中華民國第52屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030419

翻滾吧！黑白棋

學校名稱：臺中市立漢口國民中學

作者：	指導老師：
國二 吳孟芷	陳嘉祥
國二 林亭伃	陳麒任
國二 林庭瑋	

關鍵詞：旋轉對稱、數列、數學歸納法

作品名稱：翻滾吧！黑白棋

摘要

黑白棋是常見的棋類遊戲之一，遊戲的目標是讓棋盤上的棋子變成己方的顏色，棋子多的一方獲勝，遊戲過程中受到規則的影響，容易出現雙方比分的劇烈變化。我們設計的遊戲則是採用類似的勝利條件，要求攻方要將棋盤上的棋子全部都變成白子，但攻守雙方採用不同的規則，攻方可以決定要變色的棋子，守方則是用旋轉棋盤來因應，由於遊戲規則的改變，棋盤的形狀將不再受到限制，只要是旋轉對稱的圖形，都可以成爲這個遊戲的棋盤。我們試著找出，這個遊戲規則中，攻守雙方誰可以得到優勢，攻守雙方是否有一方存在必勝法則，並試著用數學的方法來解釋它。

壹、研究動機

有一天我們在網路上看到一個有趣的題目，「旋轉桌子避免燈泡全亮」，它的規則是攻方選擇想要改變的燈，守方則是旋轉桌子。我們從這個題目聯想到，如果把這個規則用在黑白棋的玩法，會得到怎樣的結果呢？於是我們由這個題目的規則，來進行黑白棋遊戲。我們首先想到的事情是，這個遊戲有沒有必勝的方法？如果有的話，是攻方必勝或者是守方必勝？這個遊戲規則是對於攻方有利，或者是對守方有利？因此我們以課本上數列的概念，再結合數學歸納法，試著找出這個題目攻方或守方必勝的情形，並推導出一般化的結果。

貳、研究目的

一、探討「n 階直線形」遊戲，攻方或守方有必勝法。
二、探討「n 階正方形」遊戲，攻方或守方有必勝法。
三、探討「n 階平方數形」遊戲，攻方或守方有必勝法。
四、探討「n 階中心正方形」遊戲，攻方或守方有必勝法。
五、探討「n 階正 m 邊形」遊戲（當 $m=2^r$ 時），攻方或守方有必勝法。
六、探討「n 階正 m 邊形」遊戲（當 $m\neq 2^r$ 時），攻方或守方有必勝法。
七、探討其他情形遊戲，如「$m\times n$ 長方形」與「$m\times n$ 矩陣形」遊戲，攻方或守方有必勝法。
八、探討「n 重旋轉圖形」遊戲，攻方或守方有必勝法。

參、研究設備及器材

黑白棋、自製棋盤、數學軟體 Geogebra。

肆、研究過程或方法

一、遊戲說明：

(一) 攻方規則：可以任選某些棋子使它們變色，黑色變成白色或白色變成黑色，可選的棋

子數目不限（也可以不選）。

(二) 守方規則：可以任意旋轉棋盤，不限制旋轉方向及角度（也可以不轉），但是旋轉後必須與原來的圖形重疊。

(三) 遊戲步驟：

1. 守方任選黑棋或白棋排成指定形狀（守方佈陣）。
2. 攻方先選定要變色的棋子。
3. 守方旋轉棋盤。
4. 棋子變色。
5. 重複步驟 2~4 繼續遊戲直到確認一方勝利。

(四) 勝利條件：若可以全變成白色，則攻方勝。若可以無限制拖延，則守方勝。

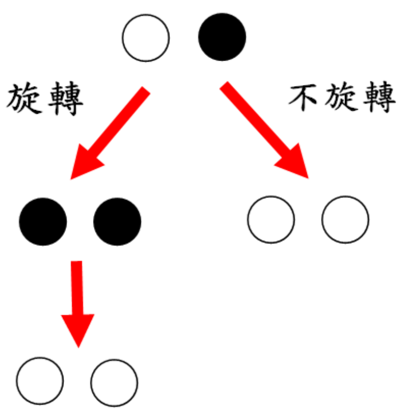
二、攻方顯然必勝情形

若棋子顏色全部都是黑色，則攻方有必勝法。因爲攻方可下指令，使全部棋子變色，此時旋轉或不旋轉都是攻方獲勝。

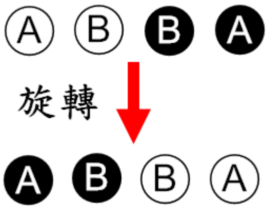
三、「*n* 階直線形」遊戲探討

(一) 2*m* 階直線形：

1. 如果我們把 *n* 個黑白棋間隔均勻地排成一列，我們把這種情形稱爲「*n* 階直線形」。
2. 首先我們從最簡單的「2 階直線形」開始。
   (1) 如果兩個棋子，皆爲白色或皆爲黑色，則攻方有必勝法。
   (2) 接著，我們討論一黑一白的情形：
   當攻方使黑棋變色時，守方如果不旋轉則攻方勝；
   如果守方旋轉則二個棋子皆變黑色，爲攻方顯然必勝情形。



3. 接著使用「4 階直線形」，可以視同分成兩組「2 階直線形」，如下圖，其中 A 爲同一組，B 爲同一組。由點對稱可知，同一組的兩個棋子爲對稱點（不考慮顏色），旋轉時只有同一組的棋子會重疊在一起，因此兩組旋轉時不會互相干擾。所以由「2 階直線形」的討論可知，攻方必勝。



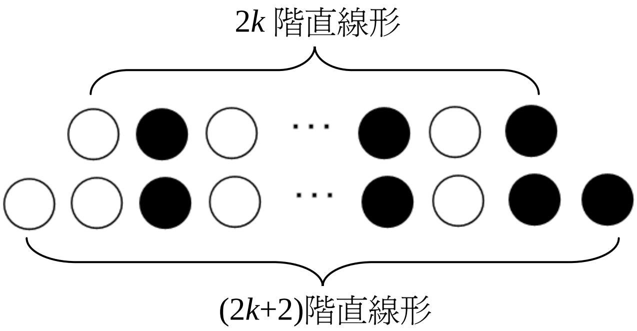
4. 綜合上面二點的討論，我們猜測「$2m$ 階直線形」，攻方有必勝法，我們接著用數學歸納法來證明。

【定理 1-1】設 m 爲正整數，當遊戲爲「$2m$ 階直線形」時，攻方有必勝法。

【證明】

(1) 當 m=1 時，遊戲爲「2 階直線形」，命題成立。

(2) 設 $m=k$ 時，命題成立，即遊戲爲「$2k$ 階直線形」時，攻方有必勝法。
當 $m=k+1$時，遊戲爲「$(2k+2)$階直線形」，可以分成一個「2 階直線形」以及一個「$2k$ 階直線形」，兩者旋轉時互不影響。其中「2 階直線形」攻方有必勝法，而由假設知，遊戲爲「$2k$ 階直線形」時，攻方有必勝法。因此兩組攻方都有必勝法，所以當 $m=k+1$時，命題也成立。



由(1)(2)及數學歸納法原理得證，當遊戲爲 $2m$ 階直線形時，攻方有必勝法。

(二) $(2m-1)$階直線形：

1. 首先，如果爲「1 階直線形」時，只有一個棋子，旋轉或不旋轉都是攻方獲勝。
2. 如果爲「3 階直線形」時，可視同分成一組「1 階直線形」及一組「2 階直線形」，且旋轉時兩組互不影響，而「1 階直線形」和「2 階直線形」攻方都有必勝法，因此「3 階直線形」攻方也有必勝法。

3. 綜合上面二點的討論，我們猜測「$(2m-1)$階直線形」，攻方有必勝法，以下用數學歸納法來證明。

【定理 1-2】設 m 爲正整數，當遊戲爲「$(2m-1)$階直線形」時，攻方有必勝法。

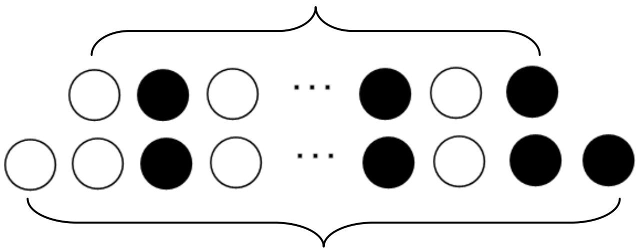
【證明】

(1) 當 m =1 時，遊戲爲「1 階直線形」，命題顯然成立。

(2) 設 $m=k$ 時，命題成立，即「$(2k-1)$階直線形」時，攻方有必勝法。

當 $m=k+1$ 時，遊戲爲「$(2k+1)$ 階直線形」，可以分成一個「2 階直線形」以及一個「$(2k-1)$ 階直線形」，且旋轉時兩組互不影響。

(2*k*-1)階直線形



(2*k*+1)階直線形

由定理 1-1 知「2 階直線形」攻方有必勝法，由假設知，「$(2k-1)$ 階直線形」攻方有必勝法。因此兩組攻方皆有必勝法，所以當 $m=k+1$ 時，命題也成立。

