

# 中華民國第 52 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

高中組 物理科

第二名

040102

f/2

學校名稱：國立宜蘭高級中學

作者： 高二 朱家緯 高二 林沅廷 高二 陶昇永	指導老師： 吳旭峯
-----------------------------------	--------------

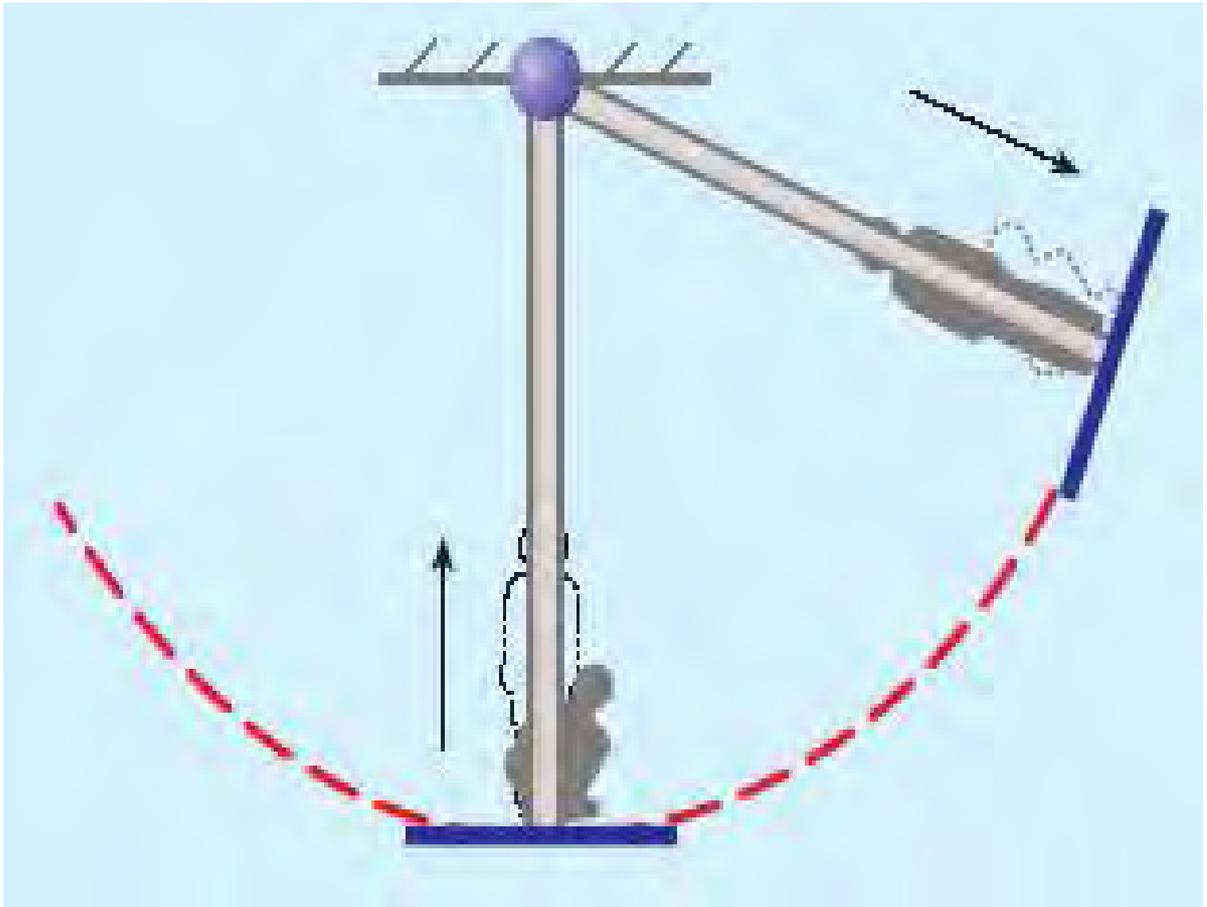
關鍵詞：二分頻、參數共振

## 摘要

架好單擺的設施後，我們調整信號產生器的頻率和電壓，觀察二分頻的現象，並使用位移紀錄器觀測其單擺振幅的上升過程，為此研究立下基礎。此現象的發生與推導完成後，我們開始進行進一步的分析，調整信號產生器的電壓，改變其振源振幅，觀察下方單擺振幅之變化，加以記錄和繪圖。接著，我們細微地規律更改下方單擺擺長，觀察振源與單擺頻差對飽和振幅的影響，加以作圖分析以觀察此現象的頻寬與趨勢。

