中華民國第52屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030417

萬數歸一－圖形上點邊數字和為定值之研究

學校名稱：高雄市立鳳山國民中學

作者：	指導老師：
國二 吳汯洧 國二 張志瑜 國二 劉韋麟	廖士凱 潘姿因

關鍵詞：點邊數字和、n邊形、n元一次聯立方程式

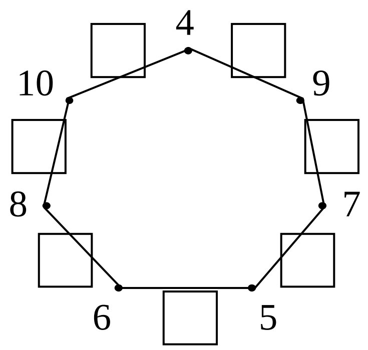
摘要

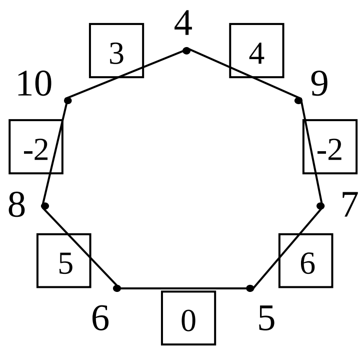
在(正)n 邊形的每個頂點填入一個任意數，形成「n邊形數字盤」，以[n]表示。然後探討是否能在邊上填入一個任意數，使得頂點與相鄰邊上數字的和均相等。若能做到，則稱作「[n]有解」，而且所有邊上的數字稱作「[n]的一組解」，並以S[n]表示點邊數字和。

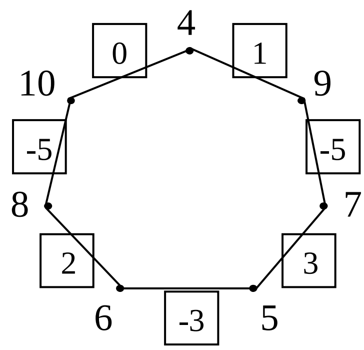
我們嘗試找出[n]有解的條件、解的值、S[n]的值，與N(S[n])的值（有相同S[n]的解的組數），如下例。

接著探討，將n邊形加上k條對角線（$1 \le k \le \frac{n(n-3)}{2}$，以[n，k]表示）或拿掉1條邊（數字線），n邊放射狀圖形，與2個多邊形有1共同頂點時的相關問題，並比較與[n]的不同之處。

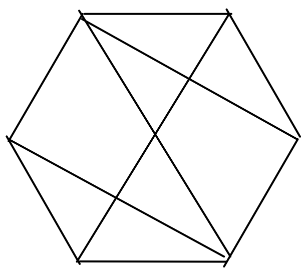
例：左圖爲[7]，中間圖的邊上數字爲一組解，此時 S[7]＝11，N(11)≥1。右圖的邊上數字爲另一組解，此時 S[7]＝5，N(5)≥1。（事實上，N(S[n])＝1，當 n 爲奇數）



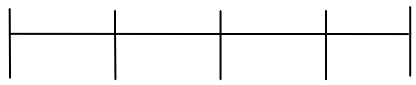




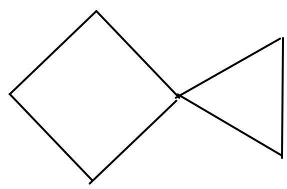
延伸圖形舉例：



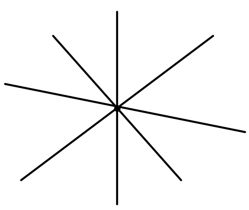
[6、4]



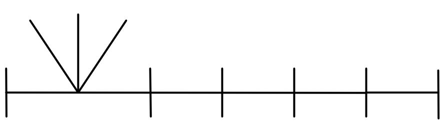
4 段數字線



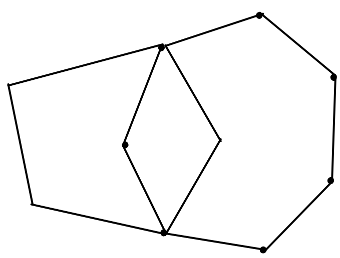
2 個多邊形有 1 共同頂點



8 邊放射狀



在 6 段數字線的第 1 個分點加上 3 條邊



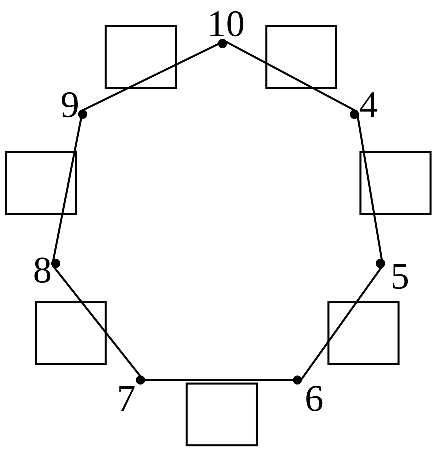
[5]、[7]有 2 交點

壹、研究動機

我們在建中通訊解題看到一個題目：

程式設計師想設計一款益智遊戲，規則如下：電腦在正 n 邊形的每個頂點上隨機放一個介於 0～10 的數字，然後玩家可任意用滑鼠點選正 n 邊形的邊，當他每點選正 n 邊形的邊一次時，點選的邊其兩端點數字都增加 1，直到每個頂點的數字均相等就可過關（可不只一次點選同一邊，遊戲開始後，頂點數字可以超過 10）。

（1）七邊形上，電腦依序在頂點放了 10、9、8、7、6、5、4（如右圖），請在每個邊上標示點選次數，使得玩家可用最少的點選次數過關。



然而遊戲的設計不可能無止盡地讓玩家測試，所以程式設計師會限制讓每個邊最多只能用滑鼠點 k 次（稱之為「點選上限」)，任何一邊點選超過 k 次，玩家就算失敗：

（2）七邊形上，若電腦任意改變頂點上 0～10 的數字，而玩家均可以過關，試求「點選上限」的最小值 k_{min}。

（3）99 邊形上，若電腦任意改變頂點上 0～10 的數字，而玩家均可以過關，試求「點選上限」的最小值 k_{min}。

一開始只花了一些時間就解出第(1)小題，但是之後的(2)、(3)小題，想了幾天仍無完整的結果，與老師討論後，老師鼓勵我們繼續研究，故開始了我們的科展之路。

貳、研究目的

一、探討[3]、[4]有解的條件、解的值、與 k_{min}。
二、探討[5]、[6]有解的條件、解的值、與 S[n]的值。
三、探討[n]（n≥3）有解的條件、解的值、S[n]的值，與 N(S[n])的值。
四、解決研究動機的題目與延伸問題。
五、探討[n，k]（n≥4）的相關問題。
六、探討 n（n≥2）段數字線的相關問題。
七、探討 n（n≥2）邊放射狀圖形的相關問題。
八、探討 2 個多邊形有 1 共同頂點時，相關問題的答案為何。

參、研究器材

白板、黑板、白板筆、粉筆、紙、筆、電腦

肆、文獻探討

一、第 25 屆高小組科展～「怎麼安排才恰當」。
二、第 37 屆初小組科展～「奇妙的數學遊戲」。
三、第 45 屆國中組科展～「七邊形的數字之謎」。

以上 3 件作品是將 1～6、8、10、12、14 的數字，皆填入 3～7 邊形的頂點與邊上，使得每邊 3 個數字的和均相等。

四、第 51 屆國小組科展～「輪番上陣－探究邏輯圈之數字謎」。

這件作品是將 1～6、8、10、12、14 的數字，皆填入 3～7 邊形的頂點與邊上，使得頂點與相鄰邊上數字的和均相等。

而本篇作品研究的是，先給定(正)n 邊形每個頂點上的一個任意數，接著探討是否能在邊上填入一個任意數，使得頂點與相鄰邊上數字的和均相等。並將圖形延伸至[n，k]，n 段數字線，n 邊放射狀圖形，與 2 個多邊形有 1 共同頂點的情形。

伍、研究過程與方法

名詞與符號定義

1、[奇]、[偶]、[奇，k]、[偶，k]：分別代表奇數邊、偶數邊多邊形數字盤，與加上 k 條對角線後的數字盤。

2、[$\overline{n}$]：將一線段分成 n 小段（每段可不等長），在兩端點與每個分點填入一個數字後的數字線。另外，用[$\overline{奇}$]與[$\overline{偶}$]代表奇數段、偶數段數字線。

3、[m•n]：有 1 共同頂點的 m 邊形與 n 邊形（其他部分不重合），在每個頂點填入一個數字後（共用的頂點只填入一個數字）的數字盤。而由 m、n 的奇偶性，可分為以下 4 類：[偶•偶]、[奇•偶]、[偶•奇]、[奇•奇]。

4、[c-n]：稱為 n 邊放射狀圖形。即 n 條邊有 1 共同頂點（稱作中心點 c），在中心點與每個端點填入一個數字後的圖形。

5、S[n，k]、S[$\overline{n}$]、S[m•n]、S[c-n]、N(S[n，k])、N(S[$\overline{n}$])、N(S[m•n])、N(S[c-n])：

代表[n，k]、[$\overline{n}$]、[m•n]、[c-n]有解時，頂點與相鄰邊上數字的和，以及有相同 S[n，k]、S[$\overline{n}$]、S[m•n]、S[c-n]的解的組數。

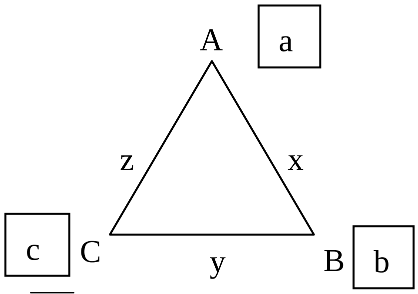
一、[3]、[4]

為了解決研究動機的第(2)、(3)題，我們先從正三角形與正方形開始研究。

推論 1：任意的正三角形數字盤皆有解。

說明：設△ABC 三個頂點上的數字為 a、b、c，如圖(1)。

圖(1)



設 $\overline{AB}$ 點 x 次，$\overline{BC}$ 點 y 次，$\overline{CA}$ 點 z 次後有解。則 $a+x+z=b+x+y=c+y+z$。

$$\Rightarrow \begin{cases} a+x+z=b+x+y \\ b+x+y=c+y+z \\ c+y+z=a+x+z \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a+z=b+y \\ b+x=c+z \\ c+y=a+x \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} z-y=b-a \\ x-z=c-b \\ y-x=a-c \end{cases}$$

假設$a \ge b \ge c$

$$則\begin{cases} z-y \le 0 \\ x-z \le 0 \\ y-x \ge 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow y \ge z \ge x$

因為我們想要找出k_{min}，所以取$x=0$。

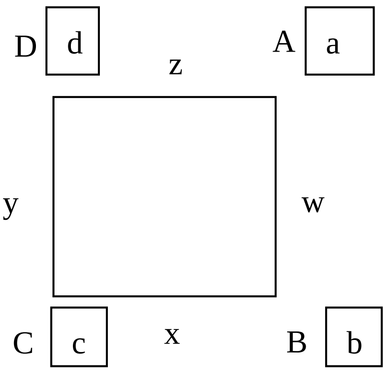
$$故\begin{cases} z=b-c \\ y=a-c=k_{min} \end{cases}$$

同理，若$a \ge c \ge b$、$b \ge a \ge c$、$b \ge c \ge a$、$c \ge a \ge b$、$c \ge b \ge a$，皆可得到類似的結果。所以，任意的正三角形數字盤皆有解。

推論 2：依順時針方向，在正方形 ABCD 的頂點上，分別填入數字 a、b、c、d。則，正方形數字盤有解$\Leftrightarrow$ $a+c=b+d$ 。

說明：($\Rightarrow$)設$\overline{AB}$點 w 次，$\overline{BC}$點 x 次，$\overline{CD}$點 y 次，$\overline{DA}$點 z 次後有解，如圖(2)。

圖(2)



