中華民國第52屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030418

莫比烏斯環和相關紙環

學校名稱：新北市立丹鳳高級中學(附設國中)

作者：	指導老師：
國二 陳君儀	張宗雄
國二 莊英鼎	李立儀
國二 吳彥霖	

關鍵詞：莫比烏斯環

摘要

本研究主要是討論莫比烏斯環（Mobius strip）分割後紙環的改變和變形紙環分割後紙環的相關比較，包含它的紙環個數、長度、旋轉角度、紙環間的交點個數、纏繞結構與旋轉的方向(順時針或逆時針)，並在動手分割莫比烏斯環及其變形紙環後，整理出其規則以及相關公式。

壹、研究動機

某一在數學社上課時，我們的數學老師跟我們簡略的介紹莫比烏斯環，沒想到卻引發我們的好奇心，發現它竟真的跟老師說的一模一樣:只有一個面!多神奇的紙環啊！於是我們央求老師多跟我們說些有關莫比烏斯環的知識，老師便提議我們做以莫比烏斯環爲主題的科展。我們認爲做科展不僅能充實自己，也能幫助我們對莫比烏斯環有更進一步的了解，更可培養自己與朋友們間的團隊默契與合作精神，實爲一舉數得。

貳、研究目的

一、討論莫比烏斯環的分割方法，並對它作$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{7}$ 和$\frac{1}{8}$分割，再對分割後的長度、旋轉角度、面的變化、纏繞的結構和交點個數作分析比較，並找出交點個數的計算公式。

二、歸納整理莫比烏斯環的延伸和變形。製作了 180°、360°、540°、720°和 900°旋轉紙環，並對其作$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$分割，分析比較分割後紙環的長度、旋轉角度、面的變化、纏繞的結構和交點個數。

参、研究設備

一、Microsoft Office Word 2007、小畫家

二、筆、筆記本、紙帶、剪刀、雙面膠（或膠水）、紙、彩色筆、電腦、照相機、尺

肆、研究過程與方法

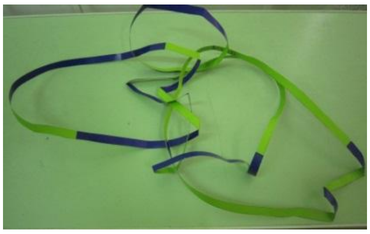
為了要研究莫比烏斯環分割後紙環的改變和比較變形紙環分割後紙環的相關性質，我們分割紙環並記錄其過程與結果。研究主題與方法如下：

一、探討莫比烏斯環分割後的特性

我們製作 180°旋轉的紙環(莫比烏斯環)，並分割成$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{7}$ 和 $\frac{1}{8}$，除了討論莫比烏斯環分割的方法，也研究分割後的長度、寬度、旋轉角度、面的變化、纏繞的結構、變化和旋轉的方向，並記錄結果。

(一)莫比烏斯環分割圖片(表一)

表一　莫比烏斯環$\frac{1}{n}$分割圖片

（未分割）	$\frac{1}{2}$分割	$\frac{1}{3}$分割
		
$\frac{1}{4}$分割	$\frac{1}{5}$分割	$\frac{1}{6}$分割
		
$\frac{1}{7}$分割	$\frac{1}{8}$分割	
		

(二)探討莫比烏斯環剪開的方式

從等分線按照順序，依次剪開，觀察剪開的順序和環的變化。我們先定義分割後長度爲原紙環長度兩倍的紙環爲大環，長度不變的紙環爲小環。

1.以莫比烏斯環 $\frac{1}{4}$ 分割爲例，將長度 L 的莫比烏斯環的寬度先畫三條等分線 ABC，將寬度分成 4 等份。我們找到了兩種不同的剪法，且所分割的紙環纏繞方式和個數都一樣。(表二)

表二　莫比烏斯環 $\frac{1}{4}$ 分割剪法的比較

	步驟 1	步驟 2	步驟 3	步驟 4
方法 1				
方法 2				

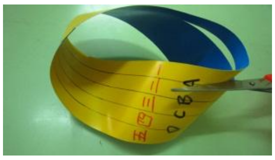
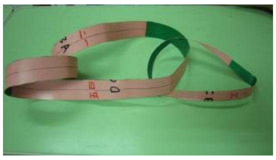
(1)方法 1：第一刀分割時從 A 開始剪，按照 $\frac{1}{3}$ 的剪法一刀剪開，變成一、四區相連，長度 2L，寬度 $\frac{W}{4}$ 的大環和一個長度 L，寬度 $\frac{2W}{4}$ (二、三區未剪)的小環(步驟 2)，第二刀從 B 按照 $\frac{1}{2}$ 的剪法一刀剪開二、三區，變成二區和三區相連，長度 2L 的大環(步驟 3)。因此共得到兩個長度 2L，寬度 $\frac{W}{4}$ 的大環。第二刀的 $\frac{1}{2}$ 剪法我們稱爲「魔術分割法」，因爲將莫比烏斯環的兩區剪開後，此二區會相連形成一個長度爲原來兩倍的大環，像變魔術一樣；至於第一刀的 $\frac{1}{3}$ 的剪法，因它是將莫比烏斯環從外圍的兩區像削皮一樣跟主環分開，我們稱爲「削皮魔術法」。

(2)方法 2：第一刀分割時先從 B 以「魔術分割法」剪開，變成一個長度 2 倍(2L)，寬度一半 $\left(\frac{W}{2}\right)$ 的大環(步驟 2)，並發現 AC 會連成同一直線。第二刀從 AC 連線剪開，變成兩個長度不變(2L)，寬度 $\frac{W}{4}$ 的大環(步驟 3)。由於此刀只是將一個環從中間剪開變成兩個環，並非「魔術分割法」，所以我們

叫它「普通分割法」。

2.以莫比烏斯環$\frac{1}{5}$分割爲例，將長度 L 的莫比烏斯環的寬度先畫四條等分線 ABCD，將寬度分成 5 等份。在此也找到了兩種不同的剪法，且所分割的紙環纏繞方式和個數也都相同。(表三)

