中華民國第52屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030416

點點圓－西姆松線研究

學校名稱：新北市立中山國民中學

作者：	指導老師：
國三 李　微 國三 賴永堯 國二 謝昀臻	胡慶勝

關鍵詞：西姆松線、西姆松點、斜西姆松線

作品名稱：點點圓---------西姆松線研究

摘　要

勾股定理中以直角三角形三邊邊長引作正方形，則兩股正方形面積和等於直角三角形斜邊正方形的面積；那一般三角形呢?有無類似情形呢?
我們找到一種方法，以西姆松線為主題作出的三角形面積和等於原三角形的面積。

壹、研究動機

在一次數學課程中，老師提到：圓內接三角形有很多有趣的圖形，有五心，即重心、外心、垂心、內心、旁心，有尤拉線，西姆松線。使我們感到好奇與興趣，想要再多了解有關圓方面的知識，因此選擇了西姆松線來研究。

貳、研究目的

本研究要探討的主題如下：

一、　探討什麼樣的點以三邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 為他的西姆松線？。

二、　探討一般三角形是否三邊同時都有西姆松點？。
三、兩股正方形面積和等於直角三角形斜邊正方形的面積;那一般三角形呢?有無類似情形呢?
四、與九點圓的關係。
五、西姆松線的推廣-斜西姆松線。

參、研究設備及器材

國中數學第五、六冊(翰林、康軒版)、電腦、*GSP* 數學繪圖軟體

肆、研究過程及結果

定義:若 p 為△ABC 外接圓上一點，且 P 點 α^0 的斜西姆松線(Oblique Simson Line)恰為三角形三邊直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 、 $\overleftrightarrow{AB}$ 或 $\overleftrightarrow{AC}$ ，則稱 P 為直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 、 $\overleftrightarrow{AB}$ 或 $\overleftrightarrow{AC}$ ，α^0 的西姆松點。當 $\alpha^0=90^0$ 時，簡稱為西姆松點。

西姆松(Simson)線(定理)及其逆定理：
過△ABC 外接圓上一點 P 分別向三邊 BC、CA、AB 所在直線做垂線，設垂足為 D、E、F，則 D、E、F 三點共線。

證明：如(圖一)

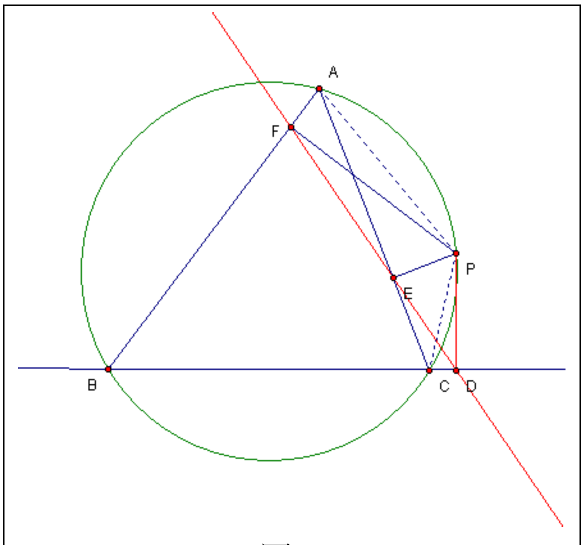
(1) P,A,B,C 四點共圓，∴∠PAF＝∠PCD (外角性質)

(2) 連接 CP，則 P、D、C、E 四點共圓，(∵∠PEC＝∠PDC=90^0) ∴∠PED＝∠PCD (等弧對等圓心角)

(3) 連接 AP，則 P,A,F,E 四點共圓，(∵∠PEA＝∠PFA=90^0，對同弧 AP) ∴∠PEF＋∠PAF＝180°

(4) 故∠PEF＋∠PED＝∠PEF＋∠PCD＝∠PEF＋∠PAF＝180° ∴ D、E、F 三點共線。

逆定理用上述過程反推即可。



(圖一)

討論：

1. 什麼樣的點以三邊 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 為它的西姆松線？如(圖一) p、F、D 連動時，

 (1)當∠AEF=0^0 時，$\overline{AC}$ 即成為 P 點的西姆松線，即 $\overline{AP}\perp\overline{AB}$ 於 A，$\overline{PC}\perp\overline{BC}$ 於 C。
 四邊形 ABCP 為圓內接四邊形，$\overline{BP}$ 為直徑。P 在 AC 弧上。

 (2) 當∠AFE=0^0 時，$\overline{AB}$ 即成為 P 點的西姆松線，即 $\overline{PA}\perp\overline{AB}$ 於 A，$\overline{PB}\perp\overline{BC}$ 於 B。
 四邊形 APBC 為圓內接四邊形，$\overline{PC}$ 為直徑。P 在 AB 弧上。

 (3) 當 F=B 時，$\overline{BC}$ 即成為 P 點的西姆松線，即 $\overline{PB}\perp\overline{AB}$ 於 B，$\overline{PC}\perp\overline{AC}$ 於 C。
 四邊形 ABPC 為圓內接四邊形，$\overline{AP}$ 為直徑。P 在 BC 弧上。

2.是否有點落在它本身的西姆松線上?

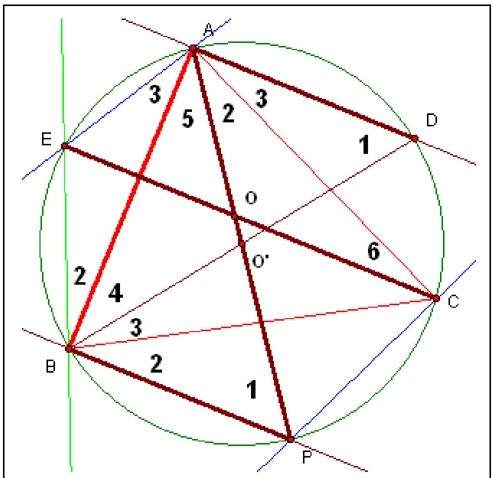
 (1)當∠PED=0^0 時 P=D=E=C 此時 P 在過 P 點的西姆松線(垂直 $\overline{AB}$)上。

 (2)當∠PEA=0^0 時 P=E=F=A 此時 P 在過 P 點的西姆松線(垂直 $\overline{BC}$)上。

3.由 1、2 得知西姆松點存在。下文開始研究一般三角形是否三邊同時存在西姆松點？特性？

一、存在性

1.銳角三角形恰存在三點為三邊的西姆松點，且相交於外心。此六邊形分成三組全等的三角形。如(圖二)



(圖二)

證明：設 P、D、E 為△ABC 三邊 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 之西姆松點，$\overline{AP}$、$\overline{CE}$ 相交於 O，$\overline{BD}$ 交 $\overline{AP}$ 於 O'。

(1)在△ABP 中 ∠ABP=(∠2+∠3)+∠4=∠BAD
=(∠2+∠3)+∠5=90^0

∴∠4=∠5 則 $\overline{AO'}=\overline{BO'}$

∠1+∠5=∠BAD =(∠2+∠3)+∠5=90^0 所以∠1=∠2+∠3

則 $\overline{PO'}=\overline{BO'}=\overline{AO'}$ O' 為 $\overline{AP}$ 之中點，直角△ABP 之外心

且 $\overline{DO'}=\overline{AO'}=\overline{BO'}$　O' 為 $\overline{BD}$ 之中點，直角△ABD 之外心

(2) 在△AEC 中∠AEC=∠APC=∠ABC=∠3+∠4=∠3+∠5=∠EAP=∠ECP

$\overline{EA}\perp\overline{AC}$　$\overline{PC}\perp\overline{AC}$　$\overline{EA}=\overline{PC}$　$\Delta AEO\cong\Delta PCO$。

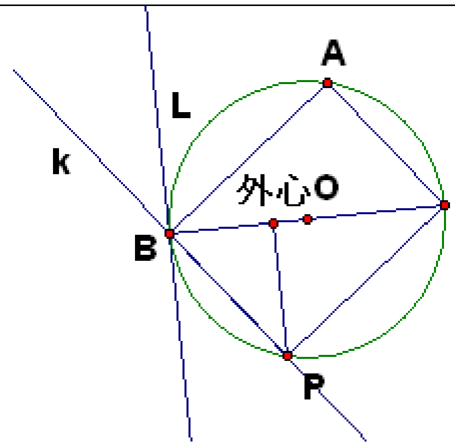
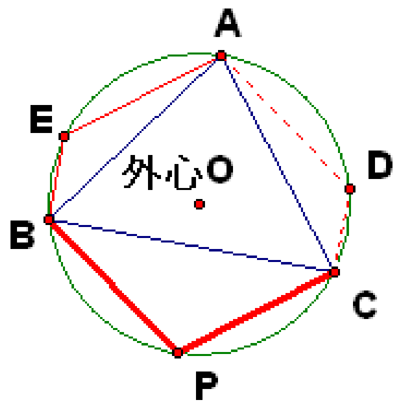
則 $\overline{AO}=\overline{PO}$，O 為 $\overline{AP}$ 之中點，直角△ABP 之外心

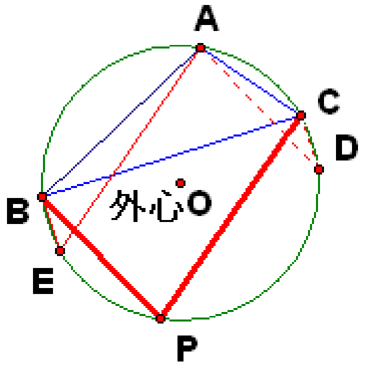
由(1)(2)得 O'=O 所以三條西姆松線相交於外心 O。

同理 $\Delta BEO\cong\Delta CDO$　$\Delta BPO\cong\Delta ADO$。

2.由 1.可得：

利用直徑的圓周角為直角的性質，分別從三角形頂點 A，B，C 作直徑與圓相交的交點即為西姆松點。

種類	圖形	說明
直角 P，B，C 為西姆松點。		P 點： $\overline{PB}\perp\overline{AB}$ 於 B，$\overline{PC}\perp\overline{AC}$ 於 C，則 P 為 $\overleftrightarrow{BC}$ 的西姆松點，$\overleftrightarrow{BC}$ 為過 p 的西姆松線。此時 ABPC 為圓內接四邊形，∠ABP＝∠ACP=90 度。 其他兩邊： B、C 點：直線 L⊥$\overline{BC}$ 於 B，直線 K⊥$\overline{AB}$ 於 B，$\overline{BA}\perp\overline{AC}$ 於 A，則 B 為 $\overleftrightarrow{AB}$ 的西姆松點，$\overleftrightarrow{AB}$ 為過 B 的西姆松線。同理 C 為 $\overleftrightarrow{AC}$ 的西姆松點。
銳角 P，D，E 為西姆松點。		P 點：同上。 D 點： $\overline{DC}\perp\overline{BC}$ 於 C，$\overline{DA}\perp\overline{AB}$ 於 A，則 D 為 $\overleftrightarrow{AC}$ 的西姆松點，$\overleftrightarrow{AC}$ 為過 D 的西姆松線。此時 ABCD 為圓內接四邊形，∠DAB＝∠DCB=90 度。 E 點： $\overline{EA}\perp\overline{AC}$ 於 A，$\overline{EB}\perp\overline{BC}$ 於 B，則 E 為 $\overleftrightarrow{AB}$ 的西姆松點，$\overleftrightarrow{AB}$ 為過 E 的西姆松線。此時 AEBC 為圓內接四邊形，∠EAC＝∠EBC=90 度。

<table>
<tr><td>鈍角</td><td rowspan="2">
</td><td rowspan="2">P 點：同上。
D 點：
$\overline{DC}\perp\overline{BC}$ 於 C，$\overline{DA}\perp\overline{AB}$ 於 A，則 D 為 $\overleftrightarrow{AC}$ 的西姆松點，$\overleftrightarrow{AC}$ 為過 D 的西姆松線。此時 ABDC 為半圓內的圓內接四邊形，∠DCA，∠CAB>90^0
E 點：
$\overline{EA}\perp\overline{AC}$ 於 A，$\overline{EB}\perp\overline{BC}$ 於 B，則 E 為 $\overleftrightarrow{AB}$ 的西姆松點，$\overleftrightarrow{AB}$ 為過 E 的西姆松線。此時 ABEC 為半圓內的圓內接四邊形，∠CAB，∠ABE>90^0</td></tr>
<tr><td>P，D，E 為西姆松點。</td></tr>
</table>