則$a+w+z=b+w+x=c+x+y=d+y+z$。

$$\Rightarrow\begin{cases} a+z=b+x \\ b+w=c+y \\ c+x=d+z \\ d+y=a+w \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=z+a-b & \text{———— (1)} \\ y=w+b-c & \text{———— (2)} \\ x=z+d-c & \text{———— (3)} \\ y=w+a-d & \text{———— (4)} \end{cases}$$

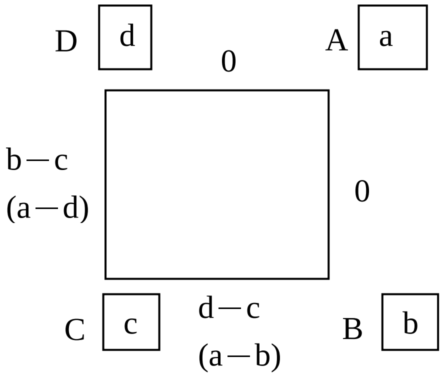
將(1)－(3)，(2)－(4)

$$\Rightarrow\begin{cases} 0=a-b-d+c \\ 0=b-c-a+d \end{cases}$$

$\Rightarrow a+c=b+d$

(⇐)設 a 為最大數，則$a-d=b-c\geq 0$且$a-b=d-c\geq 0$。故可將$\overline{AB}$、$\overline{DA}$點 0 次，$\overline{BC}$點 d－c 次，$\overline{CD}$點 b－c 次，如圖(3)。

圖(3)



$\because\ a+0+0=a$

$b+0+d-c=a+c-c=a$

$c+b-c+d-c=a+c-c=a$

$d+0+b-c=a+c-c=a$

$\therefore$ 四邊這樣點為正方形數字盤的一組解。另外，k_{min} 為 b－c 與 d－c 中，較大的那一個。同理，若 b、c、d 為最大數，皆可得到類似的結果。

我們發現推論 1 和 2，所使用的未知數，可以不限定為正整數或 0，而且不一定要為正 n 邊形，所以我們可將原題改為新題:「在 n 邊形的每個頂點填入一個任意數，然後在每條邊上也填入一個任意數，找出使得每個頂點與相鄰邊上數字的和均相等的條件。」所以我們之後改為<u>討論新題的相關問題</u>。

二、[5]、[6]

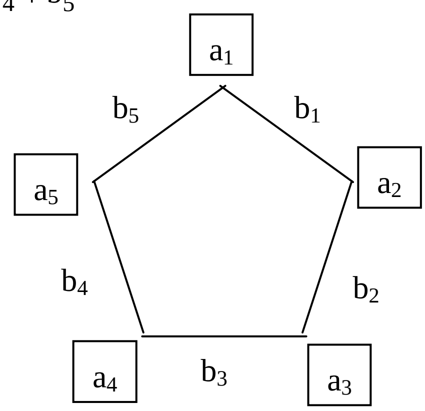
推論 3：[5]皆有解，而且 S[5]為任意數。

說明：將 5 邊形的頂點與邊上的數字設為圖(4)所示。設[5]有解，則

$a_1+b_5+b_1=a_2+b_1+b_2=a_3+b_2+b_3=a_4+b_3+b_4=a_5+b_4+b_5$。

$$\Rightarrow\begin{cases}a_1+b_5=a_2+b_2\\a_2+b_1=a_3+b_3\\a_3+b_2=a_4+b_4\\a_4+b_3=a_5+b_5\\a_5+b_4=a_1+b_1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b_1=b_4+a_5-a_1\\b_3=b_1+a_2-a_3\\b_5=b_3+a_4-a_5=b_1+a_2-a_3+a_4-a_5\\b_2=b_5+a_1-a_2=b_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_1-a_2\\b_4=b_2+a_3-a_4=b_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_1-a_2+a_3-a_4\end{cases}$$



圖(4)

觀察上式可知，$b_1\sim b_5$的值是環環相扣的，只要其中 1 個值決定後，另外 4 個值也

隨之決定。所以我們取

$$\begin{cases} b_1 = u \\ b_3 = u + a_2 - a_3 \\ b_5 = u + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \\ b_2 = u + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_1 - a_2 \\ b_4 = u + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \end{cases}$$

則 $b_1 \sim b_5$ 爲[5]的解。

檢驗：1、 i＝1　$a_1 + b_5 + b_1 = a_1 + 2u + a_2 - a_3 + a_4 - a_5$

2、 i＝2、4

$$a_2 + b_1 + b_2 = a_2 + u + u + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_1 - a_2 = a_1 + 2u + a_2 - a_3 + a_4 - a_5$$

$$\begin{aligned} a_4 + b_3 + b_4 &= a_4 + u + u + a_2 - a_3 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \\ &= a_1 + 2u + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \end{aligned}$$

3、 i＝3、5

$$a_3 + b_2 + b_3 = a_3 + u + u + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_1 - a_2 + a_2 - a_3 = a_1 + 2u + a_2 - a_3 + a_4 - a_5$$

$$\begin{aligned} a_5 + b_4 + b_5 &= a_5 + u + u + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \\ &= a_1 + 2u + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \end{aligned}$$

由 1、～3、知，$b_1 \sim b_5$ 確實爲[5]的解。另外，因爲 u 爲任意數，所以 S[5]的值爲任意數。

推論 4：依順時針方向，在 6 邊形的頂點上，分別填入數字 a_1、a_2、…、a_6。則，[6]有解 $\Leftrightarrow$ $a_1 + a_3 + a_5 = a_2 + a_4 + a_6$。而且，S[6]爲任意數。

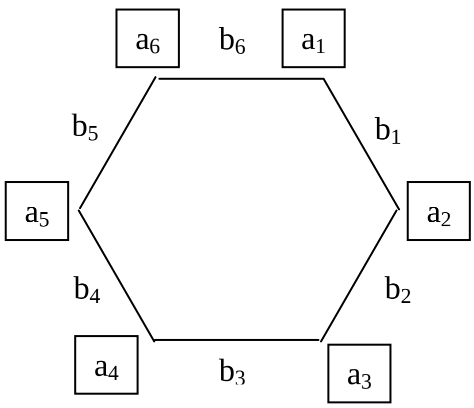
說明：(⇒) 設 6 邊形邊上的數字爲 b_1、b_2、…、b_6，如圖(5)。

∵[6]有解。

∴ $a_1 + a_6 + b_1 = a_2 + b_1 + b_2 = a_3 + b_2 + b_3 = a_4 + b_3 + b_4 = a_5 + b_6 + b_5 = a_6 + b_5 + b_6$。

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + b_6 = a_2 + b_2 \\ a_2 + b_1 = a_3 + b_3 \\ a_3 + b_2 = a_4 + b_4 \\ a_4 + b_3 = a_5 + b_5 \\ a_5 + b_4 = a_6 + b_6 \\ a_6 + b_5 = a_1 + b_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_2 = b_6 + a_1 - a_2 & \text{———} (2) \\ b_3 = b_1 + a_2 - a_3 & \text{———} (3) \\ b_4 = b_2 + a_3 - a_4 & \text{———} (4) \\ b_5 = b_3 + a_4 - a_5 & \text{———} (5) \\ b_6 = b_4 + a_5 - a_6 & \text{———} (6) \\ b_1 = b_5 + a_6 - a_1 & \text{———} (1) \end{cases}$$



圖(5)

(1)＋(3)＋(5)

$\Rightarrow 0 = a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_1$

$\Rightarrow a_2 + a_4 + a_6 = a_1 + a_3 + a_5$

$(2)+(4)+(6)$

$\Rightarrow 0=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6$

$\Rightarrow a_2+a_4+a_6=a_1+a_3+a_5$

(⇐)

$$\text{令}\begin{cases} b_1=u \\ b_3=u+a_2-a_3 \\ b_5=u+a_2-a_3+a_4-a_5 \\ b_2=v \\ b_4=v+a_3-a_4 \\ b_6=v+a_3-a_4+a_5-a_6 \end{cases}$$

1、 i＝1　$a_1+b_6+b_1=a_1+v+a_3-a_4+a_5-a_6+u=v+u+a_2+a_4+a_6-a_2-a_4$

$=a_2+u+v$

2、 i＝2　$a_2+b_1+b_2=a_2+u+v$

3、 i＝3　$a_3+b_2+b_3=a_3+v+u+a_2-a_3=a_2+u+v$

4、 i＝4　$a_4+b_3+b_4=a_4+u+a_2-a_3+v+a_3-a_4=a_2+u+v$

5、 i＝5　$a_5+b_4+b_5=a_5+v+a_3-a_4+u+a_2-a_3+a_4-a_5=a_2+u+v$

6、 i＝6　$a_6+b_5+b_6=a_6+u+a_2-a_3+a_4-a_5+v+a_3-a_4+a_5-a_6=a_2+u+v$

由 1、～6、知，$b_1\sim b_6$ 爲[6]的解。另外，因爲 u、v 爲任意數，所以 S[6]的值爲任意數。

從推論 1～4，我們猜想，任意[奇]皆有解，而[偶]須滿足某個條件才有解。所以我們著手研究對於任意的 n 值是否仍有相同的結果。

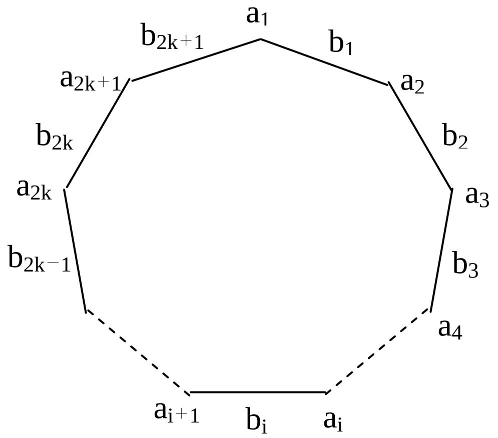
三、[n]（$n\geq 3$）

（一）[奇]有解的條件

推論 5：[奇]皆有解，而且 S[奇]爲任意數。

說明：令 n＝2k＋1，並依順時針方向，在 n 邊形的頂點上，分別填入 a_1、a_2、…、a_{2k+1}。設連接 a_i 與 a_{i+1} 的邊上，填入的數字爲 b_i，且 $c_i=a_i-a_{i+1}$，i＝1、2、…、2k＋1。若足碼超過 2k＋1，則取除以 2k＋1 後的餘數，如圖(6)。

圖(6)



設[奇]有解，則

$a_1+b_{2k+1}+b_1=a_2+b_1+b_2=a_3+b_2+b_3=\cdots=a_i+b_{i-1}+b_i=a_{i+1}+b_i+b_{i+1}=\cdots=a_{2k}+b_{2k-1}+b_{2k}=a_{2k+1}+b_{2k}+b_{2k+1}$

觀察發現，等號前後兩式，以及第 1 個和最後 1 個式子都有b_i ，將b_i消去後，得到下面的聯立方程式。

$$\Rightarrow\begin{cases} a_1+b_{2k+1} = a_2+b_2 \\ a_2+b_1 = a_3+b_3 \\ a_3+b_2 = a_4+b_4 \\ \vdots \\ a_i+b_{i-1} = a_{i+1}+b_{i+1} \\ \vdots \\ a_{2k}+b_{2k-1} = a_{2k+1}+b_{2k+1} \\ a_{2k+1}+b_{2k} = a_1+b_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} b_2=b_{2k+1}+a_1-a_2=b_{2k+1}+c_1 \qquad (2) \\ b_3=b_1+a_2-a_3=b_1+c_2 \qquad (3) \\ b_4=b_2+a_3-a_4=b_2+c_3 \qquad (4) \\ \vdots \\ b_{i+1}=b_{i-1}+a_i-a_{i+1}=b_{i-1}+c_i \qquad (i+1) \\ \vdots \\ b_{2k+1}=b_{2k-1}+a_{2k}-a_{2k+1}=b_{2k-1}+c_{2k} \qquad (2k+1) \\ b_1=b_{2k}+a_{2k+1}-a_1=b_{2k}+c_{2k+1} \qquad (1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} b_1=b_{2k}+c_{2k+1} \qquad (1) \\ b_3=b_1+c_2 \qquad (3) \\ b_5=b_3+c_4=b_1+c_2+c_4 \qquad (5) \\ b_7=b_5+c_6=b_1+c_2+c_4+c_6 \qquad (7) \\ \vdots \\ b_{2k+1}=b_{2k-1}+c_{2k}=b_1+c_2+c_4+c_6+\cdots+c_{2k} \qquad (2k+1) \\ b_2 =b_{2k+1}+c_1=b_1+c_2+c_4+...+c_{2k}+c_1 \qquad (2) \\ b_4 =b_2+c_3=b_{2k+1}+c_1+c_3=b_1+c_2+c_4+\cdots+c_{2k}+c_1+c_3 \qquad (4) \\ b_6 =b_4+c_5=b_{2k+1}+c_1+c_3+c_5=b_1+c_2+c_4+\cdots+c_{2k}+c_1+c_3+c_5 \qquad (6) \\ \vdots \\ b_{2k} =b_{2k-2}+c_{2k-1}=b_{2k+1}+c_1+c_3+c_5+\cdots+c_{2k-1} \\ \qquad =b_1+c_2+c_4+\cdots+c_{2k}+c_1+c_3+\cdots+c_{2k-1} \qquad (2k) \end{cases}$$

