中華民國第52屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030415

「倒」行「逆」施

—從建模中看穿翻轉類型與結構

學校名稱：高雄市立三民國民中學

作者：	指導老師：
國三 李彥杰	黃昭勳
國三 王宣淳	蔡震珊

關鍵詞：次數關係圖、奇偶函數推算表、比照圖

摘要

本研究透過函數模型的設計進行探討翻硬幣的問題，主題聚焦在翻動量為費氏數列與等差數列的情況。在費氏數列翻的方面，我們利用「逆推法」設計出「次數關係圖」和「奇偶函數推算表」，進行理論推演並證明出簡潔公式，由於我們的理論探討是架設在硬幣足夠翻的情況下，因此在進行實際操作時，還需要判斷究竟需要幾個正面硬幣才足夠翻，探討完後將所有情況分為五類。而等差數列翻，竟也可用相同的手法進行推演。此外，我們也找到了兩圖形互相轉換的問題解法，也就是完全創新的「比照圖」。

壹、研究動機

我們接觸到著名的翻硬幣問題(翻杯問題)，對此產生了濃厚的興趣，而剛好在二下數學課本第8頁介紹數列時有提到費氏數列及等差數列，因此在創新的思考下，我們想到不固定翻的問題：如果翻動為費波那契數列時，會是怎樣的情形？如果翻動為等差數列時，又會是怎樣的情形？透過文獻探討，發現全部的作品都侷限在固定翻的情況，沒有人去探討當翻動量變動時的情形，於是靈機一動，將這兩個翻動量變化大的棘手數列與翻硬幣問題結合，做完整而有系統的探討。

在初步研究後，我們想到更多創新的問題，例如：「如何從一個有正有反的圖形翻成另一個圖形呢？最少次數又是為何？是否可進行共同的分類？……」於是這個創新的研究便如火如荼的展開了。

著手進行研究後，馬上發現了一個很嚴重的問題，如何紀錄性質與翻法讓我們很頭痛，總不能一味的用畫圖來記錄，於是我們絞盡腦汁，最後決定結合一年級所學的函數來探討，希望能找到適合的函數模型，方便我們找出規律，並分類翻硬幣問題。

貳、研究目的

一、定義硬幣翻轉函數模型，進行理論探討與研究

二、翻動量呈現為費波那契數列數列時，研究翻轉問題的相關性質

(一) 探討任意的硬幣圖形，是否都能使全部硬幣翻成為正面

(二) 運用數學符號，進行任意硬幣圖形全部翻為正面的翻法及次數探討

(三) 依據翻轉模式建構「反面數量變化曲線圖」

(四) 探討差量計算公式以滿足足夠翻

(五) 任意兩圖形互相轉換的翻法及次數分析

三、翻動量呈現為等差數列時，研究翻轉問題的相關性質

(一) 探討任意的硬幣圖形，是否都能使全部硬幣翻成為正面

(二) 運用數學符號，進行任意硬幣圖形全部翻為正面的翻法及次數探討

(三) 依據翻轉模式建構「反面數量變化曲線圖」

(四) 探討差量計算公式以滿足足夠翻

(五) 任意兩圖形互相轉換的翻法及次數分析

參、研究設備及器材

紙、筆

肆、文獻探討

我們想先徹底了解等量翻(固定翻)，再往更困難的不固定翻進行探究。於是參考了歷屆作品，發現他們的研究皆採用觀察的方式，都不斷的嘗試翻動，以自己認為的最少次數整理歸納出結論，不僅很多情況沒有討論到，其探討結果也不一定正確，因為沒有任何證據能證明他們得到的次數是最少次數，且都只侷限於全部反面翻成正面的情況，若能加入正面硬幣做討論，探討任意排列的圖形翻成全部正面的問題不是更多元嗎？