## 壹、 研究動機

黃昏將至，坐在盪鞦韆上遠眺夕陽終將消沉，盪著鞦韆，想著兒時的記憶，也想起物理科展迫在眉睫，轉瞬，我似乎想到了什麼：為甚麼鞦韆在一次完整來回的振幅當過程中，人總是上下運動了兩個週期？從小到大玩了那麼多次鞦韆，似乎視此現象為理所當然。穿過數千腦中神經的探索，我認為這就是最適合我們的科展題目，既存乎於生活中又富有值得探討性與不確定性，那就研究它吧！



## 貳、 研究目的

- 一、 調整信號產生器之頻率，探討在不同倍數之下，是否可使單擺產生擺動現象。
- 二、 在振動源的帶動下，單擺由靜止到穩定的漸變過程好似有一定規律，故加以探討，並且由所得數據分析，試圖找出其由靜止至穩定過程中振幅上升之一般函數圖形，並由函數圖形求其關係式，並改變操縱變因，找出影響此過程的各物理量。
- 三、 由於振動源是一馬達跟長細桿，長細桿處處振動幅度皆不同，故以實驗二加以探討離振源振動幅度大小是否對下方單擺的振幅造成影響，並以實驗結果加以探討，找出其關係。
- 四、 此實驗中，上方振源與下方單擺之頻率在兩倍的條件下可容許一定的頻差量，故以小幅度地更改下方單擺的擺長，每次由初始點分兩方向(增加或減少)定量改變擺長，觀察其與上方振源頻差對單擺振幅的影響，求其變化圖形並加以探討此現象之頻寬。

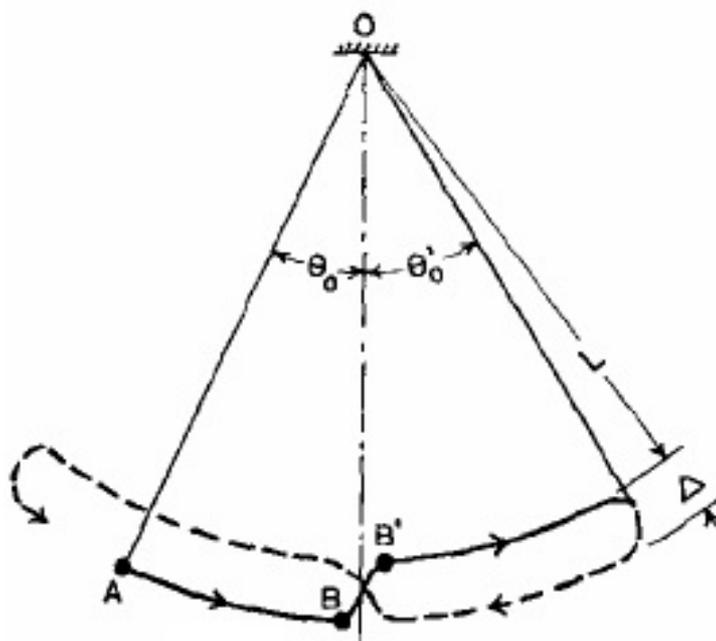
### 參、 研究設備及器材





- 一、信號產生器
- 二、馬達
- 三、鐵桿
- 四、鐵架
- 五、軟彈簧
- 六、單擺 - 鐵球
- 七、聲波位移紀錄器
- 八、銅線
- 九、鐵尺
- 十、雷射筆

## 肆、 研究過程及方法



### 一、 實驗一

- (一) 取一鐵球，在上面纏上銅線，測量出一 25cm 的單擺並掛在鐵桿上，並在用碼表測出其週期並計算出其頻率，將其頻率乘以 1,2,3,4...倍，將此頻率輸入信號產生器，透過馬達產生出頻率為單擺倍數關係的振源，探討振源在各種倍數頻率下是否可帶動下方單擺產生擺動現象。
- (二) 註：由於只要上方振源與下方單擺頻率配合便可產生擺動現象，經反覆實驗經驗後發現 25cm 較符合實驗環境，故往後實驗皆以 25cm 作為初始擺長以省去各儀器之調整配合。