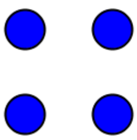
由(1)(2)及數學歸納法原理得證，當遊戲爲「$(2m-1)$ 階直線形」時，攻方有必勝法。

(三) 「*n* 階直線形」結論：「直線形」遊戲可以分類爲「2*m* 階直線形」及「$(2m-1)$ 階直線形」(即「偶數階直線形」與「奇數階直線形」)。由定理 1-1 及定理 1-2 可以得知，「2*m* 階直線形」及「$(2m-1)$ 階直線形」都是攻方獲勝，因此「*n* 階直線形」遊戲，攻方有必勝法。

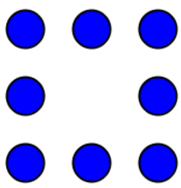
(四) 「*n* 階直線形」遊戲攻方至多兩步可以獲勝：遊戲中的每一組在旋轉時互不影響，因此取每一組遊戲攻方獲勝步驟次數的最大值，就是攻方獲勝最少的必須步驟次數（如果攻方了解必勝的方法），因此由之前的討論可知，最多兩步攻方即可獲勝。

四、「*n* 階正方形」遊戲探討

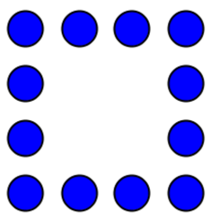
(一) 「*n* 階正方形」遊戲：如果我們把棋子排成正方形，正方形每邊有 *n* 個棋子，則我們稱爲「*n* 階正方形」遊戲。



2 階正方形



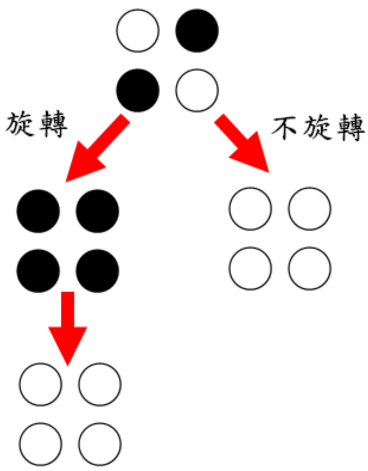
3 階正方形



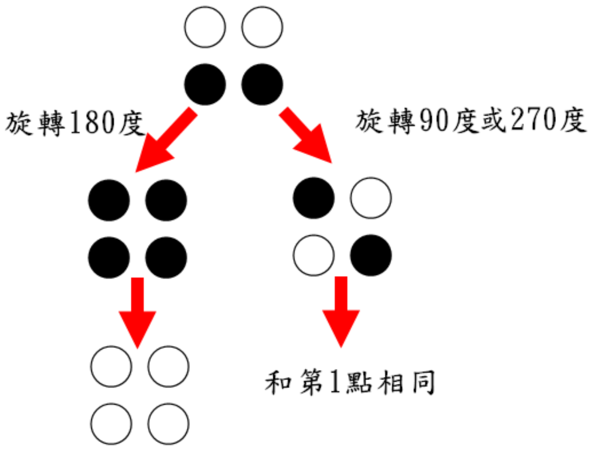
4 階正方形

(二) 2 階正方形攻方有必勝法：2 階正方形可以分成 4 種情形討論。

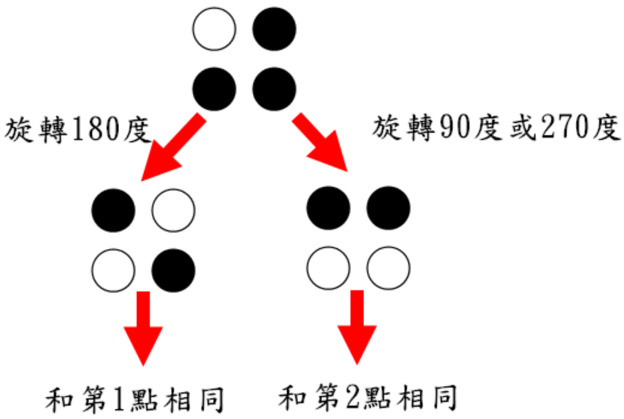
1. 2 黑 2 白的第一種情形。攻方選定對角線的 2 黑，守方旋轉後變 4 黑，攻方有必勝法。



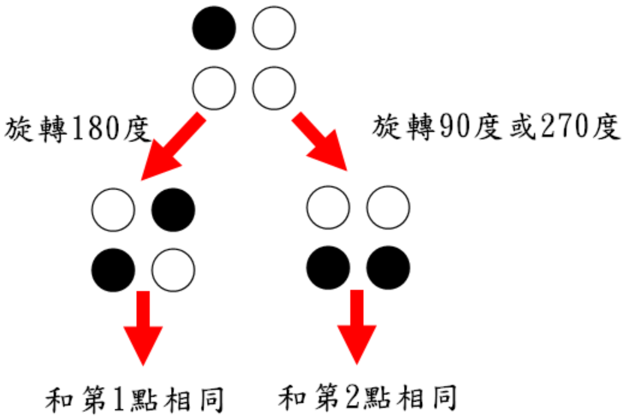
2. 2 黑 2 白的另一種情形。攻方選定 2 個黑棋，守方旋轉後可能變全黑或者和第 1 種情形相同，兩者攻方皆有必勝法。



3. 如果是 3 黑 1 白，攻方選定 3 個黑棋，守方旋轉後與第 1 點或第 2 點的情形相同，攻方皆有必勝法。



4. 如果是 1 黑 3 白，攻方選定 1 黑，旋轉後同樣與第 1 點或第 2 點的情形相同，皆攻方必勝。



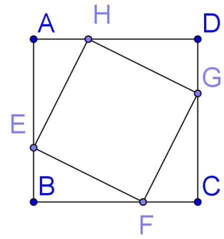
(三) 幾何證明一則。首先在這裡先引用一個幾何證明，作爲後續探討的基礎。

【定理 2-1】

如右圖，正方形 $ABCD$ 中，

若 $\overline{AE}:\overline{EB}=\overline{BF}:\overline{FC}=\overline{CG}:\overline{GD}=\overline{DH}:\overline{HA}=m:n$，

則四邊形 $EFGH$ 也是一個正方形。



【證明】

(1) 已知 $ABCD$ 爲正方形，則 $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$，且 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}$

(2) 已知 $\overline{AE}:\overline{EB}=\overline{BF}:\overline{FC}=\overline{CG}:\overline{GD}=\overline{DH}:\overline{HA}=m:n$

則 $\overline{AE}=\overline{BF}=\overline{CG}=\overline{DH}=\dfrac{m}{m+n}\overline{AB}$，$\overline{EB}=\overline{FC}=\overline{GD}=\overline{HA}=\dfrac{n}{m+n}\overline{AB}$

(3) 由(1)、(2)可知，$\triangle AEH\cong\triangle BFE\cong\triangle CGF\cong\triangle DHG$（SAS 全等）

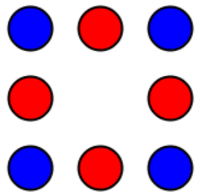
則 $\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GH}=\overline{HE}$，$\angle AEH=\angle BFE=\angle CGF=\angle DHG$

(4) $\angle HEF=180^\circ-\angle AEH-\angle BEF=180^\circ-(\angle AEH+\angle AHE)=90^\circ$

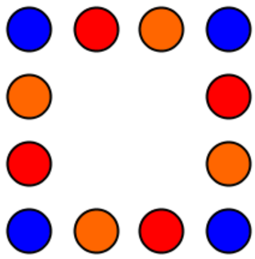
同理可證，$\angle EFG=\angle FGH=\angle GHE=90^\circ$

所以四邊形 $EFGH$ 爲正方形。

(四) 「3 階正方形」遊戲：根據定理 2-1，可以視同分成兩組「2 階正方形」遊戲，旋轉時兩組互不影響，兩組攻方都有必勝法，因此「3 階正方形」攻方有必勝法。



(五) 「4 階正方形」遊戲：根據定理 2-1，可以視同分成三組「2 階正方形」遊戲，旋轉時三組互不影響，三組攻方都有必勝法，因此「4 階正方形」遊戲攻方有必勝法。