觀察(1)～(2k+1)可知，$b_1\sim b_{2k+1}$的值是環環相扣的，只要其中 1 個值決定後，另外 2k 個值也隨之決定。所以，我們取

$$b_i=\begin{cases} u & ，i=1 \\ u+\sum_{t=1}^{\frac{i-1}{2}} c_{2t} & ，i=3、5、\cdots、2k+1。 \\ u+\sum_{t=1}^{k} c_{2t}+\sum_{m=1}^{\frac{i}{2}} c_{2m-1} & ，i=2、4、\cdots、2k \end{cases}$$

則 b_i 爲[奇]的解。

檢驗：1、 i＝1 $\quad a_1+b_{2k+1}+b_1=a_1+u+\sum_{t=1}^{k} c_{2t}+u=a_1+2u+\sum_{t=1}^{k} c_{2t}$ 。

2、 i＝2

$$a_2+b_1+b_2=a_2+u+u+\sum_{t=1}^{k} c_{2t}+\sum_{m=1}^{1} c_{2m-1}=a_2+u+u+\sum_{t=1}^{k} c_{2t}+c_1$$

$$=a_2+u+u+\sum_{t=1}^{k} c_{2t}+a_1-a_2=a_1+2u+\sum_{t=1}^{k} c_{2t}$$

3、 i＝4、…、2k

$$a_i+b_{i-1}+b_i=a_i+u+\sum_{t=1}^{\frac{i-2}{2}} c_{2t}+u+\sum_{t=1}^{k} c_{2t}+\sum_{m=1}^{\frac{i}{2}} c_{2m-1}$$

$$=2u+\sum_{t=1}^{k} c_{2t}+a_i+c_2+c_4+\cdots+c_{i-2}+c_1+c_3+\cdots+c_{i-1}$$

$$=2u+\sum_{t=1}^{k} c_{2t}+a_i+a_2-a_3+a_4-a_5+\cdots+a_{i-2}-a_{i-1}$$

$$+a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{i-1}-a_i$$

$$=a_1+2u+\sum_{t=1}^{k} c_{2t}$$

4、 i＝3、5、…、2k+1

$$a_i+b_{i-1}+b_i=a_i+u+\sum_{t=1}^{k} c_{2t}+\sum_{m=1}^{\frac{i-1}{2}} c_{2m-1}+u+\sum_{t=1}^{\frac{i-1}{2}} c_{2t}$$

$$=a_i+u+\sum_{t=1}^{k} c_{2t}+c_1+c_3+\cdots+c_{i-2}+u+c_2+c_4+\cdots+c_{i-1}$$

$$=2u+\sum_{t=1}^{k} c_{2t}+a_i+a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{i-2}-a_{i-1}+a_2-a_3$$

$$+a_4-a_5+\cdots+a_{i-1}-a_i$$

$$=a_1+2u+\sum_{t=1}^{k} c_{2t}$$

由 1、～4、知，b_i 確實爲[奇]的解，故[奇]皆有解。另外，因爲 u 爲任意數，所以

S[奇]為任意數。

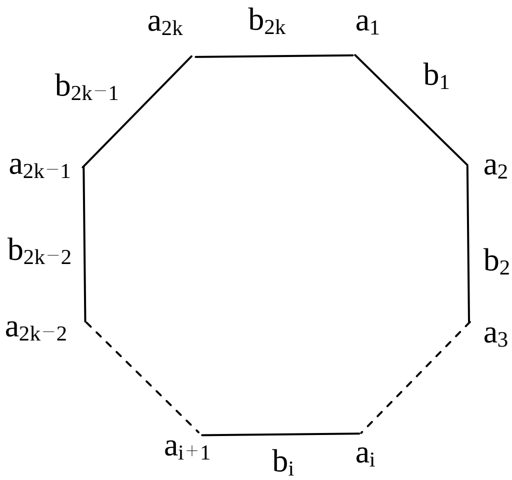
（二）n 為偶數時，有解的條件

推論 6：依順時針方向，在 2k 邊形的頂點上，分別填入$a_1, a_2, \cdots, a_{2k-1}, a_{2k}$。則，

$$[2k]\text{有解} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} a_{2i-1} = \sum_{i=1}^{k} a_{2i}\text{。而且，}S[2k]\text{為任意數。}$$

說明：設連接a_i與a_{i+1}的邊上，填入的數字為b_i，且$c_i = a_i - a_{i+1}$，i＝1、2、⋯、2k。若足碼超過 2k，則取除以 2k 後的餘數，如圖(7)。

圖(7)



(⇒)因為[2k]有解，所以

$$a_1+b_{2k}+b_1=a_2+b_1+b_2=a_3+b_2+b_3=\cdots=a_i+b_{i-1}+b_i=a_{i+1}+b_i+b_{i+1}=\cdots=$$
$$a_{2k-1}+b_{2k-2}+b_{2k-1}=a_{2k}+b_{2k-1}+b_{2k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1+b_{2k}=a_2+b_2 \\ a_2+b_1=a_3+b_3 \\ \quad\vdots \\ a_i+b_{i-1}=a_{i+1} \\ \quad\vdots \\ a_{2k-1}+b_{2k-2}=a_{2k}+b_{2k} \\ a_{2k}+b_{2k-1}=a_1+b_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_2=b_{2k}+a_1-a_2 & (2) \\ b_3=b_1+a_2-a_3 & (3) \\ b_4=b_2+a_3-a_4 & (4) \\ b_5=b_3+a_4-a_5 & (5) \\ \quad\vdots \\ b_{i+1}=b_{i-1}+a_i-a_{i+1} \\ \quad\vdots \\ b_{2k-1}=b_{2k-3}+a_{2k-2}-a_{2k-1} & (2k-1) \\ b_{2k}=b_{2k-2}+a_{2k-1}-a_{2k} & (2k) \\ b_1=b_{2k-1}+a_{2k}-a_1 & (1) \end{cases}$$

$(1)+(3)+(5)+\cdots+(2k-1)$

$\Rightarrow 0=a_2-a_3+a_4-a_5+\cdots+a_{2k-2}-a_{2k-1}+a_{2k}-a_1$

$\Rightarrow a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k-2}+a_{2k}=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-3}+a_{2k-1}$

$(2)+(4)+(6)+\cdots+(2k)$

$\Rightarrow 0=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{2k-3}-a_{2k-2}+a_{2k-1}-a_{2k}$

$\Rightarrow a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k-2}+a_{2k}=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-3}+a_{2k-1}$

(⇐)

令 $b_i=\begin{cases} u & ，i=1 \\ u+\sum_{t=1}^{\frac{i-1}{2}} c_{2t} & ，i=3、5、\cdots、2k-1 \\ v & ，i=2 \\ v+\sum_{t=1}^{\frac{i-2}{2}} c_{2t+1} & ，i=4、6、\cdots、2k \end{cases}$。

則 1、 $a_1+b_{2k}+b_1=a_1+v+\sum_{t=1}^{k-1} c_{2t+1}+u$

$=u+v+a_1+a_3-a_4+a_5-a_6+\ldots+a_{2k-1}-a_{2k}$

$=u+v+a_1+(a_3+a_5+\ldots+a_{2k-1})-(a_4+a_6+\ldots+a_{2k})$

$=u+v+a_1+a_2-a_1$

$=a_2+u+v$

2、 $a_2+b_1+b_2=a_2+u+v$

3、 $a_3+b_2+b_3=a_3+v+u+a_2-a_3=a_2+u+v$

4、$i=4、6、8、\cdots、2k$

$a_i+b_{i-1}+b_i=a_i+u+a_2-a_3+a_4-a_5+\cdots+a_{i-2}-a_{i-1}+v+a_3-a_4+a_5-a_6+\cdots$
$+a_{i-1}-a_i$

$=a_2+u+v$

5、$i=5、7、\cdots、2k-1$

$a_i+b_{i-1}+b_i=a_i+v+a_3-a_4+a_5+\cdots+a_{i-2}-a_{i-1}+u+a_2-a_3+a_4-a_5+\cdots-$
$a_{i-2}+a_{i-1}-a_i$

$=a_2+u+v$

由 1、～5、知，b_1～b_{2k} 爲[2k]的解。另外，因爲 u、v 爲任意數，所以 S[2k]爲任意數。

（三）N(S[n])的值

推論 7：設 S[n]＝p，則 $\mathbf{N(p)=\begin{cases} 1 & ，當n爲奇數 \\ 無限多 & ，當n爲偶數 \end{cases}}$。

說明：1、n 爲奇數

設 b_i 與 c_i 爲[n]的 2 組解，且 S[n]＝p，其中 i＝1、2、⋯、2k＋1。

$\therefore b_i+b_{i+1}=c_i+c_{i+1}$ ，若 i＋1 超過 2k＋1 時，則取除以 2k＋1 後的餘數。

$\because$ b_i 與 c_i 為 2 組不完全相同的數字。

$\therefore$必存在 $b_j \neq c_j$，j 為 1、2、⋯、2k＋1 的某一數字。

設 $b_1 \neq c_1$ 且 $b_1 = c_1 + m$ 。

$\because$ $b_1 + b_2 = c_1 + c_2$

$\Rightarrow c_1 + m + b_2 = c_1 + c_2$

$\Rightarrow b_2 = c_2 - m$

同理可得 $b_3 = c_3 + m$

$b_4 = c_4 - m$

$b_5 = c_5 + m$

$\vdots$

由此規律可知， $b_i = c_i + (-1)^{i+1} m$ ，i＝1、2、⋯、2k+1。

故 $b_{2k+1} = c_{2k+1} + m$

$\because$ $b_{2k+1} + b_1 = c_{2k+1} + c_1$

$\Rightarrow c_{2k+1} + m + b_1 = c_{2k+1} + c_1$

$\Rightarrow b_1 = c_1 - m\,(\rightarrow\leftarrow)$

所以不存在 $b_j \neq c_j$ ，即 N(p)＝1。

2、n 為偶數

設 b_i 為[n]的一組解，且 S[n]＝p，其中 i＝1、2、⋯、2k。令 $b_i' = b_i + (-1)^{i+1} m$，m≠0。

(1) i＝1、3、5、⋯、2k－1

$b_i' + b_{i+1}' = b_i + (-1)^{i+1} m + b_{i+1} + (-1)^{i+2} m = b_i + m + b_{i+1} - m = b_i + b_{i+1}$

(2) i＝2、4、6、⋯、2k

$b_i' + b_{i+1}' = b_i + (-1)^{i+1} m + b_{i+1} + (-1)^{i+2} m = b_i - m + b_{i+1} + m = b_i + b_{i+1}$

若 i＋1 超過 2k，則取除以 2k 後的餘數。由(1)、(2)知，N(p)為無限多。

（四）解的轉換

如果 b_i 為[n]的一組解，且 S[n]＝p。我們找到一種方法，能得到另一組解 b_i' ，其 S[n]＝ p' ≠p。

推論 8：若 b_i 為使得 S[n]＝p 的一組解，i＝1、2、⋯、n。

1、當 n 為奇數時，令 $b_i' = b_i + m$ ， $m \neq 0$ 。

2、當 n 為偶數時，令 $b_i' = \begin{cases} b_i + r & \text{，i為奇數} \\ b_i + s & \text{，i為偶數} \end{cases}$ ， $r + s \neq 0$ 。