表(一)

二、唯一性

1.ΔABC 中 P 為外接圓上的一點，若 p 為三角形三邊長的西姆松點之一則 P 點唯一且在通過頂點的直徑的另一端點上。

如表(一)上的圖

(1)若 p 在銳角三角形ΔABC 的 BC 弧上，為 $\overleftrightarrow{BC}$ 的西姆松點則 P 點唯一且在通過 A 點的直徑的另一端點上，P 點亦不能為 $\overleftrightarrow{AC}$ 或 $\overleftrightarrow{AB}$ 的西姆松點。

證明:設 P 為 $\overleftrightarrow{BC}$ 的西姆松點，∵ $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 的交點只有 B，∴要垂直 $\overline{AB}$ 且垂足在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上，

則必垂直於 B，同理要垂直 $\overline{AC}$ 且垂足在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上，則垂直於 C∴∠ABP=∠ACP=90^0，

∴P 必為通過 A 點的直徑的另一端點上且唯一。

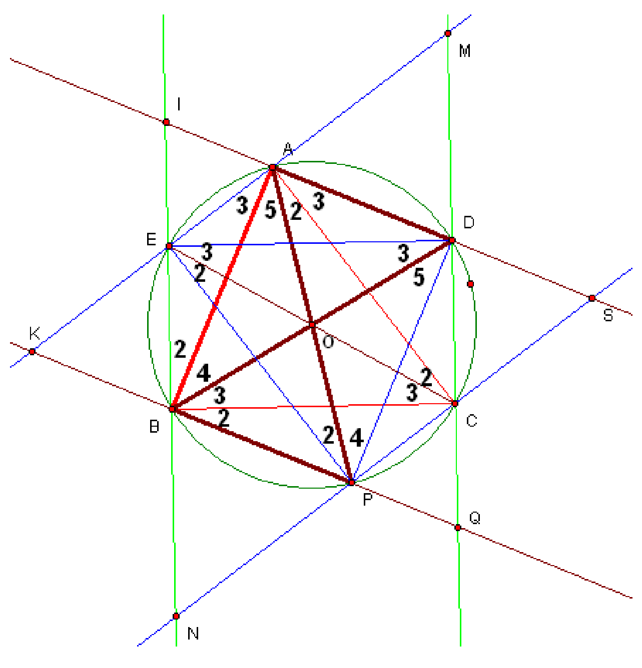
P 在 BC 弧上，若為 $\overleftrightarrow{AC}$ 或 $\overleftrightarrow{AB}$ 的西姆松點，由上述證明可得 P 不在 BC 弧上的矛盾。

(2)若 p 在鈍角(直角)三角形ΔABC 的 BC 弧上，∠BAC 為鈍角(直角)則 P 點可為三邊長 $\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$ 或 $\overleftrightarrow{AB}$ 的西姆松點，但對應關係與銳角三角形相同，即 P 為 $\overleftrightarrow{BC}$ 的西姆松點時，對應點為 A。P 為 $\overleftrightarrow{AC}$ 的西姆松點時，對應點為 B。P 為 $\overleftrightarrow{AB}$ 的西姆松點時，對應點為 C。

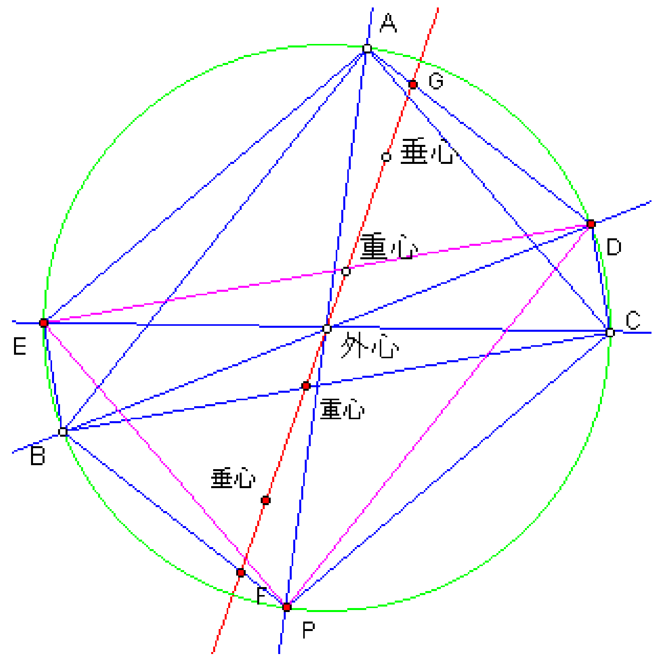
證明: ∵∠BAC 為鈍角(直角)且直徑的圓周角為直角，∴從 A、B、C 過 O 點的直徑的另一端點皆在半圓 BC 弧上，此時 P 點可為三邊長 $\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{AC}$ 或 $\overleftrightarrow{AB}$ 的西姆松點，但對應形式與銳角三角形相同且唯一。

三、旋轉對稱性

(一) $\Delta PDE \cong \Delta ABC$ ，是以∆ABC 外心 O 為旋轉中心，旋轉 180 度的旋轉變換；即以 O 為旋轉中心的點對稱。



(圖三)



(圖四)

證明: 如圖三，由等弧對等圓周角 及∠4=∠5 得∠P=∠A，∠D=∠B，∠E=∠C

在 ABPD 中，$\overline{AB} \perp \overline{AD}$ ，$\overline{AB} \perp \overline{PB}$ 且 $\overline{AD} = \overline{AD}$ ，則 ABPD 為矩形

$\overline{PD} = \overline{AB}$ ，$\Delta PDE \cong \Delta ABC$ (ASA 全等)

圖形為以 O 為旋轉中心的點對稱圖形。

如圖四，所以△ABC 的外心、重心、垂心共線的尤拉線旋轉 180 度後，亦為△PDE 的尤拉線且平分此六邊形 AEBPCD 的面積。

(二)已知 △ABC 中 ∠BAC 為鈍角，D，E 分別為 $\overline{AC}$ 、$\overline{AB}$ 的西姆松點，則 D 在 PC 劣弧，E 在 PB 劣弧上。

證明: 如表(一)上的圖

∵圖形為點對稱圖形 ，∴E 為 C 的對稱點。$\overline{CE}$ 為圓 O 的直徑，∠CPE=90^0。

若 E 位於 AB 弧上則弧 CPB 為劣弧與已知∠BAC 為鈍角，弧 CPB 為優弧矛盾。又圖形為點對稱圖形，P 為 A 的對稱點，C 在 A 的右邊，∴E 在 PB 劣弧上。

同理可證 D 在 PC 劣弧。

(三) 如圖三，設 P、D、E 為銳角△ABC 三邊 $\overline{BC}$ 、$\overline{AC}$ 、$\overline{AB}$ 之西姆松點則兩大三角形△SIN、△KQM 及圓內接六邊形 AEBPCD 六個邊所引六個三角形△AIE、△KBE、△PBN、△PQC、

△SDC、△ADM 皆與△ABC 相似。

證明：由內角的推導得知

∠BAC=∠ISN=∠MKQ=∠AIE=∠BKE=∠BPN=∠QPC=∠DSC=∠MAD=∠2+∠5

∠BCA=∠INS=∠KMQ=∠AEI=∠BEK=∠BNP=∠QCP=∠DCS=∠AMD=∠2+∠3

由 AA 相似性質得證

四、由正三角形探討面積的相關性

探討△ABC 的面積是否等於△BPC+△AEB+△ADC 面積之和

1.設 P、D、E 為正△ABC 三邊 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 之西姆松點則

(1)P,D,E 在三邊中垂線上且△ABC 的面積=△BPC+△AEB+△ADC 面積之和

(2) △FGI 和△JHK 為正三角形

(3) P,B 三等分線段 $\overline{IG}$

(4)AEBPCD 為圓內接正六邊形，各邊銜接相同邊長的正三角形。

證明：

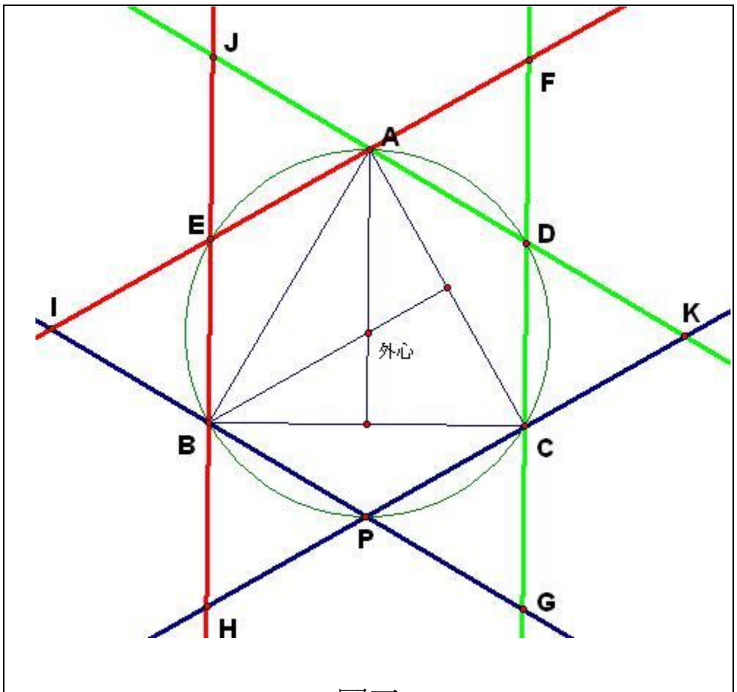
(1) $\because \overline{PB} \perp \overline{AB}$ $\quad \overline{PC} \perp \overline{AC}$ $\quad \therefore$

$\angle PBC = \angle PCB = 30^\circ$ $\quad \overline{PB} = \overline{PC}$

同理可證其餘兩點都在三邊的中垂線上

△BPC+△AEB+△ADC 面積=

$3 \times \frac{1}{4\sqrt{3}} \overline{BC}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \overline{BC}^2$ =△ABC 的面積



圖五

(2) $\angle PCG = \angle CPG = 60^\circ$ △PCG 為正三角形同理△BEI、△AFD 為正三角形

所以△FGI 為正三角形，△JHK 為正三角形。

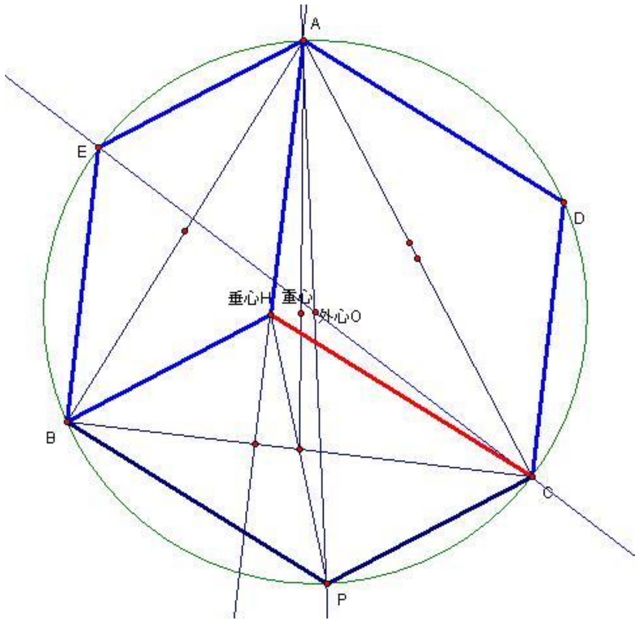
(3) △PCG 為正三角形　所以

$\overline{PG} = \overline{PC} = \overline{PB}$ 　　　同理 $\overline{IB} = \overline{BE} = \overline{BP}$ 所以 P,B 三等分線段 $\overline{IG}$

