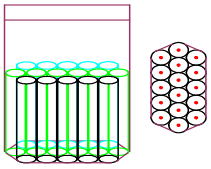


圖 3-4:三層直向置入

3-6:三層直向實物置入圖

圖 3-8:三層直向實物置入圖(側面)

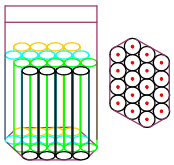


圖 3-5:四層直向置入圖

圖 3-7: 四層直向實物置入圖

圖 3-9: 四層直向實物置入圖(側面)

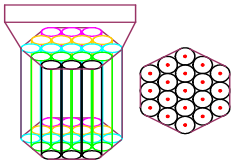


圖 3-10：五層直向置入

3-12：五層直向實物置入圖

圖 3-14：五層直向實物置入圖(側面)

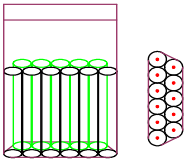


圖 3-11:雙層直向置入圖

圖 3-13:雙層直向實物置入圖

圖 3-15:雙層直向實物置入圖(側面)

2. b =11 的情形

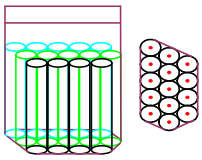


圖 3-16:三層直向置入

3-18:三層直向實物置入圖

圖 3-20:三層直向實物置入圖(側面)

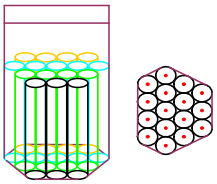


圖 3-17:四層直向置入圖

圖 3-19:四層直向實物置入圖

圖 3-21:四層直向實物置入圖(側面)

(三)相守混合置入：

混合置入即內容物為直向或橫向。如圖 3-22、3-34，內容物以雙層混合方式置入包裝袋，命之為 TYPE-F。同理，圖 3-23、3-35 以三層混合方式置入包裝袋為 **TYPE-G**，圖 3-28、3-40 以四層混合方式置入包裝袋為 **TYPE-H**，圖 3-29 以五層混合方式置入包裝袋為 **TYPE-I**。依照外部裝填內容物個數(b)，我們可將相守混合置入分為b=12 及b=11，兩者之可能置入情形為：

1.b=12 的情形

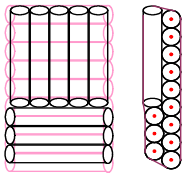


圖 3-22：雙層混合置入圖

圖 3-24：雙層混合實物置入圖

圖 3-26：雙層混合實物置入圖(側面)

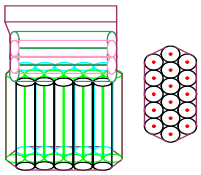


圖 3-23：三層混合置入圖

圖 3-25：三層混合實物置入圖

圖 3-27：三層混合實物置入圖(側面)

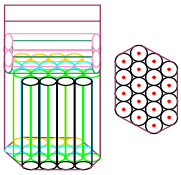


圖 3-28：四層混合置入圖

圖 3-30：四層混合實物置入圖

圖 3-32：四層混合實物置入圖(側面)

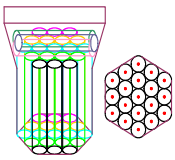


圖 3-29：五層混合置入圖

圖 3-31：五層混合實物置入圖

圖 3-33：五層混合實物置入圖(側面)

2.b=11 的情形

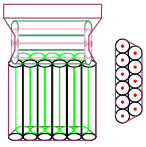


圖 3-34：雙層混合置入圖

圖 3-36：雙層混合實物置入圖

圖 3-38：雙層混合實物置入圖(側面)

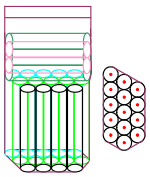


圖 3-35：三層混合置入圖

圖 3-37：三層混合實物置入圖

圖 3-39：三層混合實物置入圖(側面)

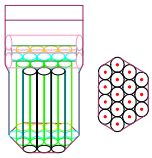


圖 3-40：四層混合置入圖

圖 3-41：四層混合實物置入圖

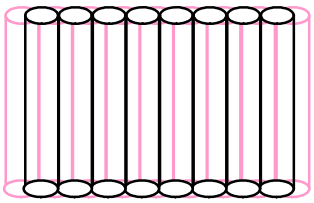
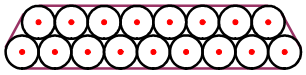
圖 3-42：四層混合實物置入圖(側面)

二、實驗分析

在討論完各種情形之後，接著我們去量測內容物置於包裝袋內的長度、寬度以及高度，也就是測量長度(x)、測量寬度(y)、測量高度(z)，量測完畢後，將之量測結果記錄下來，製成下列表格。

(一) 相守橫向置入

表 3-1：相守橫向置入實際測量表

類型	TYPE-A	參考圖示意圖
測量長度(x(cm))	5.3	
測量寬度(y(cm))	1.75	
測量高度(z(cm))	9.2	
置入根數	17	

(二) 相守直向置入

分成 b =12(如表 3-2)及 b =11(如表 3-3)兩種情形。

表 3-2：相守直向置入(b =12)實際測量表

類型	TYPE-C	TYPE-D	TYPE-E
x(cm)	5.9	5.6	5
y(cm)	2.7	3.5	4.4
z(cm)	8.4	7.8	6.9
置入根數	16	18	19
參考圖	圖 3-4	圖 3-5	圖 3-10