### 二、 實驗二

- (一) 取一鐵球，在上面纏上銅線，做出一 25cm 的單擺並掛在鐵桿上，並在用碼表測出其週期並推算出其頻率，並將頻率乘以 2，輸入於信號產生器中
- (二) 先將聲波位移記錄器校正，並使單擺藉由上方振源的導引下由靜止開始擺動(前提是調整成功且確定可擺動)，以聲波位移記錄器記錄單擺由靜止到飽和的振幅與時間變化過程，再將所得數據輸入電腦利用 EXCEL 將數據加以分析得到其圖形及函數關係。
- (三) 利用雷射筆通過位於上振源的反射面，投射至屏幕上得放大振幅，以相似形測量牆上振幅，伸縮得原振幅。

### 三、 實驗三

- (一) 取一鐵球，在上面纏上銅線，做出一 25cm 的單擺並掛在鐵桿上，並在用碼表測出其週期並推算出其頻率，並將頻率乘以 2，輸入於信號產生器中
- (二) 利用改變信號產生器的電壓，而改變長細桿振幅。並在振源上方黏一玻片，利用雷射筆入射光 A 照射在玻片  $\alpha$  上並反射在牆壁  $\gamma$  上，當玻片隨著馬達旋轉一角度後變成玻片  $\beta$  則入射光反射後變為 C，校準使 BD 線段與 C 反射光在同一直線上，確認雷射光平行玻片角度改變方向入射。測量雷射光偏移的距離 d，由於



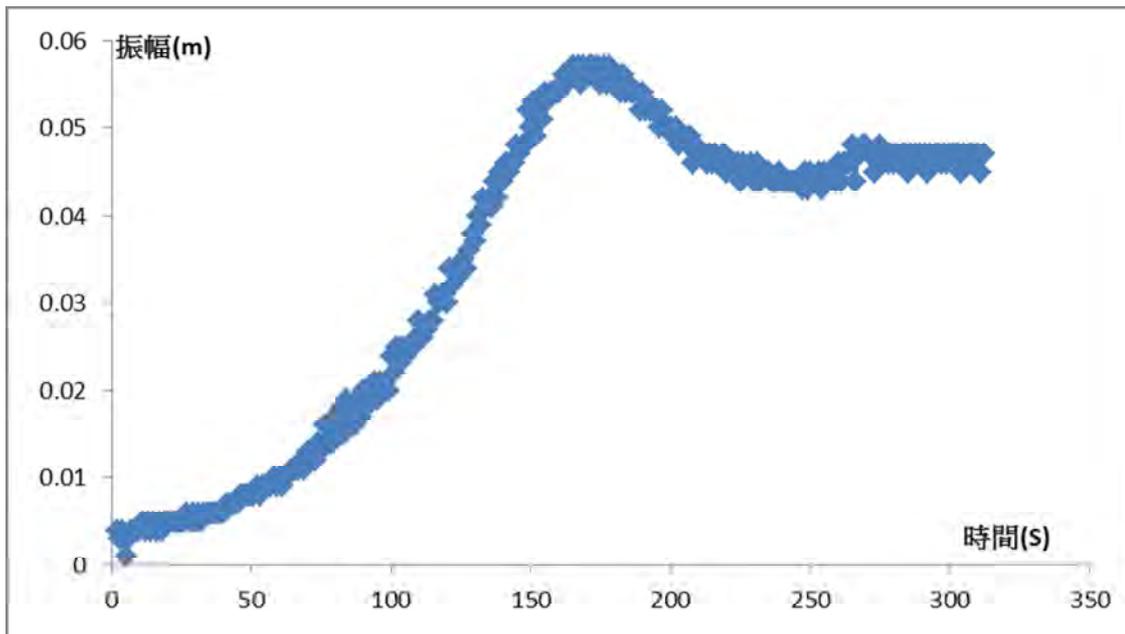
## 伍、 研究結果

一、實驗一中我們改變不同頻率加以探討，。當信號頻率為單擺頻率 2 倍時會發現單擺自發性地擺動且振幅逐大並達成穩定。當信號頻率為單擺頻率 3、4…….倍時，並無明顯共振或擺動現象。另外，當所供應頻率更改為 6 倍時，也有擺動現象的產生，但振幅較 2 倍時小很多，不易觀察！