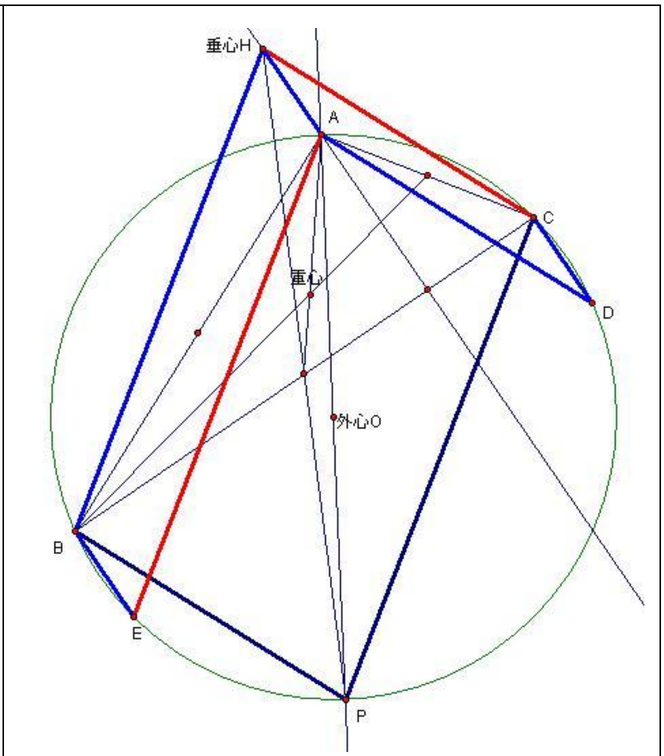
(4) $\because \angle PBC = \angle PCB = 30^\circ$ $\therefore \angle BPC = 120^\circ$ ，$\angle EBP = 30^0 + 60^0 + 30^\circ = 120^0$ 得證。

五、與九點圓的相關性

若三角形的垂心為 H，P 為三角形的西姆松點。以 P 的西姆松線和 $\overline{PH}$ 的交點為線段 $\overline{PH}$ 的中點，亦為三角形三邊的中點，且這點在九點圓上。



銳角三角形 圖六



鈍角三角形 圖七

已知 ΔABC 中 H 為垂心，O 為外心且 P、D、E 為 $\overline{BC}$ 、$\overline{AC}$ 、$\overline{AB}$ 的西姆松點，則 $\overline{PH}$ 、$\overline{DH}$ 、$\overline{EH}$ 的中點為 $\overline{BC}$ 、$\overline{AC}$ 、$\overline{AB}$ 的中點，均在九點圓上且 ΔABC 的面積與 ΔPBC，ΔACD，ΔABE 的面積和有特殊關係。

證明：在 HBPC 中 $\overline{PB} \perp \overline{AB}$ (西姆松點)、 $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ (垂線) $\therefore \overline{BP} // \overline{CH}$

$\overline{PC} \perp \overline{AC}$ (西姆松點)、 $\overline{BH} \perp \overline{AC}$ (垂線) $\therefore \overline{BH} // \overline{PC}$

$\therefore$ HBPC 為平行四邊形，對角線互相平分 $\therefore \overline{PH}$ 的中點為 $\overline{BC}$ 的中點，在九點圓上,且 ΔHBC 的面積= ΔPBC 的面積。 餘此類推。

所以當 ΔABC 為銳角三角形時 ΔABC 的面積= $\Delta HBC + \Delta HAC + \Delta HAB$ 的面積和

$= \Delta PBC + \Delta ACD + \Delta ABE$ 的面積和

當 ΔABC 為鈍角三角形時 ΔPBC 的面積= ΔHBC 的面積

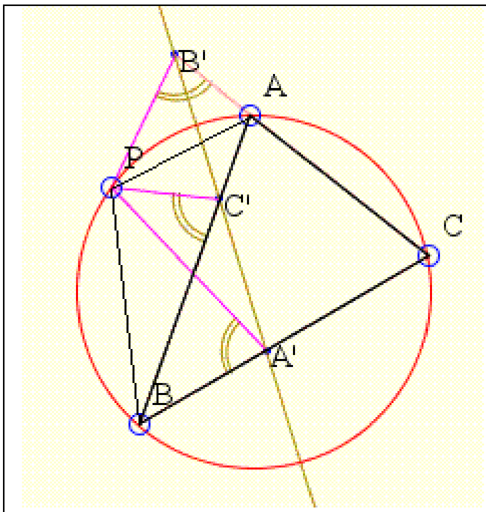
$= \Delta ABC + \Delta HAC + \Delta HAB$ 的面積和

即 ΔABC 的面積= $\Delta PBC - \Delta ACD - \Delta ABE$ 的面積和

伍、西姆松線的推廣-斜西姆松線（**Oblique Simson Line, Carnot**）

一、卡諾(Carnot)定理：

若一點 P 在△ABC 的外接圓上，從 P 向三邊 BC、CA、AB 所在直線分別引線段 PA'、PB'、PC'成同向等角，則三交點 A'、B'、C'共線（此線稱為斜西姆松線（Oblique Simson Line））。



圖八

證明：連 PA、PB

∵∠PC'B=∠PA'B，∠PA'B=∠PB'A ∴P、C'、A'、B 四點共圓，P、B'、C、A'四點共圓

得∠PC'A'+∠PC'B'

=∠PC'A'+∠PAB'（∵P、B'、A、C'四點共圓）

=∠PC'A'+∠PBA'（∵P、A、C、B 四點共圓）

=π（∵P、C'、A'、B 四點共圓）　　故 A'、B'、C'三點共線。

討論：如(圖八) B'、C'、A' 連動時

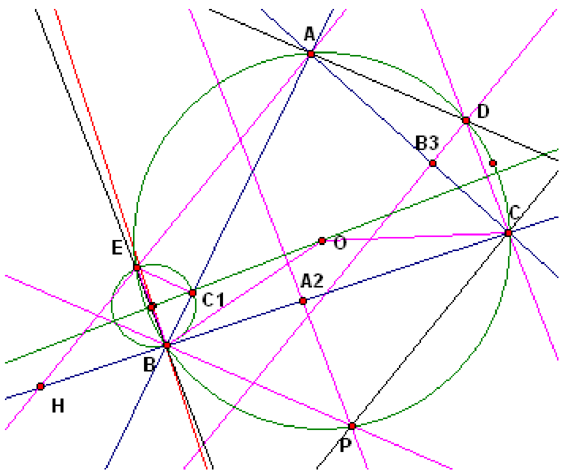
(1)當∠B'C'A=0^0時，$\overleftrightarrow{AB}$ 即成為 P 點的斜西姆松線。

(2)當∠B'C'C=180^0時，$\overleftrightarrow{AC}$ 即成為 P 點的斜西姆松線。

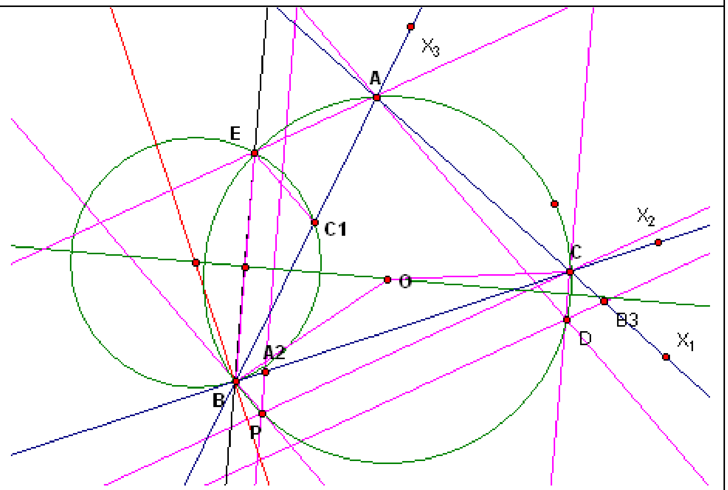
(3)若 P 為 $\overleftrightarrow{BC}$ α 度的西姆松點，以逆時針方向作圖，則 P 可在 AB 弧、BC 弧、AC 弧上。

二、存在性及作圖

研究 E 在各個弧上的情形。E、P、D 為 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{AC}$ ，α 度的西姆松點。



圖九形態一



圖十形態二

(一)

如圖九 不失一般性設∠A>∠C>∠B。

1.作△ABC 及外接圓圓 O。

2.作∠HBE=α 度(假設存在)，交外接圓 O 於 E，設 $\overleftrightarrow{AE}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 交點為 H，

則∠EAC=∠HBE=α 度　　(圓內接四邊形性質)

3.作 $\overline{EB}$ 的中垂線與過 B 垂直 $\overline{BC}$ 的直線相交於一點 O' 圓心，以此圓心作切於 B 點

的圓交 $\overline{AB}$ 於 C_1 ，作 $\overline{EC_1}$，則弦切角∠HBE=圓周角∠BC_1E 。

4. 過 B 作平行 $\overline{EC_1}$ 交弧 BC 於 P，則∠PBA=∠BC_1E=α 度(內錯角相等)，作 $\overleftrightarrow{PC}$ 。

5. 過 P 作平行 $\overleftrightarrow{EB}$ 交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 A_2，則∠PA_2C=對頂角=∠EBH=α 度

6. 過 C 作平行 $\overline{PA_2}$ 交弧 AC 於 D，則∠DCB=∠EBH=α 度(同位角相等) ，作 $\overleftrightarrow{DA}$ 。

形態二:當 α >(∠B+∠C)時 D 在 PC 弧上。

7. 過 D 作平行 $\overleftrightarrow{PC}$ 交 $\overleftrightarrow{AC}$ 於 B_3，則 P、D、E 即為以三邊為 α 度的斜西姆松線。

討論：

1.圖形唯一，從哪一邊長開始作圖皆可。C1，A2，B3 的數字只是表示第 1，2，3 次取得的點。

2.(1)當∠BAC<90^0時

∵∠BOC=2∠A ∴∠OBC=∠OCB=(180^0-2∠A)/2=90^0-∠A

∠OBE=90^0時，$\overline{BE}$ 與圓相切不相交，

由作圖得知∠OBE=180^0-∠EBH-∠OBC=180^0-α-(90^0-∠A)=90^0 α=∠A 不成立

α<∠A 時 E 反轉在 BC 弧上 α>180^0-∠B 時 E 反轉在 AC 弧上

∠OBP=90^0時，$\overline{BP}$ 與圓相切不相交，

由作圖得知 α=∠ABP=∠ABO+∠OBP=∠B-∠OBC+90^0=∠B-(90^0-∠A)+90^0=∠A+∠B 不成立 α>(∠A+∠B) 時 P 反轉在 AB 弧上

∠OCD=90^0時，$\overline{CD}$ 與圓相切不相交，

α=∠DCB=∠DCO+∠OCB=90^0+90^0-∠A=180^0-∠A=∠B+∠C 不成立

α>(∠B+∠C)時，D 反轉在 BC 弧上 圖形變成形態二

(2) 當∠BAC=90^0時

∠OBE=90^0時，$\overline{BE}$ 與圓相切不相交，

由作圖得知∠OBE=180^0-∠EBH=180^0-α=90^0 α=∠A 不成立

α<∠A 時 E 反轉在 BC 弧上 α>180^0-∠B 時 E 反轉在 AC 弧上

∠OBP=90^0時，$\overline{BP}$ 與圓相切不相交，

由作圖得知 α=∠ABP=∠ABO+∠OBP=∠B+90^0=∠A+∠B 不成立

α>(∠A+∠B) 時 P 反轉在 AB 弧上

∠OCD=90^0=180^0-α 時，$\overline{CD}$ 與圓相切不相交，

α=90^0=∠B+∠C 不成立

α<(∠B+∠C)時，D 在 AC 弧上

(3)當∠BAC>90^0時

∠OBE=90^0時，$\overline{BE}$與圓相切不相交，

由作圖得知∠OBE=180^0-∠EBH+∠OBC =180^0-α +(∠A-90^0)=90^0　α=∠A 不成立

α<∠A 時 E 反轉在 BC 弧上　α>180^0-∠B 時 E 反轉在 AC 弧上

∠OBP=90^0時，$\overline{BP}$與圓相切不相交

由作圖得知α=∠ABP=∠ABO+∠OBP=∠B+(∠A-90^0)+90^0=∠A+∠B 不成立

α>(∠A+∠B) 時 P 反轉在 AB 弧上

∠OCD=90^0=∠BCD-∠BCO=180^0-α -(∠A-90^0)時，$\overline{CD}$與圓相切不相交，

α=∠B+∠C 不成立

α<(∠B+∠C)時，D 反轉在 AC 弧上

結論

∴作圖條件：∠A<α<180^0-∠B，$\alpha \neq$∠A、∠A+∠B、∠B+∠C

(二)

