中華民國第52屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第二名

030420

游泳池追逐戰

學校名稱：臺北市立敦化國民中學

作者：	指導老師：
國二 賴世豪 國二 林維揚	徐寶玉 傅淑婷

關鍵詞：最佳轉彎點、逃脫路徑、最大速度比

游泳池追逐戰

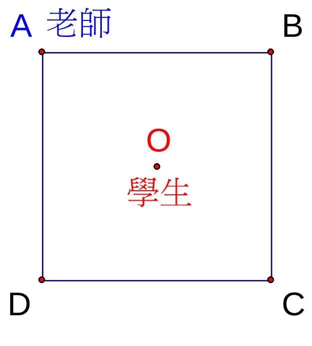
摘要

　　在**陶哲軒教你聰明解數學**中有一個題目：一個學生在正方形游泳池中央，他的老師(不會游泳)站在游泳池邊的一個角上。老師奔跑的速度是學生游泳速度的三倍，但學生在岸上跑得比老師快，只要學生能到達岸邊尚未被老師追到即算成功逃脫。請問男生能逃脫老師的追逐嗎?(假設兩個人都可以自由移動)。

　　從此題中提出不同的想法，進而去思考不同移動方式與移動距離的關係，並作探討與分析。從在正方形游泳池上的游泳池追逐戰，延伸至在不同的形狀如圓形及正三角形、正五邊形、正六邊形等，並設計與討論不同逃脫路徑中，學生仍能逃脫時老師的速度最大爲學生的幾倍。最後推廣到在正多邊形內設計學生逃脫路徑並研究其師生的速度比。

壹、　研究動機

一、在**陶哲軒教你聰明解數學**書中有一個題目：一個學生在正方形游泳池中央，他的老師(不會游泳)站在游泳池邊的一個角上。老師奔跑的速度是學生游泳速度的三倍，但學生在岸上跑得比老師快，**只要學生能到達岸邊尚未被老師追到即算成功逃脫**。請問男生能逃脫老師的追逐嗎?(假設兩個人都可以自由移動)。



二、我們覺得很難也很有挑戰性，激發我們的想像力，**配合國中數學第二冊二元一次聯立方程式、一次不等式，第四冊幾何圖形與三角形的基本性質及第五冊圓形、幾何與證明、相似形等單元**，因此我們以此爲題來做研究探討。

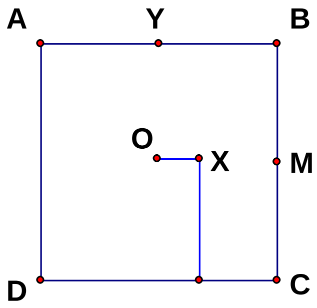
貳、研究目的

本研究即探討：

　　從正方形、圓形、正三角形、正五邊形、正六邊形泳池，推廣至正多邊形泳池，設計逃脫路徑及探討在各種走法中，學生能逃脫時老師的速度最大爲學生的幾倍。

參、文獻探討

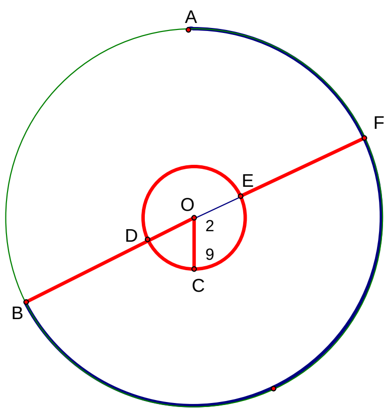
一、在**陶哲軒教你聰明解數學**第 168~174 頁中:假設男生正朝 BC 的中點 M 全速前進，老師除了先跑向角 B 然後奔向 M 點外，沒有其他選擇。如果老師改變方向，或者採取其他行動，男生就可繼續前進，並在老師之前到達池邊。但是男生不必一路游到岸邊，他只要這樣威脅一下，就可使老師繼續跑下去。結果是男生可以促使局勢發展到這樣一種狀態(如圖)



如果男生全速游到中間某點 X，老師一定是在點 Y 處(Y 滿足$|AY| = 3|OX|$)。男生到達點 X 時，老師並沒有足夠快的速度能超過點 Y，而且如果老師還沒到達點 Y，男生只需繼續游向點 M 就可以擺脫老師，所以老師不得不到達點 Y。

現在的情況:男生在點 X 處，老師被迫到達點 Y。男生還有一直向點 M 的必要嗎?向點 M 前進的威脅足以使老師到達現在的地方。但威脅和現實是不同的，既然老師在 AB 邊上束手無策，那麼男生爲什麼不轉向對邊 CD 衝過去呢?到達岸邊只需要半個單位長度，而且和第一次我們考慮男生衝向池邊不同的是，這時老師處於不利的的位置。事實上，如果從點 M 到點 X 的距離大於 1/4 單位長度，那麼很容易就可看出，老師會因距離太遠而不能逮到男生。這樣一來，男生就十分容易逃脫了。

二、在數理大動腦中(P.205 問題 89 駕小舟逃走): (若老師跑的速度是學生游泳的 4 倍)，首先沿著中心池半徑的$\frac{2}{9}$之圓周划行，如此一來，老師在岸邊以四倍的速度追學生，卻變成夾在中心，而和老師在直徑上成相對的位置；若以圓周中心圓的這個位置，和老師成反方向，快速划行，距離就會變成$\frac{1}{4}$以下(正確來說是$\frac{7}{9}$以 3.14 除以 0.248)，所以學生可望在被老師追上之前，趕到岸上。諸位可以用計算方法，實際證明之。



肆、研究方法與過程

一、名詞與符號定義:

(一). 爲了研究的方便，我們設速度爲 V，距離爲 D，老師速度爲 V_t，學生速度爲 V_s，老師行走距離爲 D_t，學生游泳距離爲 D_s

(二). 在正多邊形游泳池上，設正多邊形的邊長爲 1，老師跑的速度是學生游泳速度的 n 倍，設計各種逃脫路徑。

二、遊戲規則:

(一).遊戲起點位置，老師在游泳池上任一頂點，學生在游泳池的正中心點。

(二).老師可以任意在泳池邊上移動或規定老師以學生逃離方向判斷路徑長度，而立即選擇較短路徑追逐學生。

三、研究一: 在正方形泳池上，老師跑的速度是學生游泳的 3 倍，設計學生能逃脫的走法。並探討在各種走法中，老師的速度最大爲學生的幾倍下學生仍能逃脫。

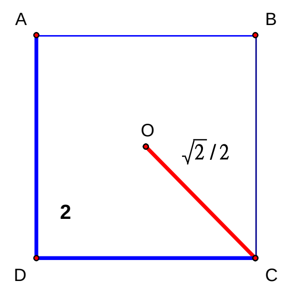
(一) 路徑一:

老師在 A 點,學生從 O 點直接逃向離老師最遠的 C 點。

如右圖: $V_t=3V_s$，

則 D_s 爲 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，D_t 爲 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2} > 2$，

<u>老師可追到學生，故學生無法逃脫。</u>



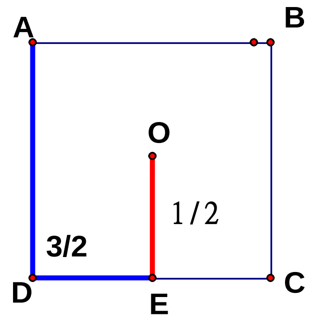
(二) 路徑二:

老師在 A 點，學生從 O 點直接往岸邊垂直游向 E 點。

如右圖:

則 D_s 爲 $\dfrac{1}{2}$，D_t 爲 $\dfrac{3}{2}$，老師剛剛好追到學生，

<u>老師可追到學生，故學生無法逃脫。</u>

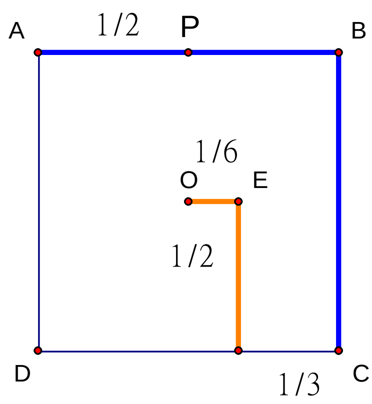


(三) 路徑三:

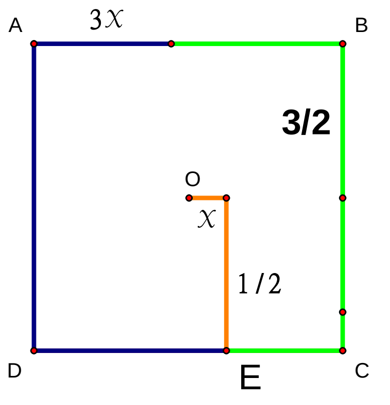
學生平行往右走，走一段距離後垂直往岸邊游去。

1.找出能逃脫的走法， $V_t=3V_s$，如右圖

<u>**例如**</u>**：學生先往右走** $\dfrac{1}{6}$，老師只能跟著往右走 $\dfrac{1}{2}$，如果老師不向右走 $\dfrac{1}{2}$，則學生直走到 $\overline{BC}$ 邊上即可逃脫，故老師勢必向右走，這時學生轉彎向下走，情況如下:學生共游 $\dfrac{2}{3}$，此時老師共走 2，兩人差距 $\dfrac{1}{3}$，如此**學生便可逃脫**。



2. **求最佳轉彎點: 老師到達學生的目標點的距離為 1/2 周長時，學生所在的轉彎位置為最佳轉彎點。**



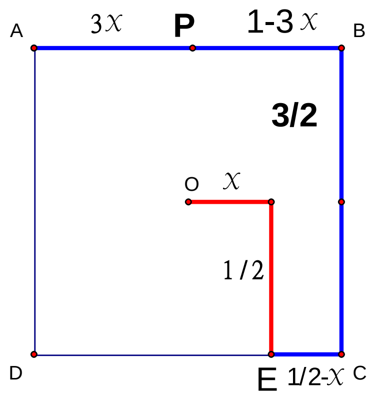
x=1/8時,兩條路徑距離相等

學生往右走 x，老師往右走 $3x$，這時學生轉彎向下走，老師不論回頭或繼續走離 E 點距離皆相同，則無法選擇較近的距離，這是學生的最佳轉彎點:

$$3x+1+\frac{1}{2}+x \ = 1-3x+1+\frac{1}{2}-x\ ,\ \ x=\frac{1}{8}\ ,$$

當 $x=\frac{1}{8}$ 時，老師不管向左或向右走，距離皆為 $\frac{1}{2}$ 周長。

3.**求學生逃離時，會剛好被老師追到的轉彎點:**



如右圖， 學生往右走 x ，老師往右走 $3x$

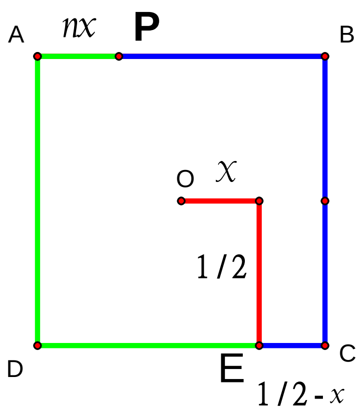
計算學生轉彎時，會剛好遇上老師的時間點:

$$2+\frac{1}{2}-x \ = 3(x+\frac{1}{2})$$

$$4x=1,\ \ x=\frac{1}{4}$$

當 $x=\frac{1}{4}$ 時 學生會正好遇上老師

4. 求出 n 的最大值



$\mathbf{V_t} = n\mathbf{V_s}$，學生要選擇最佳轉彎點轉彎:

$V_t = nV_s \qquad D_s = x+\frac{1}{2},$

$$D_t = n(x+\frac{1}{2}) < \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CE} \ = \frac{5}{2}-x\ldots\ldots(1)$$

此時老師在 P 點，P 右轉或左轉到 E 點等距離，

$$\therefore \overline{AP}=\overline{EC}, \text{列式 } nx=\frac{1}{2}-x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

由(1)、(2)式得 $n^2-3n-4<0$ ，$x=\frac{1}{2n+2}$

推得: $x=\frac{1}{2n+2}$ ，$0<n<4$。

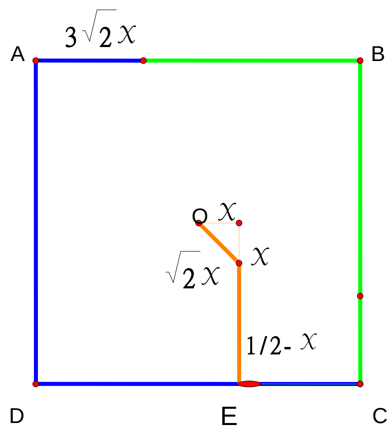
結論:

1.當 $V_t=3V_s$，則學生先往右走距離 x 再垂直往岸邊游去。只要 $0<x<\frac{1}{4}$ 學生即可逃脫。

2.在路徑三的走法中學生可逃脫的師生最大速率比為 $V_t = nV_s$，$n<4$。學生先往右走距離 x 再向下轉，只要 $x = \frac{1}{2n+2}$ 學生即可逃離。

(四)路徑四： 學生向右下 45°走 $\sqrt{2}x$，再垂直向下垂直往岸邊游去，如下圖。

1.求最佳轉彎點：



學生往右下 45°走，此時老師不論繼續走或回頭走，離 E 點距離皆相同時，這是學生最佳轉彎的點。

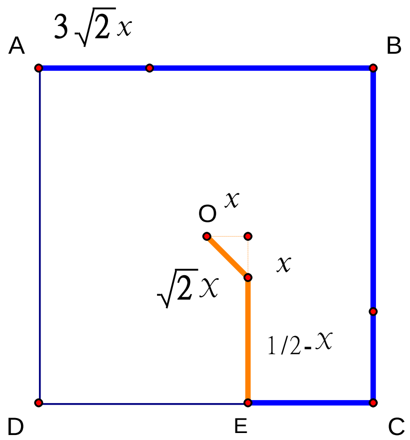
$3V_s = V_t$，$D_s = \sqrt{2}x$，$D_t = 3\sqrt{2}x$

$$3\sqrt{2}x + \frac{3}{2} + x = \frac{5}{2} - x - 3\sqrt{2}x$$

$$6\sqrt{2}x + 2x = 1，$$

$$x = \frac{3\sqrt{2}-1}{36}，\sqrt{2}x = \frac{6-\sqrt{2}}{36} \fallingdotseq 0.1274$$