表 3-3：相守直向置入(b =11)實際測量表

類型	TYPE-B	TYPE-C	TYPE-D
$x(cm)$	6	5.3	5
$y(cm)$	1.8	2.7	3.5
$z(cm)$	8.8	8.5	8
置入根數	11	14	16
參考圖	圖 3-11	圖 3-16	圖 3-17

(三) 相守混合置入

分成 b =12(如表 3-4)及 b =11(如表 3-5)兩種情形。

表 3-4：相守混合置入(b =12)實際測量表

類型	TYPE-F	TYPE-G	TYPE-H	TYPE-I
$x(cm)$	5.3	5.9	5.6	5
$y(cm)$	2	2.7	3.5	4.4
$z(cm)$	9	8.4	7.5	7.2
置入根數	17	21	22	22
參考圖	圖 3-22	圖 3-23	圖 3-28	圖 3-29

表 3-5：相守混合置入(b =11)實際測量表

類型	TYPE-F	TYPE-G	TYPE-H
$x(cm)$	6	5.3	5
$y(cm)$	1.8	2.7	3.5
$z(cm)$	8.9	8.4	7.7
置入根數	16	19	19
參考圖	圖 3-34	圖 3-35	圖 3-40

利用上表 3-2、3-3、3-4 及 3-5 的數據，將根數和高度的關係繪製成 $Z-B$ 散佈圖，如下圖。

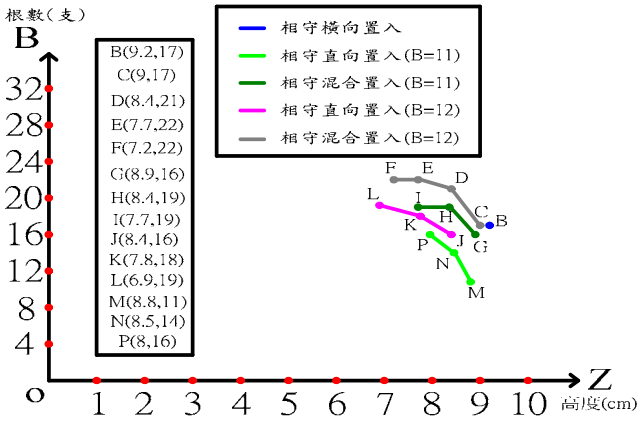


圖 3-43 $Z-B$ **散布圖**

根據表 3-1、3-2 及 3-3，可得知將內容物(粉筆)置入包裝(包裝袋)時，以相守直向置入的方法比相守橫向置入多的根數，於是我們將相守混合置入提出來進一步討論。依圖 3-43 所示，若置入的根數增加，則包裝(包裝袋)的測量高度(z)會逐漸降低，推測高度的變化與粉筆(內容物)置入後所稱開的長度及寬度有關。

三、實驗探討

(一)面積的計算

在不失一般性，將夾鏈袋底面建立 XY 斜坐標系，單位長為 1(內容物半徑為 $\frac{1}{2}$)，因此圓心會位於格子點上。如圖 3-44 所示。我們利用 Pick 定理將斜坐標轉為 XY 直角坐標系。如圖 3-45 所示。

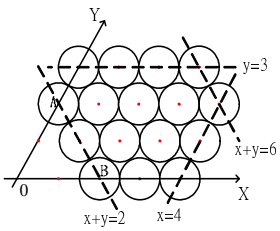


圖 3-44 XY **斜坐標示意圖**

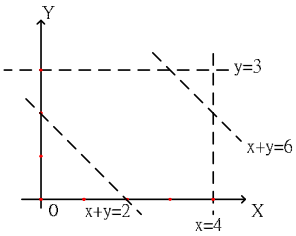


圖 3-45 XY **直角坐標示意圖(1)**

根據圖 3-44 所示，$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{AB}$，因此我們令 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{AB}=k$，層數為 m、n、o，將 k、m、n、o 代入 XY 直角坐標後，得到新的 XY 坐標圖，如圖 3-46 所示。

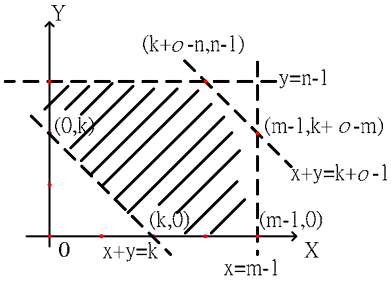


圖 3-46 XY 直角坐標示意圖(2)