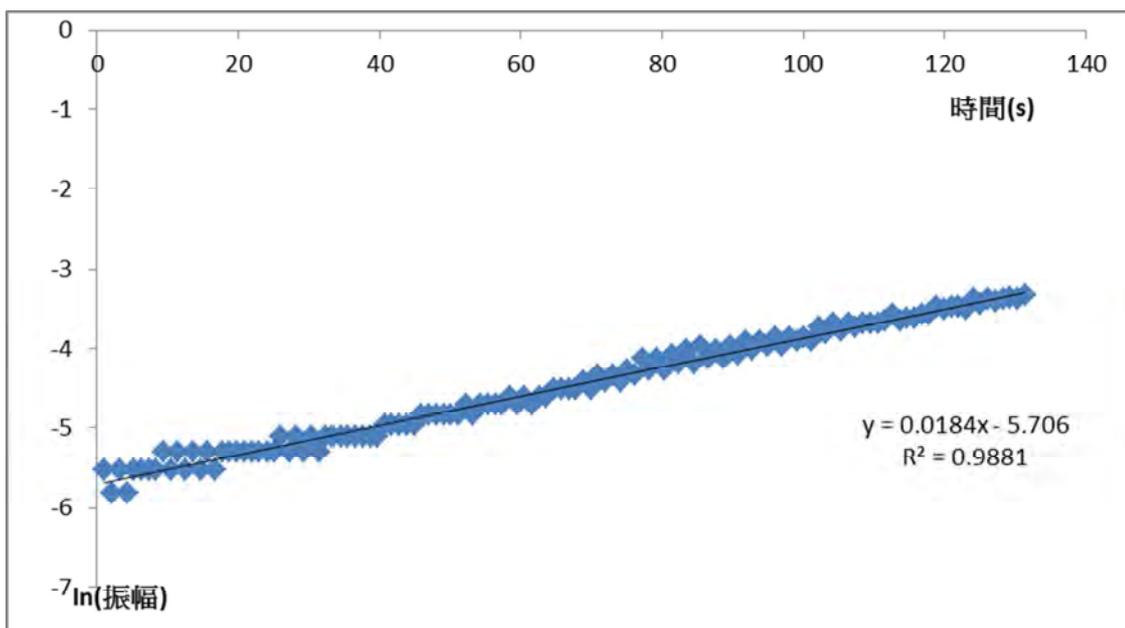
### 二、 實驗二

(一) 上方振源振幅 0.051 cm 擺長 25cm 時

#### 1. 振幅對時間的作圖

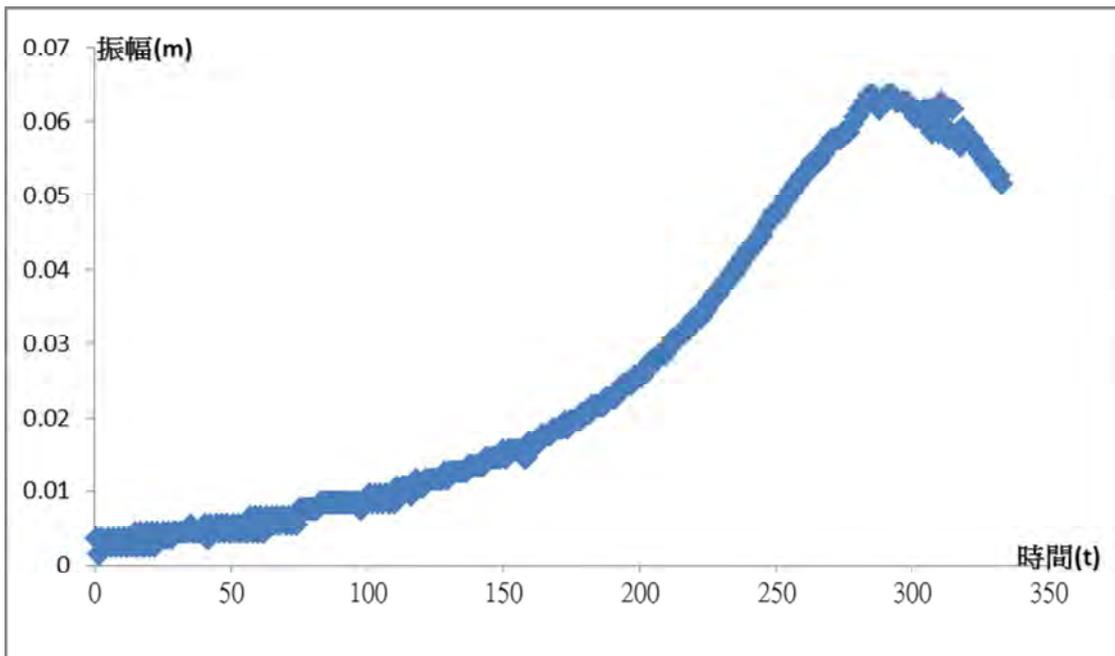


#### 2. 