則 b_i' 為使得 S[n]＝ p' ≠p 的一組解。

說明：以下 $b_0' = b_n'$ ， $b_0 = b_n$ 。

1、 $p' = b_i' + b_{i-1}' + a_i = b_i + m + b_{i-1} + m + a_i = p + 2m \neq p$ 。

2、(1) i 為奇數

$p' = b_i' + b_{i-1}' + a_i = b_i + r + b_{i-1} + s + a_i = p + r + s \neq p$ 。

(2) i 為偶數

$$p' = b_i' + b_{i-1}' + a_i = b_i + s + b_{i-1} + r + a_i = p + r + s \neq p$$ 。

（五）b_i 的另一種塡法

在推論 5 和 6 中，我們已經知道 b_i 該如何塡入，才是數字盤的解。但是，我們覺得該塡法有點不易記憶，所以又找了另一種塡法。

推論 9：將 b_i 按以下方法塡入，則 b_i 是[n]的解。

1、當 n 爲奇數，令 $b_i = a_{i+2} + a_{i+4} + \cdots + a_{i+n-1}$ ，i＝1、2、…、n。若足碼超過 n，則取除以 n 之後的餘數。

2、當 n 爲偶數，令 $b_i = a_{i+2} + a_{i+4} + \cdots + a_{i+n-2}$ ，i＝1、2、…、n。若足碼超過 n，則取除以 n－1 之後的餘數，其中 $a_0 = a_{n-1}$ 。

說明：1、 $a_i + b_i + b_{i-1} = a_i + a_{i+2} + a_{i+4} + \cdots + a_{i+n-1} + a_{i+1} + a_{i+3} + \cdots + a_{i+n-2}$

$= a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + \cdots + a_{i+n-2} + a_{i+n-1}$

，其中 $b_0 = b_n$ 。

將 1、2、…、n 代入 i 中，皆可得到，$a_i + b_i + b_{i-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 。

2、(1) i＝1

$a_1 + b_n + b_1 = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{n-1} + a_3 + a_5 + \cdots + a_{n-1}$

$= a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_n + a_3 + a_5 + \cdots + a_{n-1}$

$= \sum_{k=2}^{n} a_k$

(2) i＝2、3、…、n

$a_i + b_i + b_{i-1} = a_i + a_{i+2} + a_{i+4} + \cdots + a_{i+n-2} + a_{i+1} + a_{i+3} + \cdots + a_{i+n-3}$

$= a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + \ldots + a_{i+n-3} + a_{i+n-2}$

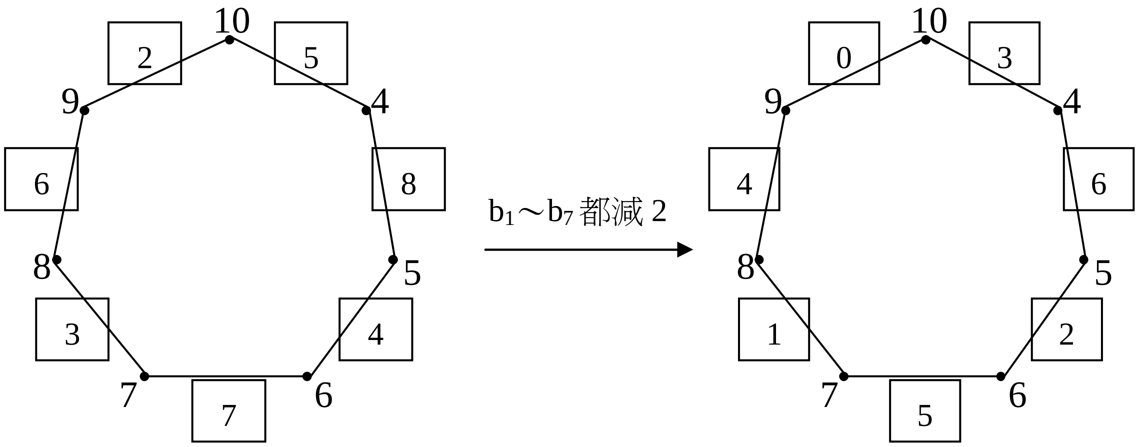
將 2、3、…、n 代入 i 中，皆可得到，$a_i + b_i + b_{i-1} = \sum_{k=2}^{n} a_k$ 。

研究到這裡，我們可以用以上的結果，解決研究動機中的題目。

四、解決研究動機的題目與延伸問題

(1)設 b_1=5，由推論 5 的公式可先算出 $b_1 \sim b_7$ 。而由推論 8 知，可再將 $b_1 \sim b_7$ 都減 2，

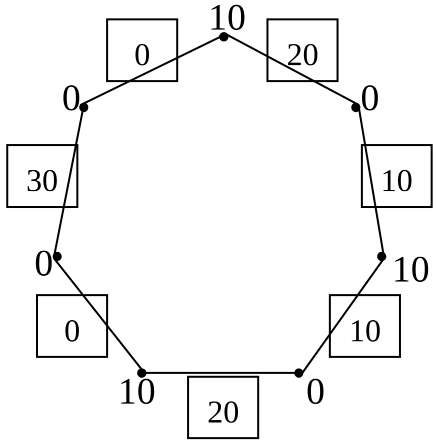
$$
\text{故}\begin{cases}
b_1 = 5 \\
b_3 = 5+4-5 = 4 \\
b_5 = 5+4-5+6-7 = 3 \\
b_7 = 5+4-5+6-7+9-10 = 2 \\
b_2 = 5+4-5+6-7+9-10+10-4 = 8 \\
b_4 = 5+4-5+6-7+9-10+10-4+5-6 = 7 \\
b_6 = 5+4-5+6-7+9-10+10-4+5-6+7-8 = 6
\end{cases}
$$



(2)由推論 9 知，可令 $b_i = a_{i+2} + a_{i+4} + a_{i+6}$ ，i＝1、2、⋯、7。若足碼超過 7，則取除以 7 之後的餘數。則 b_i 為[7]的解，而且

$a_i + b_i + b_{i-1} = \sum_{k=1}^{7} a_k$ 。

例：



$\because b_i = a_{i+2} + a_{i+4} + a_{i+6}$ ，且 $0 \le a_i \le 10$ 。

$\therefore b_i \le 30$ 。

又$\because$右圖的實例。

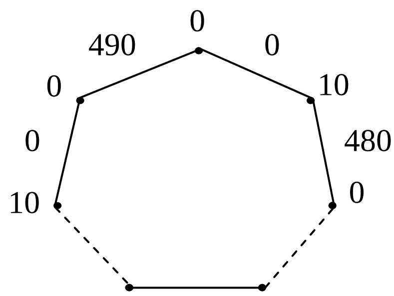
$\therefore k_{min} = 30$ 。

(3)由推論 9 知，可令 $b_i = a_{i+2} + a_{i+4} + \cdots + a_{i+98}$ ，i＝1、2、⋯、99。若足碼超過 99，則取除以 99 之後的餘數。則 b_i 為[99]的解，而且 $a_i + b_i + b_{i-1} = \sum_{k=1}^{99} a_k$ 。

$\because b_i = a_{i+2} + a_{i+4} + \cdots + a_{i+98}$ ，且 $0 \le a_i \le 10$ 。

$\therefore b_i \le 490$ 。

又$\because$此例：取 $a_i = \begin{cases} 0 & \text{，i為奇數} \\ 10 & \text{，i為偶數} \end{cases}$ ，則某些邊必須點選 490 次才能過關，如右圖。



$\therefore k_{min} = 490$ 。

(4)若將題目改為：n 邊形上（n 為奇數），若電腦任意改變頂點上 x～y（x、y≥ 0 ）的數字，而玩家均可以過關，試求「點選上限」的最小值 k_{min} 。

解：模仿第(2)(3)小題的解法，可推得[奇]的 k_{min} 。可令 $b_i = a_{i+2} + a_{i+4} + \cdots + a_{i+n-1}$ ，i＝1、2、⋯、n。若足碼超過 n，則取除以 n 之後的餘數。

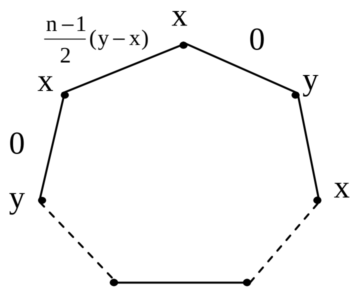
則 b_i 為[奇]的解，而且 $a_i + b_i + b_{i-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 。

$\because b_i = a_{i+2} + a_{i+4} + \cdots + a_{i+n-1}$ ，且 $x \le a_i \le y$ 。

$\therefore \frac{n-1}{2}\times x \le b_i \le \frac{n-1}{2}\times y$ 。

又∵此例：取 $a_i=\begin{cases} x\text{ ，i爲奇數} \\ y\text{ ，i爲偶數} \end{cases}$ ，則某些邊必須點選 $\frac{n-1}{2}(y-x)$ 次才能過關，如右圖。

$\therefore k_{min}=\frac{n-1}{2}(y-x)$ 。



五、[n，k]

若將[n，k]所有對角線上的數字填入 0，則所有對角線可視爲不存在，故[n]的解可爲[n，k]的解，但我們仍想了不同的方法找[n，k]的解。

（一）[n，1]

推論 10：將[n，1]視爲有 1 共同邊(即對角線)的 2 個多邊形數字盤 A、B。則，

1、當 n 爲奇數，則 A、B 必爲[奇]和[偶]，此時這條對角線稱爲奇偶線。

2、當 n 爲偶數，則 A、B 同爲[奇]，或同爲[偶]。此時這條對角線稱爲奇奇線與偶偶線。

說明：1、∵奇數＝偶數＋奇數。

∴奇數條邊可分爲偶數和奇數 2 部分。

故再加上 1 條對角線後，A、B 必爲[奇]、和[偶]。

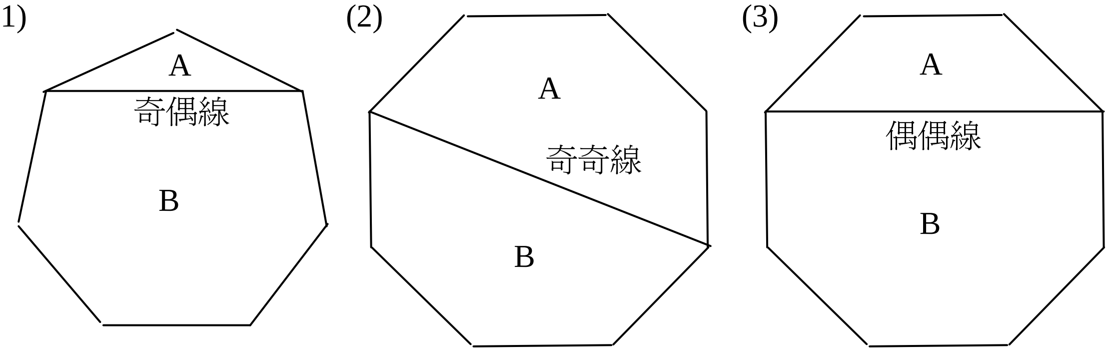
2、∵偶數＝奇數＋奇數＝偶數＋偶數

∴偶數條邊可分爲奇數和奇數，或者偶數和偶數 2 部分。

故再加上 1 條對角線後，A、B 同爲[奇]，或同爲[偶]。

例：

(1) (2) (3)



推論 11：1、[奇，1]皆有解。

2、設[偶，1]頂點上的數字爲 a_1 、 a_2 、…、 a_{2k} ，對角線 2 端點的數字爲 a_u 、 a_v 。

(1)若對角線爲奇奇線，則[偶，1]必有解。

(2)若對角線爲偶偶線，則[偶，1]有解 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} a_{2i-1}=\sum_{i=1}^{k} a_{2i}$ 。