表三　莫比烏斯環$\frac{1}{5}$分割剪法的比較

	步驟 1	步驟 2	步驟 3	步驟 4
方法 1				
方法 2				

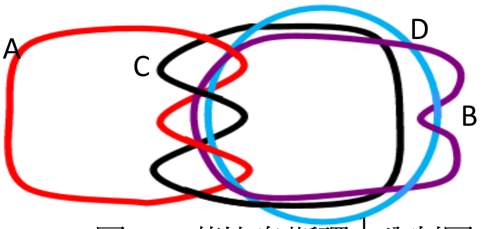
(1)方法 1：第一刀分割時先從 A 剪(步驟 1)，按照「削皮魔術法」剪開，會剪出一個長度 2 倍(2L)，寬度$\frac{W}{5}$的大環(一區連五區)，和一個旋轉角度爲 180°(不變)，長度不變(L)，寬度$\frac{3w}{5}$(二、三、四區)的小環(步驟 2)，第二刀分割時從 B 開始剪，把紙環再按照「削皮魔術法」剪開寬$\frac{3w}{5}$ 的小環，變成一個長 2L，寬$\frac{W}{5}$的大環(二區連四區)和一個長 L，寬$\frac{W}{5}$的小環(步驟 3)。共得到 2 個旋轉 720°的大環和 1 個旋轉 180°的小環，其寬皆爲$\frac{W}{5}$ 。(步驟 4)

(2)方法 2：第一刀分割時先從 B 剪(步驟 1)，按照「削皮魔術法」剪法剪開，剪成一個長度 2 倍(2L)，寬$\frac{2W}{5}$ (一區連二區)，旋轉 720°的大環和一個長度不變(L)、寬度$\frac{W}{5}$，旋轉 180°的小環(三區)(步驟 2)。第二刀從 AD 連線剪開，將大環以「普通分割法」剪開，分割成兩個長度 2 倍(2L)，寬度$\frac{W}{5}$的大環(一區連五區；二區連四區) (步驟 3)。共得到兩個旋轉 720°的大環和一個旋轉 180°的小環。其寬皆爲$\frac{W}{5}$(步驟 4)。

(三)探討莫比烏斯環分割後紙環纏繞的結構

1.莫比烏斯環分割後纏繞情形:每 1 個大環與 1 個小環相交 2 點，每 2 個大環相交 4 點。

2.以莫比烏斯環 $\frac{1}{8}$ 分割(四個大環)爲例，因每 2 個大環就會有 4 個交點，兩個環一組，需討論有幾組再乘以 4 即爲所有的交點個數。先替四個環命名爲 ABCD(圖一)：

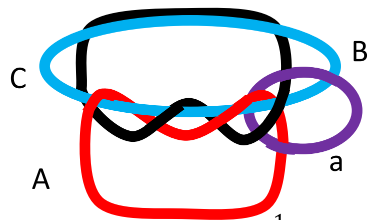


圖一　莫比烏斯環 $\frac{1}{8}$ 分割圖

表四　莫比烏斯環 $\frac{1}{8}$ 分割後紙環纏繞交點個數的計算

按照字母順序依次討論	以 A 討論	以 B 討論	以 C 討論	以 D 討論
寫過的組合不重複	(A 、B) (A 、C) (A 、D)	(B 、C) (B 、D)	(C 、D)	
配對組數	3	2	1	0
	4 個環除 A 自己外還有 3 個環可配成三組	4 個環除 B 自己外還有 3 個環可配成三組，但 BA 在 A 已討論過，3－1=2	4 個環除 C 自己外還有 3 個環可配成三組，但 CA 在 A 已討論過，CB 在 B 已討論過，3－2=1	4 個環除 D 自己外還有 3 個環可配成三組，DA、DB、DC 在前面已討論過，3－3=0
(1)可以配對的組數因爲爲了不重覆討論而慢慢變少。 (2)每兩個環一組，則共有 3＋2＋1＋0＝6 組，所以四個大環交點個數共 6x4＝24 點。				

3.以莫比烏斯環 $\frac{1}{7}$ 分割(三大環一小環)爲例，多了小環，觀察小環和每個大環有 2 個交點，所以除了討論大環交點數，還要計算小環和大環的交點。替三個大環命名爲 A、B、C，小環爲 a：



圖二　莫比烏斯環 $\frac{1}{7}$ 分割圖

表五　莫比烏斯環 $\frac{1}{7}$ 分割後紙環纏繞交點個數的計算

按照字母順序依次討論	以 A 討論	以 B 討論	以 C 討論	以 a 討論
寫過的組合不重複	(A 、B) (A 、C)	(B 、C)		(a、A) (a、B) (a、C)
交點個數	2	1	0	3
(1)三個大環兩兩配對共 2 + 1 + 0 ＝3 組，所以三個大環交點個數共 3x4＝12 點。 (2)三個大環與一個小環相交個數爲 3x2＝6，莫比烏斯環 1/7 分割紙環交點個數共 18 個				

(四)分析與探討莫比烏斯環面的變化

以沒有旋轉的紙環畫線以及 180°旋轉的紙環(莫比烏斯環)爲例，說明觀察莫比烏斯環面的步驟和方法。

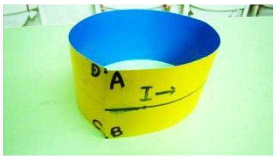
1.沒有旋轉(0^0)的紙環面的觀察：

(1)拿黑筆從紙環外面的 I 點開始畫一直線(步驟 1)，不能斷掉回到 I 點(步驟 2)。

(2)將沒有旋轉的紙環的黏接處撕開，發現所畫直線只在一個面出現(步驟 3)

(3)有畫線爲一個面，沒有畫線表示不同的面(步驟 4)，所以沒有旋轉的紙環如同攤開的紙一般有兩個面。

表六　判斷沒有旋轉(0^0)的紙環面數的步驟

步驟 1	步驟 2	步驟 3	步驟 4
			

2.莫比烏斯環面的觀察步驟如下：

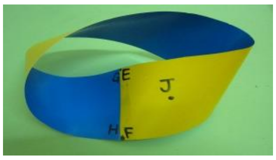
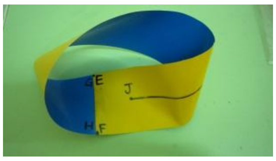
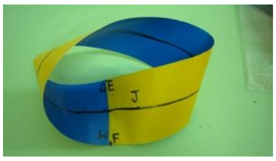
(1)拿黑筆從紙環上外面的 J 點往環繞路徑畫一直線(步驟 1)，可以沒有斷掉回到原點(步驟 2)。一直線沒有斷掉回到出發點表示所經過之處都在同一平面上。

(2)再將莫比烏斯環黏接處撕開，所畫直線在紙條的正反兩個面都會出現(步驟 3)。

(3)因爲所畫直線可以一筆畫畫完，且在紙條的正反兩個面出現，又直線經過的地方都算同一個平面上，所以莫比烏斯環正反兩個面因爲 1800 旋轉黏接，將正反兩面接成一個平面上，變成只有一個面。