再將前段之上升曲線擷取，取 ln 後得到一線性函數

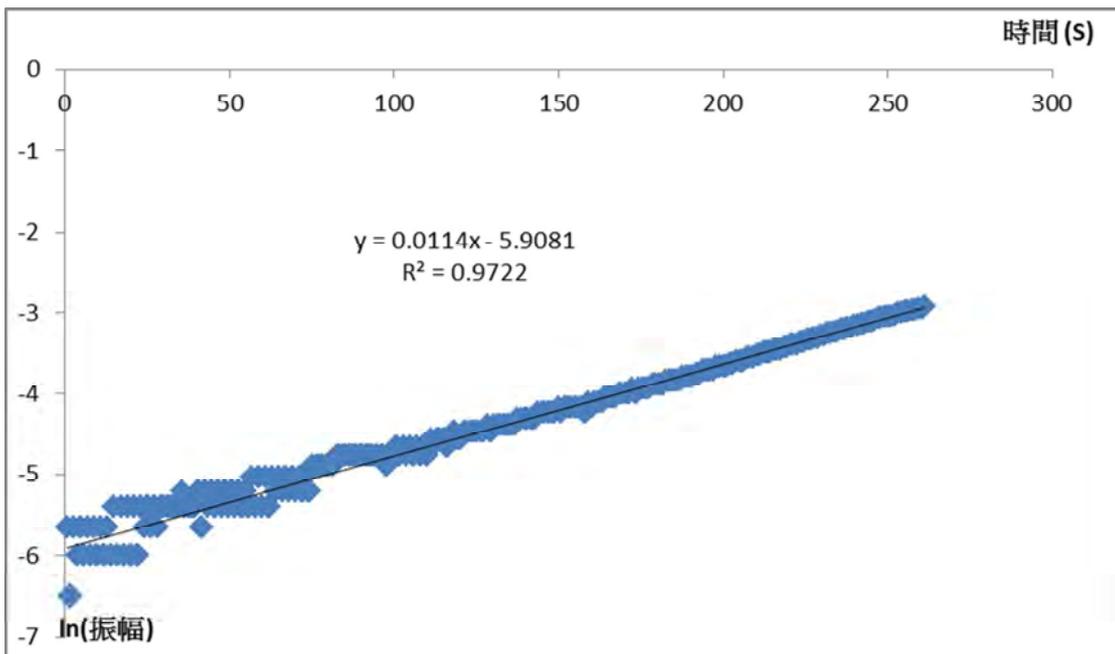


(二) 將上方振動幅度改為 0.029cm 擺長維持 25cm 且其餘條件皆不變得到

1. 振幅對時間的作圖

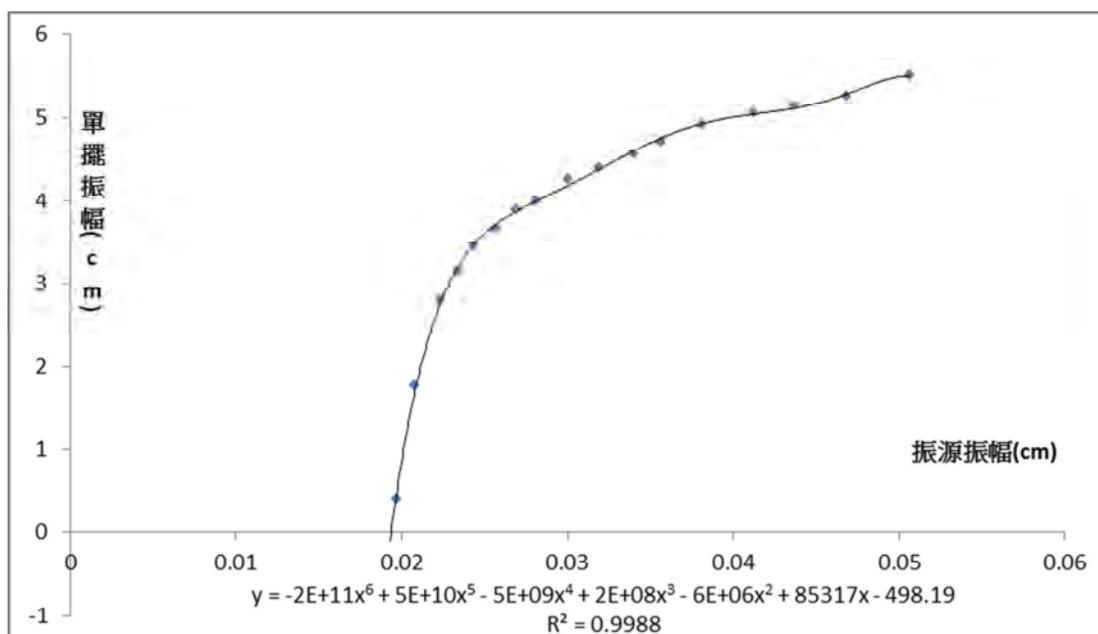


2. 將上升時的數據取 ln 後分析發現