2.求學生逃離時，會剛好被老師追到的轉彎點：



學生往右下 45°走，計算學生轉彎時，會剛好碰上老師的時間點，即是學生最慢的轉彎點(如右圖)。

$V_t = 3V_s$，$D_s = \sqrt{2}x + \frac{1}{2} - x$，$D_t = 3(\sqrt{2}x + \frac{1}{2} - x)$

$$\left(3\sqrt{2}-3\right)x + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} - x$$

$$x = \frac{1}{3\sqrt{2}-2} = \frac{3\sqrt{2}+2}{14}，$$

$$\sqrt{2}x = \frac{3+\sqrt{2}}{7} \fallingdotseq 0.6306$$

3.求出 n 的最大值：

$V_t = n\ V_s$，$D_s = \sqrt{2}x + \frac{1}{2} - x$，$D_t = n(\sqrt{2}x + \frac{1}{2} - x)$

$$n\left(\sqrt{2}x + \frac{1}{2} - x\right) < \frac{5}{2} - x$$

$$且\ n\sqrt{2}x = \frac{1}{2} - x \Rightarrow n^2 - 4n - 2\sqrt{2} < 0$$

$$得\ n = 2 + \sqrt{4+2\sqrt{2}} \fallingdotseq 4.6$$

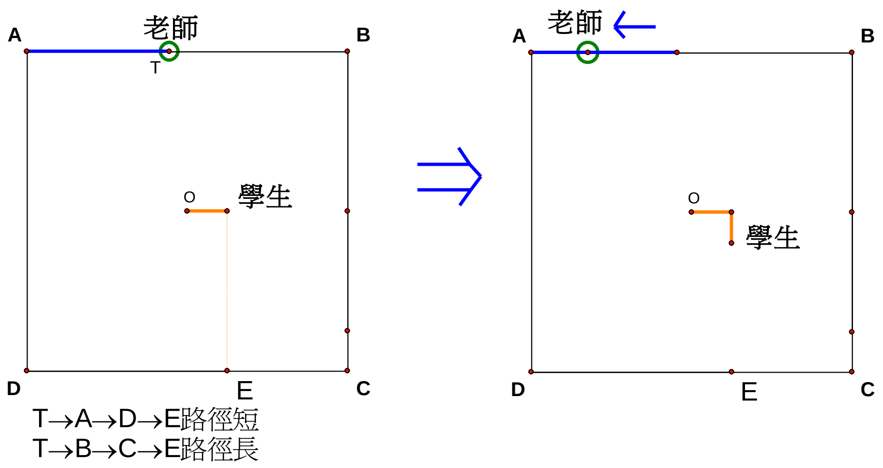
結論：1.當 $V_t = 3V_s$，則學生往右下 45°走的距離 $\sqrt{2}x$，當 $0 < \sqrt{2}x < \frac{3+\sqrt{2}}{7}$，再垂直向下垂直往岸邊游去，即可逃脫。

2.此走法中學生可逃脫的師生最大速率比為 $V_t < 2+\sqrt{4+2\sqrt{2}}\ V_s \fallingdotseq 4.6V_s$。

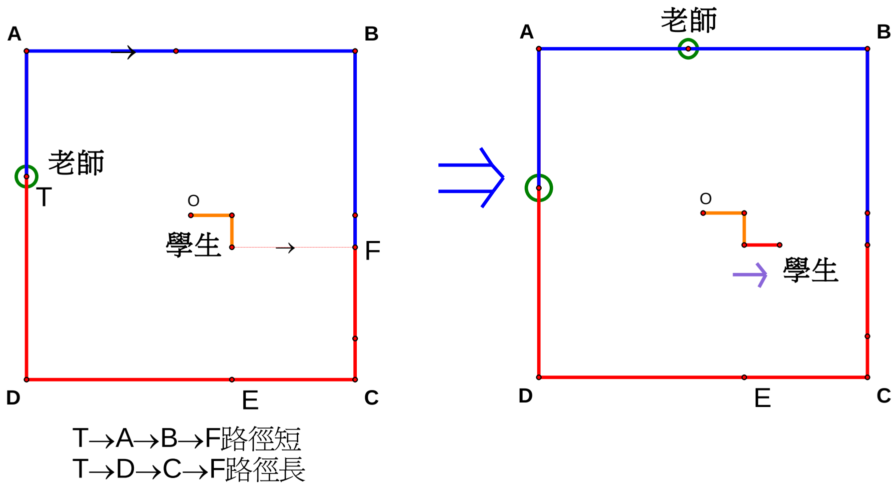
(五)路徑五:若老師以學生逃跑方向判斷路徑長度，而會選擇較短路徑追逐學生。

1.走法步驟(1): 學生先平行往右走，到達最佳轉彎點，學生在此點之前一點點(極小值)

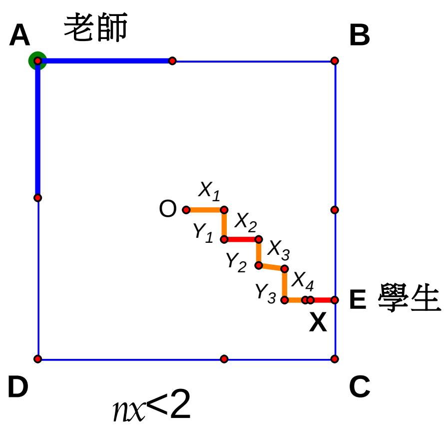
轉彎向下走，老師會跟著回頭往較短路徑追逐。 (如下圖)



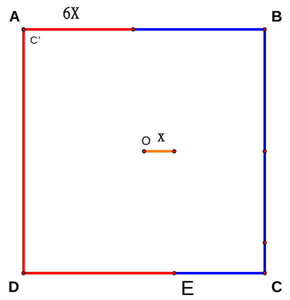
2.走法步驟(2): 當學生到達最佳轉彎點前一點再度轉彎，老師跟著回頭往較短路徑追逐。(如下圖)



3.走法步驟(3):如此反覆，直到學生直走到邊上的路徑，小到可以逃離，便直接逃脫(如下圖):

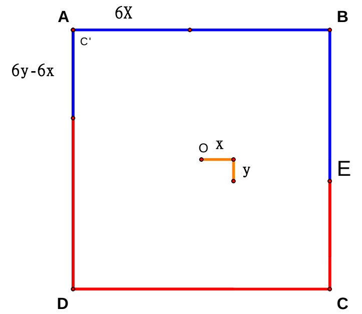


4.例證:由於書本上有提到六倍是無法逃脫的，因此我們計算 $V_t=6V_s$ 下的階梯走法：



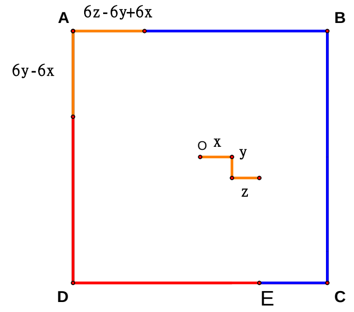
(1). $\frac{1}{2}-x=6x, x=\frac{1}{14}$

取 $x_1=\frac{2400}{33614}<x$



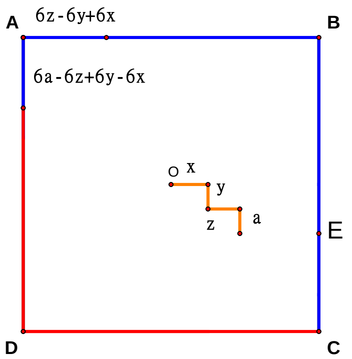
(2). $6y-6x_1=\frac{1}{2}-y$

$y=\frac{4459}{33614}$ 取 $y_1=\frac{4458}{33614}<y$



(3). $6z-6y_1+6x_1=\frac{1}{2}-x_1-z$

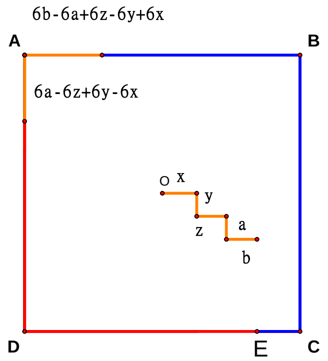
$7z=\frac{26755}{33614}$ 取 $z_1=\frac{3820}{33614}<z$



(4). $6a-6z_1+6y_1-6x_1$

$=\frac{1}{2}-a-y_1$，$7a=\frac{202920}{33614}$

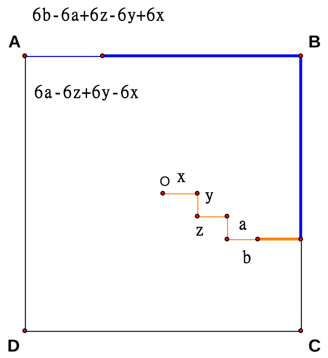
取 $a_1=\frac{3274}{33614}<a$



(5).$6b-6a_1+6z_1-6y_1+6x_1$

$=\frac{1}{2}-x_1-z_1-b$，$7b=\frac{19657}{33614}$

取 $b_1=\frac{2808}{33614}<b$



(6)學生所走距離

$=\frac{1}{2}-x_1-z_1-b_1$

$=\frac{7779}{33614}$

✧ 此時計算學生直接往右走，結果如下: 老師所走距離 $=6*\frac{7779}{33614}=\frac{46674}{33614}$

學生與老師的距離:$=\frac{3}{2}-\left(6b_1-6a_1+6z_1-6y_1+6x\right)+y_1+a_1$

$$=\frac{3}{2}-\left(\frac{7779}{33614}\right)+\frac{4458}{33614}+\frac{3274}{33614}=\frac{50421}{33614}-\frac{7779}{33614}+\frac{4458}{33614}+\frac{3274}{33614}=\frac{50374}{33614}$$

結果: $\frac{50374}{33614}>\frac{46674}{33614}$

因此在 $V_t=6V_s$ 學生可以逃脫。

結果:

1.當 $V_t=6V_s$，老師一定會選擇最短距離走的條件下，學生用路徑五階梯式的走法可以逃脫。

2.階梯式的走法是正方形目前找到學生可以逃脫的師生速度比最大的走法。

5.我們把每一段距離用未知數表示：學生右走 x_1 轉下走 y_1 再轉右走 x_2 轉下走 y_2 再轉右走 x_3 轉下走 y_3-----到再轉右走 x_m ,學生判斷再向右走 X 若直接逃到 E 點是否可逃脫?

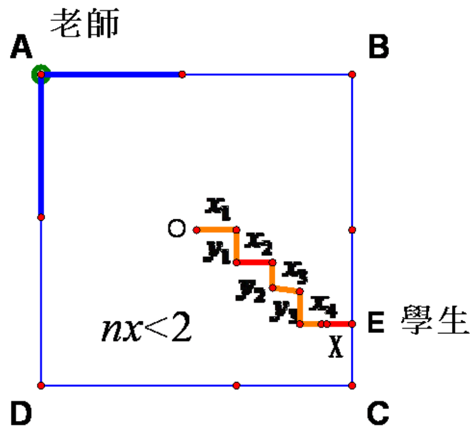
$$\frac{1}{2}-x_1=nx_1 \Rightarrow x_1=\frac{1}{2(n+1)}$$

$$\frac{1}{2}-y_1=ny_1-nx_1 \Rightarrow y_1=\frac{2n+1}{2(n+1)^2}$$

$$\frac{1}{2}-x_1-x_2=nx_2-ny_1+nx_1 \Rightarrow x_2=\frac{n(2n+1)}{2(n+1)^3}$$

$$\frac{1}{2}-y_1-y_2=ny_2-nx_2+ny_1-nx_1 \Rightarrow y_2=\frac{n^2(2n+1)}{2(n+1)^4}$$

$$\Rightarrow x_3=\frac{n^3(2n+1)}{2(n+1)^5}, y_3=\frac{n^4(2n+1)}{2(n+1)^6}$$



$$x_4=\frac{n^5(2n+1)}{2(n+1)^7}, y_4=\frac{n^6(2n+1)}{2(n+1)^8} \text{以此類推} x_m=\frac{n^{2m-3}(2n+1)}{2(n+1)^{2m-1}}, y_m=\frac{n^{2m-2}(2n+1)}{2(n+1)^{2m}}, m>1$$

6.<u>判別是否可逃脫:</u>

$$X=\frac{1}{2}-x_1-x_2-x_3-x_4-.....x_m \Rightarrow \text{老師走的距離} D_t=nX$$

學生與老師的距離 D_s

$$=\frac{3}{2}-n(x_1-y_1+x_2-y_2+x_3-y_3+x_4-y_4+.....x_m)+y_1+y_2+y_3+.....y_{m-1}$$

✧ 若 $D_t<D_s$ 就可逃脫，代入化簡得到:

$$n-\frac{2n+1}{n+1}-\frac{n^2(2n+1)}{(n+1)^3}-........-\frac{n^{2m-4}(2n+1)}{(n+1)^{2m-3}}<3 \quad \text{得} \quad \frac{n^{2m-2}}{(n+1)^{2m-3}}<4$$

7.利用 excel 試算表檢驗:如右表

若 n=6 代 m=3，
若 n=7 代 m=4，
若 n=8 代 m=5，
若 n=9 代 m=6 ，
若 n=15 代 m=12，
若 n=50 代 m=66，
均可逃脫。