說明：1、將[奇，1]按以下步驟，就能得到[奇，1]的解。

步驟 1：將奇偶線填入數字 d。

步驟 2：由推論 5 知，可得到[奇]的解 b_i 。

則 b_i 和 d 爲[奇，1]的解。

2、(1)將[偶，1]按以下步驟，就能得到[偶，1]的解。

步驟 1：將奇奇線填入數字 $d=\begin{cases}\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{k}a_{2i}-\sum_{i=1}^{k}a_{2i-1}) & \text{，當u、v皆爲奇數}\\ \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{k}a_{2i-1}-\sum_{i=1}^{k}a_{2i}) & \text{，當u、v皆爲偶數}\end{cases}$。

步驟 2：由推論 6 知，可得到[偶]的解 b_j。

則 b_j 和 d 爲[偶，1]的解。

(2)(a)我們先說明[偶，1]有解 $\Leftrightarrow$ [偶]有解。

($\Rightarrow$) 設 u＜v，S[偶，1]＝p，而且[偶，1]的解爲 b_i 與 d (偶偶線上的數字)。

①當 u 爲奇數

$$\text{令}\begin{cases}b_i'=b_i-d & \text{，}1\le i<u\text{，}v<i\le 2k\text{，且}i\text{爲奇數}\\ b_i'=b_i-d & \text{，}u<i<v\text{，且}i\text{爲偶數}\\ b_i'=b_i & \text{，其餘的 }i\\ \text{偶偶線上的數字}=0\end{cases}\text{。}$$

②當 u 爲偶數

$$\text{令}\begin{cases}b_i'=b_i-d & \text{，}1\le i<u\text{，}v<i\le 2k\text{，且}i\text{爲偶數}\\ b_i'=b_i-d & \text{，}u<i<v\text{，且}i\text{爲奇數}\\ b_i'=b_i & \text{，其餘的 }i\\ \text{偶偶線上的數字}=0\end{cases}\text{。}$$

則 b_i' 爲[偶]的解，且 S[偶]＝p－d。

($\Leftarrow$) 設 u＜v，S[偶]＝q，而且[偶]的解爲 c_i。

①當 u 爲奇數

$$\text{令}\begin{cases}c_i'=c_i+e & \text{，}1\le i<u\text{，}v<i\le 2k\text{，且}i\text{爲奇數}\\ c_i'=c_i+e & \text{，}u<i<v\text{，且}i\text{爲偶數}\\ c_i'=c_i & \text{，其餘的 }i\\ \text{偶偶線上的數字}=e\end{cases}\text{。}$$

②當 u 爲偶數

$$\text{令}\begin{cases}c_i'=c_i+e & \text{，}1\le i<u\text{，}v<i\le 2k\text{，且}i\text{爲偶數}\\ c_i'=c_i+e & \text{，}u<i<v\text{，且}i\text{爲奇數}\\ c_i'=c_i & \text{，其餘的 }i\\ \text{偶偶線上的數字}=e\end{cases}\text{。}$$

則 c_i' 和 e 爲[偶，1]的解，且 S[偶，1]＝q+e。

(b)由推論 6 和(a)知，[偶，1]有解 $\Leftrightarrow$ [偶]有解 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k}a_{2i-1}=\sum_{i=1}^{k}a_{2i}$。

（二）[n，k]

對於[n，k]，我們採取每次處理 1 條對角線的方法，逐一填完所有對角線。

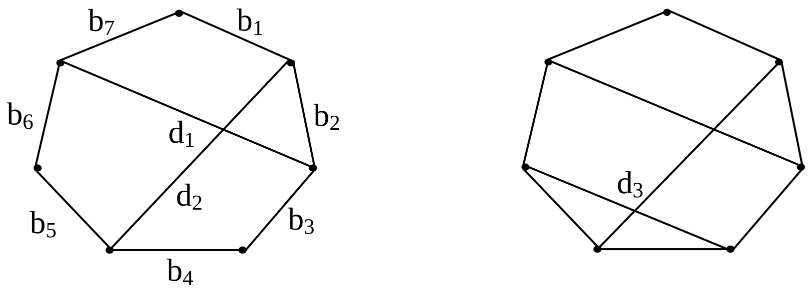
推論 12：1、[奇，t]有解$\Leftrightarrow$[奇，t+1]有解。

2、(1)當新增加的對角線爲奇奇線時，[偶，t]有解$\Rightarrow$[偶，t+1]有解。

(2)當新增加的對角線爲偶偶線時，[偶，t]有解$\Leftrightarrow$[偶，t+1]有解。

說明：

1、



[奇，t] [奇，t+1]

(⇒) 設[奇，t]的解爲b_i和d_j，並分別爲周圍邊上與對角線上的數字，其中 i＝1、2、⋯、n，j＝1、2、⋯、t。接著照以下步驟，就得到[奇，t+1]的解。

步驟 1：將新增加的奇偶線填入數字d_{t+1}。

步驟 2：由推論 5 知，可得到[奇]的解b_i'。

則b_i+b_i'和d_j(j＝1、2、⋯、t+1)爲[奇，t+1]的解。

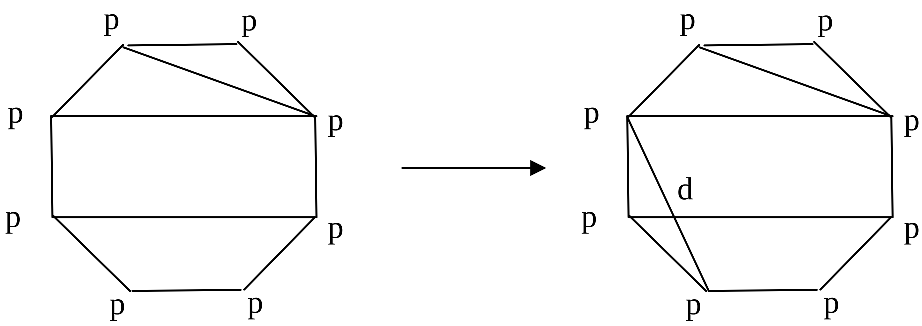
(⇐) 設[奇，t+1]的解爲c_i和e_j，並分別爲周圍邊上與對角線上的數字，其中 j＝1、2、⋯、t+1。接著照以下步驟，就能得到[奇，t]的解。

步驟 1：將e_{t+1}變成 0。

步驟 2：由推論 5 知，可得到[奇]的解c_i'。

則c_i+c_i'和e_j(j＝1、2、⋯、t)爲[奇，t]的解。

2、(1)設 S[偶，t]＝p，此時可將[偶，t]看成頂點數字($a_1\sim a_{2k}$)皆爲 p 的[偶]。



[偶，t] [偶，t+1]

若將奇奇線填入$d\neq 0$。

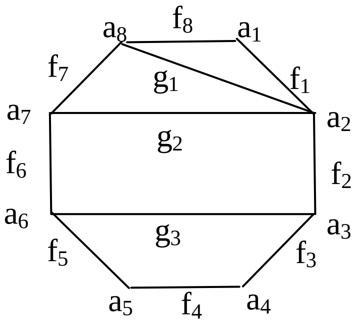
$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{k}a_{2i-1}=kp+2d\neq kp=\sum_{i=1}^{k}a_{2i}\text{ 或 }\sum_{i=1}^{k}a_{2i-1}=kp\neq kp+2d=\sum_{i=1}^{k}a_{2i}\text{。}$$

$\Rightarrow$[偶]無解，即[偶，t+1]無解。

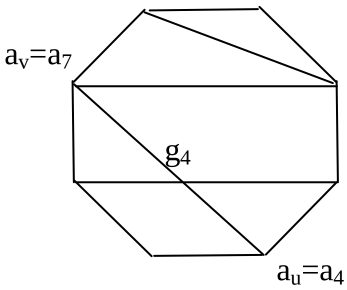
故奇奇線必須填 0。

則[偶，t]的解與 0 即爲[偶，t+1]的解。

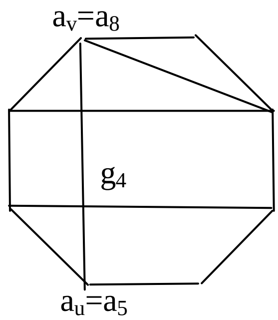
(2)設偶偶線 2 端點數字爲a_u、a_v，且 u＜v。



[偶，t]



[偶，t+1]



[偶，t+1]

(⇒) 設 S[偶，t]＝q，而且[偶，t]的解爲 f_i 和 g_j ，並分別爲周圍邊上與對角線上的數字，其中 i＝1、2、⋯、2k，j＝1、2、⋯、t。接著照以下步驟，就可得到[偶，t+1]的解。

步驟 1：將偶偶線填入 g_{t+1} 。

步驟 2：①若 u 爲奇數

$$令 f_i' = \begin{cases} f_i + g_{t+1} & ，1 \le i < u，\ v < i \le 2k，且i爲奇數 \\ f_i + g_{t+1} & ，u < i < v，且i爲偶數 \\ f_i & ，其餘的 i \end{cases} 。$$

②若 u 爲偶數

$$令 f_i' = \begin{cases} f_i + g_{t+1} & ，1 \le i < u，\ v < i \le 2k，且i爲偶數 \\ f_i + g_{t+1} & ，u < i < v，且i爲奇數 \\ f_i & ，其餘的 i \end{cases} 。$$

則 f_i' 和 g_j (j＝1、2、⋯、t+1)爲[偶，t+1]的解，且 S[偶，t+1]＝ $q + g_{t+1}$ 。

(⇐) 設 S[偶，t+1]＝l，且[偶，t +1]的解爲 α_i 和 β_j ，並分別爲周圍邊上與對角線上的數字，其中 i＝1、2、⋯、2k，j＝1、2、⋯、t+1。接著照以下步驟，就可得到[偶，t]的解。

步驟 1：將 β_{t+1} 變成 0。

步驟 2：①若 u 爲奇數

$$令 \alpha_i' = \begin{cases} \alpha_i - \beta_{t+1} & ，1 \le i < u，\ v < i \le 2k，且i爲奇數 \\ \alpha_i - \beta_{t+1} & ，u < i < v，且i爲偶數 \\ \alpha_i & ，其餘的 i \end{cases} 。$$

②若 u 爲偶數

$$令 \alpha_i' = \begin{cases} \alpha_i - \beta_{t+1} & ，1 \le i < u，\ v < i \le 2k，且i爲偶數 \\ \alpha_i - \beta_{t+1} & ，u < i < v，且i爲奇數 \\ \alpha_i & ，其餘的 i \end{cases} 。$$

則 α_i' 和 β_j (j＝1、2、⋯、t)爲[偶，t]的解，且 S[偶，t]＝l－ β_{t+1} 。

推論 13：1、[奇，k]皆有解

2、(1)若[偶，k]至少有一條奇奇線，則[偶，k]有解。

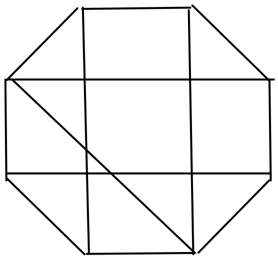
(2)若[偶，k]沒有奇奇線，則[偶，k]有解 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} a_{2i-1} = \sum_{i=1}^{k} a_{2i}$ 。

說明：1、由推論 11、12 知，[奇，1]、[奇，2]、…、[奇，$\frac{n(n-3)}{2}$]皆有解。

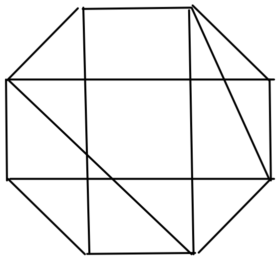
2、(1)由推論 11 知，[偶，1]有解，再由推論 12 知，不論接下來的是奇奇線或偶偶線，皆可使[偶，2]、…、[偶，$\frac{n(n-3)}{2}$]有解。