如圖十一 不失一般性設∠A>∠C>∠B。

1.作△ABC 及外接圓圓 O。

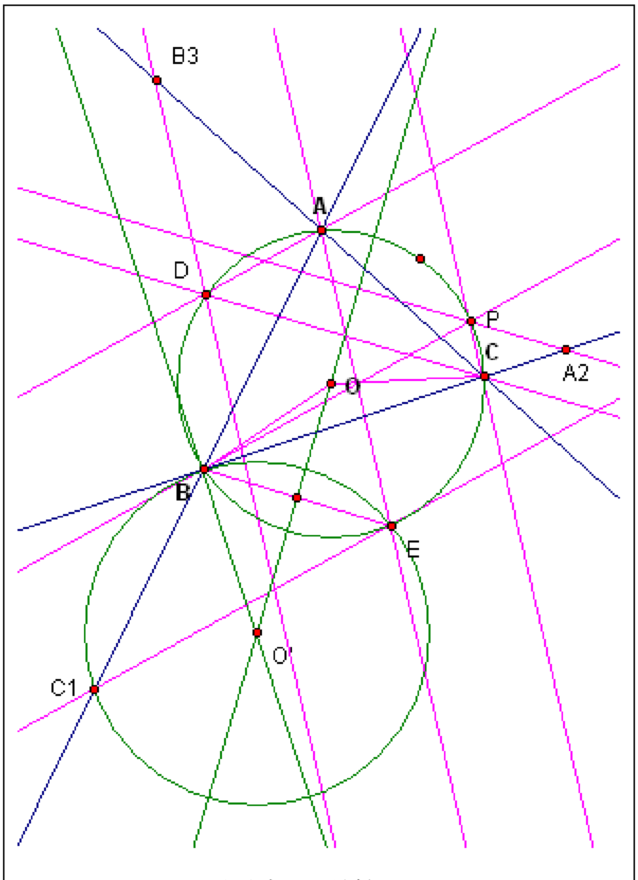
2.作∠EBC=α 度(假設存在)，交外接圓 O 於 E

3.作$\overline{BE}$的中垂線與過 B 垂直$\overline{BC}$的直線相交於一點 O'，以 O'為圓心作切於 B 點的圓交$\overleftrightarrow{AB}$於 C1 ，作$\overline{EC1}$，$\overline{EA}$則弦切角∠CBE=圓周角∠EC1B=圓周角∠EAC。

4. 過 C 作平行$\overline{EA}$交圓 O 於 P，則∠PCA=∠EAC=α 度(內錯角相等)。

過 P 作平行$\overline{BE}$交$\overleftrightarrow{BC}$於 A2，則∠PA2B=∠EBC=α 度(內錯角相等)

作$\overline{PB}$，則∠PBA=∠PCA=α 度(同弧圓周角)。



圖十一形態三

5. 過 A 作平行$\overline{PB}$交圓 O 於 D，則∠DAB=∠PBA=α 度(內錯角相等)。

過 D 作平行$\overline{CP}$交$\overleftrightarrow{AC}$於 B3，則∠DB3C=∠PCA=α度(內錯角相等)

作$\overline{DC}$，則∠DCB=∠DAB=α度(同弧圓周角)。

則 P、D、E 即為以三邊為α度的西姆松點。
討論：
(1)當∠BAC<90^0時

∠OBE=90^0時，$\overline{BE}$與圓相切不相交，

由作圖得知∠OBE=∠CBE+∠OBC=α+(90^0-∠A)=90^0　　α=∠A 不成立
α>∠A 時 E 反轉在 AB 弧上

∠OCP=90^0時，$\overline{CP}$與圓相切不相交，

由作圖得知∠OCP=∠PCA+∠OCA=α+∠C-(90^0-∠A)=90^0　　α=∠B 不成立
α>∠B 時 P 反轉在 BC 弧上

∠OAD=90^0時，$\overline{CP}$與圓相切不相交，

由作圖得知∠OAD=∠DAB+∠OAB=α+(90^0-∠C)=90^0　　α=∠C 不成立
α>∠C 時 D 反轉在 AC 弧上

(2) 當∠BAC=90^0時

∠OBE=90^0=α時，$\overline{BE}$與圓相切不相交，

α=∠A 不成立
α>∠A 時 E 反轉在 AB 弧上　　α>180^0-∠B 時 E 反轉在 AC 弧上

∠OCP=90^0=∠C+α時，$\overline{BP}$與圓相切不相交，α=90^0-∠C=∠B 不成立

α>∠B 時 P 反轉在 BC 弧上

∠OAD=90^0=α+∠B 時，$\overline{AD}$與圓相切不相交，α=90^0-∠B=∠C 不成立

∵α>∠C，∴D 在 AC 弧上

(3)當∠BAC>90^0時

∠OBE=90^0時，$\overline{BE}$與圓相切不相交，

由作圖得知∠OBE=∠EBC-∠OBC=α-(∠A-90^0)=90^0　　α=∠A 不成立
α>∠A 時 E 反轉在 AB 弧上　　α>180^0-∠B 時 E 反轉在 AC 弧上

∠OCP=90^0時，$\overline{CP}$與圓相切不相交，

由作圖得知$\angle OCP=\angle BCX1-\angle PCX1-(\angle A-90^0)=\angle A+\angle B-\alpha-(\angle A-90^0)=90^0$

$\alpha=\angle B$ 不成立

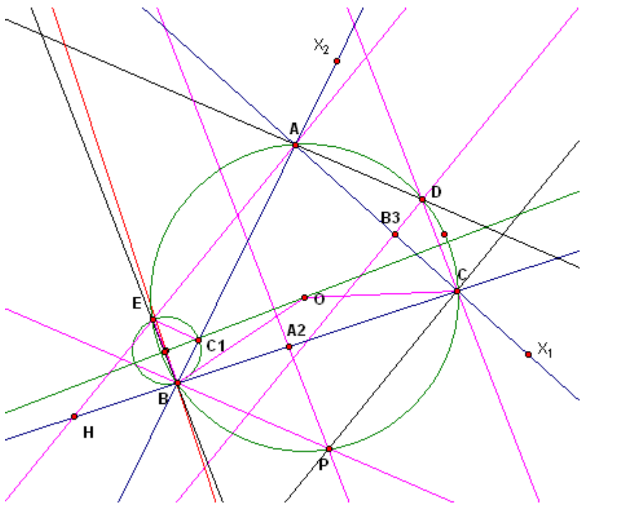
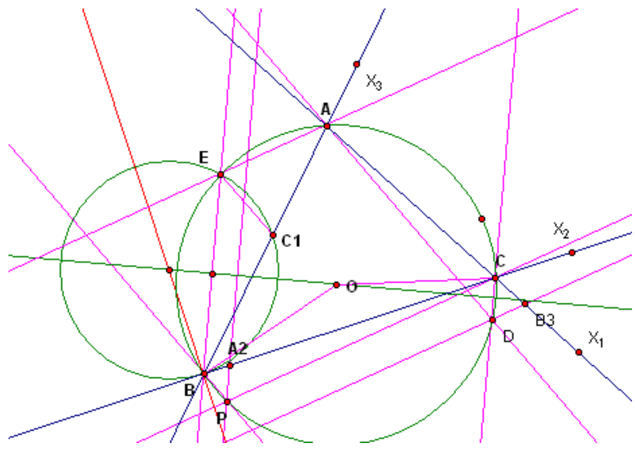
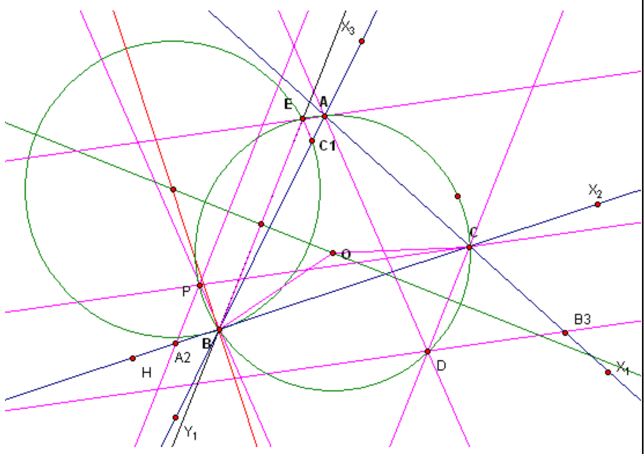
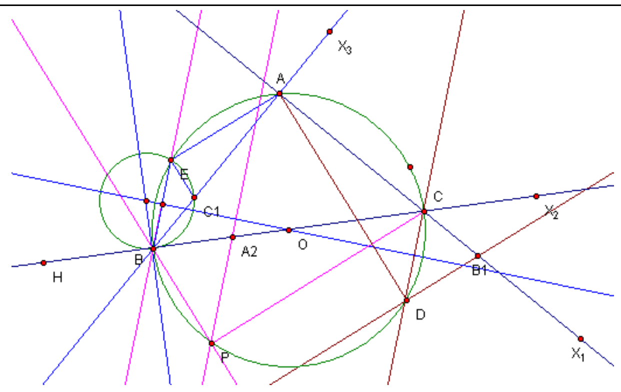
$\because \alpha<\angle B$ 時 P 反轉在 AC 弧上

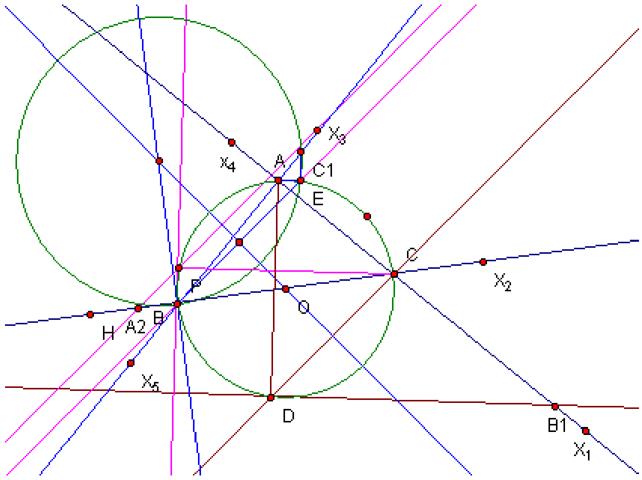
$\angle OAD=90^0=\alpha+\angle OAB=\alpha+(90^0-\angle C)$時，$\overline{AD}$與圓相切不相交，$\alpha=\angle C$ 不成立

$\alpha>\angle C$ 時，D 反轉在 AC 弧上

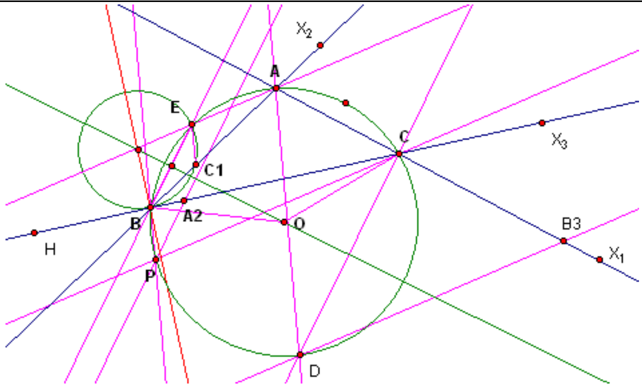
結論

$\therefore$作圖條件：$0^0<\alpha<\angle A$，$\alpha\neq\angle A$、$\angle B$、$\angle C$