(六) 「n 階正方形」遊戲攻方有必勝法：綜合前面幾點的討論，我們猜測「n 階正方形」遊戲攻方有必勝法，我們用數學歸納法來證明。

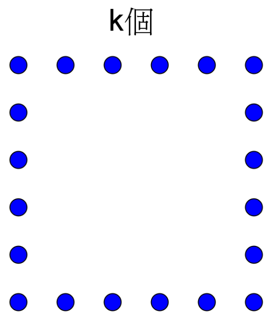
【定理 2-2】

設 n 為大於 1 的正整數，當遊戲為「n 階正方形」遊戲時，攻方有必勝法。

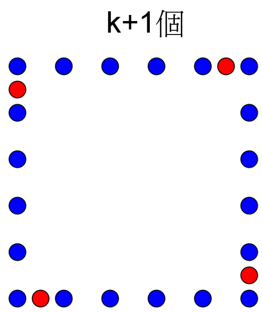
【證明】

(1) 當 $n=2$ 時，遊戲為「2 階正方形」，由(二)的討論知，命題成立。

(2) 設 $n=k$ 時，命題成立，即「k 階正方形」遊戲，攻方有必勝法。



當 $n=k+1$ 時，遊戲為「$(k+1)$ 階正方形」。如果將相鄰的某兩組「2 階正方形」的中點插入一組「2 階正方形」，「$(k+1)$ 階正方形」可以視同分成一個「2 階正方形」遊戲以及一個「k 階正方形」遊戲，且旋轉時兩組互不影響。



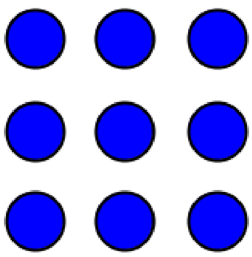
由(1)知，「2 階正方形」遊戲攻方有必勝法；由假設知，「k 階正方形」遊戲，攻方有必勝法。兩組攻方都有必勝法，所以當 $n=k+1$ 時，命題也成立。

由(1)(2)及數學歸納法原理得證，當遊戲爲「n 階正方形」時，攻方有必勝法。

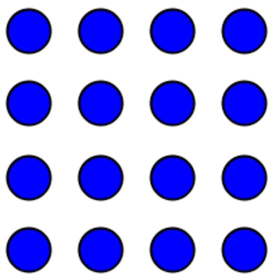
順道一提，若 $n=1$ 時只有一顆棋子，顯然攻方有必勝法。

五、「n 階平方數形」遊戲探討

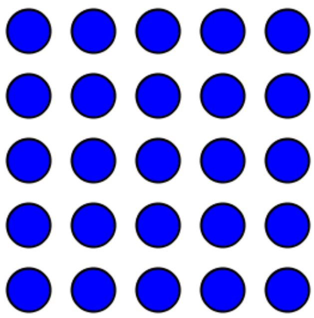
(一) 「n 階平方數形」遊戲：如果將棋子依第 n 個平方數的排列方式排列，我們稱它爲「n 階平方數形」遊戲。



3 階平方數形



4 階平方數形



5 階平方數形

(二) 「$(2m-1)$ 階平方數形」遊戲攻方有必勝法：

【定理 3-1】

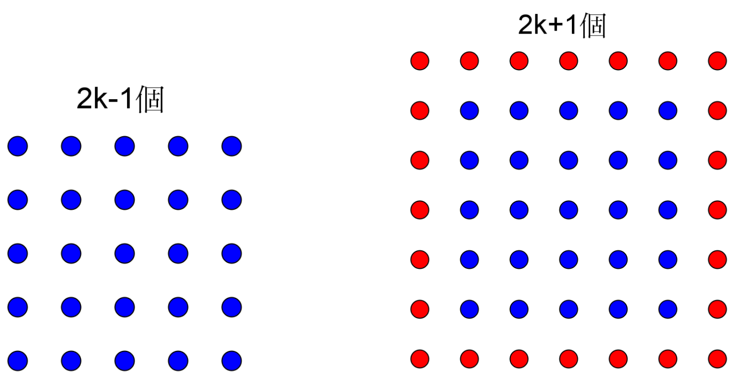
設 m 爲正整數，當遊戲爲「$(2m-1)$ 階平方數形」時，攻方有必勝法。

【證明】

(1) 當 $m=1$ 時，只有一個棋子，命題顯然成立。

(2) 設 $m=k$ 時，命題成立，即「$(2k-1)$ 階平方數形」遊戲，攻方有必勝法。

當 $m=k+1$ 時，爲「$(2k+1)$ 階平方數形」遊戲，可以分成一個「$(2k-1)$ 階平方數形」遊戲以及一個「$(2k+1)$ 階正方形」遊戲，且旋轉時兩組互不影響。



由假設知，「$(2k-1)$ 階平方數形」遊戲攻方有必勝法；由定理 2-2 知，「$(2k+1)$ 階正方形」遊戲攻方有必勝法。兩組攻方都有必勝法，所以當 $m=k+1$ 時，命題也成立。

由(1)(2)及數學歸納法原理得證，當遊戲爲「$(2m-1)$ 階平方數形」時，攻方有必勝法。

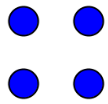
(三) 「$2m$ 階平方數形」遊戲：

【定理 3-2】

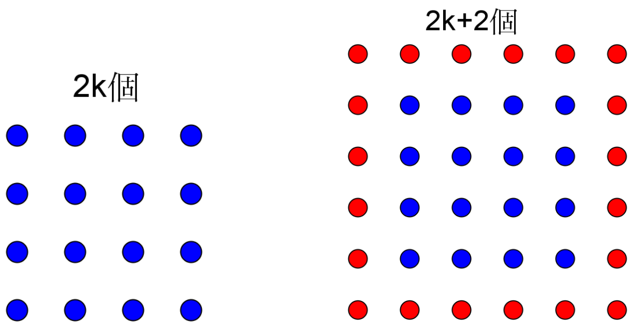
設 m 爲正整數，當遊戲爲「$2m$ 階平方數形」遊戲時，攻方有必勝法。

【證明】

(1) 當 $m=1$ 時，遊戲圖形與「2 階正方形」遊戲相同，由定理 2-2 知，命題成立。



(2) 設 $m=k$ 時，命題成立，即「$2k$ 階平方數形」遊戲，攻方有必勝法。
當 $m=k+1$時，爲「$(2k+2)$階平方數形」遊戲，可以分成一個「$2k$ 階平方數形」遊戲以及一個「$(2k+2)$階正方形」遊戲，且旋轉時兩組互不影響。

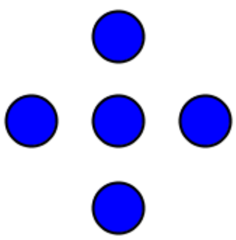


由假設知，「$2k$ 階平方數形」遊戲攻方有必勝法；由定理 2-2 知，「$(2k+2)$階正方形」遊戲攻方有必勝法。兩組攻方都有必勝法，所以當 $m=k+1$時，命題也成立。
由(1)(2)及數學歸納法原理得證，當遊戲爲「$2m$ 階平方數形」時，攻方有必勝法。

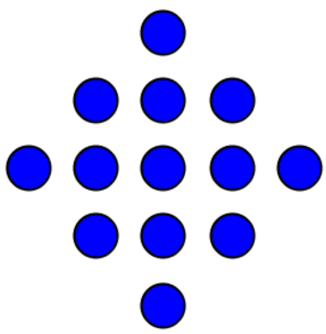
(四) 「n 階平方數形」攻方有必勝法：「平方數形」遊戲可以分類爲「$2m$ 階平方數形」及「$(2m-1)$階平方數形」(即「偶數階平方數形」與「奇數階平方數形」)。由定理 3-1 和定理 3-2 知，「$2m$ 階平方數形」及「$(2m-1)$階平方數形」都是由攻方獲勝，因此「n 階平方數形」遊戲，攻方有必勝法。

六、「n 階中心正方形」遊戲探討

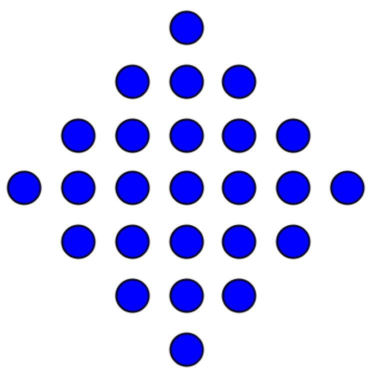
(一) 「n 階中心正方形」遊戲：如果將棋子依第 n 個中心正方形數的方式排列，我們稱爲「n 階中心正方形」遊戲。