而且，這種固定翻動量的翻法是一種傳統的模式，我們不想 一直在傳統模式中打轉，想要往不固定翻的問題探討，而翻動量也必須在有規律的情況下才能進行掌握，所以我們就結合課本上提到的「**費氏數列**」，作一個創新的費氏數列翻研究。但身為國中生的我們，只大略知道費波那契數列的形成法則：任一項等於前兩項之和，卻不知它有什麼神奇性質，於是決定先看書汲取先人智慧，待了解費波那契數列之後再開始研究，於是參考了九章出版社的「斐波那契數列」，作者的精闢解說讓我們獲益良多。

此外，為了不重蹈覆轍，我們以逆推法做完整的探討，先從全部為正的硬幣作為起頭，看看一次能翻出幾個反、二次能翻出幾個反、三次……，因此便可找出所有最少次數為一次的圖形、所有最少次數為二次的圖形……，解決了研究常出現的盲點「認為的最少次數一定是真的最少次數嗎?」。並且先把硬幣的動作符號化之後再將其結構化，以便作共同的分類。

由於我們採費氏數列任一項作為翻動量首項，其他翻動量則依序從首項往後數起，因此確定首項後，第一次翻動量、第二次翻動量、第三次翻動量……翻動量數列即固定，與等量翻的情況相同，都屬於確定首項就可以確定翻動量數列的情況。待研究完畢後，更試著往翻動量有兩個變數的方向探討，就是除了改變翻動量首項之外，還要討論另一變數的情況，在國中數學範疇內找尋後挖掘到：**等差數列翻**，兩變數分別為首項與公差，其翻動量數列呈一等差數列。

我們也參考了康軒版國中數學第二冊第四章，以函數結合進行探究，希望能找出符合此種遊戲的函數，以便表示每個操作，並且更利於計算、探究翻法與最少次數，且從函數中找出規律，討論翻硬幣的分類問題。

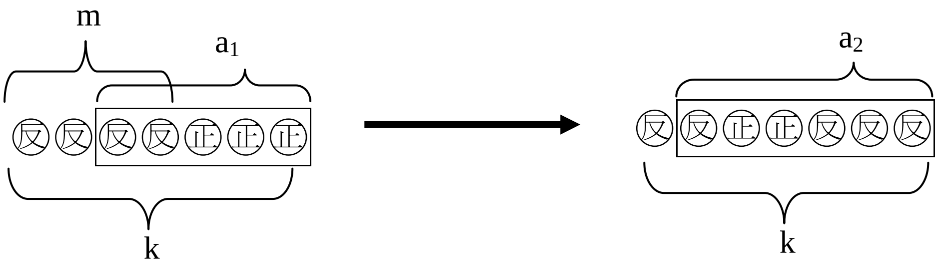
過程中，我們試過各種方法，發現等差數列翻也能用逆推的手法探討，因此想依據翻轉步驟畫出這兩種翻法的各大類型「反面數量變化曲線圖」，而兩個主題的分類與圖形竟有異曲同工之妙，令人讚嘆數學的奧妙。

伍、研究方法

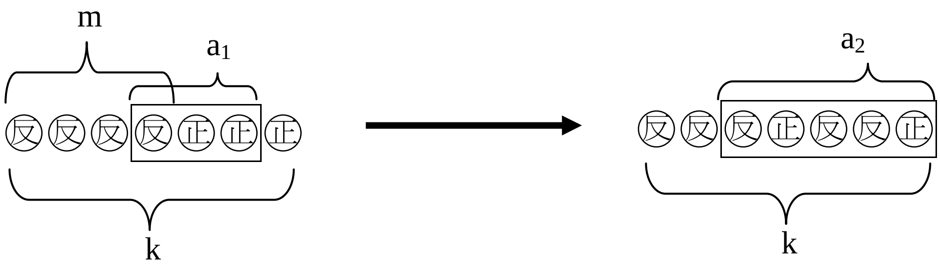
為方便紀錄，我們將反面朝上的硬幣記為反，正面朝上的硬幣記為正。

一、在費氏數列翻與等差數列翻的情況中，所有的硬幣個數稱為 k，一開始反的硬幣個數稱為 m，而第一次翻動硬幣個數稱為 a_1，第二次翻動硬幣個數稱為 a_2・・・，第 n 次翻動硬幣個數稱為 a_n，並且將等差數列翻的公差稱為 d。以下各舉一個例子說明：