(4)因此，我們製作了 180°、360°、540°、720°和 900°旋轉的紙環，以一筆畫完回到原點後，再將黏接觸撕開，觀察兩面是否都有畫線，如果兩面都有畫線，表示這個環就會像莫比烏斯環正反兩面接成一個平面上，變成只有一個面；如果只有一面畫線，表示這個環就會像沒有旋轉(0^0)的紙環一樣有兩個面。

表七　判斷莫比烏斯環面數的步驟

步驟 1	步驟 2	步驟 3
		

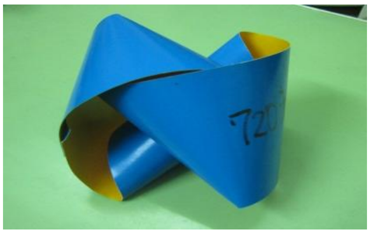
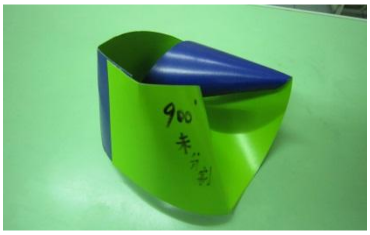
(五)旋轉方向的不同

當翻轉紙環的過程中，我們發現紙環不管是從順時針翻轉還是從逆時針翻轉，得到的度數與結果都是相同的，只是分割出來的紙環旋轉方向相異，所以不另行探討。

二、探討紙環翻轉不同度數後的特性

在發現長度的變化和旋轉角度有關後，我們決定比較 180°、360°、540°、720°和 900°旋轉的紙環，並將其分割成 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ ，以討論莫比烏斯環的方法與步驟討論旋轉 360°、540°、720°和 900°紙環的面數、長度、旋轉角度的變化和纏繞交點的問題，並記下操作的結果和圖形。

表八　莫比烏斯環與變形紙環 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 分割照片

	（未分割）	$\frac{1}{2}$ 分割	$\frac{1}{3}$ 分割
莫比烏斯環 (旋轉 180°)			
旋轉 360°			
旋轉 540°			
旋轉 720°			
旋轉 900°			

:

伍、研究結果與討論

一、莫比烏斯環分割的結果與討論

我們製作了 180°旋轉的紙環(莫比烏斯環)，分割成$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{7}$ 和$\frac{1}{8}$，討論莫比烏斯環分割的方法，並對分割後的長度、旋轉角度、面的變化和纏繞結構的性質和變化作分析，記下實驗結果。分割後紙環個數、旋轉角度、長度、寬度和交點個數整理見表九。

表九　莫比烏斯環$\frac{1}{n}$分割後分割紙環的性質與變化

寬作$\frac{1}{n}$分割	分割後紙環旋轉度數	分割後紙環長度	分割後紙環個數	交點個數
1(不分割)	180°	L	1	0
$\frac{1}{2}$	720°	2L	1	0
$\frac{1}{3}$	$720^\circ\times 1+180^\circ\times 1$	$2L\times 1+L\times 1$	2(1大1小)	2
$\frac{1}{4}$	$720^\circ\times 2$	$2L\times 2$	2	4
$\frac{1}{5}$	$720^\circ\times 2+180^\circ\times 1$	$2L\times 2+L\times 1$	3(2大1小)	8
$\frac{1}{6}$	$720^\circ\times 3$	$2L\times 3$	3	12
$\frac{1}{7}$	$720^\circ\times 3+180^\circ\times 1$	$2L\times 3+L\times 1$	4(3大1小)	18
$\frac{1}{8}$	$720^\circ\times 4$	$2L\times 4$	4	24

(一)討論莫比烏斯環分割，整理如表十。

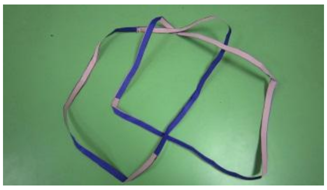
表十　歸納莫比烏斯環$\frac{1}{n}$分割的數據表示

分割成$\frac{1}{n}$		旋轉度數	長度	寬度	紙環個數	刀數
n 爲偶數	大	$180^\circ\times 2+360^\circ$	2L	$\frac{W}{n}$	$[\frac{n}{2}]$	$[\frac{n}{2}]$
n 爲奇數	大	$180^\circ\times 2+360^\circ$	2L	$\frac{W}{n}$	$[\frac{n}{2}]$	$[\frac{n}{2}]$
	小	180°(沒變)	L	$\frac{W}{n}$	1	

1.長度的討論

在分割成 $\frac{1}{2}$ 的時候，莫比烏斯環變成長度爲原來 2 倍，寬度 $\frac{1}{2}$ 的一個大紙環(如圖三)。因爲最左邊的線和最右邊的線兩個會結合成一個圈。所以在分割成 $\frac{1}{4}$ 的時候，先 $\frac{1}{2}$ 再 $\frac{1}{2}$，原以爲紙環會變成長度爲原來 4 倍，寬度 $\frac{1}{4}$ 的一個更大的紙環，但我們卻剪出長度仍維持 2 倍，寬度 $\frac{1}{4}$ 的兩個大紙環(如圖四)。經討論後發現是因爲當分割成一個 $\frac{1}{2}$ 的大紙環時，它的旋轉角度由 180°變成 720°，發現旋轉 720°的變形紙環不論切割成幾等分，其長度仍不變。由此我們發現旋轉角度會影響切割的長度，因此我們決定做不同旋轉角度的紙環的分割。

圖三



圖四

2.角度的討論(表九)

(1)旋轉 180 的紙環分割成一個 $\frac{1}{2}$ 的大紙環時，它的旋轉角度會由 180°變成 720°**(圖三)** 是因爲每一區原本就轉 180°，兩區相連共轉 180°×2，又路徑在繞一圈時沒有增加面的旋轉(即 0°)，路徑繞兩圈回到原點時，面的旋轉會多轉 360°，莫比烏斯環剪開以後須繞兩圈回到原點，所以再加上 360°。我們剪出的大紙環之旋轉度數爲 180°×2+360°＝720°。

(2)小紙環只有在做奇數等分分割時才會出現，因爲在分割時我們都以「剝皮分割法」作分割，所以分割至最內圈時會留下一個小紙環，也因爲我們沒有動到小紙環，所以它的所有性質都和莫比烏斯環一樣，旋轉角度仍然維持 180°，只是寬度變成 $\frac{1}{n}$ 。