(2)由推論 6 和 12 知，[偶，$\frac{n(n-3)}{2}$]有解$\Leftrightarrow$[偶，$\frac{n(n-3)}{2}-1$]有解$\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow$[偶，1]有解$\Leftrightarrow$[偶]有解$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} a_{2i-1}=\sum_{i=1}^{k} a_{2i}$。故[偶，k]有解$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} a_{2i-1}=\sum_{i=1}^{k} a_{2i}$。

例：下圖[8，5]沒有奇奇線，故須滿足推論中的條件才能有解。而[8，6]有 1 條奇奇線，必有解。



[8，5]



[8，6]

推論 14：S[n，k]為任意數，N(S[n，k])為無限多。

說明：1、將[n，k]的全部對角線拿掉，則[n，k]就變成[n]。由推論 5 和 6 知，S[n]為任意數，故 S[n，k]為任意數。

2、(1)[奇，k]：由推論 10 知，必可選出 1 個 X 為[偶]，由推論 7 知，N(S[X])為無限多，故 N(S[奇，k])為無限多。

(2)[偶，k]：由推論 7 知，N(S[偶])為無限多，故 N(S[偶，k])為無限多。

六、[$\overline{n}$]（n≥2）

研究完多邊形後，我們繼續研究直線的相關問題。

（一）n 為奇數

推論 15：在[$\overline{奇}$]的 2 端點與分點上，由左至右填入a_1, a_2,…, a_{2k-1}, a_{2k}。則，

$$[\overline{奇}]有解\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} a_{2i-1}=\sum_{i=1}^{k} a_{2i}$$

說明：令每小段填入的數字為b_i，i＝1、2、…、2k－1，如圖(8)。

圖(8)

1、我們先說明[$\overline{奇}$]有解$\Leftrightarrow$[偶]有解。

(⇒) 設 b_i 爲$[\overline{奇}]$的解，i＝1、2、…、2k－1，而且 $S[\overline{奇}]$＝p。

接著照以下步驟，就可得到[偶]的解。

步驟 1：連接 a_1 與 a_{2k} ，並令此邊的數字爲 d。

步驟 2：令 $b_i' = \begin{cases} b_i & ，當i爲奇數 \\ b_i + d & ，當i爲偶數 \end{cases}$

則 b_i' 和 d 爲[偶]的解，且 S[偶]＝$S[\overline{奇}]$＝p＋d。

(⇐) 設 b_j 爲[偶]的解，j＝1、2、…、2k，而且 S[偶]＝q。

接著照以下步驟，就可得到$[\overline{奇}]$的解。

步驟 1：將 b_{2k} 變成 0。

步驟 2：令 $b_j' = \begin{cases} b_j & ，當j爲奇數 \\ b_j - b_{2k} & ，當j爲偶數 \end{cases}$

則 b_j'（j＝1、2、…、2k－1）爲$[\overline{奇}]$的解，且 $S[\overline{奇}]$＝S[偶]＝ $q - b_{2k}$ 。

2、由推論 6 和 1、知，$[\overline{奇}]$有解 ⇔ [偶]有解 ⇔ $\sum_{i=1}^{k} a_{2i-1} = \sum_{i=1}^{k} a_{2i}$ 。

推論 16：$S[\overline{奇}]$爲任意數，$N(S[\overline{奇}])$＝1。

說明：1、設 $S[\overline{奇}]$＝p， b_i 爲$[\overline{奇}]$的解，i＝1、2、…、2k－1。

令 $b_i' = \begin{cases} b_i + r & ，當i爲奇數 \\ b_i & ，當i爲偶數 \end{cases}$ ，r爲任意數。

則 $S[\overline{奇}]$＝p+r。故 $S[\overline{奇}]$爲任意數。

2、設 $S[\overline{奇}]$＝p，則 $a_1 + b_1 = a_2 + b_1 + b_2 = \ldots = a_{2k-1} + b_{2k-2} + b_{2k-1} = a_{2k} + b_{2k-1} = p$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 + b_2 \\ a_2 + b_1 = a_3 + b_3 \\ a_3 + b_2 = a_4 + b_4 \\ \quad\vdots \\ a_{2k-2} + b_{2k-3} = a_{2k-1} + b_{2k-1} \\ a_{2k-1} + b_{2k-2} = a_{2k} \end{cases}$$

又 $b_1 = p - a_1$ 代入上式。

$$\Rightarrow b_i = \begin{cases} p - a_1 & ，i = 1 \\ p - a_1 + \sum_{t=1}^{\frac{i-1}{2}} c_{2t} & ，i = 3、5、7、\cdots、2k-1 \\ \sum_{t=1}^{\frac{i}{2}} c_{2t-1} & ，i = 2、4、6、\cdots、2k-2 \end{cases}$$

∵p 和 a_i 皆爲已知數

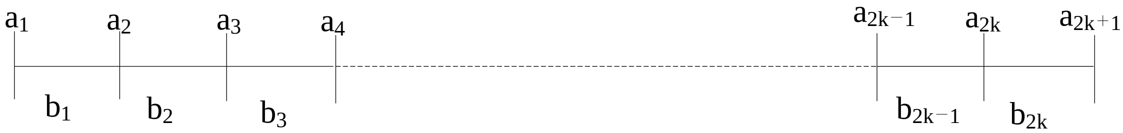
∴ b_i 爲唯一值。

故 $N(S[\overline{奇}])$＝1。

（二）n 為偶數

推論 17：任意[$\overline{\text{偶}}$]必有唯一解，S[$\overline{\text{偶}}$]是唯一值，而且 N(S[$\overline{\text{偶}}$])＝1。

說明：在偶數段數字線的 2 端點與分點上，由左至右填入 a_1, a_2,⋯, a_{2k}, a_{2k+1} 。而且每小段填入的數字為 b_i ，i＝1、2、⋯、2k，如圖(9)。



圖(9)

連接 a_1 與 a_{2k+1}，則形成[奇]。由推論 5 知，[奇]必有解，而且解為

$$b_i=\begin{cases} u & ,\ i=1 \\ u+\sum_{t=1}^{\frac{i-1}{2}} c_{2t} & ,\ i=3、5、\cdots、2k+1 \\ u+\sum_{t=1}^{k} c_{2t}+\sum_{m=1}^{\frac{i}{2}} c_{2m-1} & ,\ i=2、4、\cdots、2k \end{cases}$$

，而且設 S[奇]＝p。

此時將 b_{2k+1} 變成 0。

$$\Rightarrow b_i=\begin{cases} \sum_{n=1}^{\frac{2k-i+1}{2}} -c_{2(k-n+1)} & ,\ i=1、3、\cdots、2k-1 \\ \sum_{n=1}^{\frac{i}{2}} c_{2n-1} & ,\ i=2、4、\cdots、2k \end{cases}$$

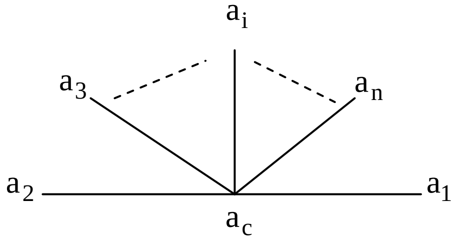
則 b_i（i＝1、2、⋯、2k）為[$\overline{\text{偶}}$]的解，且 S[$\overline{\text{偶}}$]＝p－2 b_{2k+1} 。

∵p 和 a_i 為已知數。

∴ b_i 為唯一解，S[$\overline{\text{偶}}$]為唯一值，N(S[$\overline{\text{偶}}$])＝1。

七、[c-n]

[c-n]可視為[$\bar{2}$]的分點加上 n－2 條邊。故可先求出[$\bar{2}$]的解 b_i ，再每次處理 1 條邊，逐一填完 n－2 條邊。



推論 18：[c-t]有解$\Leftrightarrow$[c-(t+1)]有解，$t\geq 2$。

說明：($\Rightarrow$) 設[c-t]的頂點數字爲a_c與a_i，其解爲b_i，且 S[c-t]＝p，i＝1、2、⋯、t。

令$\begin{cases} b'_i = b_i + \dfrac{a_{t+1}-p}{t} \\ b_{t+1} = \dfrac{(t-1)(p-a_{t+1})}{t} \end{cases}$。

則b'_i與b_{t+1}爲[c-(t+1)]的解。

檢驗：1、i＝1、2、⋯、t　$a_i+b'_i = a_i+b_i+\dfrac{a_{t+1}-p}{t} = p+\dfrac{a_{t+1}-p}{t} = \dfrac{(t-1)p+a_{t+1}}{t}$。

2、i＝t+1　$a_{t+1}+b_{t+1} = a_{t+1}+\dfrac{(t-1)(p-a_{t+1})}{t} = \dfrac{(t-1)p+a_{t+1}}{t}$。

3、$a_c+b'_1+b'_2+\cdots+b'_t+b_{t+1}$

$$= a_c+b_1+\frac{a_{t+1}-p}{t}+b_2+\frac{a_{t+1}-p}{t}+\cdots+b_t+\frac{a_{t+1}-p}{t}+\frac{(t+1)(p-a_{t+1})}{t}$$

$$= p+a_{t+1}-p+\frac{(t-1)(p-a_{t+1})}{t}$$

$$= \frac{(t-1)p+a_{t+1}}{t}$$ 。

($\Leftarrow$) 設[c-(t+1)]的頂點數字爲a_c與a_i，其解爲b_i，且 S[c-(t+1)]＝q，i＝1、2、⋯、t+1。

令$\begin{cases} b_{t+1} = 0 \\ b'_i = b_i + \dfrac{b_{t+1}}{t-1} \quad ，i=1、2、\cdots、t \end{cases}$。

則b'_i爲[c-t]的解，i＝1、2、⋯、t。

檢驗：1、i＝1、2、⋯、t　$a_i+b'_i = a_i+b_i+\dfrac{b_{t+1}}{t-1} = q+\dfrac{b_{t+1}}{t-1}$。

2、$a_c-b_{t+1}+\sum_{i=1}^{t} b'_i = a_c-b_{t+1}+\sum_{i=1}^{t} b_i+\dfrac{tb_{t+1}}{t-1} = a_c+\sum_{i=1}^{t} b_i+\dfrac{b_{t+1}}{t-1} = q+\dfrac{b_{t+1}}{t-1}$。

推論 19：[c-n]有唯一解，S[c-n]爲唯一值，N(S[c-n])＝1。

說明： 由推論 18 知，[c-2]$\Leftrightarrow$[c-3]$\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow$[c-n]。

$\because$[c-2]＝[$\bar{2}$]，又[$\bar{2}$]有唯一解，S[$\bar{2}$]爲唯一值，N(S[$\bar{2}$])＝1。（由推論 17 知）

$\therefore$[c-n]有唯一解，S[c-n]爲唯一值，N(S[c-n])＝1。

八、[m•n]

研究完[c-n]後，我們繼續研究 2 多邊形，有一共同頂點的情形。

推論 20：任意[m•n]皆有解，而且 N(S[m•n])爲無限多。

說明： 令[m•n]共點上的數字爲$x_1=y_1$或$u_1=v_1$。

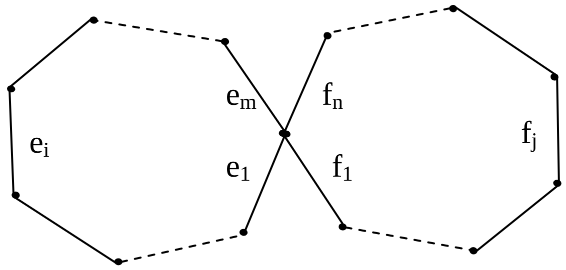
1、m、n 皆爲奇數

照以下步驟，就可得到[m•n]的解。

(1)步驟 1：找出[m]的解e_i，且 S[m]＝p。此時[n]成爲[n]′($\because$ y_1視爲 p)。

步驟 2：找出[n]′的解f_j，且 S[n]′＝p。

則e_i和f_j為[m•n]的解。

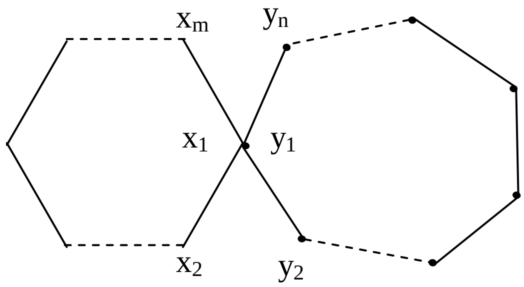


(2)令$e_i' = \begin{cases} e_i + r\text{，}i\text{為奇數} \\ e_i - r\text{，}i\text{為偶數} \end{cases}$ ， $f_j' = \begin{cases} f_j - r\text{，}j\text{為奇數} \\ f_j + r\text{，}j\text{為偶數} \end{cases}$ ，$r \neq 0$ 。