2 階中心正方形



3 階中心正方形



4 階中心正方形

(二) 「n 階中心正方形」遊戲攻方有必勝法。

【定理 4】

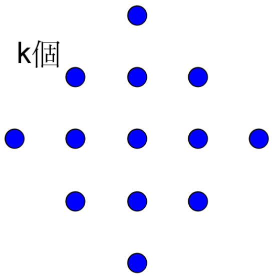
設 n 爲正整數，當遊戲爲「n 階中心正方形」遊戲時，攻方有必勝法。

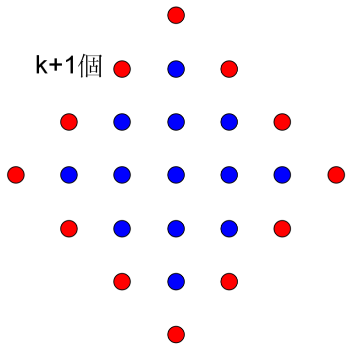
【證明】

(1) 當 $n=1$ 時，只有一個棋子，命題顯然成立。

(2) 設 $n=k$ 時，命題成立，即「k 階中心正方形」遊戲，攻方有必勝法。

當 $n=k+1$ 時，爲「$(k+1)$ 階中心正方形」遊戲，可以分成一個「k 階中心正方形」遊戲以及一個「$(k+1)$ 階正方形」遊戲，且旋轉時兩組互不影響。





由假設知，「k 階中心正方形」遊戲攻方有必勝法；由定理 2-2 知，「$(k+1)$ 階正方形」遊戲，攻方有必勝法。所以兩組攻方都有必勝法，所以當 $n=k+1$ 時，命題也成立。

由(1)(2)及數學歸納法原理得證，當遊戲爲「n 階中心正方形」遊戲時，攻方有必勝法。

七、「n 階正 m 邊形」遊戲探討（當 $m=2^r$ 時）

(一) 將 m 個棋子在圓上做環狀排列。如果 $m=n$ 攻方有必勝法，則當 $m=2n$，且點對稱的兩個棋子同色時，攻方也有必勝法。

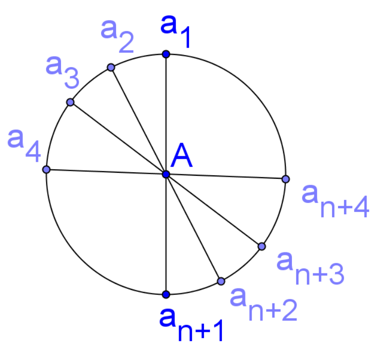
【定理 5-1】

設 n 爲正整數，將 m 個棋子在圓上做環狀排列，如果 $m=n$ 攻方有必勝法，則當 $m=2n$，且點對稱的兩個棋子同色時，攻方也有必勝法。

【證明】

令白棋爲 0，黑棋爲 1。

因爲對角線的兩個棋子同色，所以 $a_i=a_{n+i}$，$i=1,2,3,\cdots,n$



若同時使點對稱的兩個棋子同時變色，則 $a_i = a_{n+i}$ 同時等於 0 或 1。

令 $b_i = a_i = a_{n+i}$，則可視爲 n 個棋子在圓上做環狀排列。

因爲這 n 個棋子攻方有必勝法，所以這 n 個棋子可以全部變成白色，也就是 $b_n = 0$。

因此 $a_i = a_{n+i} = 0$，全部的棋子都變成白色，即攻方有必勝法。

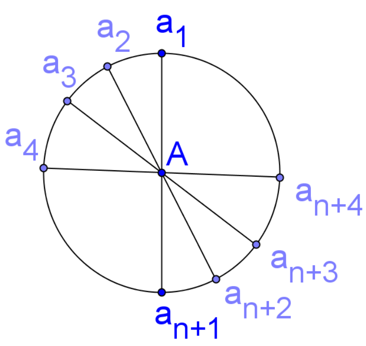
(二) 將 m 個棋子在圓上做環狀排列，如果 $m = n$ 時，攻方有必勝法，則當 $m = 2n$，可以使點對稱的兩個棋子同色。

【定理 5-2】

設 n 爲正整數，將 m 個棋子在圓上做環狀排列，如果 $m = n$ 時，攻方有必勝法，則當 $m = 2n$，可以使每一組點對稱的兩個棋子同色。

【證明】

令白棋爲 0，黑棋爲 1。a_i 與 a_{n+i} 爲點對稱。



令 $\begin{cases} b_i = 0, & 若 a_i = a_{n+i} \\ b_i = 1, & 若 a_i \neq a_{n+i} \end{cases}$，則可視爲 n 個棋子在圓上做環狀排列。

因爲這 n 個棋子攻方有必勝法，所以這 n 個棋子可以全部變成白色，也就是 $b_n = 0$。

因此 $a_i = a_{n+i}$，即每一組點對稱的棋子同色。

(三) 當 $m = 2^r$ 時，將 m 個棋子在圓上做環狀排列，則攻方有必勝法。

【定理 5-3】

設 r 爲正整數，將 $m = 2^r$ 個棋子在圓上做環狀排列，則攻方有必勝法。

【證明】

(1) 當 $r = 1$ 時，$m = 2$，由定理 1-1 知命題成立。

(2) 設 $r = k$ 時，命題成立，即 $m = 2^k$ 個棋子在圓上做環狀排列，可使 2^k 個棋子都變成白色，攻方有必勝法。

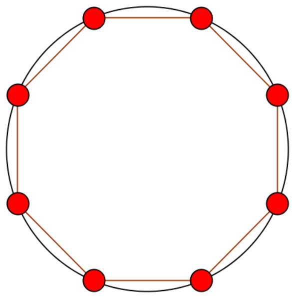
當 $r = k+1$ 時，$m = 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$ 個棋子，由定理 5-2，可使所有點對稱的棋子變爲同色，再由定理 5-1，攻方有必勝法。

所以當 $r = k+1$ 時，命題也成立。

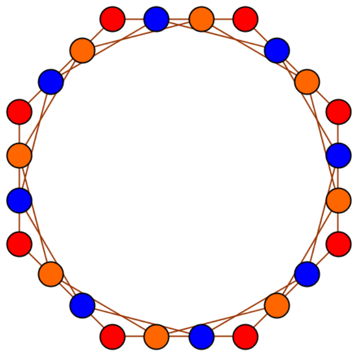
由(1)(2)及數學歸納法原理得證，將 $m = 2^r$ 個棋子在圓上做環狀排列，則攻方有必勝法。

(四) 如果 $m=2^r$ ，則「n 階正 m 邊形」遊戲攻方有必勝法。

1. 由定理 5-3 知，將 $m=2^r$ 個棋子在圓上做環狀排列，則攻方有必勝法。如果使這 m 個棋子之間的間隔相等，則這 m 個棋子可形成「2 階正 m 邊形」遊戲，$m=2^r$ ，此時，攻方有必勝法。



2. 如果「n 階正 m 邊形」遊戲每邊有 n 個棋子，則我們可以將它們分成 $(n-1)$ 組「2 階正 m 邊形」遊戲，每組旋轉時彼此互不影響，且每組皆攻方必勝，所以當 $m=2^r$ 時，「n 階正 m 邊形」遊戲攻方有必勝法。



(五) 當 $m=2^r$ 時，將 m 個棋子在圓上做環狀排列，則攻方至多 2^r 步可以獲勝。

1. 如果我們定義 $M(r)$ 是 2 階正 m 邊形，當 $m=2^r$ 時，攻方獲勝最少的必須步驟次數，由前面的討論可以得知，$M(1)=2$ 。
2. 當 $m=2^r$ 時，攻方的必勝法是先將點對稱的棋子變成同色，再將同色的棋子全部變成白色，而這兩個步驟次數都等於當 $m=2^{r-1}$ 時的獲勝步驟次數，也就是
$$M(r)=2M(r-1) \text{。}$$
3. 利用遞迴數列，可以求出 $M(r)=2^r$ 。
4. 我們利用數學歸納法來證明：