1.全部有 7 個硬幣，一開始反的硬幣有 4 個，第一次翻動 5 個硬幣，翻動量公差等於 1。



2. 全部有 7 個硬幣，一開始反的硬幣有 4 個，第一次翻動 3 個硬幣($a_1=F_4=3$)。



二、將符號規定如下：

1、以 Nn(反)、N_n(正)分別表示翻第 n 次後反和正的個數；

2、以 N_n(反,正)、N_n(正,反)分別表示翻第 n 次時，反翻成正的個數和正翻成反的個數，即

$$N_n(\text{反})=N_{n-1}(\text{反})-N_n(\text{反},\text{正})+N_n(\text{正},\text{反})。$$

3、若存在 k，使 N_k(反)＝0，則可將全部硬幣翻成正面，即可以翻成功；

4、若對所有的 n 而言，$N_n(\text{反})\neq 0$，則永遠無法將全部硬幣翻成正面。

為了方便敘述與紀錄，我們還定義一些符號，代表翻幣的動作，可在所有情況的最少次數翻法中，表示每個操作，共有四個，分別為 R、Y、E、H，我們一一來說明，以翻動第一次(n=1)來舉例：

5、符號「R」

R：若每次可翻動 a_n 個硬幣，翻動的硬幣皆為反，即翻動 a_n 個反，$N_n(\text{反},\text{正})=a_n$，適合在 $N_n(\text{反})\geqq a_n$ 時使用，以 $a_1=5$，m=6，d=3 為例，$N_n(\text{反},\text{正})=N_1(\text{反},\text{正})=a_1=5$，如下：

正正正 $\boxed{\text{反反反反反}}$ 反

6、符號「Y」

Y：翻動 a_n 個正，即 $N_n(\text{反},\text{正})=0$，$N_n(\text{正},\text{反})=a_n$，以 $a_1=5$，m=3，d=1 為例，如下圖：

反反反 $\boxed{\text{正正正正正}}$ 正正

7、符號「E」

E：翻動上一次翻完後的反減去公差所得的一半的反，即 $N_n(\text{反},\text{正})=\dfrac{N_{n-1}(\text{反})-d}{2}$，適合在

$a_n \geqq \dfrac{N_{n-1}(反)-d}{2}$ 時使用，以 $a_1=5$，$m=5$，$d=1$，$N_n(反,正)=\dfrac{5-1}{2}=2$，如下圖：

反反反$\boxed{\text{反反正正正}}$

8、符號「H」

H：翻動上一次翻完後的反減去上一步翻動量所得的一半的反，即 $N_n(反,正)=\dfrac{N_{n-1}(反)-F_{n-1}}{2}$，適合在 $F_n \geqq \dfrac{N_{n-1}(反)-F_{n-1}}{2}$ 時使用，以 $a_1=F_4=3$，$m=6$，$N_n(反,正)=\dfrac{6-2}{2}=2$，如下圖：

反反反反$\boxed{\text{反反正}}$正

8、符號「R^n」

我們考慮到有時會重覆某個操作，所以決定若重覆操作 n 次 R，則記為 R^n，以此類推。

9、符號「S」

為數個翻轉動作的結合，我們按照翻動的先後順序從左到右寫出代表操作的符號，且我們定義了一個符號 S，使 S 為最少次數內所有動作的結合。以 $k=11$，$a_1=3$，$m=10$，$d=1$ 為例，必須重覆翻動 R 操作 2 次，即分別翻動 3、4 個反，再翻動 E 操作 1 次，即翻動 $\dfrac{N_{3-1}(反)-1}{2}$ 個反，最後再翻動 R 操作 1 次，即翻動 6 個反，此時即翻成功，統整上述可得 $S=R^2HR$。如下圖：

	R $\boxed{\text{反反反}}$反反反反反反反正	→	R 正正正$\boxed{\text{反反反反}}$反反反正
→	E 正正正$\boxed{\text{正正正正反}}$反反正	→	R 正正正$\boxed{\text{反反反反}}$正$\boxed{\text{反反}}$正
→	正正正正正正正正正正		