由圖 3-46 及得知 Pick 公式[3] 得知，斜線面積

$$A=\frac{b}{2}+i-1 \text{ ——— } (1)$$

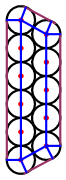
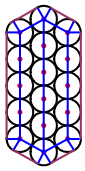
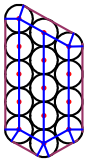
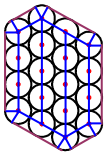
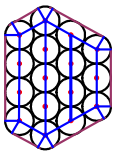
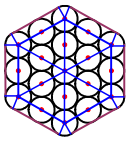
其中 b 為外部裝填內容物個數，i 為內部裝填內容物個數，令 A' 為包裝底面積，則

$$A'=\frac{\sqrt{3}}{2}A+\frac{b}{2}+\frac{\pi}{4} \text{ ——— } (2)$$

由(1) $A=\frac{b}{2}+i-1$ 代入(2)得 $A'=\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{(\sqrt{3}+2)b}{4}+\frac{\pi-2\sqrt{3}}{4}$

我們將相守混合置入之所有情形的面積(A)及面積(A')的數據繪製成表 3-6

表 3-6 各類型包裝底面積比較表

類型	TYPE-F	TYPE-G	TYPE-G
b	11	12	11
i	0	4	3
$A\,(cm^2)$	4.5	9	7.5
$A'\,(cm^2)$	10.1825	14.5796	12.7806
參考圖示意圖			
類型	TYPE-H	TYPE-H	TYPE-I
b	12	11	12
i	6	5	7
$A\,(cm^2)$	11	9.5	12
$A'\,(cm^2)$	16.3117	14.5126	17.1777
參考圖示意圖			

(二)高度(d)的計算

以相守混合置入(b=12)為例子，設 a、b、c、d、e、f、g 為包裝袋之各段邊長(如圖 3-47)，若夾鏈袋之高度為 h，則 $2h=a+b+c+d+e+f+g$ (如圖 3-48)

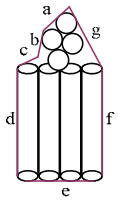


圖 3-47 相守混合置入(b=12)側面圖

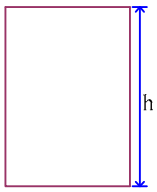


圖 3-48 包裝袋示意圖

圖 3-49 內容物示意圖

又內容物長度 $d=u=f$ (如圖 3-49)，因此 $2h=a+b+c+2u+e+g$ ，令包裝內容物寬度為 w，則 $w=e$ (如圖 3-50)

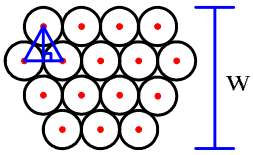


圖 3-50 相守混合置入(b=12)俯視圖

設內容物半徑=r，則 $w=(n-1)\times\sqrt{3}r+2r$

以本研究內容物實際半徑 $r=\frac{1}{2}$ 而言，且內容物成錯排相間時

$$w=(n-1)\frac{\sqrt{3}}{2}+1 \text{ ——— } (3)$$

則可將包裝上部分側面視為一等腰三角形(如圖 3-51)

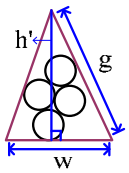


圖 3-51 等腰三角形示意圖

因為 $a+b+c=g$ ，所以 $2h=2u+w+2g$ ，即 $g=h-u-\frac{w}{2}$

令三角形之高為 h' (如圖 3-51)，斜邊為 $g=h-u-\frac{w}{2}$ ，一股為 $\frac{w}{2}$ ，得到

$$h'=\sqrt{\left(h-u-\frac{w}{2}\right)^2-\left(\frac{w}{2}\right)^2}=\sqrt{(h-u)(h-u-w)} \text{ ——— } (4)$$

令包裝高度為 d

因為 $h' = \sqrt{(h-u)(h-u-w)}$ 且 $d = u = f$ ，因此我們可以得到

$$d = \sqrt{(h-u)(h-u-w)} + u \text{ ——— } (5)$$

利用算式(3)及算式(4)來計算相守混合置入之各情形的高度，相守混合置入之所有情形的測量高度(z)及計算高度(d)的數據繪製成表 3-7，並算出 z 與 d 之比值($\frac{d}{z}$)以及誤差之百分率。

表 3-7 測量高度(z)及計算高度(d)比較表(h=10, u=5.3)

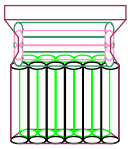
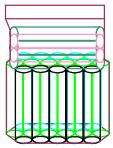
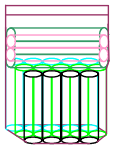
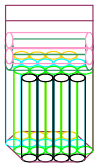
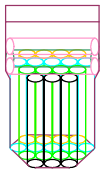
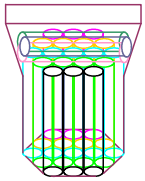
類型	TYPE-F	TYPE-G	TYPE-G	TYPE-H	TYPE-H	TYPE-I
B	11	12	11	12	11	12
N	2	3	3	4	4	5
$d\,(cm)$	8.9496	8.3412	8.3412	7.5757	7.5757	6.353
$z(cm)$	8.9	8.4	8.4	7.5	7.7	7.2
比值($\frac{d}{z}$)	1.0056	0.993	0.993	1.0101	0.9839	0.8824
($\frac{\lvert d-z \rvert}{z} \times 100\%$)	0.5573	0.7	0.7	1.0093	1.6143	11.7639