則e_i'和f_j'為[m•n]的解，且 S[m•n]＝p。故 N(S[m•n])為無限多。

2、m、n 為 1 奇、1 偶

設 m 為偶數，且x_i、y_j為[m]、[n]頂點上的數字，其中 i＝1、2、…、m，j＝1、2、…、n。接著照以下步驟，就可得到[m•n]的解。



(1)步驟 1：將連接y_1與y_n的邊，填入數字$q = \sum_{t=1}^{\frac{m}{2}} x_{2t} - \sum_{t=1}^{\frac{m}{2}} x_{2t-1}$。並找出[m]′(∵$x_1$視為$x_1 + q$)的解$g_i$，且$S[m]' = x_1 + q$。此時[n]成為[n]′(∵$y_1$視為$x_1 + q$，$y_n$視為$y_n$ ＋q)。

步驟 2：找出[n]′的解h_j，且$S[n]' = x_1 + q$。

並令$h_j' = \begin{cases} h_j & \text{，當}j = 1\text{、}2\text{、}\cdots\text{、}n-1 \\ h_j + q & \text{，當}j = n \end{cases}$ 。

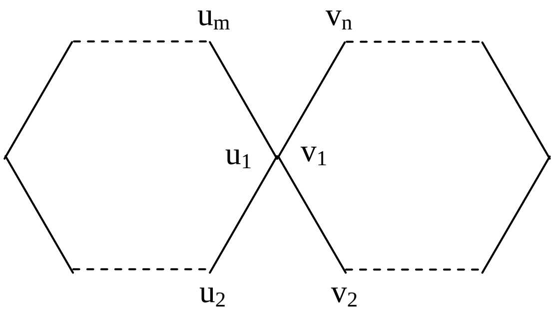
則g_i和h_j'為[m•n]的解。

(2)令$g_i' = \begin{cases} g_i + s\text{，}i\text{為奇數} \\ g_i - s\text{，}i\text{為偶數} \end{cases}$ ，$s \neq 0$ 。而h_j'不變。

則g_i'與h_j'為[m•n]的解，且 $S[m•n] = x_1 + q$。故 N(S[m•n])為無限多。

3、m、n 皆為偶數

設u_i和v_j為[m]、[n]頂點上的數字，其中 i＝1、2、…、m，j＝1、2、…、n。接著照以下步驟，就可得到[m•n]的解。



(1)步驟 1：將連接 v_1 與 v_n 的邊，填入數字 $R=\sum_{c=1}^{\frac{m}{2}} u_{2c}-\sum_{c=1}^{\frac{m}{2}} u_{2c-1}$。並找出$[m]'$($\because u_1$ 視為 u_1+R)的解 w_i，且 $S[m]'=u_1+R$。此時[n]成為$[n]'$($\because v_1$ 視為 u_1+R，v_n 視為 v_n+R)。

步驟 2：再將連接 u_1 與 u_m 的邊，填入數字 $Q=\sum_{d=1}^{\frac{n}{2}} v_{2d}-\sum_{d=1}^{\frac{n}{2}} v_{2d-1}$。此時$[n]'$可視為$[n]''$ ($\because v_1$ 視為 u_1+R+Q)

步驟 3：找出$[n]''$的解 z_j，且 $S[n]''=u_1+R$。並令

$$w_i'=\begin{cases} w_i & \text{，當}i\text{為奇數} \\ w_i+Q & \text{，當}i\text{為偶數} \end{cases}；\ z_j'=\begin{cases} z_j & \text{，當}j=1\text{、}2\text{、}\cdots\text{、}n-1 \\ z_j+R & \text{，當}j=n \end{cases}。$$

則 w_i' 與 z_j' 為[m•n]的解，且 $S[m•n]=u_1+R$。

(2)令 $w_i''=\begin{cases} w_i'-T & \text{，}i\text{為奇數} \\ w_i'+T & \text{，}i\text{為偶數} \end{cases}$，$z_j''=\begin{cases} z_j-T & \text{，}j\text{為奇數} \\ z_j+T & \text{，}j\text{為偶數} \end{cases}$，$T\neq 0$。

則 w_i'' 與 z_j'' 為[m•n]的解，且 $S[m•n]=u_1+R$。故 N(S[m•n])為無限多。

推論 21：$\mathbf{S[m•n]}=\begin{cases} \textbf{唯一值} & \textbf{，當m、n皆為偶數} \\ \textbf{任意數} & \textbf{，當m、n至少有1個為奇數} \end{cases}$。

說明：我們按照推論 18 中的分類來討論。

1、設 e_i 和 f_j 為[m•n]的解，且 S[m•n]＝p。

令 $e_i''=\begin{cases} e_i+U & \text{，}i\text{為奇數} \\ e_i+3U & \text{，}i\text{為偶數} \end{cases}$，$f_j''=\begin{cases} f_j+U & \text{，}j\text{為奇數} \\ f_j+3U & \text{，}j\text{為偶數} \end{cases}$，$U\neq 0$。

則 e_i'' 與 f_j'' 仍為[m•n]的解，且 S[m•n]＝p＋4U。

2、設 g_i 和 h_j' 為[m•n]的解，且 S[m•n]＝q。

令 $g_i''=\begin{cases} g_i & \text{，}i\text{為奇數} \\ g_i+V & \text{，}i\text{為偶數} \end{cases}$，$h_j''=\begin{cases} h_j & \text{，}j\text{為奇數} \\ h_j+V & \text{，}j\text{為偶數} \end{cases}$，$V\neq 0$。

則 g_i'' 與 h_j'' 仍為[m•n]的解，且 S[m•n]＝q＋V。

3、設 a_i 與 b_j 為[m•n]的解，且 S[m•n]＝t_1；c_i 與 d_j 為[m•n]的解，且 S[m•n]＝t_2。設 m＝2K，n＝2L，則 i＝1、2、⋯、2K，j＝1、2、⋯、2L。令 $S=t_1-t_2\neq 0$。

$$
則\begin{cases}
a_1+a_2+S=c_1+c_2\\
a_2+a_3+S=c_2+c_3\\
\vdots\\
a_{2K-2}+a_{2K-1}+S=c_{2K-2}+c_{2K-1}\\
a_{2K-1}+a_{2K}+S=c_{2K-1}+c_{2K}\\
a_1+a_{2K}+b_1+b_{2L}+S=c_1+c_{2K}+d_1+d_{2L}\\
b_1+b_2+S=d_1+d_2\\
b_2+b_3+S=d_2+d_3\\
\vdots\\
b_{2L-2}+b_{2L-1}+S=d_{2L-2}+d_{2L-1}\\
b_{2L-1}+b_{2L}+S=d_{2L-1}+d_{2L}
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow\begin{cases}
a_1+a_2+S=c_1+c_2 & \text{——— (1)}\\
c_2+c_3=a_2+a_3+S & \text{——— (2)}\\
a_3+a_4+S=c_3+c_4 & \text{——— (3)}\\
\vdots\\
c_{2K-2}+c_{2K-1}=a_{2K-2}+a_{2K-1}+S & \text{——— (2K}-2)\\
a_{2K-1}+a_{2K}+S=c_{2K-1}+c_{2K} & \text{——— (2K}-1)\\
b_1+b_2+S=d_1+d_2 & \text{——— [1]}\\
d_2+d_3=b_2+b_3+S & \text{——— [2]}\\
b_3+b_4+S=d_3+d_4 & \text{——— [3]}\\
\vdots\\
d_{2L-2}+d_{2L-1}=b_{2L-2}+b_{2L-1}+S & \text{——— [2K}-2]\\
d_{2L-1}+d_{2L}+S=b_{2L-1}+b_{2L} & \text{——— [2K}-1]\\
a_1+a_{2K}+b_1+b_{2L}+S=c_1+c_{2K}+d_1+d_{2L} & \text{——— (A)}
\end{cases}
$$

(1)＋(2)＋⋯＋(2K－1)

$\Rightarrow a_1+a_{2K}+S=c_1+c_{2K}$ ——— (2K)

[1]＋[2]＋⋯＋[2K－1]

$\Rightarrow b_1+b_{2L}+S=d_1+d_{2L}$ ———[2K]

將(2K)與[2K]代入(A)

$\Rightarrow a_1+a_{2K}+b_1+b_{2L}+S=a_1+a_{2K}+S+b_1+b_{2L}+S$

$\Rightarrow$ S＝2S

$\Rightarrow$ S＝0 (→←)

$\therefore t_1=t_2$ 。

即 S[m•n]爲唯一值。

陸、研究結果

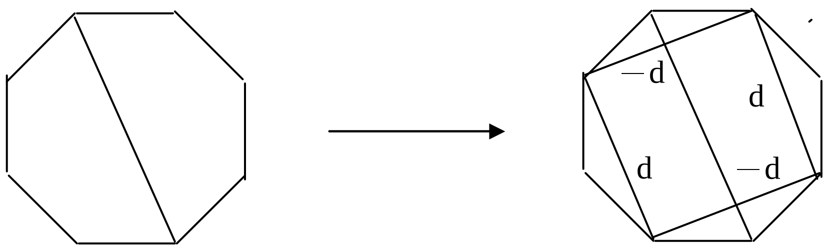
一、表一

<table>
<tr><th colspan="2">[G]的種類</th><th>[G]有解的條件</th><th>S[G]的值</th><th>N(S[G])的值</th><th>解的值或求法</th></tr>
<tr><td colspan="2">[奇]</td><td>無</td><td>任意數</td><td>1</td><td>見推論 5、9</td></tr>
<tr><td colspan="2">[偶]</td><td>$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} a_{2i-1} = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} a_{2i}$</td><td>任意數</td><td>無限多</td><td>見推論 6、9</td></tr>
<tr><td colspan="2">[奇，k]</td><td>無</td><td>任意數</td><td>無限多</td><td rowspan="3">見推論 11～13</td></tr>
<tr><td rowspan="2">[偶，k]</td><td>至少有一條奇奇線</td><td>無</td><td>任意數</td><td>無限多</td></tr>
<tr><td>沒有奇奇線</td><td>$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} a_{2i-1} = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} a_{2i}$</td><td>任意數</td><td>無限多</td></tr>
<tr><td colspan="2">[$\overline{\text{奇}}$]</td><td>$\sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}} a_{2i-1} = \sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}} a_{2i}$</td><td>任意數</td><td>1</td><td>見推論 15</td></tr>
<tr><td colspan="2">[$\overline{\text{偶}}$]</td><td>無</td><td>唯一值</td><td>1</td><td>見推論 17</td></tr>
<tr><td colspan="2">[c-n]</td><td>無</td><td>唯一值</td><td>1</td><td>見推論 18、19</td></tr>
<tr><td colspan="2">[偶•偶]</td><td>無</td><td>唯一值</td><td>無限多</td><td rowspan="2">見推論 20</td></tr>
<tr><td colspan="2">[奇•奇]、[偶•奇]、[奇•偶]</td><td>無</td><td>任意數</td><td>無限多</td></tr>
</table>