3.剪開方式的討論，紙環的分割方法其實只有三種(表十一)。

表十一　分割紙環剪開方法的分類表

剪法	分割後紙環變化	命名
莫比烏斯環 $\frac{1}{3}$分割的剪法一刀剪開	2 倍長紙環+1 倍長小紙環	削皮魔術法
莫比烏斯環 $\frac{1}{2}$ 分割的剪法一刀剪開	2 倍長紙環	魔術分割法
360 變形紙環 $\frac{1}{2}$ 分割的剪法一刀剪開	兩個長度不變的小紙環	普通分割法

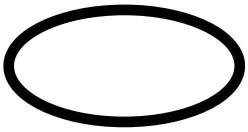
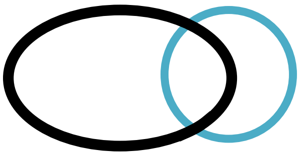
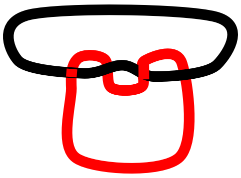
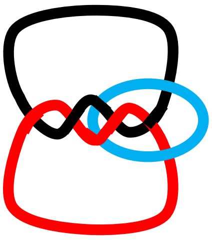
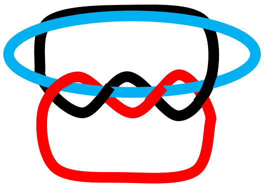
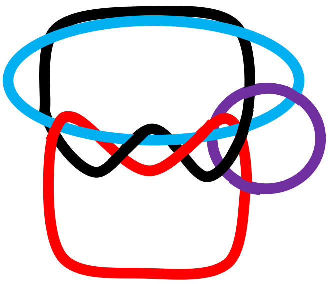
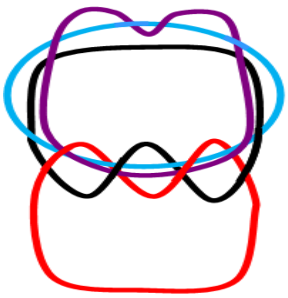
(1)將旋轉 180°的莫比烏斯環分割爲 n 等分，不管 n 的奇偶，都可由外圍開始以「削皮魔術法」往內剪。當 n 爲奇數時，可以以「削皮魔術法」剪完；但當 n 爲偶數時，以「削皮魔術法」由外圍往內剪，到最後一刀一定是以「魔術分割法」一刀剪完。

(2)當 180°的莫比烏斯環進行 $\frac{1}{n}$分割時，需剪 x 刀。$(n \div 2 = x \ldots y)$

(3)翻轉 180°的紙環在分割後的每個紙環翻轉度數只有 180°和 720°的兩種可能。

(二)討論莫比烏斯環分割後紙環纏繞情形(表十二)

表十二　莫比烏斯環$\frac{1}{n}$分割紙環纏繞圖形與交點個數

分割	圖	變化情形	紙環個數	交點
$\frac{1}{2}$		1 大環	1	0
$\frac{1}{3}$		1 大環 ＋1 小環 每 1 個大環與 1 小環相交 2 點 (A、a、2)	2	2 ＝2x1x(1+1-1)
$\frac{1}{4}$		2 大環+ 0 小環 每兩個大環相交 4 點 (A、B、4)	2	4 =2x2x(1+1-1)
$\frac{1}{5}$		2 大環 ＋1 小環 (A、a、2) (B、a、2) (A、B、4)	3	4+2x2 ＝8 =2x2x(2+1-1)
$\frac{1}{6}$		3 大環 (A、B、4) (A、C、4) (B、C、4)	3	4x3 ＝12 ＝2x3x(3+0-1)
$\frac{1}{7}$		3 大環 ＋1 小環 (A、a、2) (B、a、2) (C、a、2) (A、B、4) (A、C、4) (B、C、4)	4	4x3+2x3 ＝18 ＝2x3x(3+1-1)
$\frac{1}{8}$		4 大環 (A、B、4) (A、C、4) (A、D、4) (B、C、4) (B、D、4) (C、D、4)	4	4×6 ＝24 ＝2x4x(4+0-1)

1.莫比烏斯環分割後纏繞情形：每 1 個大環與 1 小環相交 2 點、每 2 個大環相交 4 點。

2.莫比烏斯環分割 n 等分後， $n \div 2 = x \ldots y$， x 就是大環的個數，y 就是小環的個數。

3.大環交點計算

(1)因每 2 個大環就會有 4 個交點，所以要討論每 2 個環一組共有幾組，其組數再乘以 4，即爲大環之間的交點個數。

(2)如果大環個數爲 x 個，每一個大環除自己以外還有(x－1)個環可配成(x－1)組，但是如果前面已討論過的就不重複計算，配對個數會依序慢慢變少，變成一個首項(x－1)，公差(－1)的等差數列 。

(3)大環配對個數有(x－1)+ (x－2)+ (x－3)+⋯+ 1 + 0 $= \frac{[(X-1)+1](X-1)}{2} = \frac{X(X-1)}{2}$ 。

(4)大環之間的交點個數 $\frac{X(X-1)}{2} \times 4 = 2x(x-1)$。

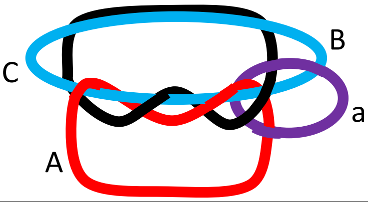
(5)以莫比烏斯環 $\frac{1}{7}$ 分割(三大環一小環)爲例。有三個大環配對(表十三)。

表十三　莫比烏斯環 $\frac{1}{7}$ 分割大環交點個數的計算

依序討論	以 A 討論	以 B 討論	以 C 討論	以 a 討論
寫過的組合不重複	(A 、B) (A 、C)	(B 、C)		(a、A) (a、B) (a、C)
交點個數	2	1	0	3

三個大環兩兩配對共 $2 + 1 + 0 = \frac{(1+2)2}{2} = 3$ 組，

三個大環(X＝3)，交點個數共 3x4＝12＝2x3x2 點。



4.大小環交點計算

(1)因小環和每一個大環會有 2 個交點，

(2)奇數等分分割才會有一個小環，偶數等分分割並不會有小環。小環個數爲 y，y 是分割數 n 除以 2 的餘數，所以 y 必爲 0 或 1。(n÷2=x⋯y)