(三)體積(V)的計算

我們將相守混合置入之所有情形的測量體積及計算體積(v)的數據繪製成表 3-8，

表 3-8 測量體積及計算體積(V)比較表

類型	TYPE-F	TYPE-G	TYPE-G
B	11	12	11
I	0	4	3
$A'(cm^2)$	8.9496	8.3412	8.3412
$d(cm)$	1.866	2.732	2,732
$V(cm^3)$ ($A' \times d(cm^3)$)	91.1293	121.6114	106.6055
測量體積 ($A' \times z(cm^3)$)	90.6243	122.4686	107.357

參考示意圖			
類型	TYPE-H	TYPE-H	TYPE-I
B	12	11	12
I	6	5	7
$A'(cm^2)$	16.3117	14.5126	17.1777
$D(cm)$	7.5757	7.5757	6.353
$V(cm^3)=(A'\times d(cm^3))$	123.5725	109.9431	109.1299
測量體積$=(A'\times z(cm^3))$	122.3377	111.747	123.6794
參考示意圖			

四、形變探討

經過剛才的統計及計算發現，並不是所有的值都剛好是我們所算出來的值，分析原因應該是材料的彈性造成體積的擴大[4][5]，就如圖 3-52，但在不希望受力造成破裂如情形 3，進行了以下實驗找出此材質的變化情形及最大值。