柒、討論

一、在討論[n，k]時，我們採取一次處理 1 條邊的方法。但如果有偶數條對角線形成一個多邊形，則可以一次處理這些偶數條邊，如下例。

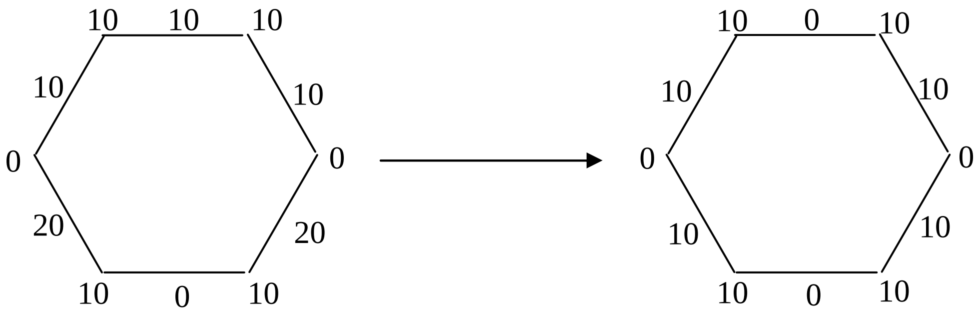
例：要從[8，1]得到[8，5]的解，只需將 4 條對角線，依順時針分別填入 d、－d 即可。



[8，1]　　　　[8，5]

二、我們用推論 9 的公式，可求出[6]的解 $b_i \le 20$。但是在舉例時，發現不論頂點數字如何填入，b_i 的上限可再降為 10，即 $b_i \le 10$，如下例。所以我們猜想：[偶]的 $k_{min}=10$。我們嘗試過[8]皆符合猜想，但是目前沒辦法說明此猜想，希望以後能解決它。

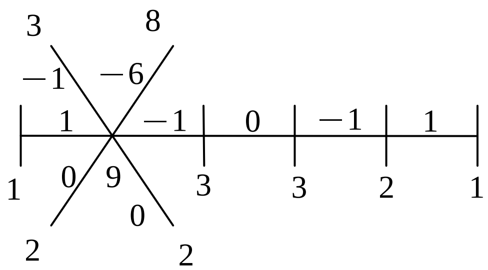
例：



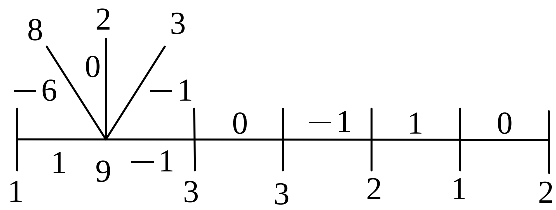
三、研究完[c-n]後，我們思考，如果將[$\bar{2}$]繼續延伸至[$\bar{n}$]，其結果會如何。經過研究後，發現是有解的，如例圖(1)、(2)。但是如果在任意分點上加任意條邊，如例圖(3)。這時候，情況就較為複雜了，我們目前尚在研究，希望能解決它。

例圖：(3)圖是否有解仍未知。

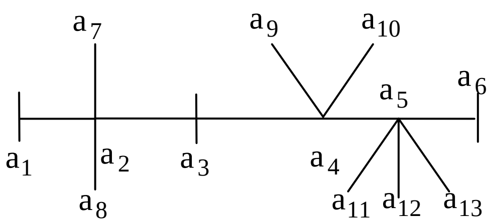
(1)



(2)

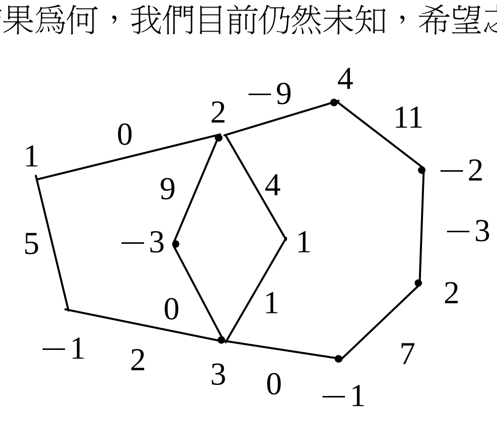


(3)



四、因為[偶]需要符合特定條件才有解，所以圖形中若有[偶]時，情況就較為複雜。因為任意[奇]皆有解，所以我們猜想，「**若一個圖形 G 可分解成 n 個[奇](G 的每條邊只屬於其中 1 個[奇])，則 G 有解，S[G]為任意數、N(S[G])為無限多**」，我們目前的想法是每次處理一個[奇]，並使 S[奇]＝p。接著重複同樣的步驟，逐一填完 n 個[奇]，如下例。不過，若 G 可分解成 m 個[n]時，結果為何，我們目前仍然未知，希望之後能解決它。

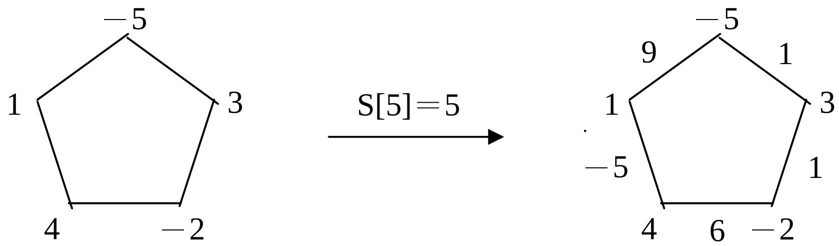
例：



捌、應用

一、我們可以將[奇]的結果應用在密碼鎖上，或設計爲一個闖關遊戲的關卡。讓關主或電腦每次任意給定一組頂點數字，並設定 S[奇]＝p，要打開鎖或過關必須輸入(或答對)正確的邊上數字（即「解」)，才能打開密碼鎖(或過關)，如下例。

例：必須輸入 1、1、6、－5、9 才能開鎖(或過關)，而由推論 7 知，正確的數字只有這 1 組。



二、我們應用推論 2 的結果，簡化數字邏輯圈爲 4 圈的問題（文獻探討第 4 篇）。

設 4 頂點的數字爲 a、b、c、d，邊上的數字爲 w、x、y、z。

則 $(1+2+\cdots+8)+w+x+y+z=4k$ ，k 爲正整數

$\Rightarrow w+x+y+z=4(k-9)$

$\Rightarrow a+b+c+d=36-4k+36=4(18-k)$

$\Rightarrow a+c=b+d=2(18-k)$(由推論2可知)

$\because 10\le a+b+c+d\le 26$

$\Rightarrow 10\le 4(18-k)\le 26$

$\Rightarrow k=11\frac{1}{2}\le k\le 15\frac{1}{2}$

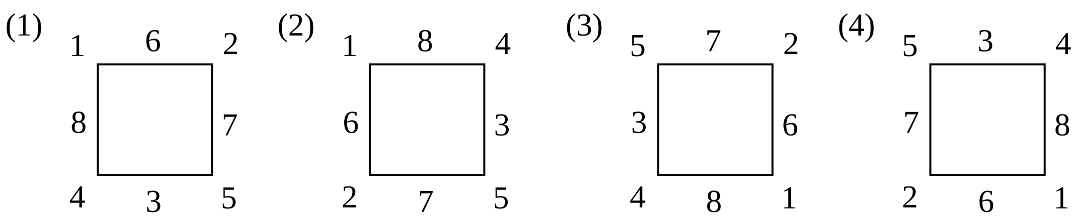
$\Rightarrow k=12、13、14、15$

$\therefore a+c=b+d=12、10、8、6$

（一） $a+c=b+d=6$，$S[4]=15$ 。

$\because 6=1+5=2+4$ 。

$\therefore$

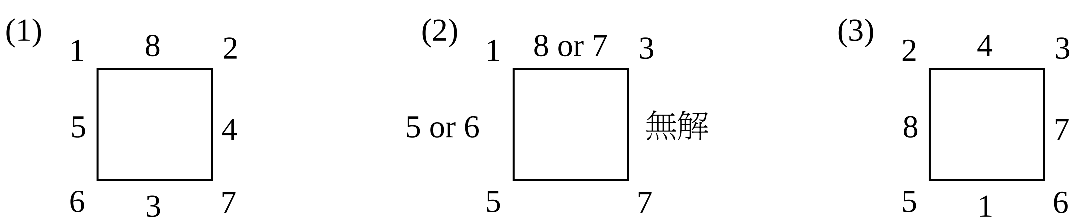


以上這 4 種情形，我們看成 1 種。

（二） $a+c=b+d=8$，$S[4]=14$ 。

$\because 8=1+7=2+6=3+5$ 。

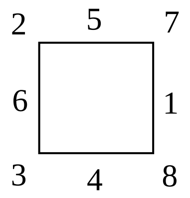
$\therefore$



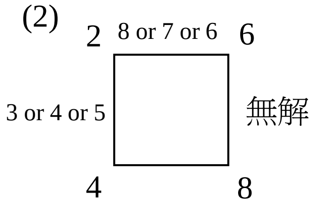
（三）$a+c=b+d=10$，$S[4]=13$。

$\because 10=2+8=3+7=4+6$。

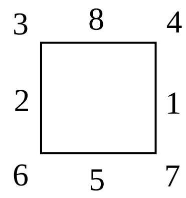
$\therefore$ (1)



(2)



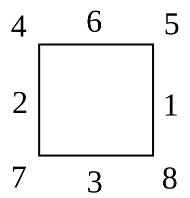
(3)



（四）$a+c=b+d=12$，$S[4]=12$。

$\because 12=4+8=5+7$。

$\therefore$



故數字邏輯圈為 4 圈所有可能情形為以上 6 種。對於 6 圈以上的偶數圈數字邏輯圈也可以用這種方法找出所有可能情形，但是其中有 3 點必須克服。

第一，隨著數字愈大，所有可能的數字組合也愈多，必須有好的方法可以計算所有的數字組合。

第二，同一種數字組合，但放的位置不同，邊上填入的數字也會不同，是否有解，是否可歸為同一種。

第三，即使計算出所有的數字組合與位置組合，仍必須想方法剔除不合題意的情形，如（二）之(2)與（三）之(2)。

對於奇數圈數字邏輯圈，雖無法像偶數圈數字邏輯圈，可用推論 4 簡化問題。但是仍可使用推論 5 或 9 的公式，快速找出邊上填入的數字。再用推論 8 的結果，核對這些數字是否符合題意。

玖、結論與展望

一、任意[奇]皆有解，[偶]須符合特定條件才有解，而 S[n]皆為任意數。另外，N(S[奇])＝1，N(S[偶])為無限多。

二、任意[奇，k]皆有解。[偶，k]在沒有奇奇線時，須符合特定條件才有解。而在至少有 1 條奇奇線時皆有解。另外，S[n，k]為任意數，N(S[n，k])為無限多

三、任意$[\overline{\text{偶}}]$必有唯一解，而$[\overline{\text{奇}}]$須符合特定條件才有解。$S[\overline{\text{偶}}]$是唯一值，而$S[\overline{\text{奇}}]$為任意數。另外，$N(S[\bar{n}])=1$。

四、任意[c-n]必有唯一解，S[c-n]為唯一值，N(S[c-n])＝1。

五、任意[m•n]皆有解，而且 N(S[m•n])皆為無限多。另外，S[偶•偶]是唯一值，而 S[奇•奇]、S[奇•偶]、S[偶•奇]皆為任意數。

六、我們對於[奇]的 k_{min} 已經有結果，但對於[偶]的 k_{min} 仍沒辦法說明，希望以後能解決它。

七、我們對於幾種圖形的相關問題已經有結果，但是對於任意的圖形，我們尚未有結果，希望以後有機會繼續研究。

八、在研究過程中，我們發現推論 5、6、8、9 的結果，可以簡化數字邏輯圈的問題。希望我們之後能找到更多的結果，可以應用在數字邏輯圈問題。

拾、參考文獻

一、建中通訊解題第 90 期。
二、康軒版數學第四冊第一章：數列與級數。
三、康軒版數學第二冊第一章：二元一次方程式。
四、高中數學第一章：等差級數與等比級數。
五、第 25 屆高小組科展～「怎麼安排才恰當」。
六、第 37 屆初小組科展～「奇妙的數學遊戲」。
七、第 45 屆國中組科展～「七邊形的數字之謎」。
八、第 51 屆國小組科展～「輪番上陣—探究邏輯圈之數字謎」。

【評語】030417

1. 本作品是一個有趣的遊戲問題，作者使用簡單的數學，得出一些不錯的結果，但困難度不是很高。

2. 如何使用精簡的數學符號，可以讓問題的敘述與推導更明朗與簡化。

3. 密碼鎖的應用如能做得更完整，會更有吸引力。