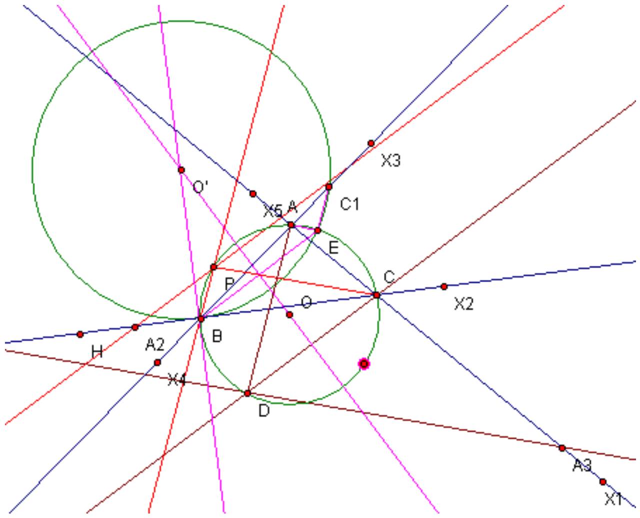
<table>
<tr><td colspan="2">作圖條件：$0^0<\alpha<180^0$ 除$\alpha\neq\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle B+\angle C$、$\angle A+\angle B$外
P、D、E 可同時存在各個弧上的情形。</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>銳角形態 11</td><td>銳角形態 12　P、D 同弧</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>銳角形態 13　E、P 同弧</td><td>直角形態 11　P、D 同弧</td></tr>
</table>



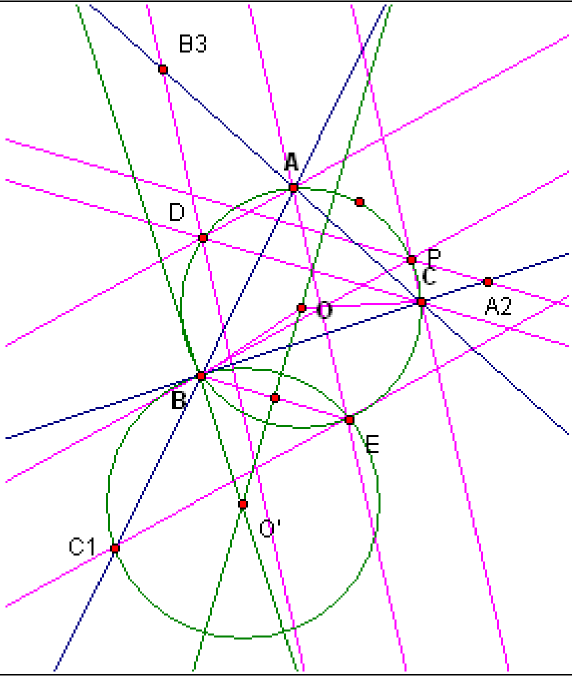
直角形態 12



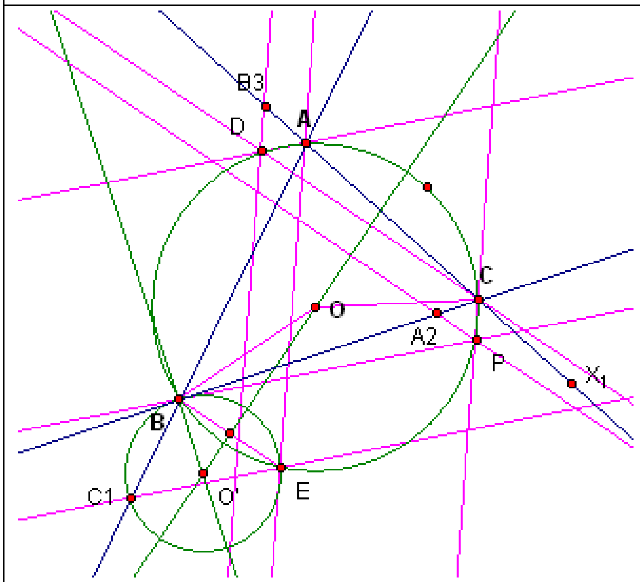
鈍角形態 11　P、D 同弧

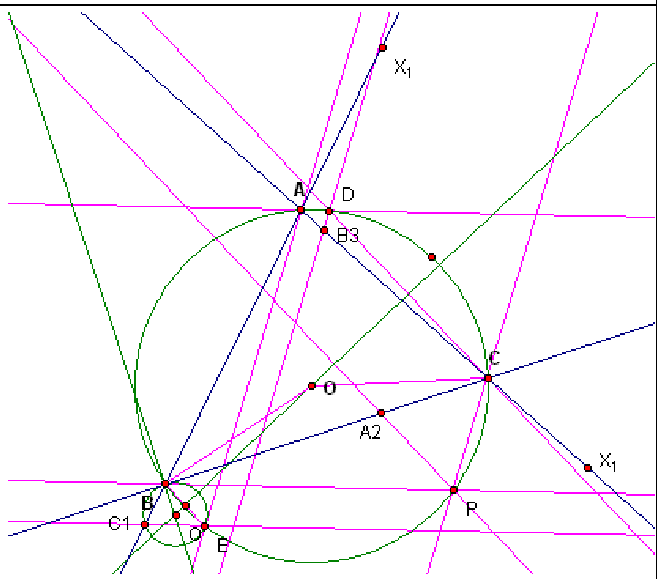


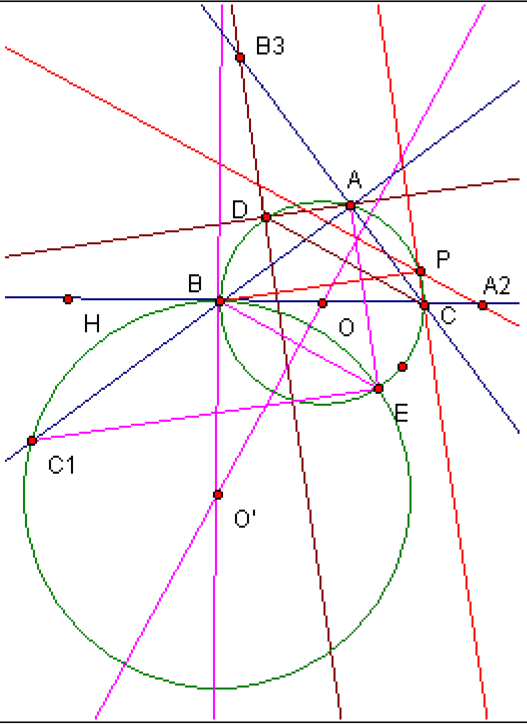
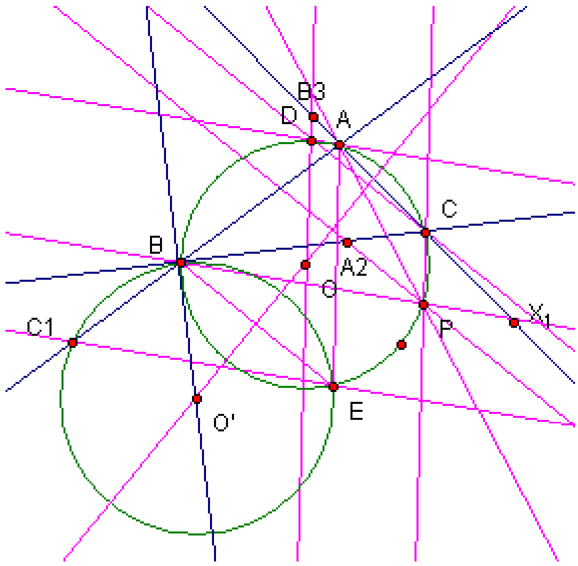
鈍角形態 12



銳角形態 21





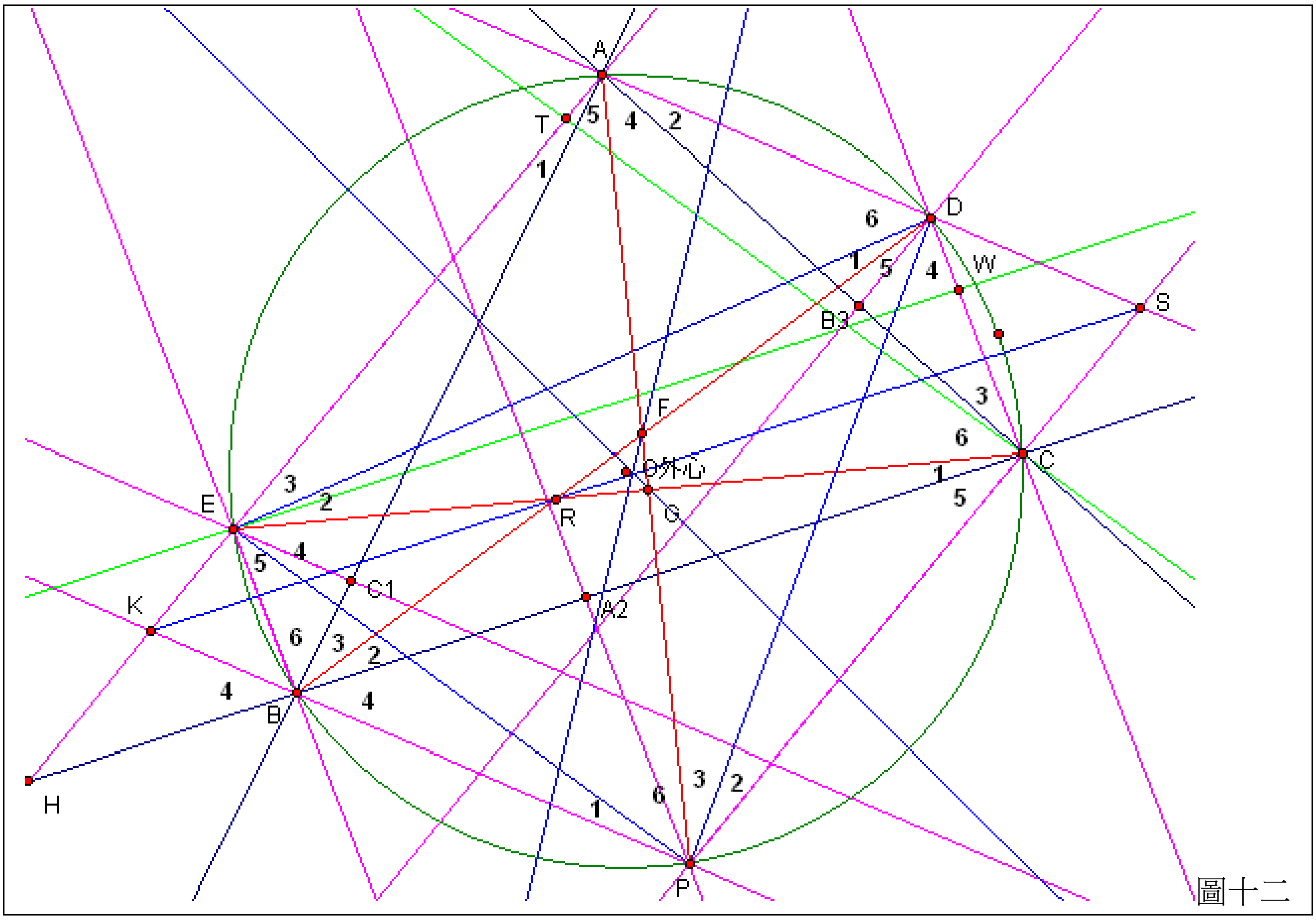
<table>
<tr><td>銳角形態 22　E、P 同弧</td><td>銳角形態 23　E、P 同弧</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>直角形態 21</td><td>鈍角形態 21</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

	AB 弧	BC 弧	AC 弧
E 點的位置	$\angle A < \alpha < 180^0 - \angle B$	$0^0 < \alpha < \angle A$	$180^0 - \angle B < \alpha < 180^0$
P 點的位置	$(\angle A + \angle B) < \alpha < 180^0$	$\angle B < \alpha < (\angle A + \angle B)$	$0^0 < \alpha < \angle B$
D 點的位置	$0^0 < \alpha < \angle C$	$(\angle B + \angle C) < \alpha < 180^0$	$\angle C < \alpha < (\angle B + \angle C)$

因形態多樣、篇幅有限。以下研究以銳角形態 11 為主。

三、全等性質

(一)如圖十二△ABC≅△PDE，但對應點的連線並不一定交於一點(當$\alpha = 90^0$時交於一點)