$V_t=nV_s$			
n	m	$\frac{n^{2m-2}}{(n+1)^{2m-3}}<4$	
6	3	3.778425656	可逃脫
7	4	3.590362549	可逃脫
8	5	3.507699088	可逃脫
9	6	3.486784401	可逃脫
15	12	3.868014233	可逃脫
50	66	3.886403128	可逃脫

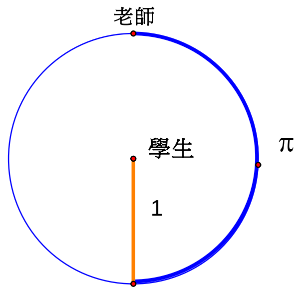
結果：當 $V_t=nV_s$，若學生以階梯走法在最佳轉彎點前一點就轉彎，迫使老師來回追逐---反覆轉彎走到 x_m，須滿足 $\frac{n^{2m-2}}{(n+1)^{2m-3}}<4$ 條件，再向右走 X 就可上岸逃脫。
當 n 越大則 m 要越大，也就是階梯轉彎次數較多次就可以逃脫。

四、研究二：在圓形泳池上，老師跑的速度是學生游泳的 4 倍，設計學生能逃脫的走法，並探討在各種走法中，老師的速度最大爲學生的幾倍，學生仍能逃脫。

✧ <u>在圓形泳池上，設圓半徑 1，設計以下兩種路徑:</u>

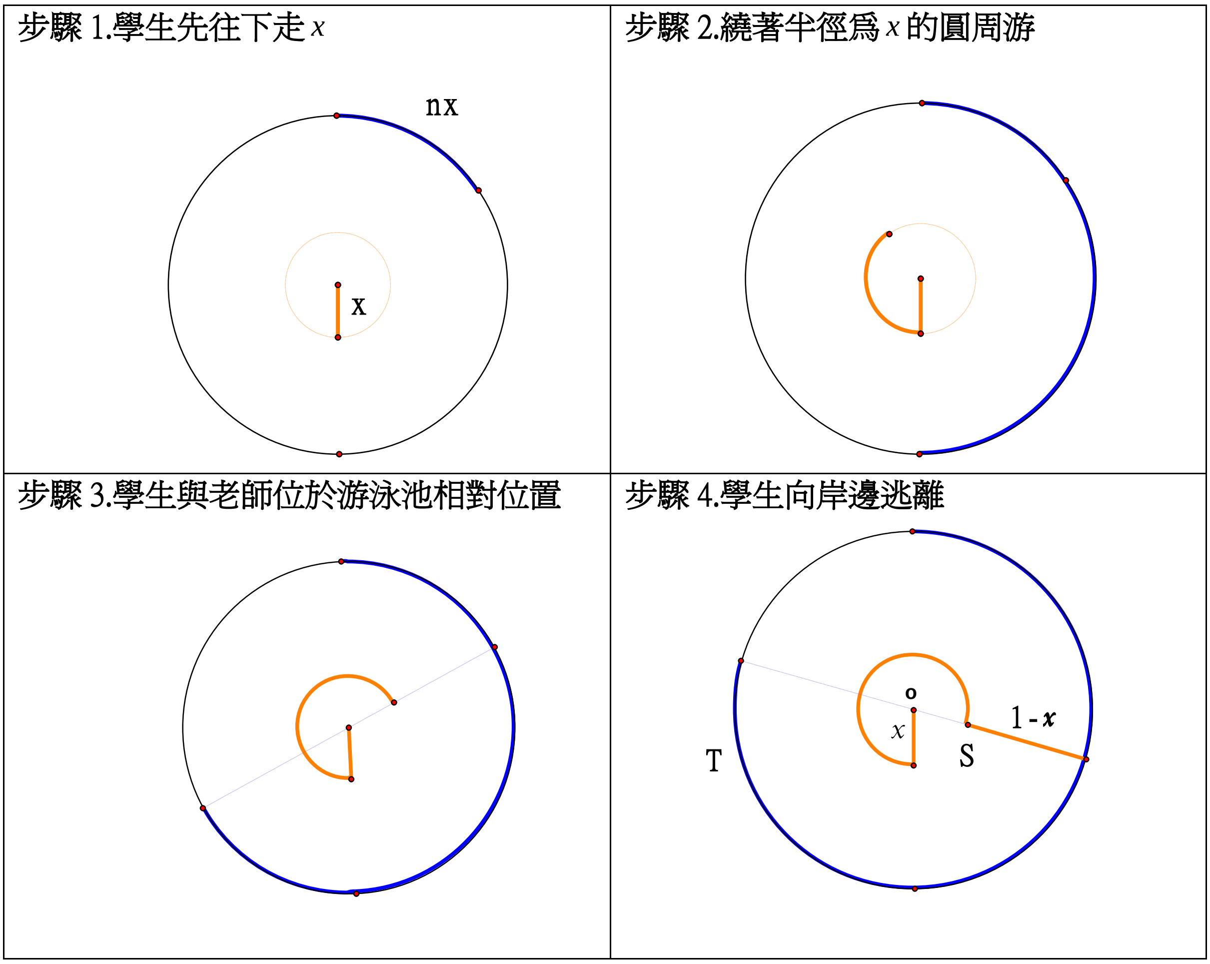
(一)、路徑一：學生直接沿半徑往與老師離心方向走。

學生走半徑 1，老師走 n ，若 $n<\pi$ ，則學生能逃脫。



結果：學生直接沿半徑往與老師離心方向走，學生可逃脫的速度比爲 $V_t<\pi V_s$

(二)、路徑二：學生首先往下走 x ，接著沿中心池半徑爲 x 的假想圓周游，$V_t = nV_s$。同一時間內，學生繞的圓心角度數大於老師繞圓形游泳池的圓心角度數時，學生與老師的夾角會越來越大，而學生不斷繞圈，**直到和老師在圓形游泳池的直徑上成相對的位置，就立刻往離心方向逃離**，和岸邊的距離就會變成 $1-x$ ，較路徑一好。

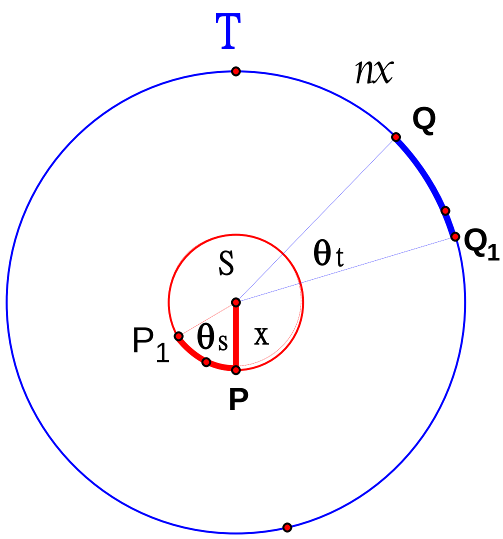


1. **研究 x 的範圍**

學生走小圓周到與老師成相對位置時，學生再走 $1-x$ 就可逃脫

$V_t = nV_s$，則條件為：$n(1-x) < \pi \Rightarrow x > \dfrac{n-\pi}{n}$

2. **研究 n 的限制**



當學生走到 P 點，老師走到 Q 點時，學生繞半徑為 x 的小圓走圓心角度數為 θ_s，老師走圓形游泳池的圓心角度數為 θ_t，$\theta_s : \theta_t = 1 : nx$

而學生要能逃脫的條件是 $\theta_s > \theta_t$

$\Rightarrow nx < 1 \Rightarrow x < \dfrac{1}{n}$，故得 $\dfrac{n-\pi}{n} < x < \dfrac{1}{n}$

又 $\begin{cases} n(1-x) < \pi \\ nx < 1 \end{cases}$ 可得 $n < 1+\pi$。

> **結果：要同時滿足下列兩項條件即可逃脫** ① $\dfrac{n-\pi}{n} < x < \dfrac{1}{n}$，② $n < 1+\pi$

3. **例證:由 1、2 的研究，取 n ＝ 4**，$\dfrac{1}{4} > x > \dfrac{n-\pi}{n} = \dfrac{4-\pi}{4} \doteqdot 0.215$，**故取** $x = \dfrac{2}{9}$

(1) 學生首先沿著中心池半徑的 $\dfrac{2}{9}$ 之圓周划行，兩人所走的圓心角度數比為 9 : 8，老師 Q 走到 Q_1 點時，所走的圓心角為 $\dfrac{2}{9} \times 4 \div 2\pi \times 360^\circ$

(2) 設當學生圓心角走 9k，老師走 8k，得 $\dfrac{2}{9} \times 4 \div 2\pi \times 360 + 8k = 9k$，$k \doteqdot 51$

如此一來老師和學生在直徑上成相對的位置；若以圓周中心圓的這個位置，和老師成離心方向，快速游到岸，距離就會變成 $\dfrac{7}{9}$，所以學生可望在被老師追上之前，趕到岸上。

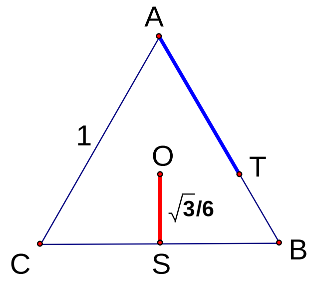
(3) 若以所走的距離來計算 $4\left[\dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{9} \times 2 \times \pi \times \dfrac{\theta}{360}\right] = 2\pi \times \dfrac{\theta}{360}$，$\theta = \dfrac{1440}{\pi} \doteqdot 459^\circ$

> **結果：1.在圓形游泳池中，學生繞半徑為 x 的小圓周游，V_t ＝ nV_s，**
> **當** $\dfrac{n-\pi}{n} < x < \dfrac{1}{n}$ **且** $n < 1+\pi$ **才可逃脫。**
> **2.當 V_t ＝ $4V_s$，$x = \dfrac{2}{9}$，學生繞 459 度再往離心方向游到岸邊，即可逃脫。**

五、研究三：在三角形泳池上，設計逃脫路徑及探討在各種走法中，學生能逃脫時老師的速度最大爲學生的幾倍。

✧ 在**正三角形**泳池上，設計以下幾種路徑:

（一）路徑一：直接往下走



老師走的距離爲 1.5，學生走的距離爲 $\frac{\sqrt{3}}{6}$，

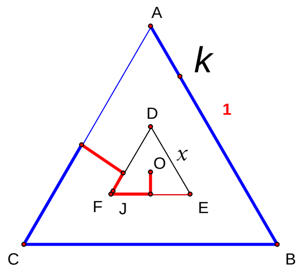
$1.5 \div \frac{\sqrt{3}}{6} = 3\sqrt{3} \fallingdotseq 5.196$

結果:在此走法中的最大速率比爲 $V_t <$ $3\sqrt{3}$ V_s

✧ **由於圓形的逃脫路徑讓我們聯想，是否可以在正三角形中使用，因此我們想到學生也可以在泳池中繞著池中一個假想的正三角形，大小兩邊是平行的， 所以設計以下逃脫路徑：**

（二）路徑二：學生繞著池中一個假想的正三角形周圍走

$\mathbf{V_t} = n\,\mathbf{V_s}$，學生不斷繞著假想的正三角形走，當到達最佳轉彎點，學生就往岸邊逃離。



1. 求 n 的最大值：

(1)設學生往下走 $\frac{\sqrt{3}x}{6}$,離岸邊的距離爲 $\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}x}{6}$，老師離學生的目的地距離爲 $\frac{3}{2}$,

$$n\left(\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}x}{6}\right) < \frac{3}{2}$$

(2)兩個三角形的周長比爲: $x:1$而學生繞一圈的速度要比老師快: $nx < 1$

$$\begin{cases} n\left(\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}x}{6}\right) < \frac{3}{2} \\ nx < 1 \end{cases} \Rightarrow \quad n(1-x) < 3\sqrt{3}\text{且}\ nx < 1$$

$$\Rightarrow \frac{n - 3\sqrt{3}}{n} < x < \frac{1}{n}\ \text{且}\ n < 3\sqrt{3} + 1 \fallingdotseq 6.196$$

結果:當學生在池內繞著一個假想的正三角形走，到達最佳轉彎點，學生就立刻轉彎，此走法最大速度比可以達 $3\sqrt{3}+1$ 約 6.196 倍,較路徑一大

2.實際模擬：由於不確定以上的走法是否可以順利繞到理想的點，因此我們決定取簡單的數據當作三角形的邊長，並實際模擬老師和學生的追逐情境。

(1).模擬路徑二的逃脫路徑

由於最後算出來的數據爲 6.196，因此我們取簡單整數，$\mathbf{V_t} = 6\mathbf{V_s}$，

取正三角形泳池的邊長爲 10，學生的所繞的小正三角形邊長爲 1.5。

開始老師在 A 點，學生在 O 點。

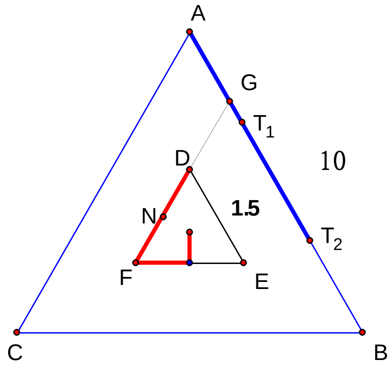
學生由 O 點走到 P 點，老師會走到 T_1，

即 $\overline{AB}$ 上距離 A 點 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 約 2.6 的位置。

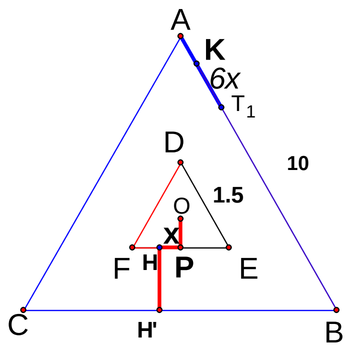
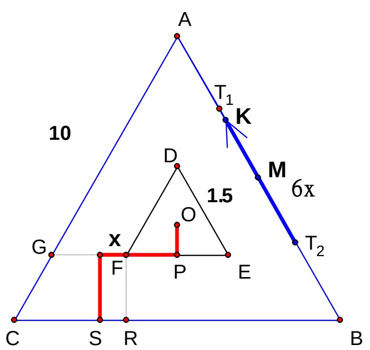
$\overline{EF}$ 與 $\overline{BC}$ 的距離 $=\frac{\sqrt{3}}{6}\times 8.5$ 約2.4536