【定理 5-4】

當 $m=2^r$ 時，將 m 個棋子在圓上做環狀排列，則 $M(r)=2^r$ 。

【證明】

(1) 當 $r=1$ 時，圖形為「2 階直線形」遊戲，$M(1)=2$ ，原式成立。

(2) 設 $r=k$ 時，原式成立，即 $M(k)=2^k$ 。

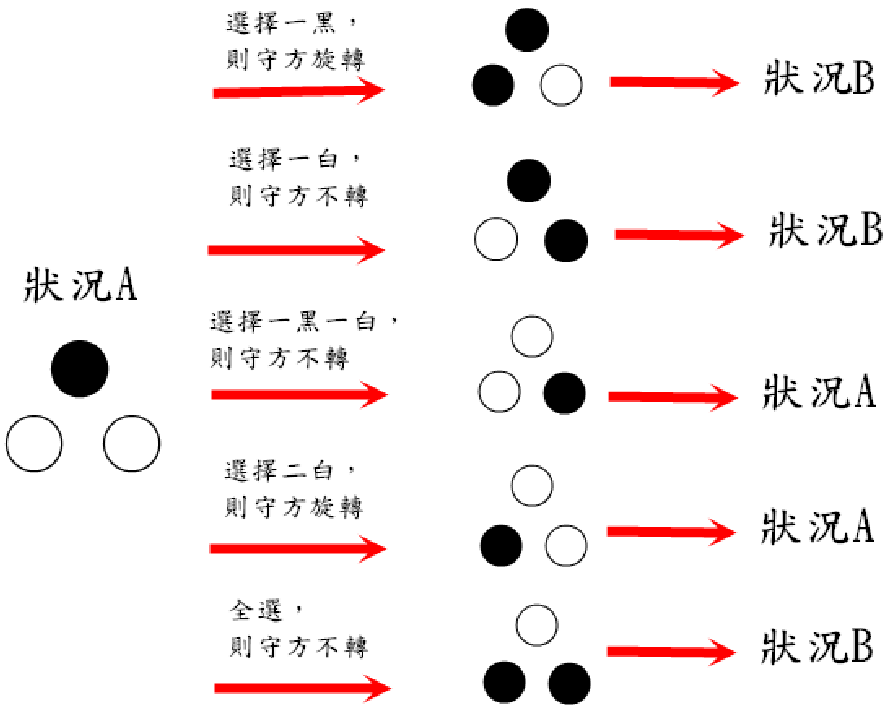
當 $r=k+1$ 時，$M(k+1)=2M(k)=2\cdot 2^k=2^{k+1}$

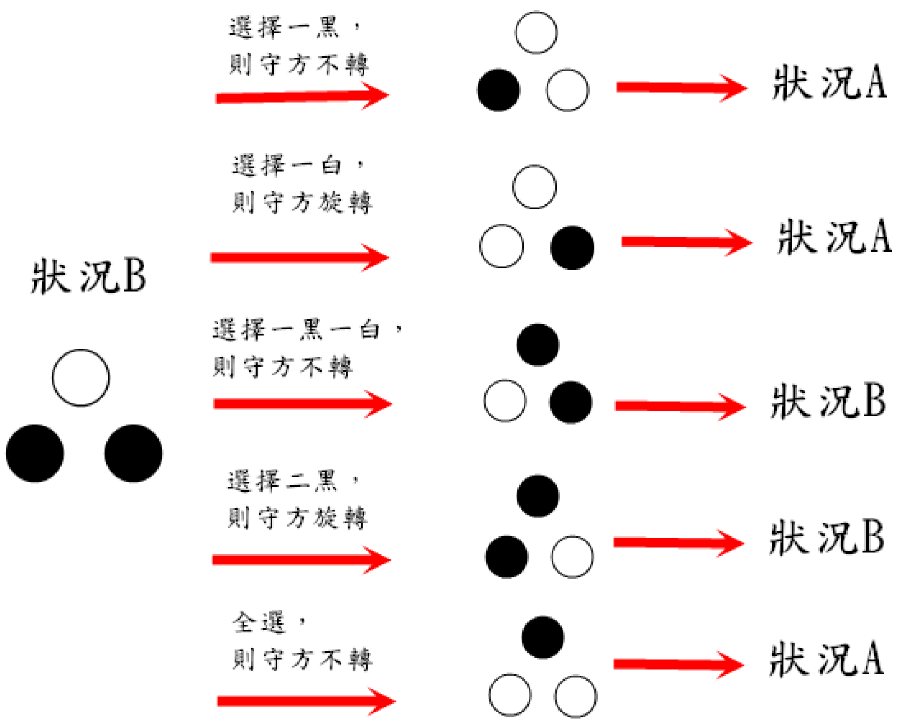
所以當 $r=k+1$ 時，原式也成立。

由(1) (2) 及數學歸納法原理得證，當 $m=2^r$ 時，將 m 個棋子在圓上做環狀排列，則 $M(r)=2^r$ 。

八、「*n* 階正三角形」遊戲探討

在這個規則下的遊戲，攻方並不總是有必勝法的，2 階正三角形就是一個簡單的例子。如果三個棋子顏色不完全相同，則守方可透過巧妙的旋轉（當然也可以不旋轉），使盤面只會出現 A 和 B 兩種情形，可無限制拖延遊戲，攻方無法取勝（即守方勝）。





九、「n 階正奇數邊形」遊戲探討

(一) 一則關於奇數的證明。

1. 環狀排列：將事物沿著一圓周來作排列，只考慮事物的相對位置，而不計較各物件所在的實際位置。此排列可旋轉，但不可翻轉。
2. 如果用 0 和 1 兩個數字進行環狀排列，數字總共有奇數個，可以發現一定至少有連續兩個數字相同，我們利用反證法來證明。

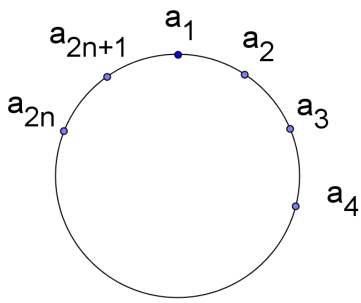
【定理 6】

設 n 為正整數，如果用 0 和 1 兩個數字進行環狀排列，數字總共有 $(2n+1)$ 個（即奇數個），一定至少有連續兩個數字相同。

【證明】

首先我們假設不會有連續兩個數字相同，

(1) 如果 $a_1=1$，由假設知：$a_2=0$，$a_3=1$，$a_4=0$，…，$a_{2n}=0$，$a_{2n+1}=1$，
而 a_{2n+1} 和 a_1 相鄰，且皆為 1，與假設不合。



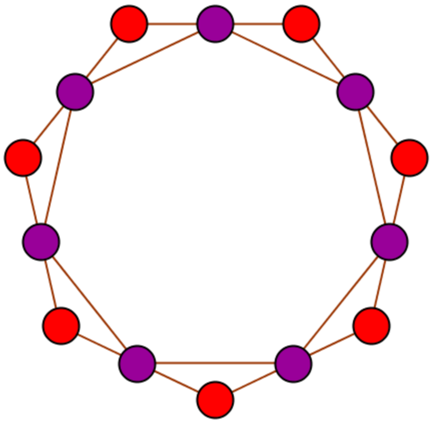
(2) 如果 $a_1=0$，由假設知：$a_2=1$，$a_3=0$，$a_4=1$，…，$a_{2n}=1$，$a_{2n+1}=0$，
而 a_{2n+1} 和 a_1 相鄰，且皆為 0，與假設不合。

由(1)(2)知假設錯誤，所以如果用 0 和 1 兩個數字進行環狀排列，數字總共有 $(2n+1)$ 個，一定至少有連續兩個數字相同。

(二) 「n 階正奇數邊形」遊戲，防守方有必勝法。

1. 「n 階正多邊形」遊戲：如果我們把棋子排成正多邊形，每邊有 n 個棋子，我們稱它為「n 階正多邊形」遊戲。
2. 如果令棋子變色為 1，不變色為 0，因為所有的正多邊形都恰有一個外接圓，所以「2 階正奇數邊形」遊戲的頂點，可視為奇數個點在圓上進行環狀排列，由定理 6 可知，必有連續兩個頂點攻方的指令相同（連續兩個 0 或連續兩個 1）。
3. 如果將一黑一白的棋子同時變色或同時不變色，都仍然是一黑一白。
4. 「n 階正奇數邊形」遊戲如果只選取頂點，則這些頂點的圖形可視為「2 階正奇數邊形」遊戲，則由第 2 點的討論，必有連續兩個頂點攻方的指令相同（連續兩個 0 或連續兩個 1）。
5. 防守方只要將「2 階正奇數邊形」遊戲中，連續兩個頂點的棋子分別放入黑色與白色，防守時將其中一對一黑一白的棋子旋轉到指令相同的連續位置中，就可以確保遊戲可無限制拖延，即「2 階正奇數邊形」遊戲，守方有必勝法。