(3)奇數等分分割，y＝1 。所以只要知道大環個數 x，大小環配對組數 xy＝x，大小環配對組數 xy＝x 個數再乘以 2，就是大小環之間交點個數 2xy＝2x。

(4)偶數等分分割，沒有小環個數，y＝0 。不論大環個數 x，大小環間的交點個數 xy＝0，大小環配對組數 0＝xy 個數×2，就是大小環之間交點個數 2xy＝0。

(5)不論分割數的奇偶，計算大小環交點都可以用 2xy 表示。

5.莫比烏斯環分割 n 等分後， $n \div 2 = x \ldots y$， x 就是大環的個數，y 就是小環的個數。

分割後紙環纏繞的交點個數爲：

$$\frac{(X-1)X}{2} \times 4 + XY \times 2 = 2X(X-1) + 2XY$$

$$= 2X(X+Y-1)$$

6.莫比烏斯環分割 n 等分後，紙環纏繞的交點個數公式以 n 表示：

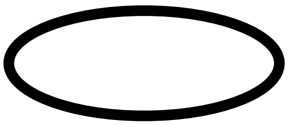
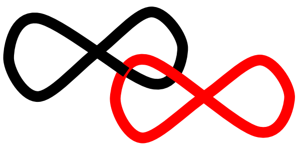
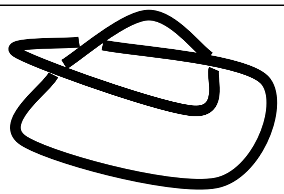
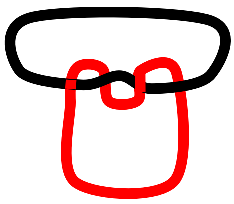
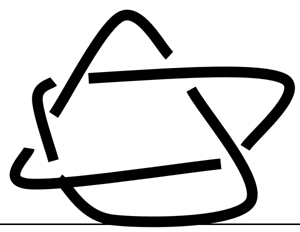
$$2\times\left[\frac{n}{2}\right]\times\left(\left[\frac{n}{2}\right]+R_2(n)-1\right)$$

其中$\left[\frac{n}{2}\right]$爲高斯符號，$\left[\frac{n}{2}\right]=X$；$R_2(n)$爲 n÷ 2的餘數，$R_2(n)=Y$

二、延伸變形紙環分割的結果與討論

(一)莫比烏斯環及變形紙環$\frac{1}{2}$分割後紙環比較(表十四)

表十四　莫比烏斯環及變形紙環$\frac{1}{2}$分割比較　　【註】顏色只是方便觀察

旋轉角度	將寬作 $\frac{1}{2}$ 分割	分割後紙環旋轉度數	長度	個數	交點個數
180°		$720^\circ = 180^\circ \times 2 + 360^\circ$	2L	1	0
360°		360°	L	2	2
540°		$1440^\circ = 540^\circ \times 2 + 360^\circ$	2L	1	3
720°		720°	L	2	4
900°		$2160^\circ = 900^\circ \times 2 + 360^\circ$	2L	1	5

1.討論變形紙環 360°、540°、720°和 900°旋轉的紙環分割成 $\frac{1}{2}$ 時，發現 360°和 720°

做第一次 $\frac{1}{2}$ 分割時，變成兩個糾纏的紙環，長度、角度不變，因剪開後兩紙環只纏繞不相連，所以長度不變，且路徑只繞一圈就回到原點，所以分割後的紙環旋轉角度不變。因此 180°做 $\frac{1}{4}$ 分割，第一次 $\frac{1}{2}$ 分割長度變爲 2 倍，旋轉角度變 720°，再一次 $\frac{1}{2}$ 分割相當於 720°做 $\frac{1}{2}$ 分割，所以長度不再增爲兩倍。

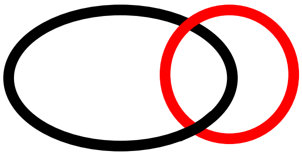
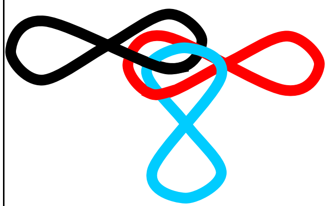
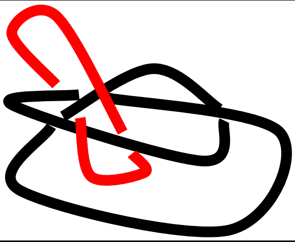
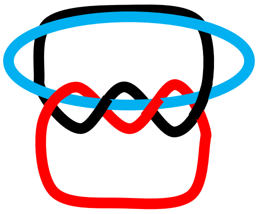
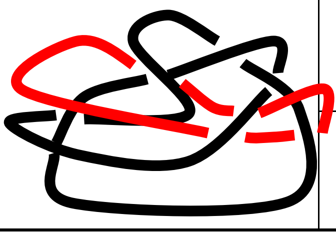
2.540°和 900°旋轉的紙環 $\frac{1}{2}$ 分割後，變成一個自己纏繞自己的糾結大環，大環的路徑糾結纏繞，無法將它打開變成一個沒有糾結的環，而路徑繞兩圈且相連，所以只有產生一個環。

3.旋轉 540°和 900°的紙環分割成 $\frac{1}{2}$ 時和 180°的情況一樣，分割後兩區都相連，所以長度也會變成兩倍。分割後旋轉角度除原旋轉角度×2(因爲分割成兩區紙環相連)外，因爲剪開後發現路徑多繞一圈，需再補加 360 度。分割後紙環旋轉角度變爲:「原紙環旋轉角度×2+360°」。

4.變形紙環 $\frac{1}{2}$ 分割後的交點數與原旋轉角度有關，每多轉 180°，交點就會增加一個。540°和 900°旋轉的紙環分割後，大環因路徑糾結纏繞，自己造成交點；而莫比烏斯環分割後的大環不會糾結，可以打開，所以沒有交點。分割後紙環交點數爲:「旋轉角度 ÷ 180°」。

(二)莫比烏斯環及變形紙環$\frac{1}{3}$分割比較(表十五)

表十五　莫比烏斯環及變形紙環$\frac{1}{3}$分割比較

旋轉度數	纏繞方式	分割後紙環旋轉度數	分割後紙環長度	分割後紙環個數	交點個數
180°		720°=180°×2+360°	2L	1	2
		180°	L	1	
360°			2L	0	6
		360°	L	3	
540°		1440°=540°×2+360°	2L	1	9
		540°	L	1	
720°			2L	0	12
		720°	L	3	
900°		2160°=900°×2+360°	2L	1	13
		900°	L	1	