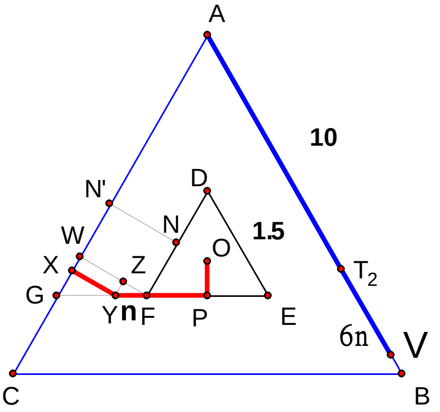
$\frac{\sqrt{3}}{6}\times 8.5\times 6 \fallingdotseq 14.722<15$

若學生上岸處與老師相距 15 即可逃脫。

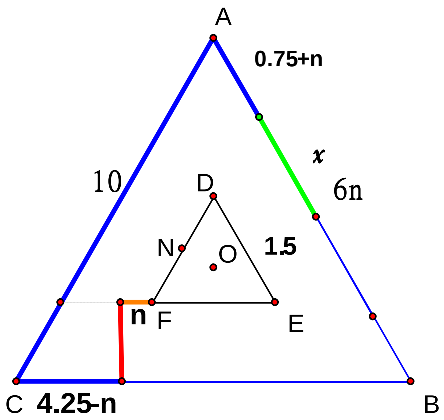
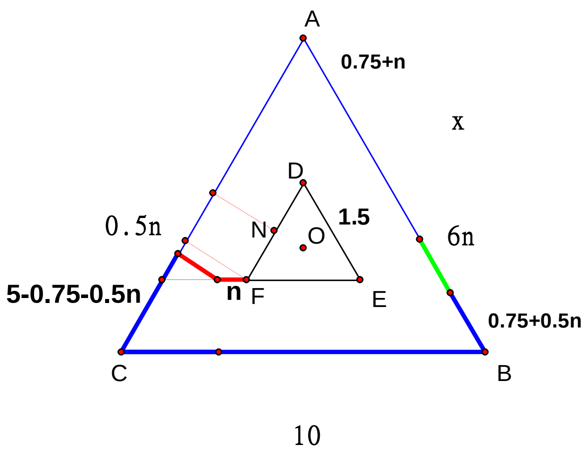


(2).按照規律，整理老師和學生的位置關係，如下表所示:

<table>
<tr><th>學生路徑</th><th>老師路徑</th><th>老師到達位置</th><th>逃脫方案</th></tr>
<tr><td>步驟 1
O→P</td><td>A→T_1</td><td>老師走到 T_1，距離 A 點約 2.6 處</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">步驟 2
P→F</td><td>狀況一:
T_2→A</td><td>若老師選擇往回走向 A。如下圖
</td><td>$\overline{PH}=x,\overline{T_1k}=6x,\overline{AK}=2.6-6x=\overline{HP}$
，$2.6-6x=x\Rightarrow x=\frac{2.6}{7}=\frac{13}{35}$ 約 0.37
如左圖，學生再走 0.37 到最佳轉彎點 H 點，並垂直走到 H'，學生可順利逃脫。</td></tr>
<tr><td>狀況二:
T_1→T_2</td><td>老師走到 T_2，距離 A 點約 7.1 處</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">步驟 3
F→G</td><td colspan="3">接續狀況二：當學生在 F 點，老師在 T2 時，學生先往左沿著 $\overline{FE}$ 的延長線走，此時老師有兩種走法</td></tr>
<tr><td>走法一
T_2→T_1</td><td>(1)老師走向 A 點:如下圖
</td><td>學生過 F 走 x 轉向 $\overline{BC}$ 走到 S:
當老師走到 K 點，和 M 點($\overline{AB}$ 中點)的距等於 C 與 S 的距離
$\overline{CR}=5-0.75=4.25$
$4.25 - x=5-(7.1-6x)$
$7x=8.25$, $x\fallingdotseq 0.907$
學生走 0.907 到最佳轉彎點 F 點並垂直走到 S，學生可順利逃脫。</td></tr>
</table>

	走法二 $T_2 \rightarrow B$	(2)老師繼續往 B 走 	當老師走到 V 點，和學生的目的地(X 點)的距離大於 15 時，學生就可以逃脫。 $\overline{XN'}=\overline{VB}$ $\overline{XY}<\overline{NN'}$ $\angle ZFY=30°, \overline{YF}=2\overline{YZ}=2\overline{WX}$ $\overline{CX}=4.25-\frac{1}{2}n$ $\overline{VB}+\overline{BC}+\overline{CX}>15$則可逃脫 $4.25-0.5n+10+2.9-6n>15$ $n<0.33$ **學生走小於 0.33 時，即可逃脫**
	總結:學生只要沿著的 $\overline{FE}$ 延長線段走，不論老師往回走或繼續走，學生皆可逃脫。		

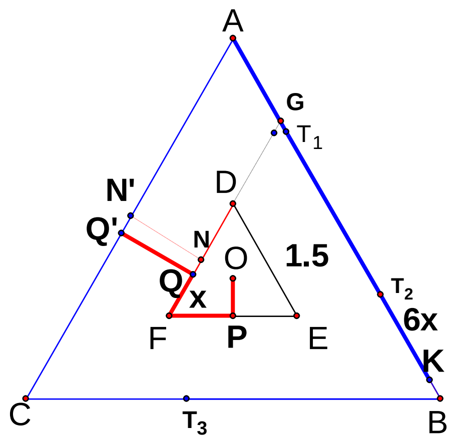
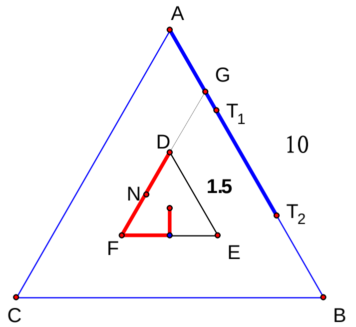
(3).討論 1：求出老師在什麼位置時，學生可以用以上的方法逃脫。

a. 老師走回 A 點: 設老師在 $\overline{AB}$ 上距離 A 點 x， $1.5-(4.25-n)-10=0.75+n$ $x \geq 0.75+n$ $\because n \geq 0$ $\therefore x \geq 0.75$ 	b.老師繼續往 B 設老師在 $\overline{AB}$ 上距離 A 點 x， $x=10-(0.75+0.5n)=9.25-0.5n$ $\because n \geq 0 \therefore x \leq 9.25$ 

結果：當 **0.75** ≤ x ≤ **9.25** 時，學生即可用延長的走法逃脫。

(4).討論 2.在上述步驟 3 時若學生依然繞著小三角形走 ，是否可以脫逃?

學生路徑	老師路徑	老師到達位置	逃脫方案
步驟 1 $O \rightarrow P$	$A \rightarrow T_1$	老師走到 T_1，距離 A 點約 2.6 處	
步驟 2 $P \rightarrow F$	$T_1 \rightarrow T_2$	老師走到 T_2，距離 A 點約 7.1 處	

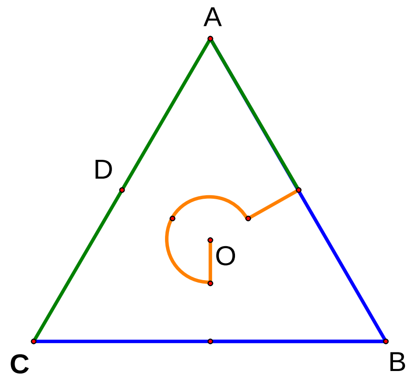
步驟 3 F→D	狀況一 $T_2 \to B \to T_3$		如左圖，老師繼續往 B 追途中會到達 K，學生由 F 點往 D 點走到最佳轉彎點 Q，此時學生往邊 $\overline{AC}$ 垂直走到 Q'，學生即可順利逃脫。 若 $\overline{QN}=x=\overline{KB}$， $\frac{1.5}{2}-x=10-7.1-6x \Rightarrow x=0.43$
	狀況二 $T_2 \to T_1$		由於學生的目的地為 G 點，而老師往 A 點到 G 的距離較短，因此老師可能會選擇往回走。不會如我們預期的繼續追，此時老師會在 G 點等待學生。

結果:1.學生應反向逃離，老師在後面追逐，在適當時用上述逃脫策略來逃脫‧因學生走一邊的時間較短有拉大兩人距離的優勢。 2.學生應用步驟 3 之主導優勢來逃脫。

結論: 1.在正三角形泳池中，學生繞邊長為 x 的小三角形游， $\mathbf{V_t} = n\mathbf{V_s}$ ， 當 $\frac{n-3\sqrt{3}}{n}<x<\frac{1}{n}$ 且 $n<1+\pi$ 才可逃脫。 2.當老師的速度為學生的六倍，在實際模擬情況下，不論老師用任何走法，學生皆可順利逃脫。

因路徑二可行，那繞著假想的小圓也可更快速到達可以逃脫的點，所以設計以下逃脫路徑：

（三）路徑三：學生繞著池中一個假想的圓形的圓周走



1. $\mathbf{V_t} = n\mathbf{V_s}$，學生不斷繞著假想的圓形走，當到達最佳轉彎點，且學生剛好位於離岸邊最近的點 (圓上只有三點是離岸邊最近的點)，學生就往岸邊逃離。

2.求 n 的最大值:

(1). 設學生往下走 r ,離岸邊的距離為 $\frac{\sqrt{3}}{6}-r$ ，

老師要追到學生的距離為 $\frac{3}{2}$ ， $n\left(\frac{\sqrt{3}}{6}-r\right)<\frac{3}{2}$…..(1)

(2). 圓形和三角形的周長比為 $2r\pi:3$，而學生繞一圈的速度要比老師快，

$2r\pi n<3$………(2)

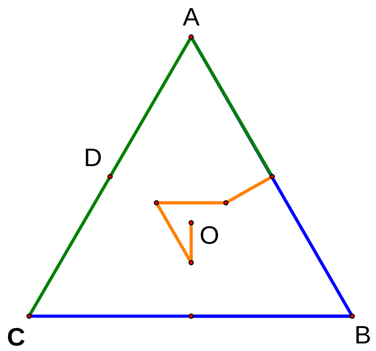
$$\begin{cases} n\left(\frac{\sqrt{3}}{6}-r\right)<\frac{3}{2} \\ 2r\,\pi\,n<3 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}n}{6}-nr<\frac{3}{2},\ nr<\frac{3}{2\pi} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}n}{6}<\frac{3}{2}+\frac{3}{2\pi}, n<\frac{6}{\sqrt{3}}(\frac{3}{2}+\frac{3}{2\pi})$$

$$n<3\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}}{\pi} \fallingdotseq 6.85$$

結果: 在正三角形泳池中，學生繞著一個半徑爲 r 的圓形游，$V_t = nV_s$，
當 $\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{3}{2n}<r<\frac{3}{2n\pi}$ 且 $n<3\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ 約 6.85 才可逃脫，此走法最大速度比較路徑二大。

因爲兩點間最短距離爲直線，所以繞著假想的倒三角形也可以更快速到達可以逃脫的點，所以設計以下逃脫路徑：

（四）路徑四：學生繞著池中一個假想的倒三角形的周圍走



1.$V_t = nV_s$，當到達最佳轉彎點，且學生剛好位於離岸邊最近的點 (倒三角形的三頂點是離岸邊最近的點)，學生就往岸邊逃離。

2.求 n 的最大值:

(1). 設小三角形邊長 x，學生往下走 $\frac{\sqrt{3}}{3}x$，離岸邊的距離爲 $\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{3}x$，老師要追到學生的距離爲 $\frac{3}{2}$

$$n\left(\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)<\frac{3}{2}\ldots\ldots(1)$$

(2). 倒三角形和正三角形的周長比爲 $x:1$

而學生繞一圈的速度要比老師快 $nx<1\ldots\ldots(2)$

$$\begin{cases} n\left(\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)<\frac{3}{2} \\ nx<1 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2n}<x<\frac{1}{n} \text{ 且 } n<3\sqrt{3}+2 \fallingdotseq 7.196$$

結論:當在正三角形泳池中，學生繞邊長爲 x 的倒小三角形游，老師的速度爲學生的 n 倍，當 $\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2n}<x<\frac{1}{n}$ 且 $n<3\sqrt{3}+2 \fallingdotseq 7.196$ 才可逃脫老師走的速度爲學生游泳速度最大速度比爲小於 7.196 倍。

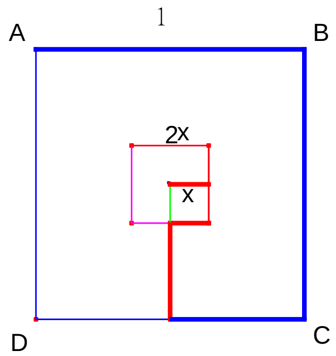
由上述三角形泳池的逃脫路徑研究，我們將正方形泳池也加以補充，設計了以下的逃脫路徑：

六、研究四: 在正方形泳池上，補充設計逃脫路徑及探討在各種走法中，學生能逃脫時老師的速度最大為學生的幾倍。

<u>接續前面研究一之探討：</u>

1.路徑五: 學生繞著池中一個假想的正方形周圍走，

$\mathbf{V_t} = n\mathbf{V_s}$，學生不斷繞著假想的正方形游，當到達最佳轉彎點，學生就往岸邊逃離。



$$\begin{cases} n(\frac{1}{2}-x)<2 \\ 2nx<1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{2}{n}<x<\frac{1}{2n}, n<5$$

結果: 在正方形泳池中，學生繞邊長為$2x$的小正方形游，$\mathbf{V_t} = n\mathbf{V_s}$，當 $\frac{1}{2}-\frac{2}{n}<x<\frac{1}{2n}$ 且$n<5$才可逃脫。此走法最大速度比較研究一的走法要大.