10、符號「[正]」

為了使所有情況在足夠翻的架構下翻動成功，我們做了差量計算公式的探討，使用了[正]表示滿足足夠翻的最小正面個數，依五種類型各有不同 A 值，此符號有別於前面部份，表示一個「數量」而非「翻轉步驟」。待求出 A 值後，可用 A 與正面個數(k-m)比較大小，[正]≧k-m 代表滿足足夠翻，若[正]≦k-m，則[正]-(k-m)即為差量，可算出須補足的正面個數，讓所有情況都可架構在足夠翻下翻動成功。

陸、研究過程

研究目的一：定義硬幣翻轉函數模型，進行理論探討與研究。

為了方便探討硬幣問題的性質，如個數為奇數或偶數等，因此我們定義了一個函數與四個符號。我們定義函數 f(x)表示硬幣個數的奇偶性，$f(n)=\begin{cases}1，當n\in 偶數\\-1，當n\in 奇數\end{cases}$，在此定義之下，可得 f(x)具有下列四個性質：

(一)性質一：f(m+n)=f(m)．f(n)

證明：

1.假設 a=m+n

當 a 為偶數時，則 f(a)=1，

∵a 為偶數時，m、n 為同奇同偶

∴則 f(m)=f(n)$=\begin{cases}1,當m,n為偶數時\\-1,當m,n為奇數時\end{cases}$

故 f(m+n)=f(m)．f(n)=1。

2.當 a 為奇數時，則 f(a)=-1，

m、n 為一奇一偶，

不失一般性，m 為奇數、n 為偶數。

∴f(m+n)= f(m)．f(n)=-1，

經由上面的探討，得

f(m+n)=f(m)．f(n)。

(二)性質二：f(a．n)=$[f(n)]^a$

證明：

f(a．n)=f(n+n+.......+n)(n 有 a 個，a∈N)

=f(n) f(n)．f(n)．......．f(n)(由性質一可推得)

(f(n)有 a 個，a∈N)

=$[f(n)]^a$

(三)性質三：f(-n)=f(n)

證明：

f(0)=f(n+(-n))

= f(n)．(-n)(由性質一可推得)

=1

f(n)=(-n)

(四)性質四：f(m-n)=f(m+n)

證明：

f(m-n)=f(m+(-n))

=f(m)．f(-n)

=f(m)．f(n) (由性質三可推得 f(n)=f(-n))

=f(m+n)

統整上述，這個函數滿足$\begin{cases}f(\mathrm{m}+\mathrm{n})=f(\mathrm{m})\cdot f(\mathrm{n})\\f(a\cdot n)=f(n)^a\\f(-n)=f(n)\\f(\mathrm{m}-\mathrm{n})=f(\mathrm{m}+\mathrm{n})\end{cases}$

研究目的二、翻動量呈現為費波那契數列數列時，研究翻轉問題的相關性質

文獻探討後，我們沿用參考資料的代號，用 F_n 表示費波那契數列第 n 項，而且收集資料中對本研究有幫助的公式：$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$，$F_1+F_2+......+F_n= F_{n+2}-1$。

我們用 m 代表反面個數，用 F_n 表示費波那契數列第 n 項，也就是翻動量的第 n 項；N_i(反)代表翻動 i 次後，盤面上所剩的反面個數；N_i(正)代表翻動 i 次後，盤面上所剩的正面個數；至於 N_i(反,正)則表示第 i 次翻動時由反翻成正的個數；N_i(正,反)則表示第 i 次翻動時由正翻成反的個數。

(一) 探討任意的硬幣圖形，是否都能使全部硬幣翻成為正面

我們同樣要先探討任意圖形是否都能翻成正面(即翻動成功)，才能做進一步的分析，我們探討從全部為正的盤面開始，每次可能翻出的反面個數，便有了定理一的推導。

定理一：在費氏數列翻下，若不考慮正的個數的影響，則不論 m 為多少，都可以翻成功。

(二) 運用數學符號，進行任意硬幣圖形全部翻為正面的翻法及次數探討

因為採用逆推的手法進行研究，所以可推得最後一步翻動反的個數必定為費氏數列的某一項 F_n(該次翻動量)，由此我們可以進一步推得倒數第二步翻動反的個數必定為 F_{n-1} 或 $\frac{N_{n-2}(\text{反})-F_{n-2}}{2}$，原因如下：