6. 只要「n 階正奇數邊形」遊戲中，頂點的棋子不全爲同色，則至少有一組「2 階正奇數邊形」遊戲攻方無法獲勝，所以「n 階正奇數邊形」遊戲，守方有必勝法。
7. 事實上，「n 階正奇數邊形」遊戲可以視爲 $(n-1)$ 組「2 階正奇數邊形」遊戲，只要至少其中一組的棋子不全爲同色，則守方有必勝法。



十、「n 階正 m 邊形」遊戲探討（當 $m \neq 2^r$ 時）

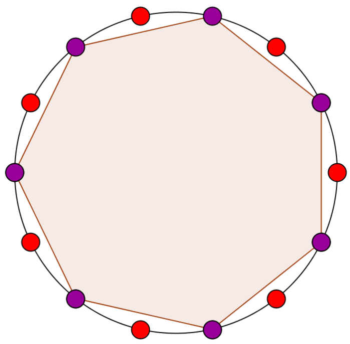
(一) 若 m 爲奇數時。情況與第九點相同，守方有必勝法。

(二) 若 m 不爲奇數且 $m \neq 2^r$ 時。

1. 由算術基本定理可得知，在不考慮順序下，任意正整數皆可表爲唯一的正整數的乘積，也就是標準分解式。

   因此可令 $m = 2^a \times p_1^{r_1} \times p_2^{r_2} \times p_3^{r_3} \times \cdots \times p_k^{r_k}$ ，其中 p_i 爲大於 2 的質數，r_i 爲正整數或 0 且不全爲 0，a 爲正整數。

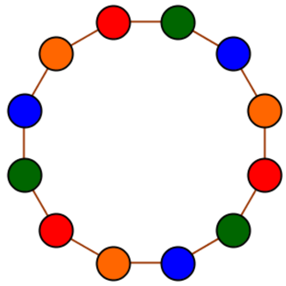
   由奇偶性質得知，$m = 2^a \cdot k$ ，其中 k 爲大於 1 的奇數。
2. 「2 階正 m 邊形」(當 $m \neq 2^r$ 時) 的頂點可視爲 m 個點在圓上進行環狀排列，而這 m 個頂點可以分成 2^a 組等間隔的 k 個頂點。守方選定其中一組等間隔的 k 個頂點，使這些頂點的棋子不全爲同色，因爲 k 爲奇數，則由第九點的討論得知，這 k 個棋子可無限制拖延，所以「2 階正 m 邊形」遊戲（當 $m \neq 2^r$ 時)，守方有必勝法。



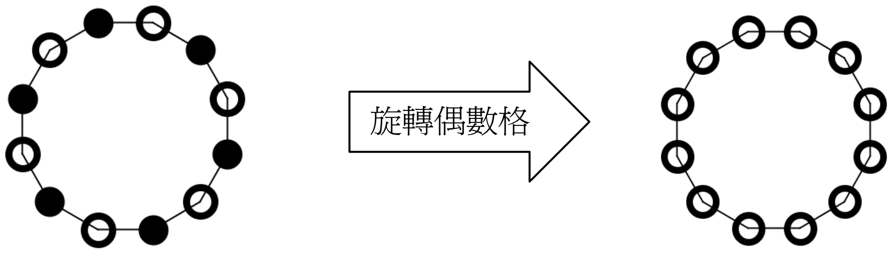
3. 守方應避免的失誤：由第 2 點的討論知，只要其中一組等間隔的 k 個頂點不全爲同色（可以無視其他組)，則守方有必勝法。但是如果守方在一開始佈陣的時候，使每一組

的棋子皆為同色（黑白皆可），則反而攻方會有必勝法。

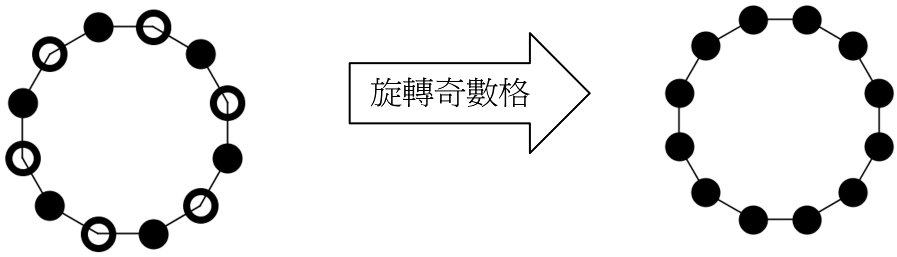
舉例來說，2 階正 12 邊形可以分成 4 組等間隔的頂點，每組有 3 個頂點。



(1) 如果 4 組分別為全黑、全白、全黑、全白，攻方黑色棋子全選，則攻方獲勝。

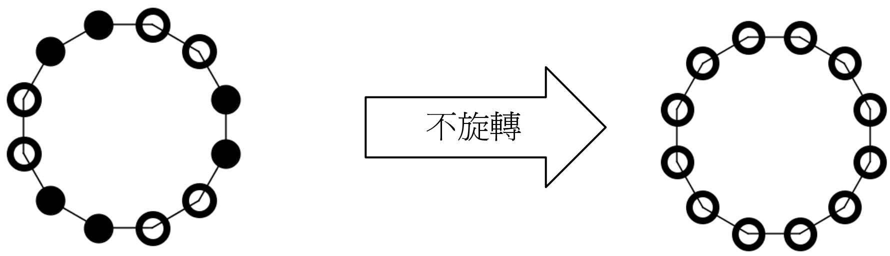


攻方勝

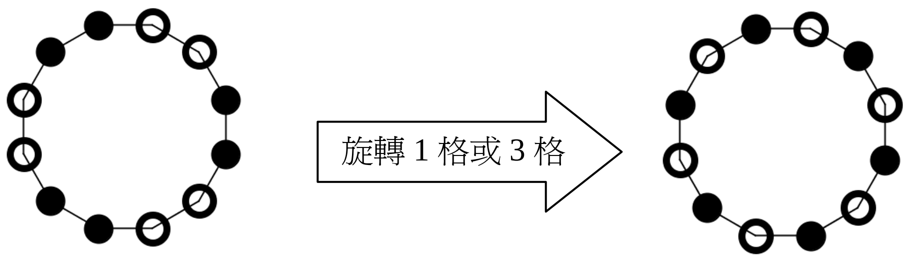


攻方必勝情形

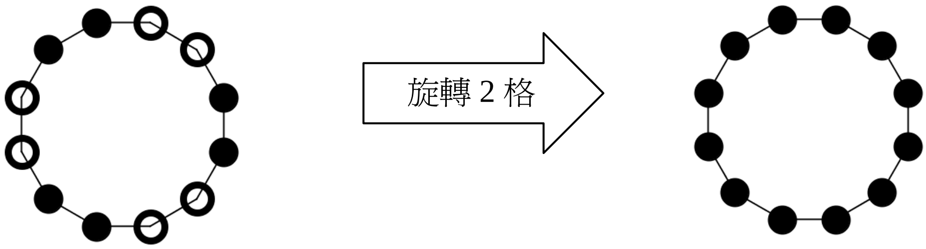
(2) 如果 4 組分別為 2 組全黑、2 組全白，且同色相鄰，如下圖。攻方全選黑棋，則攻方勝。