圖十二

證明：∵ $\overline{EA}\,//\,\overline{PC}$ (作圖) ，∴ EBP 弧=ADC 弧 ，$\overline{EP}=\overline{CA}$ (等弧對等弦)

∠ABC=∠PDE(等弧對等圓周角)

同理 $\overline{AD}\,//\,\overline{BP}$，$\overline{AB}=\overline{PD}$ ， $\overline{BE}\,//\,\overline{CD}$，$\overline{DE}=\overline{BC}$ ∴ △ABC≅△PDE(SSS 全等)

同理可證 P、D、E 為△ABC 三邊的 α^{0} 的西姆松點，所形成的△PDE 與△ABC 全等。

(二)如圖十二 △ABC 為銳角時，圓內接六邊形 AEBPCD 對邊互相平行，但不一定相等

(當 $\alpha=90^{0}$ 時相等)

(1) 四邊形 ABPD 、四邊形 AEPC、 四邊形 EBCD 為等腰梯形，$\overline{AP}=\overline{BD}=\overline{CE}$ 。

(2) $\overline{AF}=\overline{DF}$ 、$\overline{BF}=\overline{PF}$ 、$\overline{EG}=\overline{PG}$ 、$\overline{AG}=\overline{CG}$ 、$\overline{ER}=\overline{BG}$ 、$\overline{DR}=\overline{CR}$ 。

證明：在四邊形 AEPC 中 $\overline{EA}\,//\,\overline{PC}$ (作圖) ，又△ABC≅△PDE(SSS 全等)

∴ $\overline{EP}=\overline{AC}$ (對應邊)，∴四邊形 AEPC 為等腰梯形。

同理可證 四邊形 AEPC 、四邊形 EBCD 為等腰梯形，$\overline{AP}=\overline{BD}=\overline{CE}$ (等腰梯形對角線相等)。

利用等腰梯形相等的底角減去相等的圓周角得

$\overline{AF}=\overline{DF}$ 、 $\overline{BF}=\overline{PF}$ 、 $\overline{EG}=\overline{PG}$ 、 $\overline{AG}=\overline{CG}$ 、 $\overline{ER}=\overline{BG}$ 、 $\overline{DR}=\overline{CR}$ 。

(三) △PBC+△DAC+△EAB 的面積和≤△ABC 的面積

證明：利用圓內接△ABC 面積= $\dfrac{\overline{AB}\times\overline{AC}\times\overline{BC}}{4R}$ ；(R：外接圓半徑)。

由作圖 及 由邊角關係 得 $\overline{AE}>\overline{PC}$ ， $\overline{BE}<\overline{CD}$ ， $\overline{BP}>\overline{AD}$ ， $\overline{BC}>\overline{AC}$

∠6>∠4>∠5>∠3>∠2>∠1

∴ 4R*△ABC 面積= $\overline{AB}\times\overline{BC}\times\overline{AC}=(\overline{AB}\times\overline{DE})\times\overline{AC}$ （$\because \overline{BC}=\overline{DE}$）

$=(\overline{AE}\times\overline{BD}+\overline{BE}\times\overline{AD})\times\overline{AC}=(\overline{AE}\times\overline{BD}\times\overline{AC})+(\overline{BE}\times\overline{AD}\times\overline{AC})$

$=(\overline{AE}\times\overline{BD}\times\overline{PE})+(\overline{BE}\times\overline{AD}\times\overline{AC})$ （$\because \overline{PE}=\overline{AC}$）

$=\overline{AE}\times(\overline{BE}\times\overline{PD}+\overline{BP}\times\overline{DE})+(\overline{BE}\times\overline{AD}\times\overline{AC})$

$=\overline{AE}\times\overline{BE}\times\overline{AB}+\overline{AE}\times\overline{BP}\times\overline{BC}+\overline{BE}\times\overline{AD}\times\overline{AC}$ （$\because \overline{PD}=\overline{AB}$ ， $\overline{DE}=\overline{BC}$）

=4R*△ABE 面積+ $\overline{AE}\times\overline{BP}\times\overline{BC}+\overline{BE}\times\overline{AD}\times\overline{AC}$

=4R*△ABE 面積+4R*△PBC 面積+4R*△ACD 面積

$+(\overline{AE}-\overline{PC})\times\overline{BP}\times\overline{BC}-(\overline{CD}-\overline{BE})\times\overline{AD}\times\overline{AC}$

如圖十二 ，作 $\overline{CT}\,//\,\overline{PE}$ 交 $\overline{AE}$ 於 T，則 $\overline{AE}-\overline{PC}=\overline{AT}$ ；∠ACT=∠6-∠4

作 $\overline{EW}\,//\,\overline{BC}$ 交 $\overline{CD}$ 於 W，則 $\overline{CD}-\overline{BE}=\overline{DW}$ ；∠DEW=∠2-∠1

∵∠2+∠4=∠1+∠6(已證)，∴∠ACT=∠6-∠4=∠2-∠1=∠DEW

又∠TAC=∠1+∠5+∠4=∠WDE，∴△ATC、△DWE 相似

∴ $\dfrac{\overline{AT}}{\overline{DW}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DE}}$ ， $\overline{DW}\times\overline{AC}=\overline{AT}\times\overline{DE}$ 代入

原式=4R*△ABE 面積+4R*△PBC 面積+4R*△ACD 面積+ $\overline{AT}\times\overline{BP}\times\overline{BC}-\overline{DW}\times\overline{AD}\times\overline{AC}$

=4R*△ABE 面積+4R*△PBC 面積+4R*△ACD 面積+ $\overline{AT}\times\overline{BP}\times\overline{BC}-\overline{AT}\times\overline{AD}\times\overline{DE}$

=4R*△ABE 面積+4R*△PBC 面積+4R*△ACD 面積+ $\overline{AT}\times\overline{BC}\times(\overline{BP}-\overline{AD})$

在本文的作圖條件下 $\overline{BP} > \overline{AD}$

∴△PBC+△DAC+△EAB 的面積和≤△ABC 的面積 得證

四、對角線共點

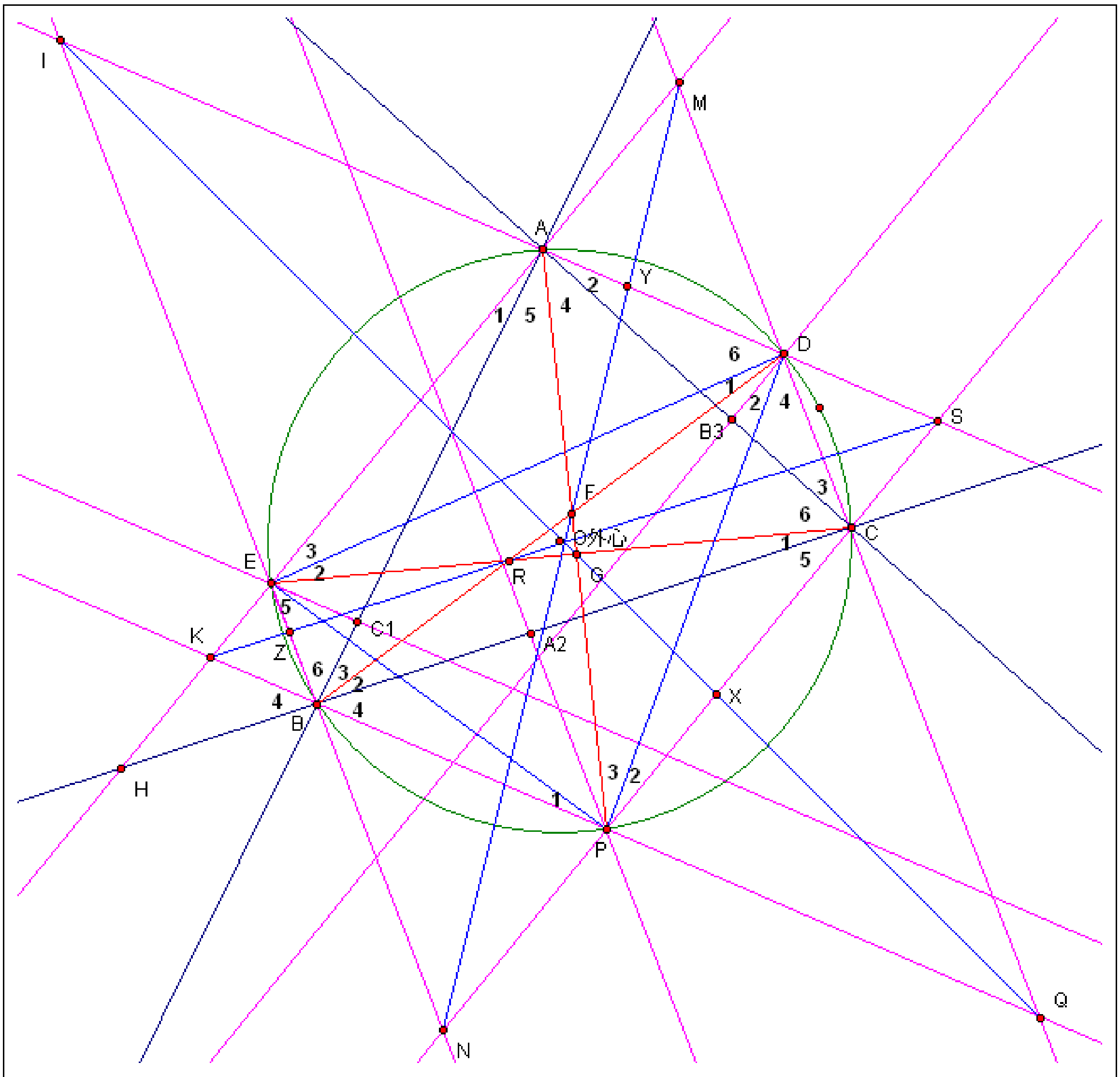
(一) 如圖十三兩大三角形△SIN、△KQM 及圓內接六邊形 AEBPCD 六個邊所引六個三角形△AIE、△KBE、△PBN、△PQC、△SDC、△ADM 皆與△ABC 相似。

證明：由內角的推導得知

$\angle BAC=\angle ISN=\angle MKQ=\angle AIE=\angle BKE=\angle BPN=\angle QPC=\angle DSC=\angle MAD$
$=\angle 3+\angle 6=\angle 4+\angle 5$

$\angle BCA=\angle INS=\angle KMQ=\angle AEI=\angle BEK=\angle BNP=\angle QCP=\angle DCS=\angle AMD$
$=\angle 2+\angle 4=\angle 1+\angle 6$

由 AA 相似性質得證



圖十三

(二)如圖十三△ABC 中 P、D、E 為直線$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$或$\overleftrightarrow{AB}$的斜西姆松點。則

平行四邊形 AKPS 的對角線$\overline{KS}$與等腰梯形的 BCDE 對角線$\overline{EC}$、$\overline{BD}$共點。

平行四邊形 MENC 的對角線$\overline{MN}$與等腰梯形的 ABPD 對角線$\overline{AP}$、$\overline{BD}$共點。

平行四邊形 IBQD 的對角線$\overline{IQ}$與等腰梯形的 AEPC 對角線$\overline{AP}$、$\overline{EC}$共點。

證明：在△RKB 和△RDS 中 ∵△KBE～△SDC(AA 相似)

$\therefore \dfrac{\overline{KB}}{\overline{SD}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{CD}}$ 又△BER～△DCR(等腰梯形性質)

$\therefore \dfrac{\overline{BE}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{BR}}{\overline{DR}}$ $\therefore \dfrac{\overline{KB}}{\overline{SD}}=\dfrac{\overline{BR}}{\overline{DR}}$ ……(1)

$\because \overline{BE}\,//\,\overline{CD}$ ∴∠EBR=∠CDR(內錯角相等)

又△KBE～△SDC ∴∠KBE=∠SDC

∴∠KBR=∠KBE+∠EBR=∠SDC + ∠CDR = ∠SDR……(2)

由(1)(2)得 △RKB～△RDS (SAS 相似)

∴∠BRK=∠SRD (對應角)