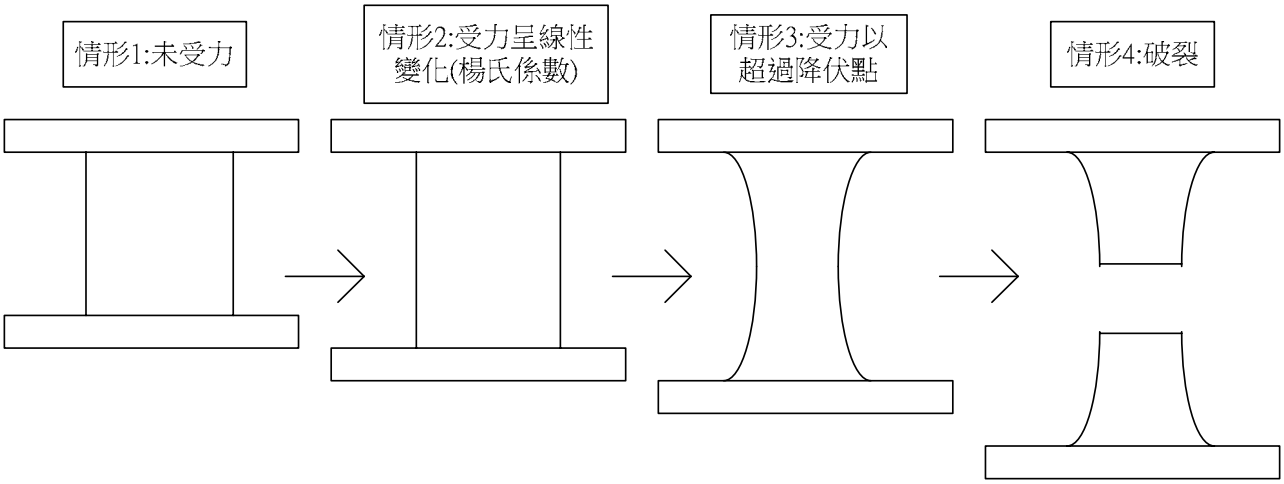


圖 3-52 薄膜經過拉扯後示意圖

以 TYPE-I 來看可以看出結構給袋子的力是其中最大而經過力的分析就如 圖 3-53，可以

清楚的發現在角落的地方結構會給予正向力而造成袋子非線性應變。

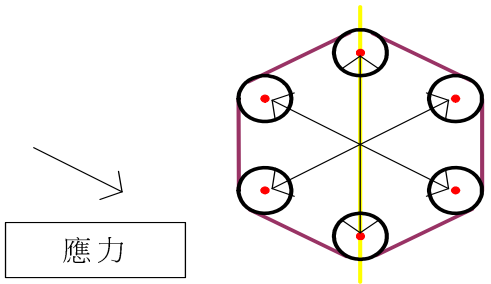


圖 3-53(a) TYPE-I 給予袋子的施力分析

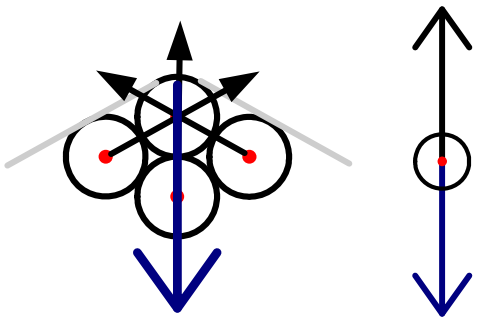


圖 3-53(b) TYPE-I 給予袋子的施力分析

在參考資料中應力及應變成圖 3-54 的情形[4]，其中如果夾鏈袋在施力之後放開則有彈性疲乏的現象，無法回到原點。

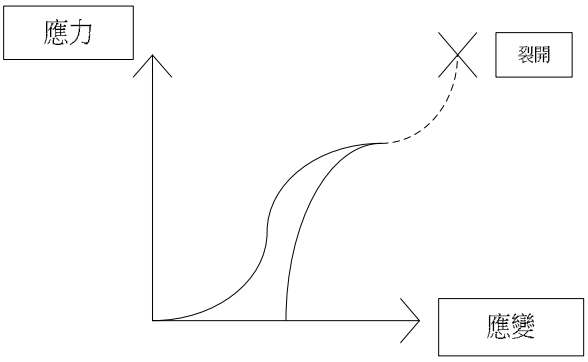


圖 3-54(a)應力及應變關係圖

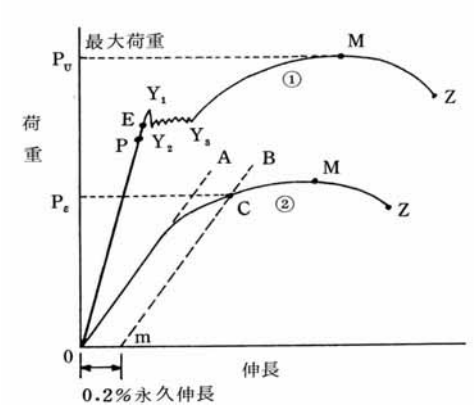


圖 3-54(b)應力及應變關係圖

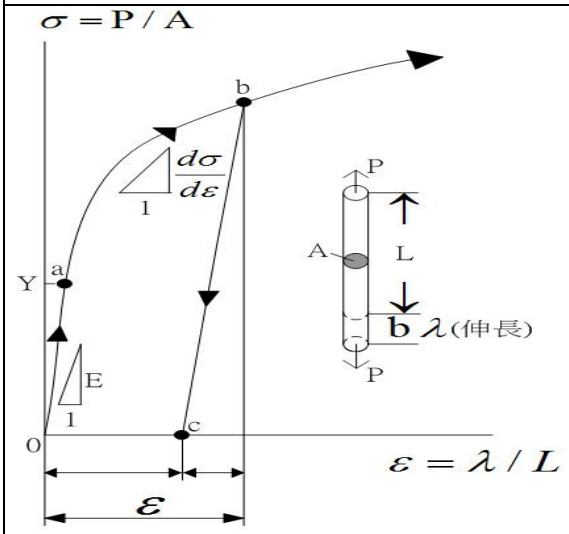


圖 3-54(c)應力及應變關係示意圖

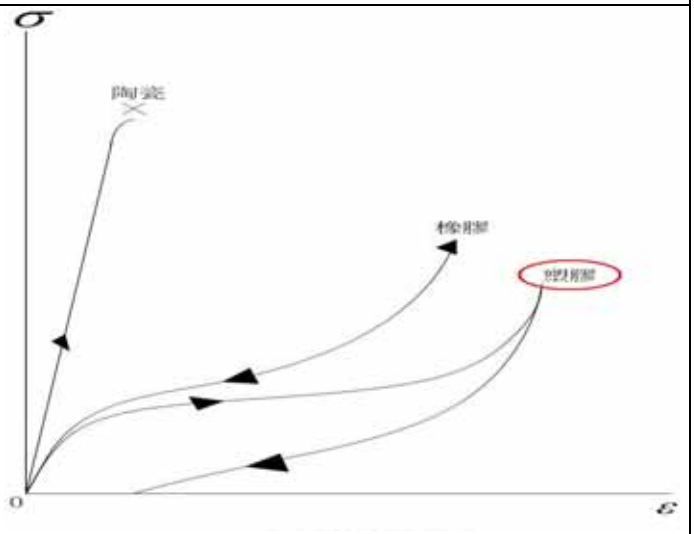


圖 3-54(d)應力及應變關係示意圖

以下是我們的實驗步驟：

1.將夾鏈袋裁成與實驗袋一開始的大小相同	2.把實驗袋中心戳上一點(使頸化的部分產生在中間)，上方必須留一些長度 如圖 3-55	3.以奇異筆於長寬中央各劃一條線(以便測量) 如圖 3-56	4.將實驗袋放置 90°實驗才會準確 如圖 4-3
5.先量測拉力器下方的初始重量	6.以水平尺對準	7.實驗袋上下皆以熱熔膠黏貼	8.增加定量後測得變化量，加以記錄，直到實驗袋破裂為止