2.實際模擬：由於不確定以上的走法是否可以順利繞到理想的點，因此我們決定取簡易的數據當作正方形的邊長，並實際模擬老師和學生的追逐情境。

(1).模擬路徑五的逃脫路徑

由於$n<5$，而正方形路徑四的最大速度比為小於 4.6，因此設定 $\mathbf{V_t} = \mathbf{4.8V_s}$

令正方形泳池的邊長為 10，學生的所繞的小正方形邊長為 x。

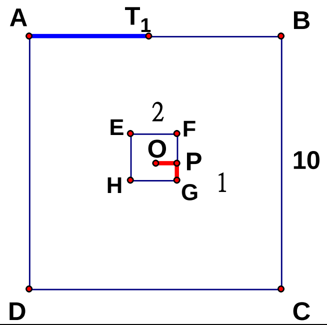
算出 $\frac{10}{12}<x<\frac{10}{9.6} \Rightarrow 0.83<x<1.042$，取 $x=1$

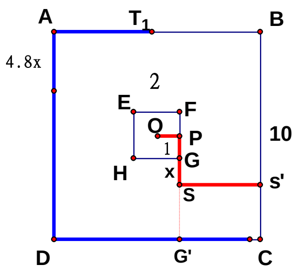
一開始老師在 A 點，學生在 O 點。

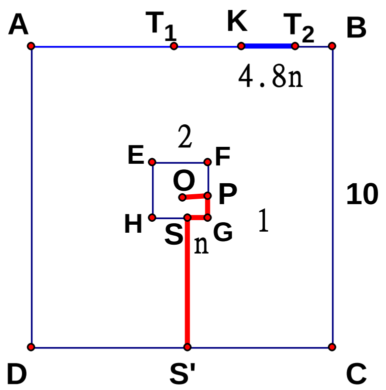
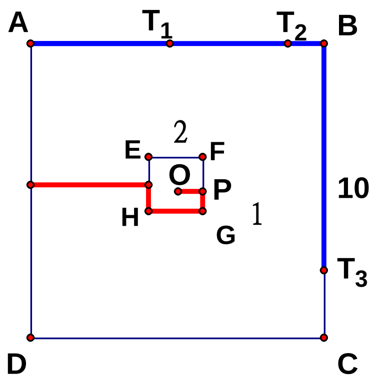
學生由 O 點走到 P 點，老師會走到T_1，即 $\overline{AB}$ 上距離 A 點約 4.8 的位置。$\overline{EF}$ 與$\overline{AB}$的距離 $=4$ ，

$4\times4.8=19.2<20$ 若學生上岸處與老師相距 20 即可逃脫。

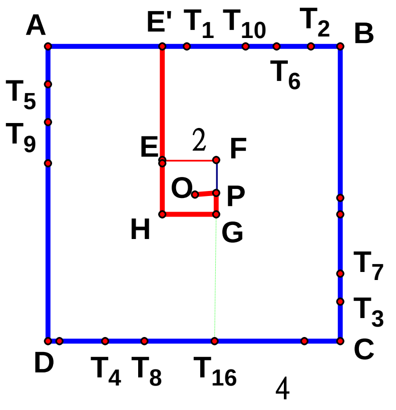
按照規律，整理老師和學生的位置關係，如下表所示：



學生路徑	老師路徑	老師到達位置	逃脫方案
步驟 1 O→P	A→T_1	老師走到 T_1，距離 A 點 4.8 處	
步驟 2 P→G	狀況一: T_1→A	若老師選擇往回走向 A。如圖 	當老師走到 A 點時朝$\overline{GG'}$方向走 x 到 S 點再往$\overline{BC}$垂直游去 $4.8x=4-x \Rightarrow x=\frac{20}{29}$ 約 0.6896 如左圖，學生可順利逃脫。

	狀況二: $T_1 \rightarrow T_2$	老師朝 B 走到 T_2，距離 A 點約 9.6 處	
步驟 3 G→H	接續狀況二：當學生在 G 點，老師在 T_2 時，老師有**兩種走法**		
	走法一 $T_2 \rightarrow T_1$	**(1)老師走向 A 點:如下圖** 	學生走到 S 時轉向 $\overline{DC}$ 走到 S': 當老師走到 K 點，和 S' 點的距等於 20，就可轉向池岸 S' 游去即可逃脫。 $9.6-4.8n+10+5+n=20$ $n=\frac{23}{24}$ 學生走 23/24 到最佳轉彎點 S 並垂直走到 S'，學生可順利逃脫。
	走法二 $T_2 \rightarrow B \rightarrow T_3$	**(2)老師繼續往 C 走到 T_3 距離 B 點約 9.2 處**	
步驟 4 H→E	$T_3 \rightarrow B$	**(1)老師往回走向 B 點:如下圖** 	**如步驟 3 走法一之方式來逃脫。**
	$T_3 \rightarrow T_4$	**(2)老師繼續往 D 走到 T_4 距離 c 點約 8.8 處**	
	如此反複走下去到每當學生繞小正方形一圈，老師就落後 1.6 ，繞 3.75 圈會落後 6，此時恰爲兩人相距最遠時。		
步驟 5 E→F	$T_4 \rightarrow T_5$	老師走到 T_5，距離 D 點 8.4 處	步驟 4~15 均依照老師的追逐方式，選擇用步驟 3 之策略逃脫或繼續繞圈子，直到逃脫爲止。
步驟 6 F→G	$T_5 \rightarrow T_6$	老師走到 T_6，距離 A 點 8 處	
步驟 7 G→H	$T_6 \rightarrow T_7$	老師走到 T_7，距離 B 點 7.6 處	
步驟 8 H→E	$T_7 \rightarrow T_8$	老師走到 T_8，距離 C 點 7.2 處	
步驟 9 E→F	$T_8 \rightarrow T_9$	老師走到 T_9，距離 D 點 6.8 處	
步驟 10 F→G	$T_9 \rightarrow T_{10}$	老師走到 T_{10}，距離 A 點 6.4 處	

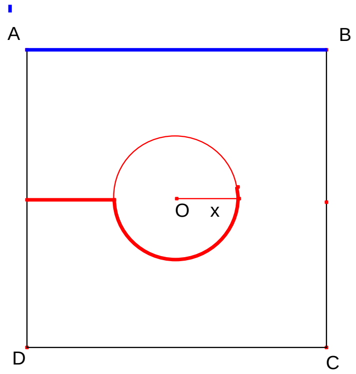
繼續走----------

步驟 16 H→E	T_{15}→T_{16}	老師走到 T_{16}，距離 C 點 4 處 	此時學生只要直到往岸邊游到 E' 與老師 T_{16} 的距離爲 20，學生必可逃脫。

結論:在正方形泳池中，當老師的速度爲學生的 4.8 倍，在實際模擬情況下，不論老師用任何走法，學生皆可順利逃脫。

3.路徑六: 學生繞著池中一個假想的圓形周圍走，如右圖，

$\mathbf{V_t} = n\,\mathbf{V_s}$，學生不斷繞著假想的圓形游，當到達最佳轉彎點，學生就往岸邊逃離。

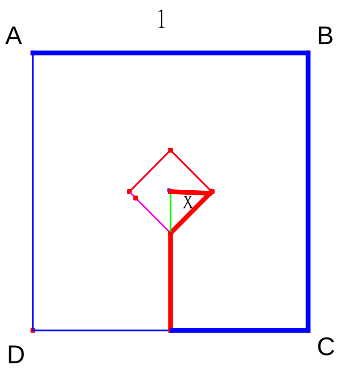


$$\begin{cases} n(\frac{1}{2}-x)<2 \\ nx\pi<2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{2}{n}<x<\frac{2}{n\pi}, n<4+\frac{4}{\pi} \doteqdot 5.27$$

結果: 當在正方形泳池中，學生繞著池中一個半徑爲 x 的圓形游，老師的速度爲學生的 n 倍，當 $\frac{1}{2}-\frac{2}{n}<x<\frac{2}{n\pi}$ 且 $n<4+\frac{4}{\pi}\doteqdot 5.27$ 才可逃脫。此走法最大速度比較路徑五大。

4.路徑七:學生繞著池中一個假想的倒正方形周圍走，如右圖

$\mathbf{V_t} = n\,\mathbf{V_s}$，學生不斷繞著假想的正方形走游，當到達最佳轉彎點，學生就往岸邊逃離。



$$\begin{cases} n(\frac{1}{2}-x)<2 \\ \sqrt{2}nx<1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{2}{n}<x<\frac{1}{\sqrt{2}n},\ n<4+\sqrt{2}\approx 5.414$$

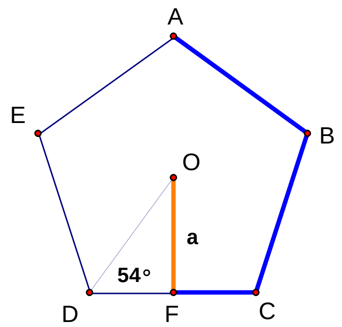
結果: 當在正方形泳池中，學生繞著池中假想的倒正方形游，$\mathbf{V_t} = n\,\mathbf{V_s}$，

當 $\frac{1}{2}-\frac{2}{n}<x<\frac{1}{\sqrt{2}n}$ 且 $n<4+\sqrt{2}\doteqdot 5.414$ 才可逃脫。此走法最大速度比較路徑六大。

七、研究五:在正五邊形泳池上，設計逃脫路徑及探討在各種走法中，學生能逃脫時老師的速度最大爲學生的幾倍。

✧ 在正五邊形泳池上，邊長爲 1，設計以下幾種路徑:

(一)路徑一:直接往下走:



學生走的距離爲 $\overline{OF}$

設 $\overline{OF}=a$， $2a=\tan54°$

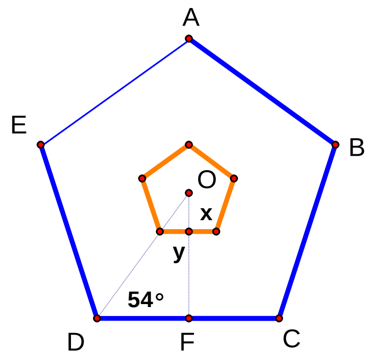
$\dfrac{\tan54°}{2}=a,\ a\approx0.6882$

學生的距離爲 $\dfrac{1}{2}\tan54^0$，老師的距離爲 2.5

$\dfrac{5}{2}\div\dfrac{\tan54°}{2}=\dfrac{5}{\tan54°}\approx3.632$

結果：在此走法中最大速率比爲 $V_t<3.632\,V_s$

(二)路徑二：學生繞著池中假想的正五邊形周圍走



1. $V_t=nV_s$，學生不斷繞著假想的正五邊形游，當到達最佳轉彎點，學生就往岸邊逃離。

2. 求 n 的最大值:

(1). 設學生往下走 x，離岸邊的距離爲 $\dfrac{1}{2}\tan54^0-x$

老師離學生目的地距離爲 2.5

$$n\left(\frac{1}{2}\tan54^0-x\right)<2.5\text{..................}(1)$$

(2). 五邊形的周長=10 y，則 $\dfrac{x}{y}=\tan54°,\ y=\dfrac{x}{\tan54°}$

兩個五邊形的周長比爲 $\dfrac{10x}{\tan54°}:5=\dfrac{2x}{\tan54°}:1$

而學生繞一圈的速度要比老師快 $\dfrac{2xn}{\tan54°}<1\text{.................}(2)$

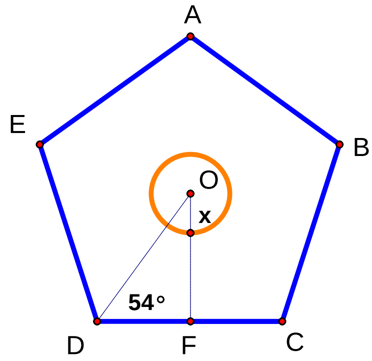
$$\begin{cases}n(\frac{1}{2}\tan54^0-x)<2.5\text{.....}(1)\\ \dfrac{2xn}{\tan54°}<1\text{..................}(2)\end{cases}\Rightarrow\frac{\tan54^0-5}{2n}<x<\frac{\tan54^0}{2n},\ \frac{1}{2n}-\frac{5}{2n\tan54^0}<y<\frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow n<1+\frac{5}{\tan54°}\approx4.632$$

結果: 在正五邊形泳池中，學生繞著池中邊長爲 y 的正五邊形游，$V_t=nV_s$，

當 $\dfrac{1}{2n}-\dfrac{5}{2n\tan54^0}<y<\dfrac{1}{2n}$ 且 $n<1+\dfrac{5}{\tan54°}$≒4.632 才可逃脫，較路徑一大。

(三)路徑三：學生繞著池中假想的圓形周圍走



1. $V_t = nV_s$，學生不斷繞著假想的圓形游，當到達最佳轉彎點，學生就往岸邊逃離。

2. **求 n 的最大值:**

(1) 設學生往下走 x ，離岸邊的距離為 a-x， $a=\frac{1}{2}\tan 54^0$

老師離學生目的地距離為 2.5 ，$n(a\text{-}x)<2.5$

(2) 假想圓形的周長＝ $2x\pi$

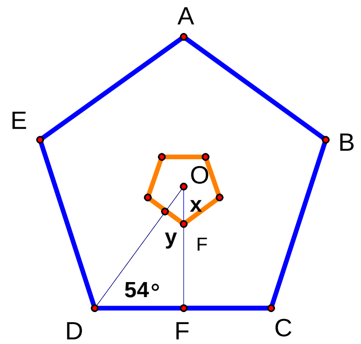
假想圓和正五邊形的周長比為 $2x\pi:5$

而學生繞一圈的速度要比老師快： $2nx\pi<5$

$$\begin{cases} n(a\text{-}x) < 2.5\ldots\ldots\ldots(1) \\ nx < \dfrac{5}{2\pi}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases} \quad \frac{\tan 54^\circ}{2} - \frac{5}{2n} < x < \frac{5}{2n\pi} \Rightarrow n < \frac{5\pi+5}{\tan 54^\circ \pi} \approx 4.789$$