∴∠KRE+∠ERD+∠DRS =∠KBE +∠DRS+∠ERD=∠KRE+∠BRK+∠BRC=180^0。

∴K、R、S 共線 ，得證。同理可證另兩組條件。

(三) 如圖十三△ABC 中 P、D、E 為直線$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$或$\overleftrightarrow{AB}$的斜西姆松點。則平行四邊形 IBQD 的對角線$\overline{IQ}$、平行四邊形 AKPS 的對角線$\overline{KS}$與平行四邊形 MENC 的對角線$\overline{MN}$共點。

證明：設$\overline{IQ}$與$\overline{MN}$相交於 J，作$\overline{JK}$、$\overline{JS}$，令∠BKJ= a、∠MNS=b、∠NIQ=c、∠DSJ=d。

則∠NZJ=∠1+∠5+a，∠IZJ=∠3+∠6-a+∠2+∠4

∠IJZ=180^0-(c+∠3+∠6-a+∠2+∠4)=∠1+∠5+a-c

∠IAM=360^0-(∠1+∠2+∠4+∠5+∠3+∠6+∠3+∠6)=∠1+∠2+∠4+∠5

=(∠1+∠5-c)+b+ ∠IJM

∴∠IJM=∠2+∠4+c-b

∠MJS=180^0-d-∠JYS=180^0-d-[∠1+∠5+(∠2+∠4-b)]=∠3+∠6+b-d

∠IJZ+∠IJM+∠MJS=(∠1+∠5+a-c)+(∠2+∠4+c-b)+(∠3+∠6+b-d)= 180^0+a-d

當 a=d 時三線共點，∵$\overline{KS}$為平行四邊形 AKPS 的對角線∴得證

(四)當∠EAB=∠DAC 即∠1=∠2 時，R=F=G=O，$\alpha=90^0$。

證明：如圖十三，在△DER 中，∠1=∠2， 則$\overline{DR}=\overline{ER}$ (等腰)

$\because \overline{CR}=\overline{DR}$、$\overline{ER}=\overline{BR}$ (已證) $\therefore$ $\overline{ER}=\overline{CR}=\overline{BR}=\overline{DR}$ 即 R=O

$\because \angle 2+\angle 4=\angle 1+\angle 6$、$\angle 2+\angle 3=\angle 1+\angle 5$ (已證) $\therefore \angle 4=\angle 6$、$\angle 3=\angle 5$

同理可證 F=O=G $\therefore$R=F=G=O

$\because \overline{AE} // \overline{CP}$ $(\angle 1+\angle 5+\angle 4)+(\angle 1+\angle 5+\angle 6)=2(\angle 1+\angle 5+\angle 4)=2\alpha=180^0$。

$\therefore \alpha=90^0$。

(五) 如圖十四設 P'、D'、E' 為 $\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$ 或 $\overleftrightarrow{AB}$ 的西姆松點由托勒密定理得

$\overline{AP}\times\overline{CE}=\overline{AC}\times\overline{PE}+\overline{AE}\times\overline{PC}$

$\therefore \overline{AP}^2=\overline{AC}^2+\overline{AE}\times\overline{PC}$

當 P'=P 時 $\overline{AP}^2=\overline{AC}^2+\overline{PC}^2$

$\therefore \overline{AE}=\overline{PC}$ 同理 $\overline{CD}=\overline{BE}$、$\overline{BP}=\overline{AD}$ 形成三個矩形交會，與西姆松點的結構相同。

由△AP'P≅△BD'D ≅△CE'E(RHS 全等)

則$\angle P'$AP=$90^0-(\angle 1+\angle 4+\angle 5)=90^0-\alpha=\frac{1}{2}(\angle 2-\angle 1)$

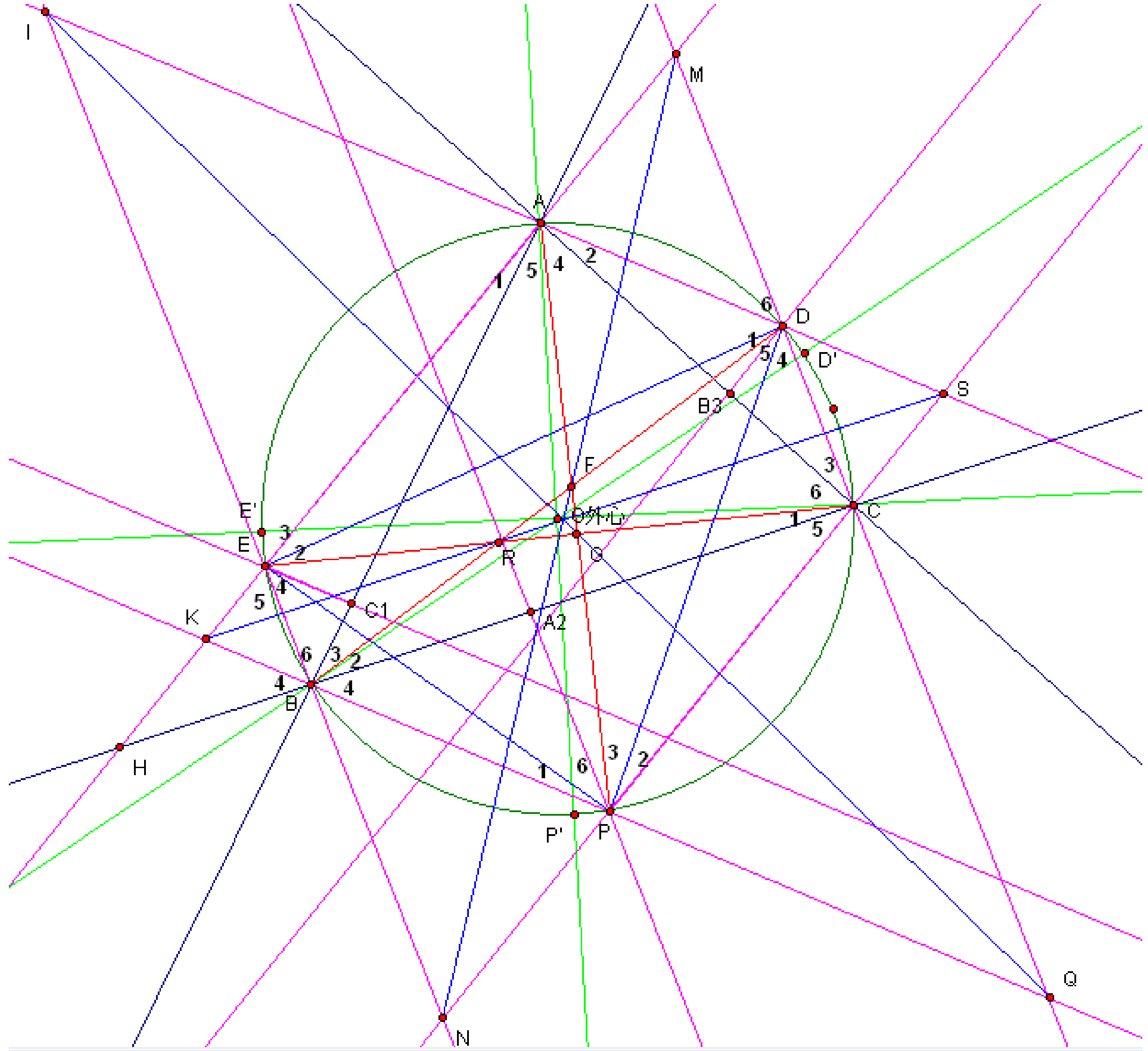
即此種作圖旋轉的角度為 $180^0+2*(90^0-\alpha)=360^0-2\alpha$

以平面座標而言，若 A(x,y)被旋轉了$\theta=360^0-2\alpha$ 後的座標 P (X’，Y’)，滿足

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ +\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

或

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= +x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}$$



圖十四

(六) 如圖十三過外心 O 作等腰梯形 ABPD、AEPC、EBCD 的上底及一腰的中垂線,則形成的圓心角為α 、(180^0-α)為△ABC 旋轉變換中兩次反射變換的反射軸。

證明：以 ABPD 為例 圓心角=180^0-∠ADP=180^0-(∠1+∠5+∠6)=α 得證

∵本文的作圖中 $\overline{AD} \,//\, \overline{BP}$ ∴過外心 O 垂直 $\overline{AD}$ 的直線為△ABC 的第一次反射軸，將 A 對應到 D，B 對應到 P，C 對應到圖中一點，過外心 O 垂直 $\overline{PD}$ 的直線為第二次反射軸再將 D 對應到 P，P 對應到 B，C 的對稱點對應到 E，形成 360^0-2α 的旋轉。

陸、結論與討論

(一)、如何找到三角形三邊的西姆松點：

1.做三角形的外心畫出外接圓，以外心為 180^0 的旋轉中心，找出三頂點的對稱點，即可完成。

作法(1) 作△ABC 的外接圓 圓 O

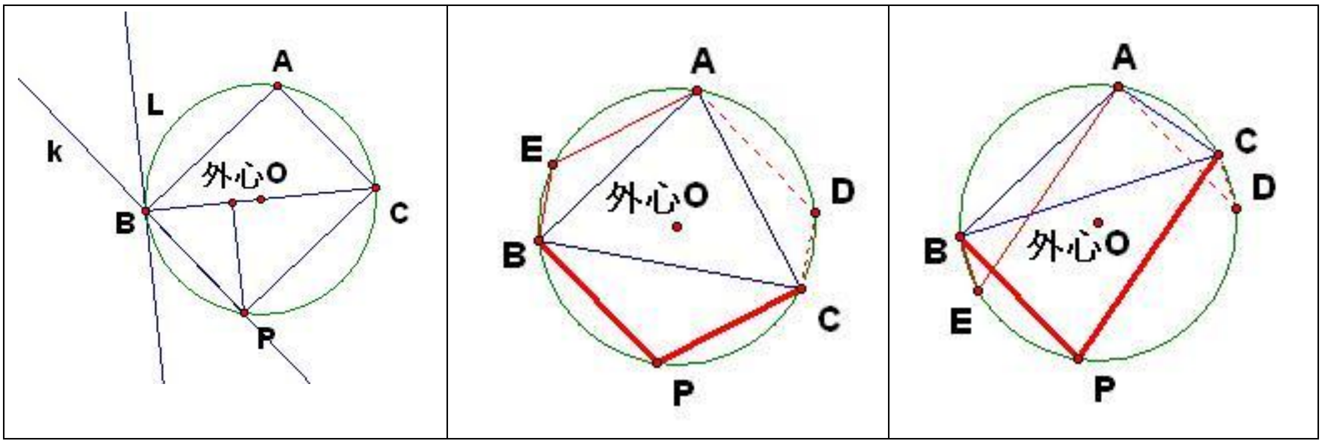
(2) 分別作 $\overrightarrow{AO}$ 、$\overrightarrow{BO}$ 、$\overrightarrow{CO}$ 交圓 O 於 P、D、E

則 P、D、E 分別為△ABC 三邊的西姆松點。

(3) 從 P、D、E 分別連接各自西姆松線在△ABC 各頂點 則此三個三角形即為所求。

2.做三角形的垂心，以三邊中點為點對稱中心，找出三頂點的對稱點，即可完成。

(二)、西姆松點的面積關係



表(二)

如表(二)上的圖，因為圖形為點對稱圖形因此 C 的對稱點 E 一定在直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 的異側(P 為 $\overline{BC}$ 西姆松點)，因此以下定義中

X 介於西姆松線與外心所形成的夾角之內部，是指若 X 的西姆松線為 $\overleftrightarrow{AB}$ ，且 X 在∠BAO 內部，∠BAO 的次序排列是依 $\overline{XA} > \overline{XB}$ 而定，若 $\overline{XA} = \overline{XB}$ 時，∠BAO 或∠ABO 均可，餘此類推。

定義：**符號函數**（sgn）是一個邏輯函數，用以判斷實數的正負號。其定義為：X 為西姆松點，

$$\text{Sgn } x = \begin{cases} -1 & \text{：x 介於西姆松線與外心所形成的夾角之內部。} \\ 0 & \text{：x 在西姆松線上。} \\ 1 & \text{：x 不在西姆松線與外心所形成的夾角之內部。} \end{cases}$$

說明：例如 E 為 $\overleftrightarrow{AB}$ 的西姆松點，

當 $\overline{EA} = \overline{EB}$ 時， $\overline{AC} = \overline{BC}$ ，不管 ΔABC 為銳角或鈍角，E 不在∠BAO 或∠ABO 內部，Sgn E = 1。