1.討論變形紙環 360°、540°、720°和 900°旋轉的紙環分割成$\frac{1}{3}$時，發現 540°和 900°分割時，變成一大一小的糾纏紙環，交點除了大小環纏繞造成之外，還有大環因路徑纏繞，自己糾結的交點。

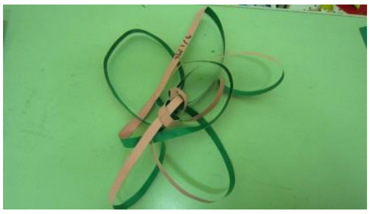
2.我們由 360°和 720°旋轉紙環分割後的小環歸納整理，360°×K 的旋轉紙環分割後都剪成長度不變、角度不變的小環，每兩個小環配對相交造成2K個交點，當$\frac{1}{n}$分割時，有 n 個小環，會有$\frac{(n-1)\times n}{2}$組的配對，所以會有 $\frac{(n-1)\times n}{2}\times 2K = Kn(n-1)$個交點。

3.我們由 540°和 900°旋轉紙環分割後的大小環糾結的交點歸納整理，180°×K 的旋轉紙環分割後產生一個大環和一個小環，大環自己糾結纏繞的交點有 K 個，小環和大環會造成 K+3 個交點，當$\frac{1}{3}$分割時，會有 K+K+3＝2K+3 個交點。因爲大環間的纏繞相交過於糾結複雜，所以不予討論，因此不做 n＞3 的$\frac{1}{n}$分割。

(三)旋轉 360°的紙環分割分析

1.旋轉 360°的紙環$\frac{1}{n}$分割圖片(表十六)

表十六　旋轉 360°的紙環$\frac{1}{n}$分割圖片

（未分割）	$\frac{1}{2}$分割	$\frac{1}{3}$分割
		
$\frac{1}{4}$分割	$\frac{1}{5}$分割	$\frac{1}{6}$分割
		
$\frac{1}{7}$分割	$\frac{1}{8}$分割	
		

(四)旋轉 360°的紙環分割圖片(表十七)

表十七　旋轉 360°的紙環分割後紙環的性質與變化

旋轉的角度	將寬作 $\frac{1}{n}$ 分割	分割後紙環旋轉度數	分割後紙環長度	分割後紙環個數
360度 (180× 2)	1(不分割)	360°	L	1
360度	$\frac{1}{2}$	360°	L	2
360度	$\frac{1}{3}$	360°	L	3
360度	$\frac{1}{4}$	360°	L	4
360度	$\frac{1}{5}$	360°	L	5
360度	$\frac{1}{6}$	360°	L	6
360度	$\frac{1}{7}$	360°	L	7
360度	$\frac{1}{8}$	360°	L	8

2. 討論旋轉 360°的紙環分割後紙環個數、旋轉角度、長度、寬度整理。(表十八)

表十八　360°旋轉紙環 $\frac{1}{n}$ 分割的歸納數據表示

360 度		旋轉度數	長度	寬度	紙環個數	刀數
分割成$\frac{1}{n}$	小	360°(沒變)	L(沒變)	$\frac{W}{n}$	N	n-1

在分割成 $\frac{1}{2}$ 的時候，旋轉 360°的紙環不像莫比烏斯環分割 $\frac{1}{2}$ 會變成一個長度 2 倍，寬度一半 $\left(\frac{W}{2}\right)$ 的大環，而是長度不變，但寬度 $\frac{1}{2}$ 的一個小紙環(圖五)。所以在分割成 $\frac{1}{4}$ 的時候，先 $\frac{1}{2}$ 再 $\frac{1}{2}$ ，結果紙環是旋轉度數仍爲 360°，長度不變，寬度 $\frac{1}{4}$ 的紙環四個(圖六)，而不像莫比烏斯環 $\frac{1}{4}$ 分割時是長度變成 2 倍，寬度 $\frac{1}{4}$ 的兩個大紙環。

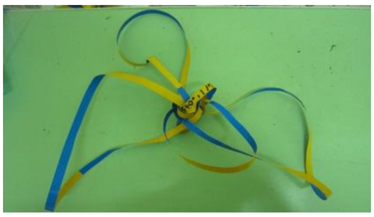
我們討論的結果發現分割成兩個寬$\frac{1}{2}$的紙環或是再繼續分割成四個寬$\frac{1}{4}$的紙環時，它的旋轉角度依然是 360°，也就是旋轉 360°的紙環不論切割成幾等分，它的長度和旋轉度數仍不變。只有莫比烏斯環$\frac{1}{2}$分割時，長度會變成兩倍。

圖五


圖六

(五)旋轉 540°的紙環分割圖片(表十九)

表十九　旋轉 540°的紙環$\frac{1}{n}$分割圖片

（未分割）	$\frac{1}{2}$分割	$\frac{1}{3}$分割
		
$\frac{1}{4}$分割	$\frac{1}{5}$分割	$\frac{1}{6}$分割
		
$\frac{1}{7}$分割	$\frac{1}{8}$分割	
		

(六)分割後紙環個數、旋轉角度、長度、寬度整理如下(表二十)

表二十　旋轉 540°的紙環分割後紙環的性質與變化

旋轉的角度	將寬作 $\frac{1}{n}$ 分割	分割後紙環旋轉度數	分割後紙環長度	分割後紙環個數
540度 (180× 3)	1(不分割)	540°	L	1
540度	$\frac{1}{2}$	1440°	2L	1
540度	$\frac{1}{3}$	1440°× 1 +540°× 1	2L× 1 +L× 1	2(1大1小)
540度	$\frac{1}{4}$	1440°× 2	2L× 2	2
540度	$\frac{1}{5}$	1440°× 2 +540°× 1	2L× 2 +L × 1	3(2大1小)
540度	$\frac{1}{6}$	1440°× 3	2L × 3	3
540度	$\frac{1}{7}$	1440°× 3 +540°× 1	2L × 3 +L × 1	4(3大1小)
540度	$\frac{1}{8}$	1440°× 4	2L × 4	4

(七)討論旋轉 540°的紙環分割後紙環個數、旋轉角度、長度、寬度整理(表二十一)