結果:在正五邊形泳池中，學生繞著半徑為 x 的圓形游，$V_t = nV_s$，當 $\frac{\tan 54^\circ}{2} - \frac{5}{2n} < x < \frac{5}{2n\pi} \Rightarrow n < \frac{5\pi+5}{\tan 54^\circ \pi} \approx 4.789$ 才可逃脫，較路徑二的走法要大。

(四)路徑四：學生繞著池中假想的倒五邊形周圍走



1. $V_t = nV_s$，學生不斷繞著假想的圓形游，直到學生的目的地與老師的位置剛好是正五邊形游泳池周長的一半，學生就往岸邊逃離。

2. **求 n 的最大值:**

(1) 設學生往下走 x ，離岸邊的距離為 a-x，

老師離學生目的地距離為 2.5

$n\,(a\text{-}x)<2.5\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

(2) 假想倒五邊形的周長= $10y$ ， $y=\cos 54^\circ x$

假想倒五邊形和正五邊形的周長比為:

$$10\cos 54^\circ x:5 = x:\frac{1}{2\cos 54^\circ}$$

而學生繞一圈的速度要比老師快： $nx<\frac{1}{2\cos 54^\circ}\ldots\ldots\ldots(2)$

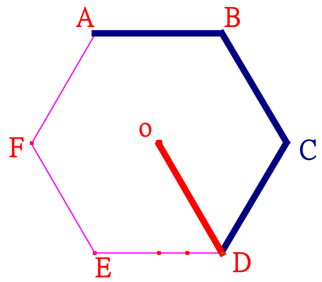
$$\begin{cases} n(a\text{-}x) < 2.5\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ nx < \dfrac{1}{2\cos 54^\circ}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

$$\frac{\tan 54^\circ}{2} - \frac{5}{2n} < x < \frac{1}{2n\cos 54^0} \Rightarrow \frac{\sin 54^\circ}{2} - \frac{5\cos 54^0}{2n} < y < \frac{1}{2n} \Rightarrow n < \frac{5\cos 54^\circ+1}{\sin 54^\circ} \approx 4.868$$

結果:在正五邊形泳池中，學生繞著邊長為 y 的倒五邊形游，老師的速度為學生的 n 倍，當 $\frac{\sin 54^\circ}{2} - \frac{5\cos 54^0}{2n} < y < \frac{1}{2n}$ 且 $n < \frac{5\cos 54^\circ+1}{\sin 54^\circ}$ ≒4.868 才可逃脫。此走法最大速度比，較路徑三的走法要大。

八、研究六:在正六邊形泳池上，設計逃脫路徑及探討在各種走法中，學生能逃脫時老師的速度最大為學生的幾倍。

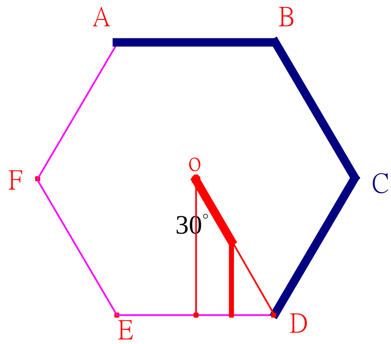
✧ 在正六邊型泳池上，設計以下幾種路徑:



(一)路徑一: 學生直接朝離老師最遠的對邊頂點 D 游去

$\overline{OD}=1$ ，$D_s=1$，$D_t=3$

結果:學生在此走法中最大速率比為 $V_t< 3\,V_s$



(二)路徑二: 學生向右下 30°走 x，再垂直向下逃離

$V_t = n\,V_s$，求出 n 的最大值

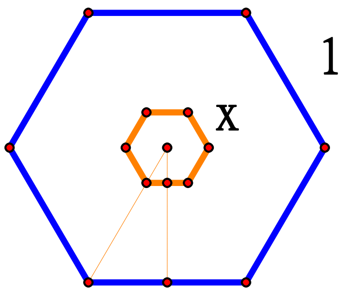
$V_t = n\,V_s$，$D_s=(\frac{1-x}{2})\sqrt{3}$ ，$D_t = n\,D_s$

$$n\left(\frac{\sqrt{3}(1-x)}{2}\right)<3 \text{ 且 } nx=\frac{1-x}{2}$$

$$\Rightarrow n^2-2\sqrt{3}n-\sqrt{3}<0$$

$$0<n<\sqrt{3}+\sqrt{3+\sqrt{3}} \fallingdotseq 3.91$$

結果：在正六邊形泳池上，$V_t = n\,V_s$，學生往右下 30°走 x 的距離，當 $x=\frac{1}{2n+1}$，再垂直向下逃離，此時學生可逃脫師生的最大速率比為 $V_t<\sqrt{3}+\sqrt{3+\sqrt{3}}\,V_s \fallingdotseq 3.91\,V_s$



(三)路徑三: 學生繞著池中假想的正六邊形周圍走

1. $V_t = n\,V_s$，學生不斷繞著假想的正六邊形游，當到達最佳轉彎點，學生就往岸邊逃離。

2. 求 n 的最大值:

設學生往下走 $\frac{\sqrt{3}x}{2}$ ，離岸邊的距離為 $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}x}{2}$

老師離學生目的地距離為 3

$$\begin{cases} n(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}x}{2})<3\ldots(1) \\ nx<1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases} \Rightarrow 1-\frac{2\sqrt{3}}{n}<x<\frac{1}{n} \text{ 且 } n<2\sqrt{3}+1$$

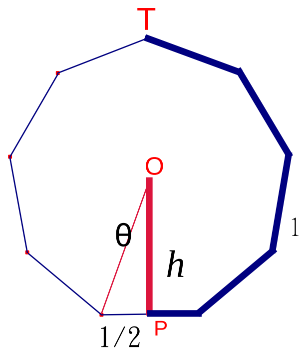
結果: 在正六邊形泳池上，當學生在池內繞著一個邊長為 x 的正六邊形走，$V_t = n\,V_s$，當且 $1-\frac{2\sqrt{3}}{n}<x<\frac{1}{n}$ 且 $n<2\sqrt{3}+1\fallingdotseq 4.464$ 才可逃脫。此走法最大速度比，較路徑二的走法要大。

九、研究七:在正多邊形泳池上，設計逃脫路徑及探討在各種走法中，學生能逃脫時老師的速度最大為學生的幾倍。

◇設邊數為 m ，且老師的速度是學生的 n 倍， 即 $\mathbf{V_t} = n\mathbf{V_s}$。

(一) m 為奇數時:

1. 路徑一：學生直接朝離老師最遠的對邊垂直游去，



$$h = \frac{1}{2\tan\theta} \cdots (\theta = \frac{180}{m})$$

$$nh < \frac{m}{2}$$

$$n < \frac{m}{2h} = \frac{m}{2} * \frac{2\tan\theta}{1} = m\tan\theta$$

$$\Rightarrow n < m\tan\theta$$

結果: 學生直接朝離老師最遠的對邊垂直游去，可逃脫的最大速率比為 $\mathbf{V_t} < m\tan\theta\ \mathbf{V_s}$

2. 路徑二：階梯式走法

老師一定會選擇最短距離走的條件下，學生誘使老師來回追逐

(1) $m=5$ ：我們先從正五邊形討論，同研究一的階梯走法，當 $\mathbf{V_t} = n\mathbf{V_s}$，若學生往最遠對邊 CD 垂直走 x_1，在最佳轉彎點前再轉往 DE 垂直走 y_1，再轉 72° 走 x_2，如此反覆直到再轉右走 y_k ，若再轉 72°所走的距離 x 可以讓學生逃離即可。

$$1 - nx_1 = x_1\sin 72°, x_1 = \frac{1}{n+\sin 72°}$$

$$nx_1 - ny_1 = y_1\sin 72°, y_1 = \frac{n}{(n+\sin 72°)^2}$$

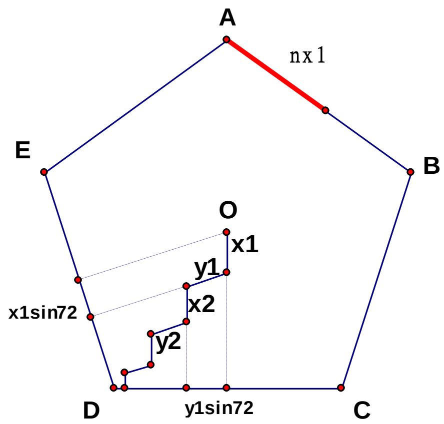
$$1 - nx_1 + ny_1 - nx_2 = x_1\sin 72° + x_2\sin 72°$$

$$x_2 = \frac{n^2}{(n+\sin 72°)^3}$$

$$x_k = \frac{n^{2k-2}}{(n+\sin 72°)^{2k-1}}$$

$$y_k = \frac{n^{2k-1}}{(n+\sin 72°)^{2k}}$$

老師在 **AB** 兩點間來回走



(2) 推廣到正 m 邊形:，當 $\mathbf{V_t} = n\mathbf{V_s}$，若學生往最遠對邊垂直走 x_1 ，在最佳轉彎點前再轉 2θ °往相鄰對邊垂直走 y_1 ，再轉 2θ °走 x_2 ，如此反覆直到再轉右走 y_k ，若再轉 2θ °角所走的距離 x 可以讓學生逃離即可。($\theta = \frac{180}{m}$)

$$1-nx_1=x_1\sin 2\theta, x_1=\frac{1}{n+\sin 2\theta}$$

$$2\theta=\frac{360}{m}$$

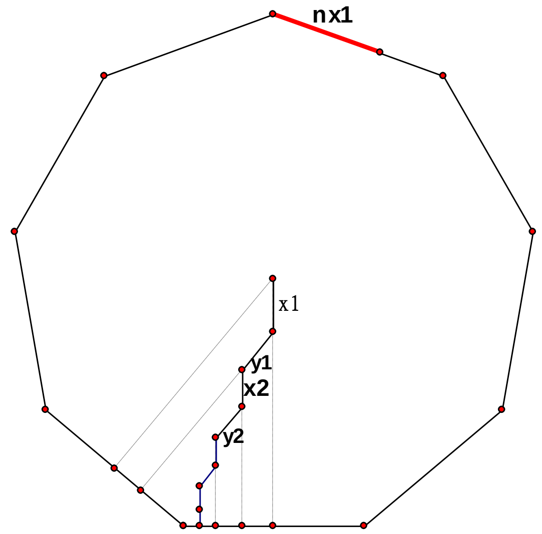
$$nx_1-ny_1=y_1\sin 2\theta, y_1=\frac{n}{(n+\sin 2\theta)^2}$$

$$1-nx_1+ny_1-nx_2=x_1\sin 2\theta+x_2\sin 2\theta$$

$$x_2=\frac{n^2}{(n+\sin 2\theta)^3}$$,依此類推

$$x_k=\frac{n^{2k-2}}{(n+\sin 2\theta)^{2k-1}}$$

$$y_k=\frac{n^{2k-1}}{(n+\sin 2\theta)^{2k}}$$



$$n\left[\frac{1}{2\tan\theta}-\left(\frac{1}{n+\sin 2\theta}+\frac{n^2}{(n+\sin 2\theta)^3}+\ldots\ldots+\frac{n^{2k-2}}{(n+\sin 2\theta)^{2k-1}}\right)-\left(\frac{n}{(n+\sin 2\theta)^2}+\frac{n^3}{(n+\sin 2\theta)^4}+\ldots.\frac{n^{2k-1}}{(n+\sin 2\theta)^{2k}}\right)\cos 2\theta\right]<\frac{m}{2}$$

$$\frac{1}{2\tan\theta}-\left[1-\left(\frac{n}{n+\sin 2\theta}\right)^{2k}\right]\left(\frac{n+\sin 2\theta+n\cos 2\theta}{(2n+\sin 2\theta)\sin 2\theta}\right)<\frac{m}{2n}$$

結果: 老師一定會選擇最短距離走的條件下，當 $\mathbf{V_t} = n\,\mathbf{V_s}$， 須滿足

$\frac{1}{2\tan\theta}-\left[1-\left(\frac{n}{n+\sin 2\theta}\right)^{2k}\right]\left(\frac{n+\sin 2\theta+n\cos 2\theta}{(2n+\sin 2\theta)\sin 2\theta}\right)<\frac{m}{2n}$ 條件，當 n 越大則 k 要越大，也就是階梯轉彎次數較多次就可以逃脫。

(二) m 為偶數時:

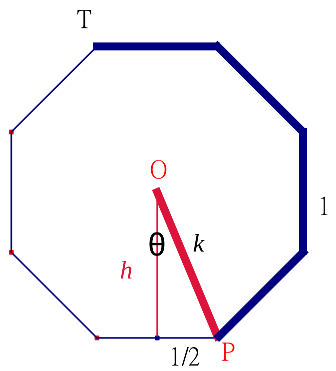
1. 路徑一：學生直接朝離老師最遠的對頂點游去，如右圖

$$k=\frac{1}{2\sin\theta}$$

$$nk<\frac{m}{2}$$

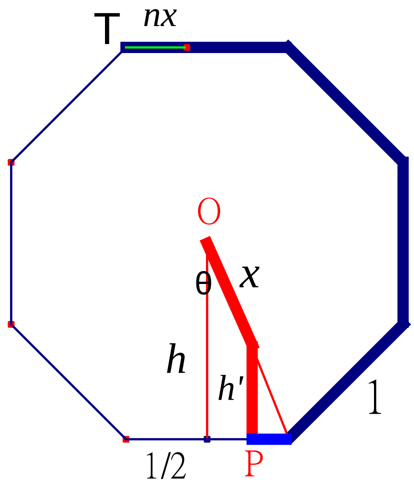
$$n<\frac{m}{2k}=\frac{m}{2}*\frac{2\sin\theta}{1}=m\sin\theta$$

$$\Rightarrow n<m\sin\theta$$



結果: 學生直接朝離老師最遠的對邊垂直游去，可逃脫的最大速率比為 $\mathbf{V_t} < m\sin\theta\ \mathbf{V_s}$

2. 路徑二：學生向右下θ 度走 x ，再垂直向下逃離到 P 點



(1). $\mathbf{V_t} = n\mathbf{V_s}$，求出 n 的最大值

$$nx = \frac{1}{2} - x\sin\theta \Rightarrow (n+\sin\theta)x = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2(n+\sin\theta)}$$

(2). 設學生往下走 h' 老師離學生目的地距離爲 $\frac{m}{2}$

$$h' = h - x\cos\theta = \frac{1}{2\tan\theta} - x\cos\theta$$

$$n\left(\frac{1}{2\tan\theta} - x\cos\theta\right) < \frac{m}{2}$$

$$\Rightarrow n^2 - m\tan\theta - m\tan\theta\sin\theta < 0 \Rightarrow 0 < n < \frac{m\tan\theta + \sqrt{m^2\tan^2\theta + 4m\tan\theta\sin\theta}}{2}$$

結果：學生向右下θ 度角走 x ，再垂直向下逃離到 **P** 點，可逃脫的最大速率比爲

$$\mathbf{V_t} < \frac{m\tan\theta + \sqrt{m^2\tan^2\theta + 4m\tan\theta\sin\theta}}{2}\mathbf{V_s}$$

3. 路徑三：階梯式走法

同研究一的階梯走法，當 $\mathbf{V_t} = n\mathbf{V_s}$，若學生往最遠對邊垂直走 x_1 ，在最佳轉彎點前再轉 2θ 角往相鄰對邊垂直走 y_1 ，再轉 2θ 角走 x_2 ，如此反覆直到再轉右走 y_k ，若再轉 2θ 角所走的距離 x 可以讓學生逃離即可。

令 $2\theta = \frac{360}{m}$

老師在 **A** 點往右又往左來回走

$$\frac{1}{2} - nx_1 = x_1\sin 2\theta \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2(n+\sin 2\theta)}$$

$$ny_1 - nx_1 = \frac{1}{2} - y_1\sin 2\theta \Rightarrow y_1 = \frac{2n+\sin 2\theta}{2(n+\sin 2\theta)^2}$$

$$ny_1 - nx_2 = x_2\sin 2\theta$$

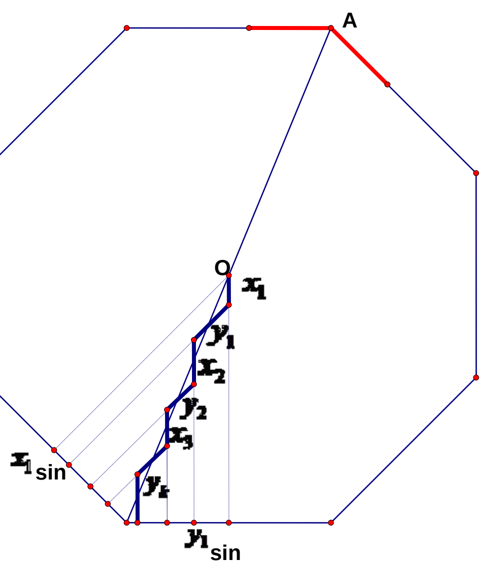
$$\Rightarrow x_2 = \frac{ny_1}{n+\sin 2\theta} = \frac{n(2n+\sin 2\theta)}{2(n+\sin 2\theta)^3}$$

$$nx_2 - ny_2 = y_2\sin 2\theta$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{nx_2}{n+\sin 2\theta} = \frac{n^2(2n+\sin 2\theta)}{2(n+\sin 2\theta)^4}$$

$$x_k = \frac{n^{2k-2}(2n+\sin 2\theta)}{2(n+\sin 2\theta)^{2k-1}}$$

$$y_k = \frac{n^{2k-1}(2n+\sin 2\theta)}{2(n+\sin 2\theta)^{2k}}$$



$$n[\frac{1}{2\tan\theta}-(x_1+x_2+\ldots+x_k)-\cos 2\theta(y_1+y_2+\ldots+y_k)]<\frac{m}{2}$$

$$n\left[\frac{1}{2\tan\theta}-\left(\frac{1}{2(n+\sin 2\theta)}+\frac{n(2n+\sin 2\theta)}{2(n+\sin 2\theta)^3}+\ldots\ldots+\frac{(2n+\sin 2\theta)n^{2k-2}}{2(n+\sin 2\theta)^{2k-1}}\right)-\left(\frac{(2n+\sin 2\theta)}{2(n+\sin 2\theta)^2}+\frac{n^2(2n+\sin 2\theta)}{2(n+\sin 2\theta)^4}+\ldots\frac{(2n+\sin 2\theta)n^{2k-1}}{2(n+\sin 2\theta)^{2k}}\right)\cos 2\theta\right]<\frac{m}{2}$$

$$\frac{n+\sin 2\theta-\tan\theta}{\tan\theta(n+\sin 2\theta)}-\frac{n+\cos 2\theta(n+\sin 2\theta)}{\sin 2\theta(n+\sin 2\theta)}-(\frac{n}{n+\sin 2\theta})^{2k-2}(\frac{n^2+\sin 2\theta n+n^2\cos 2\theta}{(n+\sin 2\theta)^2\sin 2\theta})<\frac{m}{n}$$

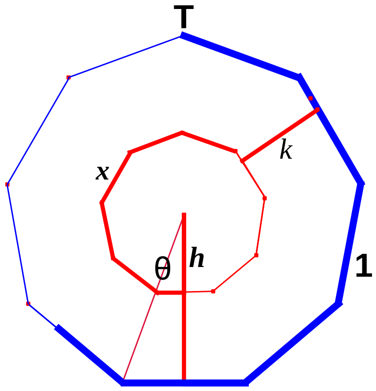
結果: 老師一定會選擇最短距離走的條件下，當 $\mathbf{V_t} = n\,\mathbf{V_s}$， 須滿足條件

$$\frac{n+\sin 2\theta-\tan\theta}{\tan\theta(n+\sin 2\theta)}-\frac{n+\cos 2\theta(n+\sin 2\theta)}{\sin 2\theta(n+\sin 2\theta)}-(\frac{n}{n+\sin 2\theta})^{2k-2}(\frac{n^2+\sin 2\theta n+n^2\cos 2\theta}{(n+\sin 2\theta)^2\sin 2\theta})<\frac{m}{n}$$

，當 n 越大則 k 要越大，也就是階梯轉彎次數較多次就可以逃脫。

(三) m 爲整數時:

1. 路徑一：學生繞著池中假想的正 m 邊形(邊長爲 x)走，



老師在岸邊以 n 倍的速度追學生，學生不斷繞著假想的正 m 邊形，當到達最佳轉彎點，學生就往岸邊逃離。

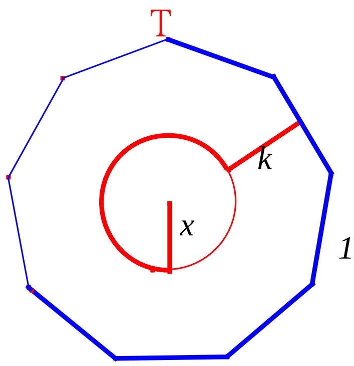
學生往下走 $h=\dfrac{x}{2\tan\theta}$ ，離岸邊的距離爲 $k=\dfrac{1-x}{2\tan\theta}$ ，

老師離學生目的地距離爲 $\dfrac{m}{2}$ ， $[\dfrac{(1-x)}{2\tan\theta}n<\dfrac{m}{2}$ 且 $nx<1]$

得 $1-\dfrac{m\tan\theta}{n}<x<\dfrac{1}{n}$ 且 $n<1+m\tan\theta$

結果: 學生繞著池中假想的正 m 邊形(邊長爲 x)周圍走，當 $1-\dfrac{m\tan\theta}{n}<x<\dfrac{1}{n}$ ，可逃脫的最大速率比爲 $\mathbf{V_t} < 1+m\tan\theta\ \mathbf{V_s}$

2. 路徑二：學生繞著池中假想的圓形(半徑爲 x)走，



$\mathbf{V_t} = n\,\mathbf{V_s}$，學生不斷繞著假想的圓形，當到達最佳轉彎點，學生就往岸邊逃離。

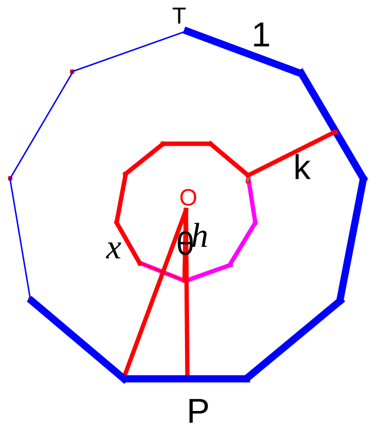
設學生往下走 x ，離岸邊的距離爲 $k=\dfrac{1}{2\tan\theta}-x$ ，

老師離學生目的地距離爲 $\dfrac{m}{2}$ ， $\dfrac{1}{2\tan\theta}-\dfrac{m}{2n}<x<\dfrac{m}{2n\pi}$

$n(\dfrac{1}{2\tan\theta}-x)<\dfrac{m}{2}$ ，$2nx\,\pi<m \Rightarrow n<m\tan\theta(1+\dfrac{1}{\pi})$

結果: 學生繞著池中假想的圓形(半徑爲 x)周圍走，當 $\dfrac{1}{2\tan\theta}-\dfrac{m}{2n}<x<\dfrac{m}{2n\pi}$ ，可逃脫的最大速率比爲 $\mathbf{V_t} < m\tan\theta(1+\dfrac{1}{\pi})\ \mathbf{V_s}$

3. 路徑三:學生繞著池中假想邊長爲 x 的倒正 m 邊形走，



$\mathbf{V_t} = n\mathbf{V_s}$，學生不斷繞著假想的正 m 邊形，當到達最佳轉彎點，學生就往岸邊逃離。

設學生往下走 $h = \dfrac{x}{2\sin\theta}$，離岸邊的距離爲

$k = \dfrac{1}{2\tan\theta} - \dfrac{x}{2\sin\theta}$，老師離學生目的地距離爲 $\dfrac{m}{2}$

$(\dfrac{1}{2\tan\theta} - \dfrac{x}{2\sin\theta})\,n < \dfrac{m}{2}$，$nx < 1$

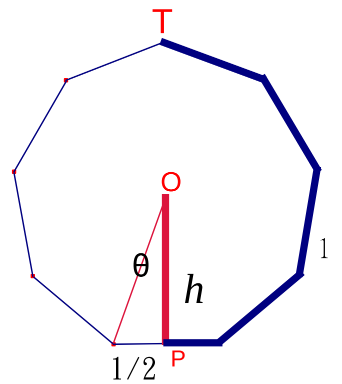
$\Rightarrow \cos\theta - \dfrac{m\sin\theta}{n} < x < \dfrac{1}{n}$ 且 $n < m\tan\theta + \dfrac{1}{\cos\theta}$

結果: 學生繞著池中假想的倒正 m 邊形周圍走 (邊長爲 x)，當 $\cos\theta - \dfrac{m\sin\theta}{n} < x < \dfrac{1}{n}$，可逃脫最大速率比爲 $\mathbf{V_t} < m\tan\theta + \dfrac{1}{\cos\theta}\ \mathbf{V_s}$

伍、研究結果

一、在正多邊形泳池上，設計逃脫路徑及探討在各種走法中，學生能逃脫時老師的速度最大爲學生的幾倍。設邊數爲 m，(註: $\theta = \dfrac{180}{m}$)。

(一) m 爲奇數時

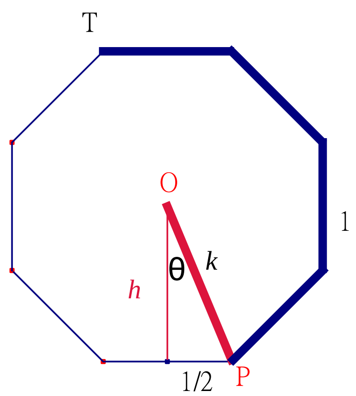


路徑一: 學生直接朝離老師最遠的對邊垂直游去

1. 可逃脫的最大速率比爲 $\mathbf{V_t} < m\tan\theta\ \mathbf{V_s}$
2. $m = \mathbf{5}$ ⇨ $\mathbf{V_t} < \dfrac{5}{\tan 54^0}\ \mathbf{V_s} \fallingdotseq 3.632\ \mathbf{V_s}$

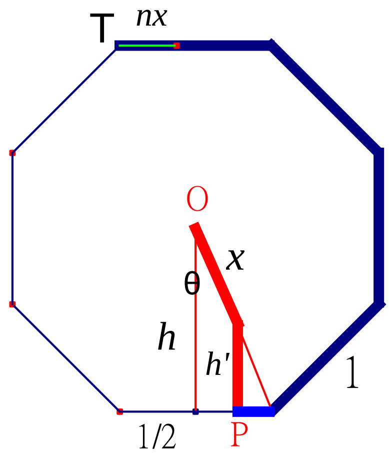
(二) m 爲偶數時:

路徑一：學生直接朝離老師最遠的對邊頂點游去



1. 可逃脫的最大速率比爲 $\mathbf{V_t} < m\sin\theta\ \mathbf{V_s}$
2. $m = \mathbf{4}$ ⇨ $\mathbf{V_t} < 2\sqrt{2}\ \mathbf{V_s}$
3. $m = \mathbf{6}$ ⇨ $\mathbf{V_t} < 3\ \mathbf{V_s}$

路徑二：學生向右下θ 度角走 x，再垂直向下逃離到岸邊



1. 可逃脫的最大速率比為

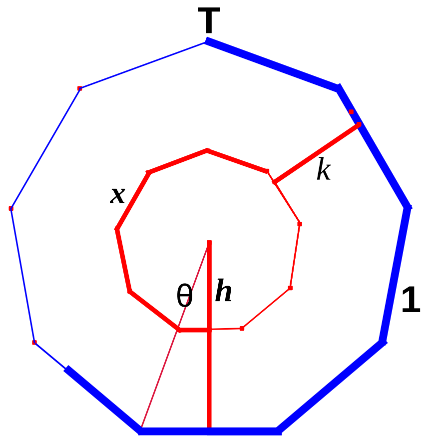
$$\mathbf{V_t} < \frac{m\tan\theta+\sqrt{m^2\tan^2\theta+4m\tan\theta\sin\theta}}{2}\ \mathbf{V_s}$$

2. $m = 4$ ⇨ $\mathbf{V_t} < 2+\sqrt{4+2\sqrt{2}}\ V_s \fallingdotseq 4.6\ \mathbf{V_s}$

3. $m = 6$ ⇨ $\mathbf{V_t} < \sqrt{3}+\sqrt{3+\sqrt{3}}\ V_s \fallingdotseq 3.91\ \mathbf{V_s}$

(三) m 為整數時:

路徑一:學生繞著池中假想的正 m 邊形(邊長為 x)周圍游



$$1-\frac{m\tan\theta}{n} < x < \frac{1}{n}$$

1. 可逃脫的最大速率比為 $\mathbf{V_t} < 1+m\tan\theta\ \ \mathbf{V_s}$

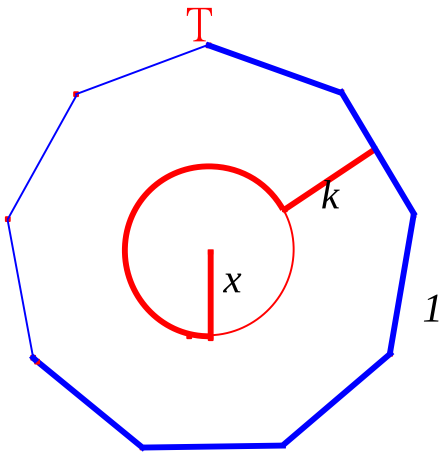
2. $m = 3$ ⇨ $n < 3\sqrt{3}+1$ 約 6.196 倍

3. $m = 4$ ⇨ $n < 5$

4. $m = 5$ ⇨ $n < 1+\dfrac{5}{\tan 54^0}$ 約 4.632 倍

5. $m = 6$ ⇨ $x < \dfrac{1}{n}$ 且 $n < 2\sqrt{3}+1$ 約 4.464 倍,

路徑二：學生繞著池中假想的圓形(半徑為 x)周圍游。



$$\frac{1}{2\tan\theta}-\frac{m}{2n} < x < \frac{m}{2n\pi}$$

1. 可逃脫的最大速率比為 $\mathbf{V_t} < m\tan\theta(1+\dfrac{1}{\pi})\ \ \mathbf{V_s}$

2. $m = 3$ ⇨ $n < 3\sqrt{3}+\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$ 約 6.85 倍

3. $m = 4$ ⇨ $n < 4+\dfrac{4}{\pi}$ 約 5.27 倍

4. $m = 5$ ⇨ $n < \dfrac{5\pi+5}{\tan 54°\pi}$ 約 4.789 倍

5. $m = 6$ ⇨ $n < 2\sqrt{3}(1+\dfrac{1}{\pi})$ 約 4.566 倍

路徑三：學生繞著池中假想的倒正 m 邊形周圍走

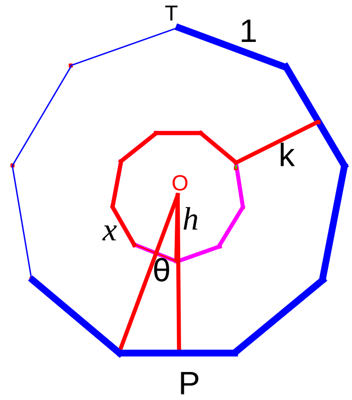
1.可逃脫最大速率比爲 $\mathbf{V_t} < \left(m\tan\theta+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)\mathbf{V_s}$

2. $m = \mathbf{3}$ ➩ $n < 3\sqrt{3}+2$ 約 7.196 倍

3. $m = \mathbf{4}$ ➩ $n < 4+\sqrt{2}$ 約 5.414 倍

4. $m = \mathbf{5}$ ➩ $n < \dfrac{5\cos54°+1}{\sin54°}$ 約 4.868 倍

5. $m = \mathbf{6}$ ➩ $n < \dfrac{8}{\sqrt{3}}$ 約 4.619 倍



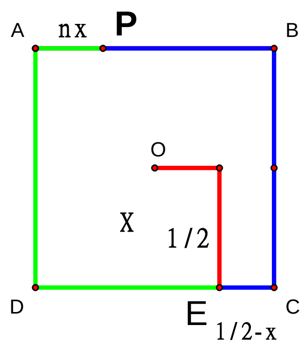
$$\cos\theta-\frac{m\sin\theta}{n}<x<\frac{1}{n}$$

二、除上述一般走法之外，還可以設計不同的逃脫路徑。

路徑一：學生往右走一段距離後垂直向下轉往岸邊逃跑

1.當 $\mathbf{V_t} = 3\,\mathbf{V_s}$，則學生先往右走距離 x 再向下轉，只要 $0 < x < \dfrac{1}{4}$ 學生即可逃脫。

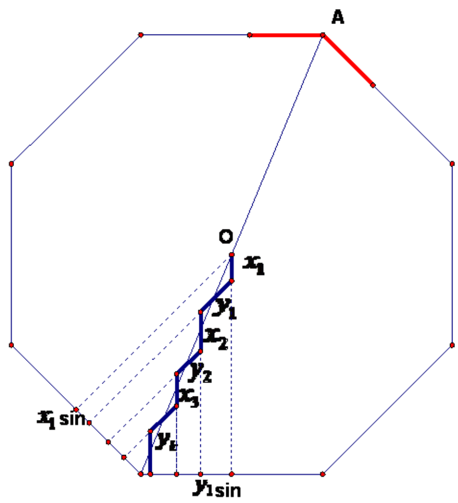
2.學生可逃脫的師生最大速率比爲 $\mathbf{V_t} < 4\,\mathbf{V_s}$。學生先往右走距離 x 再向下轉，只要 $x=\dfrac{1}{2n+2}$，學生即可逃離。



路徑二：階梯式走法

1 .在**老師以學生逃跑方向立即判斷路徑長度，而會選擇較短路徑追逐學生的**條件下，學生用階梯式的走法都可逃脫。

2. 在正 m 邊形中，令 $2\theta=\dfrac{360}{m}$，當 $\mathbf{V_t}= n\,\mathbf{V_s}$，若學生往最遠對邊垂直走 x_1，在最佳轉彎點前再轉 2 **θ** 角往相鄰對邊垂直走 y_1，再轉 2**θ** 角走 x_2，如此反覆直到再轉右走 y_k，若再轉 2**θ** 角所走的距離小於 $\dfrac{m}{2n}$，學生即可逃離。



(1) m 爲奇數時，當 k 滿足下列條件學生即可逃脫

$$\frac{1}{2\tan\theta}-\left[1-\left(\frac{n}{n+\sin2\theta}\right)^{2k}\right]\left(\frac{n+\sin2\theta+n\cos2\theta}{(2n+\sin2\theta)\sin2\theta}\right)<\frac{m}{2n}$$

(2) m 爲偶數時，當 k 滿足下列條件學生即可逃脫

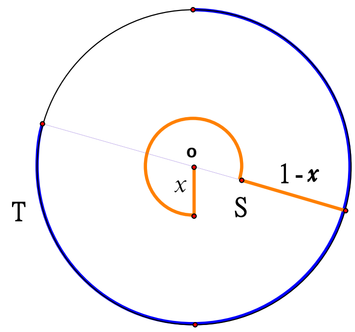
$$\frac{n+\sin2\theta-\tan\theta}{\tan\theta(n+\sin2\theta)}-\frac{n+\cos2\theta(n+\sin2\theta)}{\sin2\theta(n+\sin2\theta)}-\left(\frac{n}{n+\sin2\theta}\right)^{2k-2}\left(\frac{n^2+\sin2\theta n+n^2\cos2\theta}{(n+\sin2\theta)^2\sin2\theta}\right)<\frac{m}{n}$$

三、在圓形泳池上，設計逃脫路徑及探討在各種走法中，學生能逃脫時老師的速度最大爲學生的幾倍。

1. 在圓形游泳池中，學生繞半徑爲 x 的小圓周划行，

   $\mathbf{V_t} = n\,\mathbf{V_s}$，當 $x > \dfrac{n-\pi}{n}$ 且 $n < 1+\pi$ 才可逃脫。

2. 當 $\mathbf{V_t} = 4\ \mathbf{V_s}$, $x = \dfrac{2}{9}$,學生繞 459 度再往離心方向走即可逃脫。



陸、　結論與討論

一、在[一]這本書第 168~174 頁中有提到在六倍的情況下無法逃脫，然而我們經過研究後發現可用階梯走法來逃脫。但需限制在**老師以學生逃跑方向判斷路徑長度，而會選擇較短路徑追逐學生的條件下。**

二、在正多邊形的泳池中，發現--同一類型逃脫路徑，**若邊數較小則學生可逃脫時師生間的速度比較大。**

三、本研究因爲學生是可以在空間中任意移動，它的可能性、變化性有很多，我們只能設計一些可行的策略，並找出學生可逃脫時師生間的速度比。

四、在三角形泳池的逃脫路徑的探討中，我們發現走法還可以依實際狀況，而創造新的策略。學生要能引導老師追逐的路徑，且在不同走法中均能找到策略讓自己逃脫。

例如：當學生在頂點 F 上，而老師在對邊 AB 上時，若學生走向 D 則老師必等在最接近的點上，學生只能繞小三角形走，但老師隨時會改變方向。所以學生只要改變策略朝 EF 延長邊走，不管老師朝 A 或朝 B 都可以逃脫。

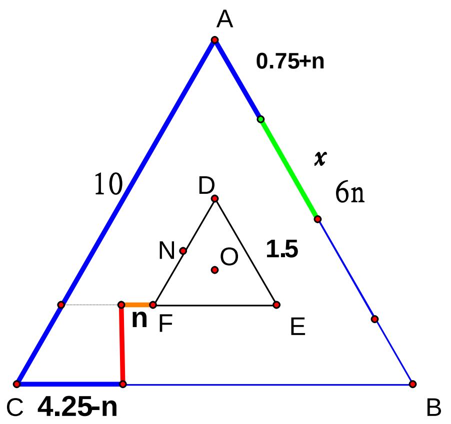
(1)老師走回 A 點:

設老師在 $\overline{AB}$ 上距離 A 點 x，

$1.5-(4.25-n)-10 = 0.75+n$

$x \geq 0.75+n$

$\because n \geq 0 \ \therefore x \geq 0.75$

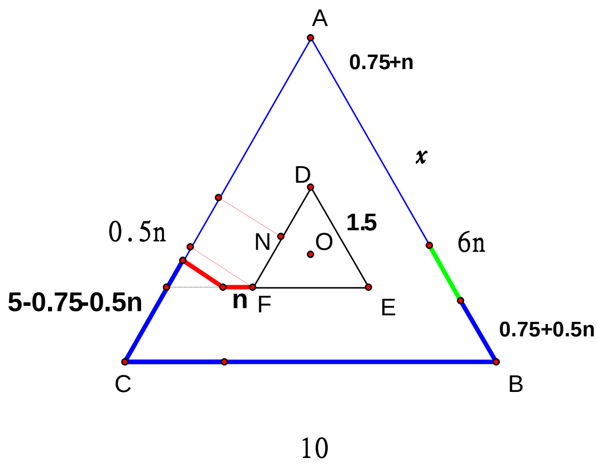


(2)老師繼續往 B

設老師在 $\overline{AB}$ 上距離 A 點 x，

$x = 10-(0.75+0.5n) = 9.25-0.5n$

$\because n \geq 0 \therefore x \leq 9.25$



柒、　延伸與發展

以這次的研究結果爲基礎，未來我們將繼續探討：在各圖形中是否可再找到更有創意的逃脫路徑及走法，並檢驗各種路徑的實際走法，並解決可能遇到的問題。

捌、　參考資料

一、陶哲軒. 陶哲軒教你聰明解數學，初版，臺北市；遠流出版社，168~174 頁，2011

二、張奠宙　戴再平.生活中的中學數學，一版，臺北市；九章出版社，176~178 頁，1997

三、數理大動腦，第 205 頁.問題 89--駕小舟逃走。

四、國中數學課本第二冊--二元一次聯立方程式、一次不等式。

五、國中數學課本第四冊--幾何圖形與三角形的基本性質、解一元二次方程式。

六、國中數學課本第五冊--圓形、幾何與證明、相似形。

【評語】030420

本研究的主題出自陶哲軒的著作中，並進行相關的推廣，考慮的層面頗為廣泛，內容亦相當有趣，處理頗為深入，數學推論相當嚴謹，而且有一般性。

本研究只從學生的觀點構思，缺乏從老師的角度做相關的考量，若能考慮在一場追逐中雙方攻防策略會動態改變，研究的範圍將可更寬廣。