### 三、實驗三

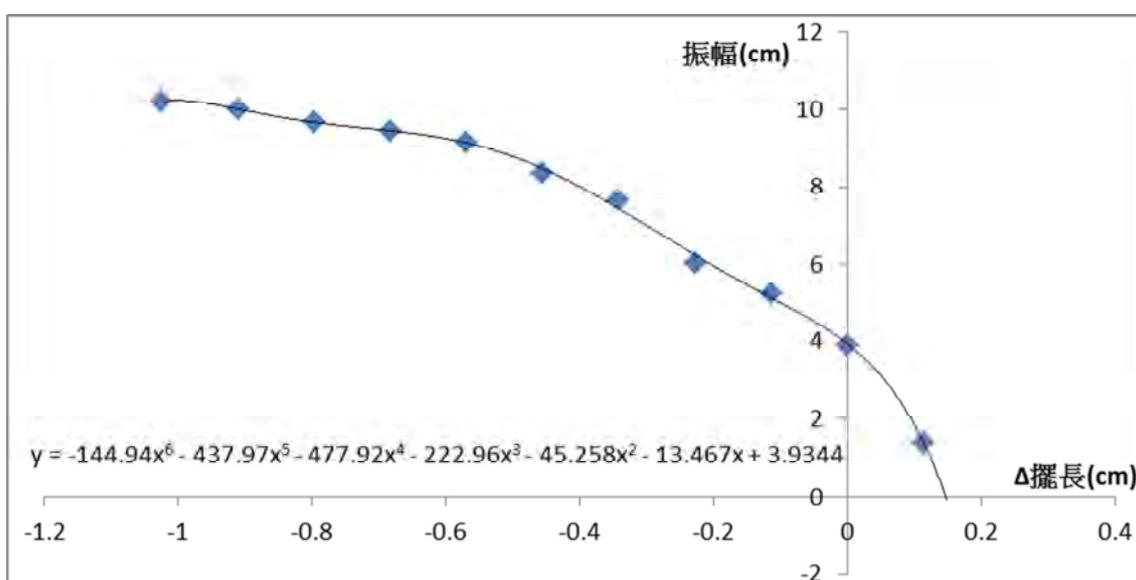
將振源振幅與單擺的飽和振幅做圖，並做多項式展開分析



### 四、實驗四

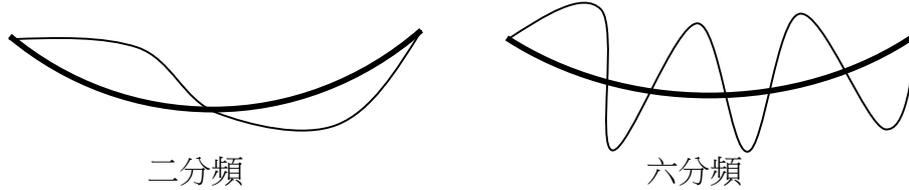
(一) 由游標尺先測量出上方振源桿子的直徑為 0.145cm，以求得上方振源桿子周長