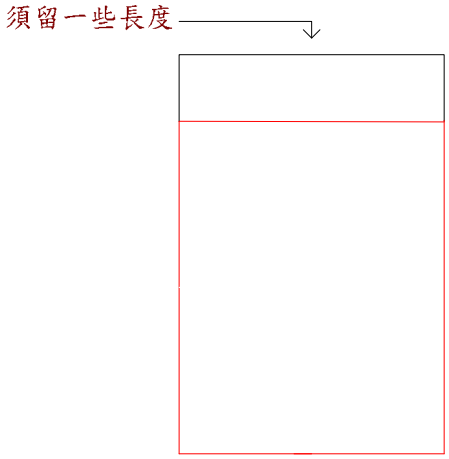


圖 3-55

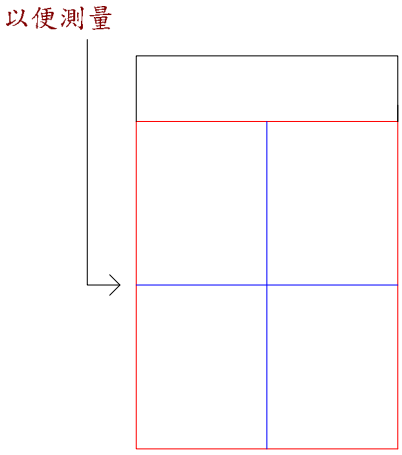


圖 3-56

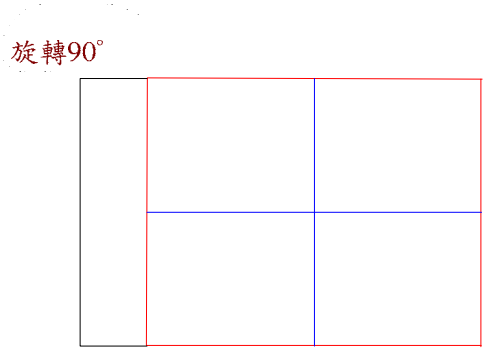


圖 3-57

性質	聚乙烯(PE)
伸長率 %（Elongation）	20-1300

經過實際裝填實驗(圖 3-58)後我們所做出來的關係如圖 3-59 及圖 3-60，兩種類型的變化情形一種是初期變化(圖 3-59)另一種則為後期變化(3-60)，區別在於到一個變形急速上升的點。

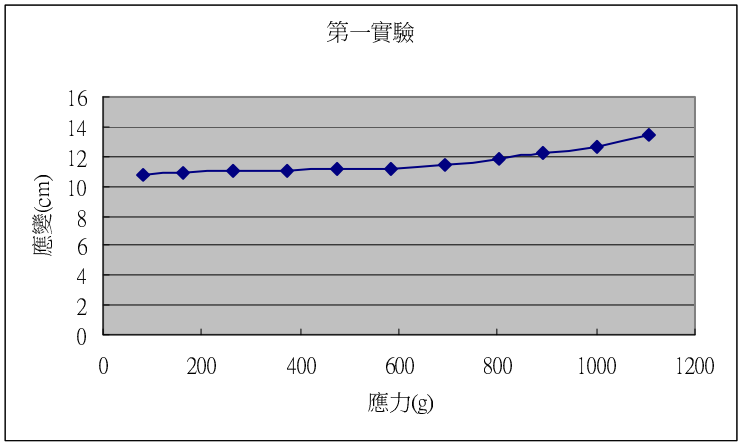


圖 3-58 實驗全部之數值

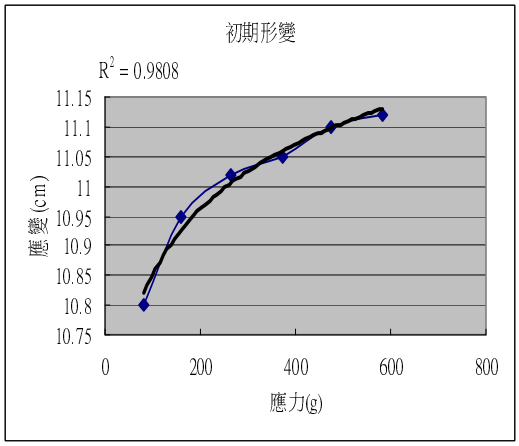


圖 3-59 初期變化

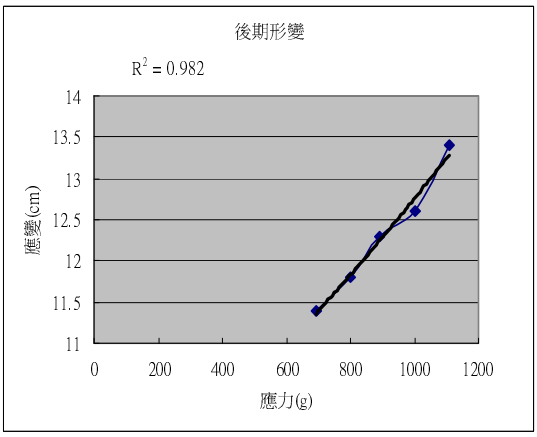


圖 3-60 後期變化

肆、研究結果(Results)

由於傳統在包裝的研究做法是利用一個混合整數規劃的制定[9]，來解決無方向限制的三維度的包裝問題，且幾乎不思考在可變容器內的裝卸問題，因此相關的分析幾乎無類似研究，本次研究結合了物理及數學，再根據一些實驗結果，最後建立數學模型透過與粉筆裝卸量實驗測得出之結果如下：

一、找出內容物置入包裝袋下層底部的面積通式：我們推導出一個面積通式，為 $A'=\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{(\sqrt{3}+2)b}{4}+\frac{\pi-2\sqrt{3}}{4}$，並從包裝底部面積可知，包裝內容物愈多，包裝底部面積愈大(如表 3-6 所示)。