攻方勝

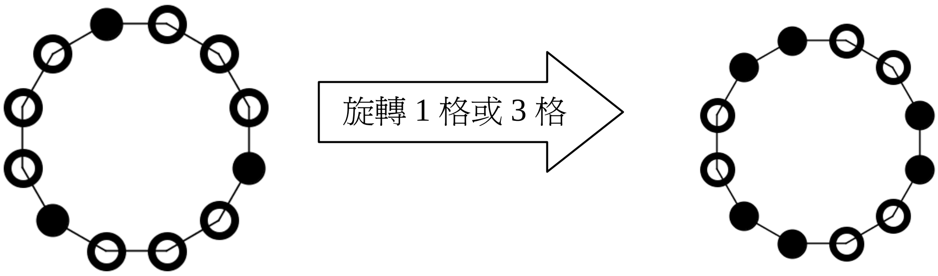


和(1)同，攻方勝

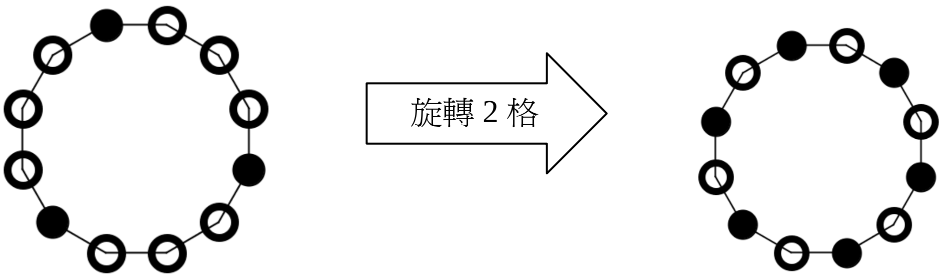


攻方必勝情形

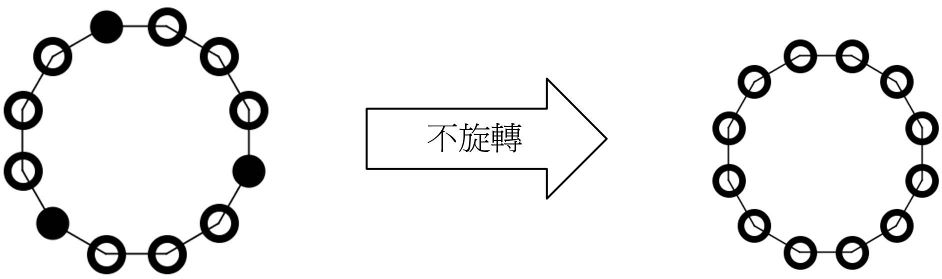
(3) 如果 4 組分別為 1 組全黑、3 組全白，攻方全選黑棋，則攻方勝。



和(2)同，攻方勝

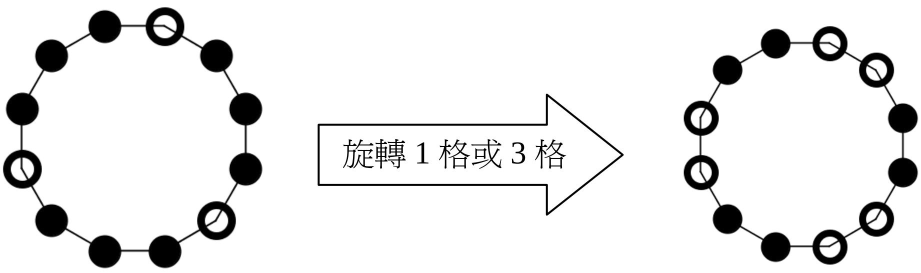


和(1)同，攻方勝



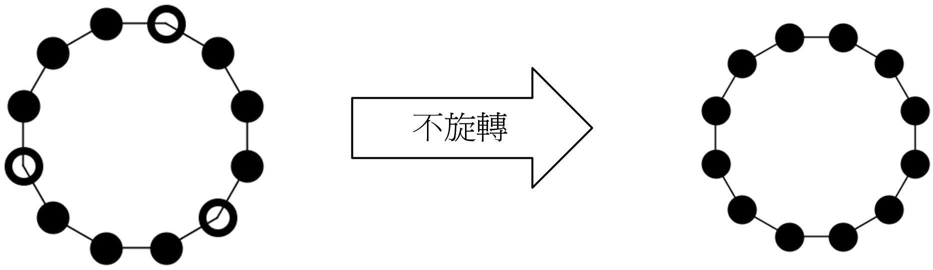
攻方勝

(4) 如果 4 組分別為 1 組全白、3 組全黑，攻方全選白棋，則攻方勝。



和(2)同，攻方勝

和(1)同，攻方勝

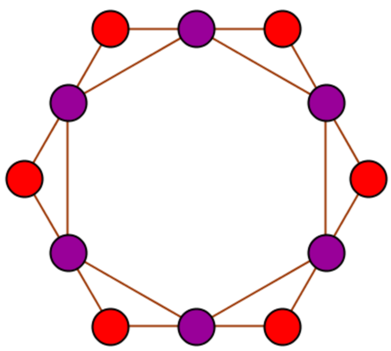


攻方必勝情形

(5) 簡易判定法：

如果 $m=2^a\cdot k$ ，則可以分成 2^a 組 k 個等間隔的頂點。如果每組都是同色，攻方對同組的指令爲同時變色或不變色，則遊戲將簡化爲「2^a 個棋子在圓上做環狀排列」，由定理 5-3 知，此時攻方獲勝，守方佈陣發生失誤。

4. 「n 階正 m 邊形」($m\neq 2^r$) 遊戲可以分成 $(n-1)$ 組「2 階正 m 邊形」，只要至少有一組「2 階正 m 邊形」遊戲攻方無法獲勝，則「n 階正 m 邊形」遊戲，守方有必勝法。而由 2.的討論得知，「2 階正 m 邊形」遊戲 ($m\neq 2^r$) 守方有必勝法，因此「n 階正 m 邊形」遊戲，守方有必勝法。

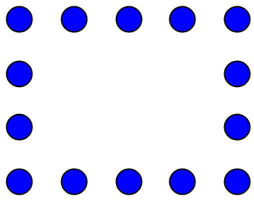


5. 所以若 m 不爲奇數且 $m\neq 2^r$ ，則「n 階正 m 邊形」遊戲守方有必勝法。

十一、其他情形討論：

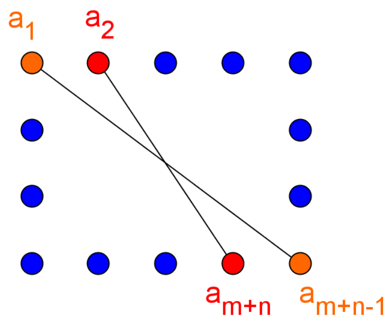
(一) 「$m\times n$ 長方形」遊戲，攻方有必勝法。

1. 如果將棋子排成長方形，且長有 m 個棋子，寬有 n 個棋子，其中 $m\neq n$，則稱它爲「$m\times n$ 長方形」遊戲。



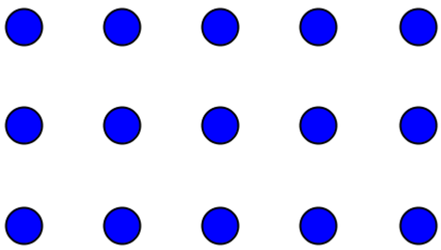
5×4 長方形

2. 在「$m \times n$ 長方形」遊戲中，將棋子依序記爲 a_1、a_2、a_3、…，則 a_i 和 $a_{m+n+i-2}$ 爲對稱點，其中 i 爲正整數，可分爲 $(m+n-2)$ 組「2 階直線形」遊戲，由定理 1-1 知，攻方有必勝法。



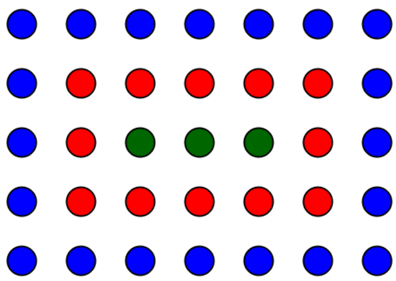
(二) 「$m \times n$ 矩陣形」遊戲，攻方有必勝法。

1. 如果將棋子排列成 m 列 n 行，其中 $m \neq n$，則稱爲「$m \times n$ 矩陣形」遊戲。



3×5 矩陣形

2. 「$m \times n$ 矩陣形」遊戲可以視爲多組長方形遊戲，且旋轉時互不影響，由長方形遊戲的結論知，「$m \times n$ 矩陣形」遊戲，攻方有必勝法。