(二) 利用作圖做出改變擺長之相對長度  $\Delta L$  與下方單擺擺動振幅之關係圖



## 陸、 討論與結論

### 一、實驗一



- (一) 在實驗一中我們得出 1,2,6 倍時單擺皆有擺盪現象，但信號頻率為單擺頻率 1 倍時是產生共振現象，此為頻率相同的共振，與我們所要討論的現象不符，故不加以討論。
- (二) 另外，我們也觀察到上方振源頻率為下方單擺的 6 倍時也會產生振動，因此我們藉由推測在二分頻時，上方振源加速度圖形(細線)與單擺之實際振幅軌跡(粗線)如上圖所示，並再推廣到 6 倍頻時，上方振源加速度圖形(細線)與下方之單擺振幅軌跡(粗線)應如上右圖所示，但由於大部分振幅會互相抵消，因此下方單擺的振幅較二分頻時縮小許多，故需較大之能量供給才可有較明顯之現象。
- (三) 根據此結果，我們合理的推斷只要頻率為 2 的奇數倍，則應會產生類似現象，但能量供給不足，難以觀察，往後將嘗試其他辦法或改進儀器加以探討。

### 二、實驗二

- (一) 我們在上方振源振幅 0.051 cm 擺長 25cm 時，利用下方公式推測出指數項應為 0.0217 並與實驗值比較

	第一次	第二次	平均值
指數項	0.0184	0.0219	0.0202

平均值為 0.0202，誤差百分率為 7%

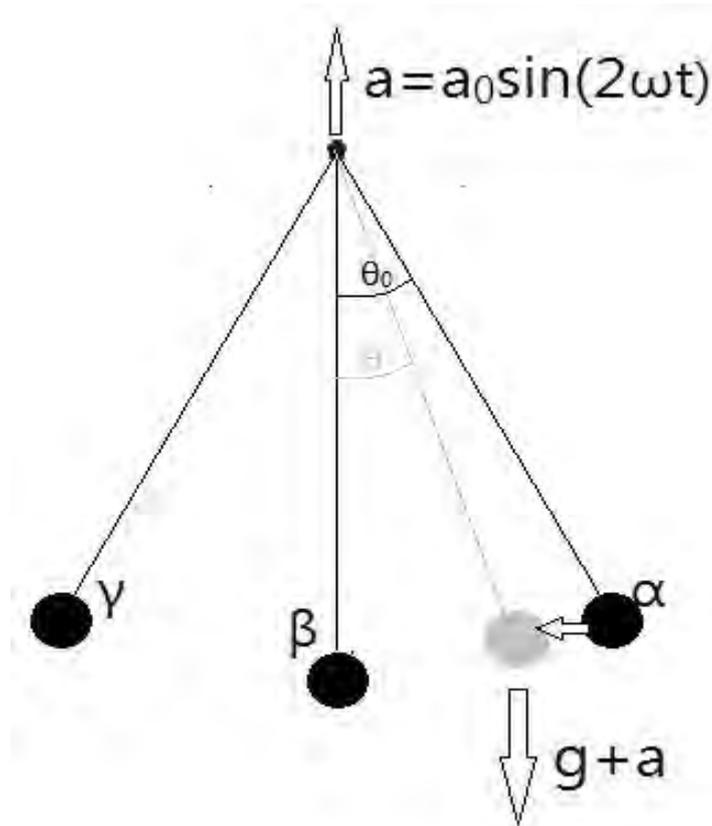
- (二) 當上方振幅為 0.032cm 擺長維持 25cm 指數項應為 0.0136

	第一次	第二次	平均值
指數項	0.0114	0.0134	0.0124

平均值為 0.0124，誤差百分率為 9%

理論值與實驗值如上，證明第三部分理論導正之正確性

- (三) 實驗過程中也發現飽和振幅並非最大振幅，我們推測當振幅快速達峰值時，會因能量耗損大於能量供給而衰減，衰減一定程度後能量供給又大於能量耗損而再度上升，一定時間過後達一穩定動態平衡之狀態。