二、找出置入包裝袋的粉筆根數以及包裝高度的關係：將根數(B)和高度(Z)的關係繪製成 $Z-B$ 散佈圖(圖 3-43 所示)。若置入的根數增加，則包裝(包裝袋)的測量高度(z)會逐漸降

低進而推測高度的變化與粉筆(內容物)置入後所撐開的長度及寬度有關。

三、找出內容物置入包裝袋後的高度通式：我們導出了一個高度的通式，為 $\sqrt{(h-u)(h-u-w)}+u$，並算出 z 與 d 之比值($\frac{d}{z}$)以及誤差之百分率(如表 3-7 所示)。我們發現 TYPE-I(即五層混合置入法)造成的變化最大。

四、算出置入內容物後包裝袋的體積：我們利用導出的面積通式以及高度通式算出置入內容物後包裝袋的體積(如表 3-8 所示)。我們發現 TYPE-I(即五層混合置入法)造成的變化最大。

五、發現最少的內容物的包裝方法(也是浪費最多塑膠袋的一種方式)，使得包裝物看起來能夠最飽滿，研究發現可以使用**三層混合置入**包裝物品。根據置入的根數而言，此方法會置入較**四層混合置入**及**五層混合置入**少 1 根粉筆，而**三層混合置入**的體積和其他兩者相差很小，因此從外表觀察並無法輕易看出其根數少 1 根，所以**三層混合置入**是最浪費夾鏈袋空間的方式。 (如圖 4-1)

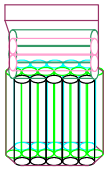


圖 4-1：三層混合置入圖

圖 4-2：三層混合實物置入圖

圖 4-3：三層混合實物置入圖(側面)

六、如何使得包裝物能夠裝的最飽滿，進而達到最少塑膠使用量：實驗發現可以根據置入內容物的根數，採**四層混合置入**以及**五層混合置入**來推廣此一形態的包裝，因為此種包裝方式可以真正達到塑膠袋減量，並且運用於生活中。因為在生活中的物品包裝種類繁多，利用此種方式不管是紙箱、塑膠及其他各種的包裝方式皆可以大幅改良，使我們的生活減少一些資源及不可回收的垃圾，也是本研究的終極目標(如圖 4-4、4-5)。

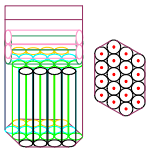


圖 4-4：四層混合置入圖

圖 4-6：四層混合實物置入圖

圖 4-8：四層混合實物置入圖(側面)

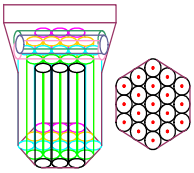


圖 4-5：五層混合置入圖

圖 4-7：五層混合實物置入圖

圖 4-9：五層混合實物置入圖（側面）

伍、結論與討論(Conclusions and Discussion)

本研究嘗試另一種塑膠夾鍊袋，並作出下列討論。

一、其他類型包裝探討(高(h)(cm)×長(l)(cm)×厚度(t)(cm)為 12×8.5×0.1)，且所有情形皆滿足相守的條件。

(一)相守直向置入

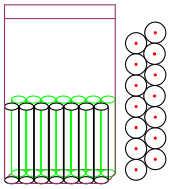


圖 5-a-1：雙層混合置入圖

圖 5-a-3：雙層混合實物置入圖

圖 5-a-5：雙層混合實物置入圖(底面)

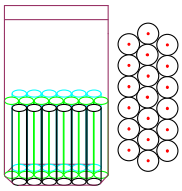


圖 5-a-2：三層混合置入圖

圖 5-a-4：三層混合實物置入圖

圖 5-a-6：三層混合實物置入圖(底面)

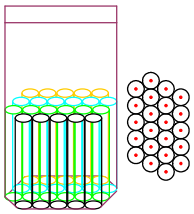


圖 5-a-7：四層混合置入圖

圖 5-a-9：四層混合實物置入圖

圖 5-a-11:四層混合實物置入圖(底面)

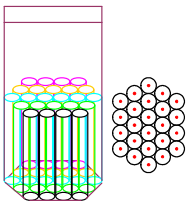


圖 5-a-8：五層混合置入圖

圖 5-a-10:五層混合實物置入圖

圖 5-a-12:五層混合實物置入圖(底面)

(二)相守混合置入($b=14$)