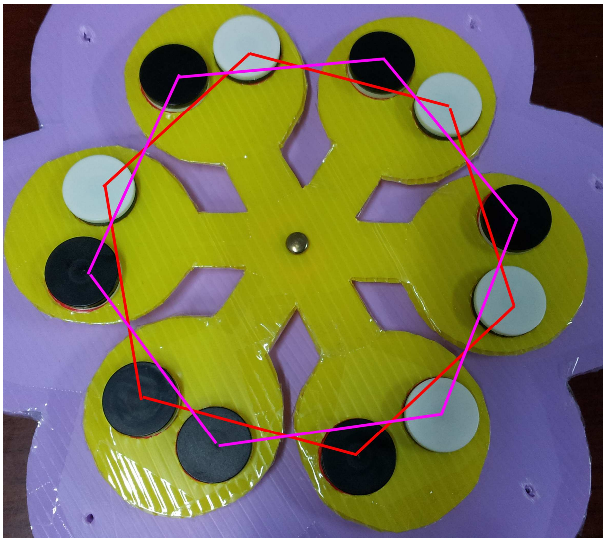
十二、旋轉對稱圖形：

根據以上的討論，我們發現，只要是旋轉對稱的圖形，都可以用來當作遊戲的棋盤。此時攻方或守方是否有必勝法與棋子的總數目無關，而是與圖形的結構有關。

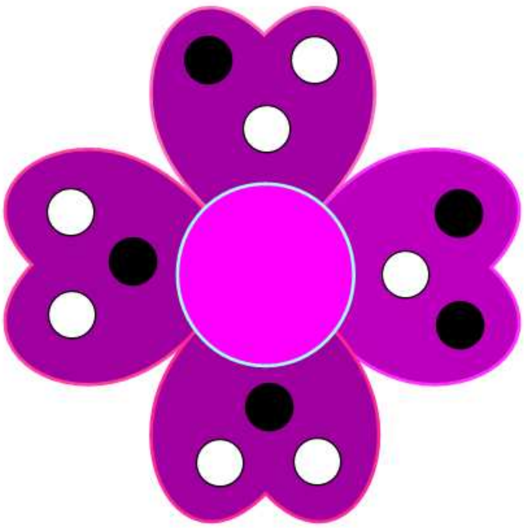
(一) n 重旋轉對稱圖形：若圖形在旋轉 360°後能與原來圖形重合 n 次，我們稱為 n 重旋轉對稱圖形。

(二) 由定義知，一個正 n 邊形是 n 重旋轉對稱圖形。

(三) 以這個自製棋盤爲例，圖形爲一個 6 重旋轉對稱圖形，可將棋子分成 2 組「2 階正六邊形」遊戲，所以守方有必勝法。

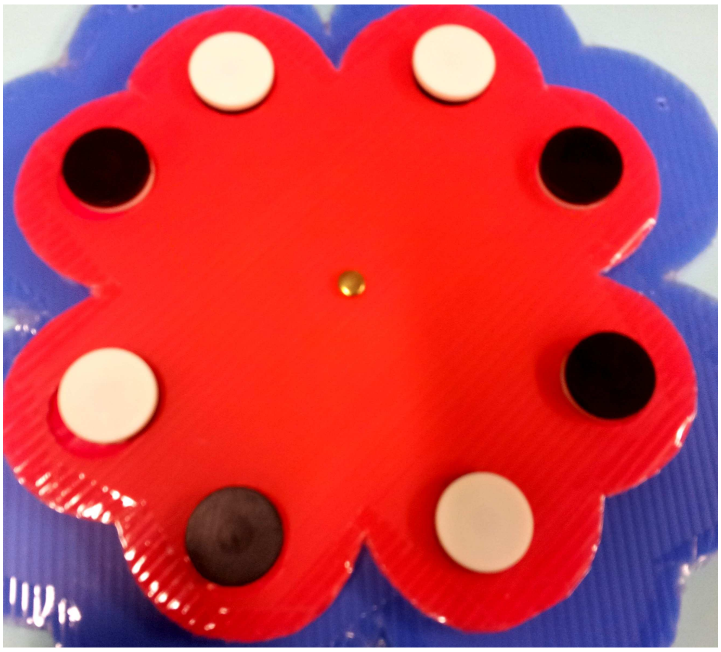


以下面這個圖形來說，圖形爲一個 4 重旋轉圖形，可分爲 3 組「2 階正方形」遊戲，攻方有必勝法。



以這個自製棋盤爲例，圖形爲一個 5 重旋轉對稱圖形，棋子排列成 3 組「2 階正五邊形」遊戲，所以守方有必勝法。

以這個自製棋盤爲例，圖形爲一個 4 重旋轉對稱圖形，可將棋子分成 2 組「2 階正四邊形」遊戲，所以攻方有必勝法。

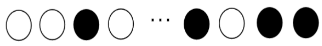
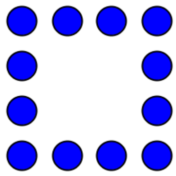
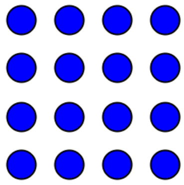
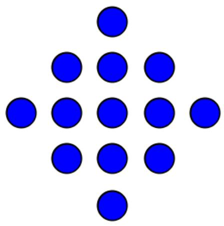
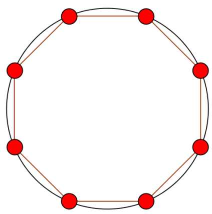
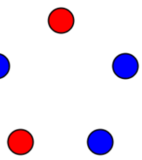
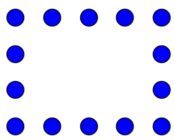
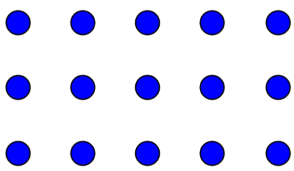


(四) 我們由以上的例子發現，m 重旋轉對稱圖形可以分解成若干組「n 階正 m 邊形」遊戲。

(五) 由第七點的討論，我們可以得知，如果棋盤的圖形是 m 重旋轉對稱圖形（ $m=2^n$ ），則攻方有必勝法。

(六) 由第十點的討論，我們可以得知，如果棋盤的圖形是 m 重旋轉對稱圖形（ $m\neq 2^n$ ），則守方有必勝法。

伍、研究結果

類型	圖形	結構	勝利者
n 階直線形		2 重旋轉對稱圖形	攻方
n 階正方形		4 重旋轉對稱圖形	攻方
n 階平方數形		4 重旋轉對稱圖形	攻方
n 階中心正方形		4 重旋轉對稱圖形	攻方
n 階正 m 邊形（$m=2^r$）		2^r 重旋轉對稱圖形	攻方
n 階正 m 邊形（$m\neq 2^r$）		m 重旋轉對稱圖形 （$m\neq 2^r$）	守方
mxn 長方形		2 重旋轉對稱圖形	攻方
mxn 矩陣形		2 重旋轉對稱圖形	攻方

陸、討論

我們原來參考的題目「旋轉桌子避免燈泡全亮」，所探討的是大臣人數與旋轉桌子後的結果，因為桌子為圓桌，因此這個題目研究的重點是在「個數」。我們將這個想法用在黑白棋的遊戲規則上，由於棋盤的形狀變得自由了，研究的結果就延伸到了「n 階」、「有形數」，進而延伸到了「n 重旋轉對稱圖形」，也就是變成了探討「結構」的問題，「個數」不再是影響遊戲的主要因素了。最後我們採用了「數學歸納法」為證明的主要方法，使這個遊戲變成比較容易研究的形式。

柒、結論

我們剛開始進行遊戲時，認為這是一個對攻方有利的遊戲，因為攻方可以任選變色的棋子，但守方只能在平面上旋轉棋盤，甚至不能翻轉棋盤。但是我們在過程中發現，有些情況是守方有必勝法，在我們找出規律後發現，其實大部份的情形都是守方有利。例如將 m 個棋子在圓上做環狀排列，攻方有利的情況只有 $m=2^r$，其餘都是守方有利，如果 m 是 32 以內的正整數，那攻方獲勝的情況只有 6 種而已，而守方獲勝的情形則是 26 種。另外，我們也對遊戲攻方獲勝的情況進行了討論，如果在對守方有利的圖形，而攻方玩家不肯認輸的情況下，可以加入遊戲步驟的次數限制，避免進行永無止盡的遊戲。

捌、參考資料

1. 等差數列與等差級數。國中數學第四冊(2 下)第一章。康軒文教。
2. 垂直平分與線對稱圖形。國中數學第四冊(2 下)第二章。康軒文教。
2. 趣題：旋轉桌子避免燈泡全亮。matrix67.com。取自
   http://www.matrix67.com/blog/archives/4631
3. 黑白棋。維基百科。取自
   http://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%BB%91%E7%99%BD%E6%A3%8B
4. 平方數。維基百科。取自
   http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%B9%B3%E6%96%B9%E6%95%B8
5. 中心正方形數。維基百科。取自
   http://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%AD%E5%BF%83%E6%AD%A3%E6%96%B9%E5%BD%A2%E6%95%B8
6. 算術基本定理。維基百科。取自
   http://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%AE%97%E8%A1%93%E5%9F%BA%E6%9C%AC%E5%AE%9A%E7%90%86

【評語】030419

將黑白棋翻轉的遊戲賦予新玩法，然後研究其必勝策略。由於棋盤被限制為所謂的對稱型態,使得困難度降低許多,在數學方面，一般性的證明主要是數學歸納法，內容的豐富性應再加強。