(四) 理論導正

1. 上方有一角頻率為  $2\omega$  之穩定簡諧振動源，最大加速度為  $a_0$  且起始時在平衡點則  $a = a_0 \sin(2\omega t)$
2. 設單擺最初有及小幅度之振盪，且當期在最高點  $\alpha$  時，上方振動源恰要由平衡點向上運動，因此當單擺由  $\alpha$  擺至  $\beta$  時，單擺受到  $a$  的假力，加速度為  $a+g$  向下，因此切線加速度

$$a_t = (g + a) \sin \theta = (g + a_0 \sin(2\omega t)) \times (\theta_0 \cos(\omega t))$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} g \theta_0 \cos(\omega t) dt = \frac{g \theta_0}{\omega}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} a_0 \sin(2\omega t) \theta_0 \cos(\omega t) dt = a_0 \theta_0 \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} 2 \sin(\omega t) (\cos(\omega t))^2 dt = \frac{2 a_0 \theta_0}{3 \omega}$$

$$\text{下降倍數} = \frac{\frac{g \theta_0}{\omega} + \frac{2 a_0 \theta_0}{3 \omega}}{\frac{g \theta_0}{\omega}} = 1 + \frac{2 a_0}{3 g}, \quad \text{上升倍數} = \frac{\frac{g \theta_0}{\omega}}{\frac{g \theta_0}{\omega} - \frac{2 a_0 \theta_0}{3 \omega}} = \frac{1}{1 - \frac{2 a_0}{3 g}}$$

$$\text{每 } \frac{T}{2} \text{ 上升倍數} = \frac{1 + \frac{2 a_0}{3 g}}{1 - \frac{2 a_0}{3 g}} \quad \text{故 } \theta = \theta_0 \left( \frac{1 + \frac{2 a_0}{3 g}}{1 - \frac{2 a_0}{3 g}} \right)^{\frac{t}{T}}, \text{ 亦即}$$

$$\theta = \theta_0 \times e^{\frac{t}{T} \times \log_e \frac{1 + \frac{2 a_0}{3 g}}{1 - \frac{2 a_0}{3 g}}}$$

### 三、實驗三

#### (一)

雷射光振幅(cm)	換算振源振幅(cm)
2.60	0.051
2.40	0.047
2.24	0.044
2.12	0.041
1.95	0.038
1.83	0.036
1.74	0.034
1.63	0.032
1.54	0.030
1.44	0.028
1.38	0.027
1.32	0.026
1.25	0.024
1.20	0.023
1.14	0.022
1.07	0.021
1.01	0.020

#### (二) 再比較振源振幅與下方單擺振幅之關係

振源振幅(cm)	下方單擺振幅
0.051	5.50
0.047	5.25
0.044	5.15
0.041	5.05
0.038	4.92
0.036	4.70
0.034	4.56
0.032	4.40
0.030	4.25
0.028	4.00
0.027	3.88
0.026	3.65
0.024	3.45
0.023	3.15
0.022	2.80
0.021	1.77
0.020	0.40

(三) 在實驗三中也發現振源振幅與單擺振幅呈現正相關，並利用多項式展開外插法推測當振幅約為 0.019cm 時，單擺將不再振動。我們推測此時能量供給無法抵抗外在的阻力影響，因此無法產生穩定狀態。

#### 四、實驗四

##### (一)

改變擺長量 $\Delta L$ (cm)	單擺飽和振幅(cm)
0.113883	10.2
0.227765	10
0.341648	9.65
0.455531	9.45
0.569414	9.15
0.683296	8.35
0.797179	7.65
0.911062	6.05
1.024945	5.25
1.138827	3.9
1.25271	1.4

##### (二)

改變擺長量 $\Delta L$ (cm)	頻差 (HZ)
0.114	0.0056
0.000	0.0039
-0.114	0.0025
-0.228	0.0007
-0.342	-0.0009
-0.456	-0.0015
-0.569	-0.0025
-0.683	-0.0024
-0.797	-0.0037
-0.911	-0.0047
-1.025	-0.0056

(三) 實驗四中，當我們逐步縮短單擺之擺長，會發現振幅大致成指數上升，但到達某一高峰點後，便驟降為零。我們推測應是其頻寬之端點所在。

(四) 將實驗結果套用單擺公式，並考慮大角度所造成的變化，經由計算得知當能形成此二分頻現象的頻寬約為 0.011HZ

## 柒、 參考資料及其他

- 一、 Tareq Ahmed Mokhiemer, *How to pump a swing*
- 二、 Jovan Marjanovic, B.Sc. in Electrical Engineering, Angular momentum, Parametric oscillator and over unity

## 【評語】 040102

1. 優點：以信號產生器及彈簧來驅動觀察振幅的變化，實驗有創意。
2. 待改進：實驗結果中振幅的時間變化，解釋不足，宜從更基礎原理出發，可獲較佳解釋。