表二十一　540°旋轉紙環 $\frac{1}{n}$ 分割的歸納數據表示

<table>
<tr><th colspan="2">分割成 $\frac{1}{n}$</th><th>旋轉度數</th><th>長度</th><th>寬度</th><th>紙環個數</th><th>刀數</th></tr>
<tr><td>當 n 爲偶數</td><td>大</td><td>540°× 2+360°</td><td>2L</td><td>$\frac{W}{n}$</td><td>$[\frac{n}{2}]$</td><td>$[\frac{n}{2}]$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">當 n 爲奇數</td><td>大</td><td>540°× 2+360°</td><td>2L</td><td>$\frac{W}{n}$</td><td>$[\frac{n}{2}]$</td><td rowspan="2">$[\frac{n}{2}]$</td></tr>
<tr><td>小</td><td>540°(沒變)</td><td>L</td><td>$\frac{W}{n}$</td><td>1</td></tr>
</table>

在分割成 $\frac{1}{2}$ 的時候，旋轉 540°的紙環會跟 180°一樣長度爲原來 2 倍，寬度 $\frac{1}{2}$ 的一個大紙環(圖七)，在分割成 $\frac{1}{4}$ 的時候，先 $\frac{1}{2}$ 再 $\frac{1}{2}$ ，旋轉 540°紙環也會是長度 2 倍，

寬度$\frac{1}{4}$的兩個大紙環(圖八)。且在分割成一個$\frac{1}{2}$的大環後，它的旋轉角度由 540°變成 1440°，之後旋轉 1440°的變形紙環不論切割成幾等分，長度一樣不變，發現其主要性質和莫比烏斯環一模一樣。

圖七

圖八

(八)旋轉 720°的紙環分割圖片(表二十二)

表二十二　旋轉 720°的紙環$\frac{1}{n}$分割圖片

（未分割）	$\frac{1}{2}$分割	$\frac{1}{3}$分割
		
$\frac{1}{4}$分割	$\frac{1}{5}$分割	$\frac{1}{6}$分割
		
$\frac{1}{7}$分割	$\frac{1}{8}$分割	
		

(九)分割後紙環個數、旋轉角度、長度、寬度整理(表二十三)

表二十三　旋轉 720°的紙環分割後紙環的性質與變化

旋轉的角度	將寬作 $\frac{1}{n}$ 分割	分割後紙環旋轉度數	分割後紙環長度	分割後紙環個數
720度 (180×4)	1(不分割)	720°	L	1
720度	$\frac{1}{2}$	720°	L	2
720度	$\frac{1}{3}$	720°	L	3
720度	$\frac{1}{4}$	720°	L	4
720度	$\frac{1}{5}$	720°	L	5
720度	$\frac{1}{6}$	720°	L	6
720度	$\frac{1}{7}$	720°	L	7
720度	$\frac{1}{8}$	720°	L	8

(十)討論旋轉 720°的紙環分割後紙環個數、旋轉角度、長度、寬度整理(表二十四)

表二十四　720°旋轉紙環$\frac{1}{n}$分割的歸納數據表示

720 度		旋轉度數	長度	寬度	紙環個數	刀數
分割成$\frac{1}{n}$	小	720°(沒變)	L(沒變)	$\frac{W}{n}$	n	n-1

在分割成 $\frac{1}{2}$ 的時候，旋轉 720°的紙環不像莫比烏斯環分割 $\frac{1}{2}$，會變成一個長度 2 倍，寬度一半 $\left(\frac{W}{2}\right)$ 的大環，而是長度不變，但寬度 $\frac{1}{2}$ 的一個小紙環(如圖九)。所以在分割成 $\frac{1}{4}$ 的時候，先 $\frac{1}{2}$ 再 $\frac{1}{2}$ 時，結果紙環仍然是旋轉 720°，長度不變，寬度 $\frac{1}{4}$ 的紙環四個(如圖十)，而不像莫比烏斯環 $\frac{1}{4}$ 分割時是長度變成 2 倍，寬度 $\frac{1}{4}$ 的兩個大紙環

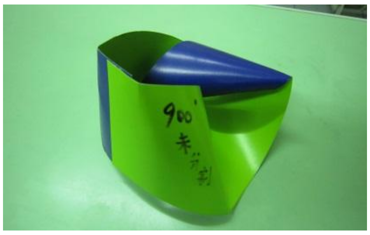
。我們討論的結果發現分割成兩個寬$\frac{1}{2}$的紙環或是再繼續分割成四個寬$\frac{1}{4}$的紙環時，它的旋轉角度依然是 720°，也就是旋轉 720°的紙環不論切割成幾等分，它的長度和旋轉度數仍不變。只有莫比烏斯環$\frac{1}{2}$分割時，長度會變成兩倍。

圖九

圖十

(十一)旋轉 900°的紙環分割圖片(表二十五)

表二十五　旋轉 720°的紙環$\frac{1}{n}$分割圖片

（未分割）	$\frac{1}{2}$分割	$\frac{1}{3}$分割
		
$\frac{1}{4}$分割	$\frac{1}{5}$分割	$\frac{1}{6}$分割
		
$\frac{1}{7}$分割	$\frac{1}{8}$分割	
		

(十二)分割後紙環個數、旋轉角度、長度、寬度整理(表二十六)

表二十六　旋轉 900°的紙環分割後紙環的性質與變化

旋轉的角度	將寬作$\frac{1}{n}$分割	分割後紙環旋轉度數	分割後紙環長度	分割後紙環個數
900度 (180×5)	1(不分割)	900^{o}	L	1
900度	$\frac{1}{2}$	2160^{o}	2L	1
900度	$\frac{1}{3}$	$2160^{o}\times 1$ $+900^{o}\times 1$	$2L\times 1$ $+L\times 1$	2(1大1小)
900度	$\frac{1}{4}$	$2160^{o}\times 2$	$2L\times 2$	2
900度	$\frac{1}{5}$	$2160^{o}\times 2$ $+900^{o}\times 1$	$2L\times 2$ $+L\times 1$	3(2大1小)
900度	$\frac{1}{6}$	$2160^{o}\times 3$	$2L\times 3$	3
900度	$\frac{1}{7}$	$2160^{o}\times 3$ $+900^{o}\times 1$	$2L\times 3$ $+L\times 1$	4(3大1小)
900度	$\frac{1}{8}$	$2160^{o}\times 4$	$2L\times 4$	4

(十三)討論旋轉 900°的紙環分割後紙環個數、旋轉角度、長度、寬度整理(表二十七)