根據$\dfrac{2l-2\pi r}{2r}\approx 14$，所以以下皆以$b=14$來探討。

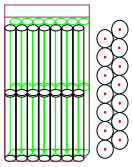


圖 5-a-13：雙層混合置入圖

圖 5-a-15：雙層混合實物置入圖

圖 5-a-17：雙層混合實物置入圖（底面）

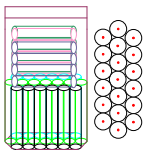


圖 5-a-14：三層混合置入圖

圖 5-a-16：三層混合實物置入圖

圖 5-a-18：三層混合實物置入圖（底面）

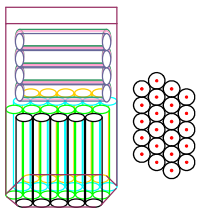


圖 5-a-19：四層混合置入圖

圖 5-a-21：四層混合實物置入圖

圖 5-a-23：四層混合實物置入圖（側面）

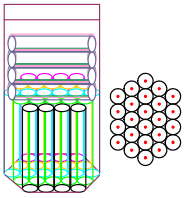


圖 5-a-20：五層混合置入圖

圖 5-a-22：五層混合實物置入圖

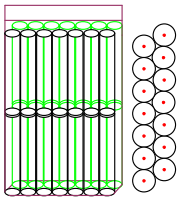
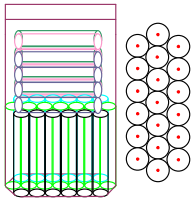
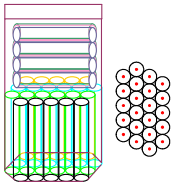
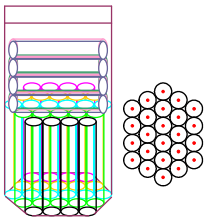
圖 5-a-24：五層混合實物置入圖（側面）

圖 5-a-25：四層混合實物置入圖(底面)

圖 5-a-26：五層混合實物置入圖(底面)

(三)我們將相守混合置入之所有情形的面積(A)及面積(A')的數據繪製成表 5-a-2，

表 5-a-2 各類型包裝底面積比較表

類型	雙層混合置入	三層混合置入
b	14	14
i	0	5
n	2	3
$A\,(cm^2)$	6	11
$A'\,(cm^2)$	12.9816	17.3117
參考示意圖		
類型	四層混合置入	五層混合置入
B	14	14
i	8	10
N	4	5
$A\,(cm^2)$	14	16
$A'\,(cm^2)$	19.9096	21.6418
參考示意圖		

本研究經由物理實驗得到數據進行數學建模分析，初步做出以下結論：

一、 我們推導出一個面積通式，為 $A'=\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{(\sqrt{3}+2)b}{4}+\frac{\pi-2\sqrt{3}}{4}$，並由表 3-6 及表 5-a-2 推論，包裝底面積愈大，包裝內容物愈多。

二、 我們找出置入包裝袋的粉筆根數以及包裝高度的關係，由圖 3-43 得知若置入的根數增加，則包裝(包裝袋)的測量高度(z)會逐漸降低，推測高度的變化與粉筆(內容物)置入後所撐開的長度及寬度有關，而此點正是受到物理現象的彈性互補相關。

三、 找出內容物置入包裝袋後的高度通式：我們導出了一個高度的通式，為 $\sqrt{(h-u)(h-u-w)}+u$，並算出 z 與 d 之比值($\frac{d}{z}$)以及誤差之百分率。由表 3-7 及 3-8 可知，由於夾鏈袋是不定型包裝容器，以**五層混合置入**將造成夾鏈袋某種程度上的形變。

四、 算出置入內容物後包裝袋的體積：我們利用導出的面積通式以及高度通式算出置入內容物後包裝袋的體積 (表 3-8 所示)。我們可以得知**四層混合置入**以及**五層混合置入**會造成最大的包裝量，進而達到最少塑膠袋的使用，其中**五層混合置入**將造成夾鏈袋較大的形變。

五、 未來展望：由本次研究發現利用數學工具的分析，可有效減少塑膠袋等包裝物品的使用，減少塑膠的消耗進而達到節能減碳的效果，未來應可就本分析方式再對其他的生活物品進行理性分析，以獲取更多有意義的節能資訊，落實環保的生活，也可以把個人知識廣泛應用。且就地球本身而言，本研究也減少了不可回收的塑膠產生，達成節能減碳塑膠減量的終極目標 (如表 3-7、表 3-8 及圖 4-4、4-5)。至於是否應控制形變程度以決定何種包裝可得最大利益，此種問題乃是另一物理現象的探討，將做為我們未來延伸性研究的另一主題。

陸、參考文獻(References)

[1] Szpiro. G (葉偉文譯，2005)，刻卜勒的猜想，台北市：天下文化。

[2] 平震傑、董皓文，(2010)，微醺圓舞曲－衍生圖面積極值之探討，2010 臺灣國際科學展覽會。

[3] 蔡聰明，(2009)，數學的發現趣談，第八版，三民書局。

[4] 徐秉業、黃炎、劉信聲、孫學偉，彈性力學與塑性力學解題指導及習題集，亞東書局。

[5] 吉田總仁，(劉松柏譯，2008)、彈・塑性力學基礎，五南書局。

[6] Wolfram Mathworld. from http://mathworld.wolfram.com/topics/ Packing Problems.html.

[7] Erich's Packing Center. from http://www2.stetson.edu/~efriedma/packing.html.

[8] Yong Wua, Wenkai Li, Mark Goh, Robert de Souza, (2010) Three-dimensional bin packing problem with variable bin height, European Journal of Operational Research 202 347–355.

[9] Chen, C.S., Lee, S.M., Shen, Q.S., (1995) An analytical model for the container loading problem. European Journal of Operational Research 80 (1), 68–76.

【評語】040104

1. 作品內容以幾何堆積為主軸，較少對物理量之探討。

2. 所報告內涵較偏重於特定包裝袋及填充物之討論，應思考通式化之討論空間。

3. 作者應思考內容之物理相關性之討論。