當 $\overline{EA} > \overline{EB}$ (如表三中的圖)，ΔABC 為銳角三角形時，E 不在∠BAO 內部，Sgn E = 1。

ΔABC 為鈍角三角形時，E 在∠BAO 內部，Sgn E =-1。

當 $\angle BAC$ 為直角時，E=B 在西姆松線上，Sgn E =0。 $\overline{BC}$ 為直徑 D=C

當 $\angle ACB$ 為直角時，$\overline{AB}$ 為直徑 E 不在∠BAO 或∠ABO 內部，Sgn E = 1。

1.已知 ΔABC 中 P、D、E 為 $\overline{BC}$ 、$\overline{AC}$ 、$\overline{AB}$ 的西姆松點，則

ΔABC 的面積=(sgn P) ΔPBC +(sgn E) ΔABE +(sgn D) ΔACD 的面積和。

亦即外心所屬的三角形面積等於三個由三邊的西姆松點、三角形三個頂點組成的三角形的面積和。

(1)當 ΔABC 為直角三角形時，ABPC 為矩形，所以

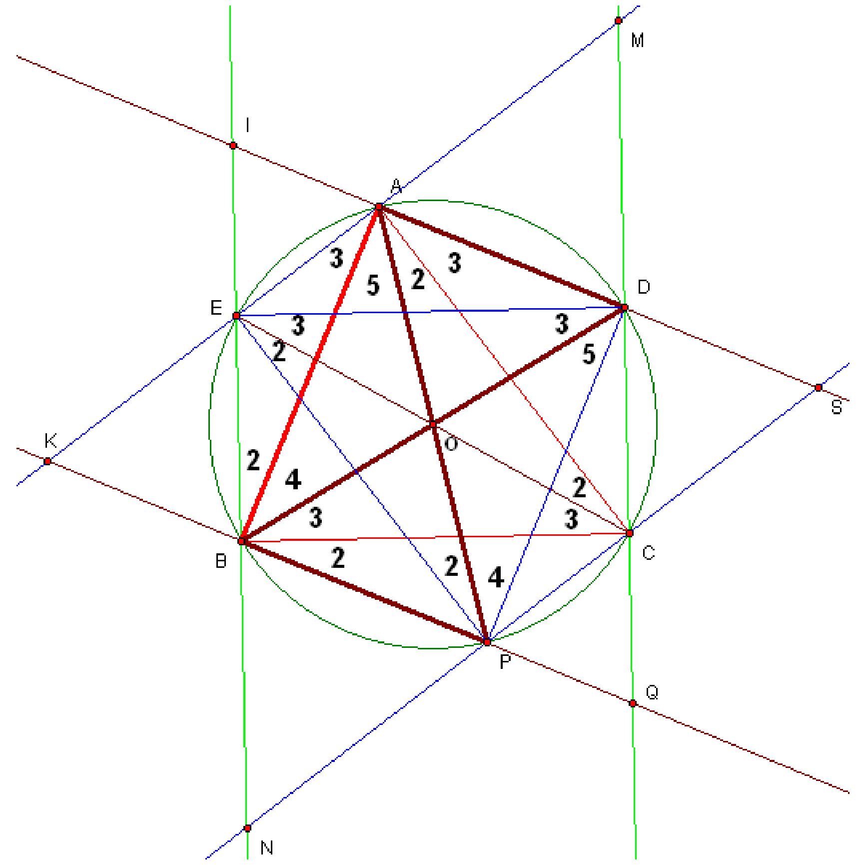
ΔABC 的面積=(sgn P) ΔPBC +(sgn E) ΔABE +(sgn D) ΔACD 的面積和

= ΔPBC +0+0 的面積和= ΔPBC 面積

(2)當 ΔABC 為銳角三角形時

ΔABC 的面積=(sgn P) ΔPBC +(sgn E) ΔABE +(sgn D) ΔACD 的面積和

= $\Delta PBC + \Delta ABE + \Delta ACD$ 的面積和，如圖十五



圖十五

證明：如圖十五

ΔABC 的面積= $\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$ = $\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin(\angle 2+\angle 5)$ ......(1)

在 ΔACP 中 $\cos(\angle 2)$= $\overline{AC}/\overline{AP}$; $\sin(\angle 2)$= $\overline{CP}/\overline{AP}$

在 ΔBCE 中 $\sin(\angle 3)$= $\overline{BE}/\overline{CE}$;

在 ΔABD 中 $\sin(\angle 4)$= $\overline{AD}/\overline{BD}$;

$\text{Sin}(\angle 2+\angle 5) = \text{Sin}(\angle 2)\cos(\angle 5)+\text{Sin}(\angle 5)\cos(\angle 2)$

$= \dfrac{\overline{CP}\times\overline{AB}+\overline{BP}\times\overline{AC}}{\overline{AP}\times\overline{AP}}$ (托勒密定理)

$= \dfrac{\overline{AP}\times\overline{BC}}{\overline{AP}\times\overline{AP}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AP}}$

帶入(1)得 ΔABC 的面積= $\frac{1}{2}\times\dfrac{\overline{AB}\times\overline{AC}\times\overline{BC}}{\overline{AP}}$

$\Delta ABE+\Delta BPC+\Delta ACI$ 的面積

$= \frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{BE}\times\sin(\angle 2) + \frac{1}{2}\overline{BP}\times\overline{BC}\times\sin(\angle 2) + \frac{1}{2}\overline{CD}\times\overline{AC}\times\sin(\angle 4)$

$= \dfrac{1}{2\times\overline{AP}}(\overline{AE}\times\overline{AB}\times\overline{BE}+\overline{BP}\times\overline{BC}\times\overline{CP}+\overline{CD}\times\overline{AC}\times\overline{AD})$

$= \dfrac{1}{2\times\overline{AP}}[\overline{AE}\times(\overline{AB}\times\overline{BE}+\overline{BP}\times\overline{BC})+\overline{CD}\times\overline{AC}\times\overline{AD}]$ ($\because \overline{AE}=\overline{CP}$)

$= \dfrac{1}{2\times\overline{AP}}[\overline{AE}\times(\overline{PD}\times\overline{BE}+\overline{BP}\times\overline{DE})+\overline{CD}\times\overline{AC}\times\overline{AD}]$ ($\because \overline{AB}=\overline{PD}$, $\overline{BC}=\overline{DE}$)

$= \dfrac{1}{2\times\overline{AP}}(\overline{AE}\times\overline{PE}\times\overline{BD}+\overline{CD}\times\overline{AC}\times\overline{AD})$ (托勒密定理)

$= \dfrac{1}{2\times\overline{AP}}\times\overline{AC}\times(\overline{AE}\times\overline{BD}+\overline{CD}\times\overline{AD})$ ($\because \overline{PE}=\overline{AC}$)

$= \dfrac{1}{2\times\overline{AP}}\times\overline{AC}\times(\overline{AE}\times\overline{BD}+\overline{BE}\times\overline{AD})$ ($\because \overline{CD}=\overline{BE}$)

$= \dfrac{1}{2\times\overline{AP}}\times\overline{AC}\times\overline{AB}\times\overline{DE}$ (托勒密定理)

$=\dfrac{1}{2\times\overline{AP}}\times\overline{AC}\times\overline{AB}\times\overline{BC}$ （$\because \overline{DE}=\overline{BC}$ ）

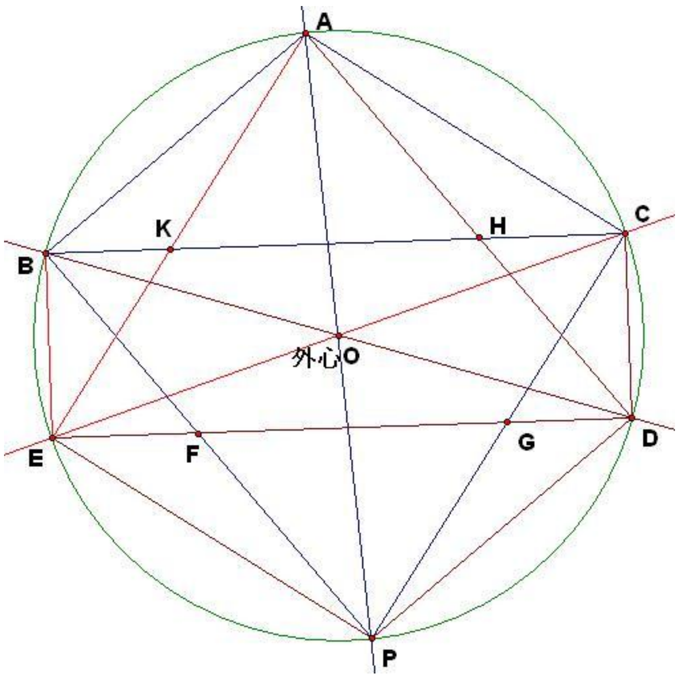
=ΔABC的面積 得證

(3)當ΔABC為鈍角三角形時

ΔABC的面積=(sgn P) ΔPBC+(sgn E) ΔABE+(sgn D) ΔACD的面積和

$=\Delta PBC-\Delta ABE-\Delta ACD$的面積和，

即ΔPBC的面積=$\Delta ABC+\Delta ABE+\Delta ACD$的面積和 如圖十六



圖十六

證明：因為∠BAC為鈍角，所以弧BPC大於180^0即O為銳角ΔPBC的外心

且A、E、D為ΔPBC的$\overline{BC}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$的西姆松點

所以由定理1得ΔPBC的面積=$\Delta ABC+\Delta BEP+\Delta PDC$的面積和。

$=\Delta ABC+\Delta ACD+\Delta ABE$的面積和(點對稱圖形)

(三)六點共圓

任意三角形的垂心 H 分別以三角形三邊中點為點對稱中心產生三個對稱點，此三點即為三邊的西姆松點，則此三個對稱點與三頂點共圓。此六點依序形成對邊互相平行的圓內接六邊形，因對邊互相平行。

(四)、如何找到△ABC 三邊的α^0的西姆松點：

設 P、D、E 為直線$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AB}$或$\overleftrightarrow{AC}$，α^0的西姆松點。將△ABC 旋轉 360^0-2α 得△PDE，連接$\overline{PB}$、$\overline{PC}$、$\overline{DA}$、$\overline{DC}$、$\overline{EA}$、$\overline{EB}$，以此作圖即可得。

作得逆時針α^0的西姆松點，即可作得(180^0-α)順時針α^0的西姆松點。

(五)、如何找到△ABC 三邊的α^0的西姆松點的旋轉反射軸：

∴過外心 O 垂直$\overline{AD}$的直線為△ABC 的第一次反射軸，將 A 對應到 D，B 對應到 P，C 對應到圖中一點，過外心 O 垂直$\overline{PD}$的直線為第二次反射軸再將 D 對應到 P，P 對應到 B，C 的對稱點對應到 E，形成 360^0-2α 的旋轉。

(六) △ABC 與三邊的α^0的西姆松點的面積關係

銳角形態 11、銳角形態 12、銳角形態 13、銳角形態 22、銳角形態 23、直角形態 11 中，
滿足 (sgn P) ΔPBC +(sgn E) ΔABE +(sgn D) ΔACD 的面積和≤ ΔABC 的面積。

柒、參考資料

1. 國中數學第五、六冊(康軒版)
2. 2011/10/1 老王的夢田
   http://tw.myblog.yahoo.com/jw!ozHXUsWHHh7UxM0Y2TXK_uEdXwGqCw--/article?mid=2915
3. 2011/10/1 http://tw.myblog.yahoo.com/jw!W830.eGUFQVUCq_sin0Qg.ke/article?mid=150
4. 維基百科
   http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%A5%BF%E5%A7%86%E6%9D%BE%E5%AE%9A%E7%90%86
5. 幾何學辭典 是部貞市郎 九章出版社

【評語】030416

本研究對西姆松線進行相關研究，雖然這方面的研究已有不少成果，本作品的優點為作者將西姆松線重新做了一個更廣泛的定義，得出新的研究方向，值得鼓勵。

本研究的成果還可以再做完整一點，有些名詞的說明亦可更清楚交待，例如「同方向」的意義。