表二十七　900°旋轉紙環$\frac{1}{n}$分割的歸納數據表示

分割成$\frac{1}{n}$		旋轉度數	長度	寬度	紙環個數	刀數
當 n 為偶數	大	$900^{\circ}\times 2+360^{\circ}$	2L	$\frac{W}{n}$	$[\frac{n}{2}]$	$[\frac{n}{2}]$
當 n 為奇數	大	$900^{\circ}\times 2+360^{\circ}$	2L	$\frac{W}{n}$	$[\frac{n}{2}]$	$[\frac{n}{2}]$
	小	900°(沒變)	L	$\frac{W}{n}$	1	

在分割成$\frac{1}{2}$的時候，旋轉 900°的紙環變成長度為原來 2 倍，寬度$\frac{1}{2}$的一個大紙環(如圖十一)，所以在分割成$\frac{1}{4}$的時候，先$\frac{1}{2}$再$\frac{1}{2}$，以為紙環會變成長度為原來 4 倍，

寬度$\frac{1}{4}$的一個更大的紙環，但我們卻剪出長度仍維持 2 倍，寬度$\frac{1}{4}$的兩個大紙環(如圖十二)。我們討論的結果發現是因爲分割成一個$\frac{1}{2}$的大紙環時，其旋轉角度由 900° 變成 2160°，發現旋轉 900°的變形紙環不論切割成幾等分，其長度仍不變。由此我們發現旋轉角度會影響切割的長度，因此我們決定做不同旋轉角度紙環的分割。

圖十一

圖十二

三、分析與探討莫比烏斯環面的變化

(一)我們發現只要旋轉度數是 180°的奇數倍數的紙環，都只有一個面。例如：540°、900°、1260°…..等等。

(二)一張紙有兩面，但是莫比烏斯環能用一筆畫畫完紙環的所有面，由此可知莫比烏斯環只有一個面。540°和 900°的紙環與莫比烏斯環的結果一樣都只有一個面，而 360°和 720° 的紙環不能用一筆畫畫完紙環的面，表示它們有兩個面。

(三)前後兩面如果相連變成一個面，剪開的兩區可以交叉相連，變成一個長度兩倍的大環，因爲相連，旋轉角度也因此變大。

陸、結論

一、未旋轉的紙環和旋轉度數爲 180°的偶數倍數的紙環都有兩個面；莫比烏斯環和旋轉度數爲 180°的奇數倍數的紙環卻都只有一個面。

二、未旋轉的紙環(0°)與 360°(180°×2)、720°(180°×4)的紙環特性相似；而莫比烏斯環(180°)則和 540°(180°×3)、900°(180°×5)的紙環特性相似。

三、分割莫比烏斯環和其變形紙環，莫比烏斯環和旋轉度數爲 180°的奇數倍數的紙環在分割時，會產生大紙環(2L)和小紙環(L)。

四、當翻轉紙環的過程中，我們發現紙環不管是從哪一個等分線分割，得到的度數與結果都是相同的，但分割出來的紙環旋轉方向相異，所以不另行探討。

五、以削皮分割法分割紙環最爲容易。

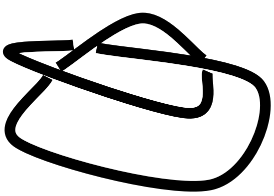
六、利用一些簡單的方程式可以計算出莫比烏斯環的環數、度數和交點個數。

<table>
<tr><th colspan="2">分割成$\frac{1}{n}$</th><th>分割後旋轉度數</th><th>長度</th><th>紙環個數</th><th>刀數</th><th>交點個數</th></tr>
<tr><td>當 n 爲偶數</td><td>大</td><td>180°×2+360°</td><td>2L</td><td>$[\frac{n}{2}]$</td><td>$[\frac{n}{2}]$</td><td rowspan="3">$2\times[\frac{n}{2}]\times([\frac{n}{2}]+R_2(n)-1)$
其中$[\frac{n}{2}]$爲高斯符號，$[\frac{n}{2}]=X$；R_2(n)爲 n÷ 2的餘數，$R_2(n)=Y$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">當 n 爲奇數</td><td>大</td><td>180°×2+360°</td><td>2L</td><td>$[\frac{n}{2}]$</td><td rowspan="2">$[\frac{n}{2}]$</td></tr>
<tr><td>小</td><td>180°(沒變)</td><td>L</td><td>1</td></tr>
</table>

七、一些簡單的方程式可以計算出變形紙環的環數、度數和交點個數。360°×K 的旋轉紙環分割後的小環，每兩個小環配對相交造成2K個交點，當$\frac{1}{n}$分割時，有 n 個小環，會有$\frac{(n-1)\times n}{2}$組的配對，所以會有$\frac{(n-1)\times n}{2}\times 2K = Kn(n-1)$個交點。

八、180°×K 的旋轉紙環分割後產生一個大環和一個小環，大環自己糾結纏繞的交點有 K 個，小環和大環會造成(K+3)個交點，當$\frac{1}{3}$分割時，會有(K+K+3＝2K+3)個交點。因爲大環間的纏繞相交過於糾結複雜，所以不予討論，因此不做 n＞3 的$\frac{1}{n}$分割。

九、莫比烏斯環作$\frac{1}{2}$分割，原紙環會變成長度 2 倍的大紙環，對此我們感到神奇。但對於變形紙環旋轉 540°和 900°的$\frac{1}{2}$分割所得到的大紙環會自我纏繞糾結造成交點更是感到特別，他們的環繞路徑若以圖形分析表示，竟可畫成很漂亮的回轉!



540° $\frac{1}{2}$分割

900° $\frac{1}{2}$分割

十、兩個圓最多相交兩點，但在變形紙環分割後的紙環會自然纏繞形成多個交點，旋轉所造成的紙環其纏繞相交性質和變化，讓我們目不暇給。

十一、莫比烏斯環因旋轉 180°使得正反面可以連成一面，但 360°的旋轉紙環仍然正面連接正面，反面連接反面，所以在變形紙環中，只有旋轉 180°的奇數倍紙環，才能夠一筆畫完正反兩面的連接。

柒、參考資料

一、維基百科，自由的百科全書—莫比烏斯帶：
http://zh.wikipedia.org/zh-hant/%E8%8E%AB%E6%AF%94%E4%B9%8C%E6%96%AF%E5%B8%A6

【評語】030418

本研究透過剪紙環的活動探討莫比烏斯環的特殊性質，內容十分有趣，即使對社會大眾而言，亦屬淺顯易懂的作品，而作品的內容亦可在一般教室中進行，增加學生在課堂中動手操作的機會，增加學習數學的興趣。

本研究在數學內容則可再加強，例如可考慮與繩結理論作結合，此外圖形表徵亦可再做改進，清楚交待交點處線段的上、下層的關係。