(1)若倒數第二步翻動反的個數為 a_{n-1}(即 N_{n-1}(反,正)$=a_{n-1}$)，且為了達成研究目的－找出最少次數，必為 $m=F_1+F_2+F_3+......+F_n= F_{n+2}-1$ 的情形

(2)若倒數第二步翻動反的個數為 $\frac{N_{n-2}(\text{反})-F_{n-2}}{2}$ (即 $N_{n-1}(\text{反},\text{正})=\frac{N_{n-2}(\text{反})-F_{n-2}}{2}$)，又因為目的要讓 $N_n(\text{反})=0$，也就是使 $N_n(\text{反},\text{正})=F_n$，因此一定要使 $N_{n-1}(\text{反})=F_n$，所以我們可以運用之前所提的 $N_n(\text{反})=N_{n-1}(\text{反})-N_n(\text{反},\text{正})+N_n(\text{正},\text{反})$，透過運算得知若取 $\frac{N_{n-2}(\text{反})-F_{n-2}}{2}$ 個反必可達成最少次數的目的，運算過程如下：

$$
\begin{aligned}
N_{n-1}(\text{反}) &= N_{n-2}(\text{反})-N_{n-1}(\text{反},\text{正})+N_{n-1}(\text{正},\text{反})\\
&= N_{n-2}(\text{反})-\frac{N_{n-2}(\text{反})-F_{n-2}}{2}+F_{n-1}-\frac{N_{n-2}(\text{反})-F_{n-2}}{2}\\
&= F_{n-1}+F_{n-2}\\
&= F_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N_n(\text{反}) &= N_{n-1}(\text{反})-N_n(\text{反},\text{正})+N_n(\text{正},\text{反})\\
&= F_n-F_n+0\\
&= 0
\end{aligned}
$$

我們把 $N_{n-1}(\text{反},\text{正})=\frac{N_{n-2}(\text{反})-F_{n-2}}{2}$ 設為翻轉步驟 H。

討論：綜合上述，當 $m=F_1+F_2+......+F_n$ 時，n 次即可翻成功，

如 $m=1=F_1$、$m=2=F_1+F_2$、$m=4= F_1+F_2+F_3$、$m=7= F_1+F_2+F_3+F_4$ 等等。

當 m 的範圍為 $F_1-F_2<m<F_1+F_{21}$，2 次即可翻成功。

因此，在排除上述情況後，從最簡單的情況開始討論，先分成 f(m)=1、f(m)=-1，再各分為 2 類，即類型 A-1。

類型 **A-1**：當翻動量爲費氏數列時，若 $a_1=F_1=1$，可分爲 **4** 個情況：

(1)當 $f(m)=-1$，且 m 滿足 $F_{3n}-1 < m \leqq F_{3n+2}-1$ 時，則翻動之最少次數爲**(3n+1)**次，$S=R^{3n-1}HR$

(2)當 $f(m)=-1$，且 m 滿足 $F_{3n+2}-1 < m \leqq F_{3n+3}-1$ 時，則翻動之最少次數爲**(3n+1)**次，$S=R^{3n-2}YHR$

(3)當 $f(m)=1$，且 m 滿足 $F_{3n+1}-1 < m \leqq F_{3n+2}-1$ 時，則翻動之最少次數爲**(3n)**次，$S=R^{3n-2}HR$

(4)當 $f(m)=1$，且 m 滿足 $F_{3n+2}-1 < m \leqq F_{3n+4}-1$ 時，則翻動之最少次數爲**(3n+2)**次，$S=R^{3n}HR$

類型 **A-2**：當翻動量爲費氏數列時：

當 $a_1=F_{3x+1}$，若滿足 $f(m)=1$，且 $F_{3x+k-1} \leqq m \leqq F_{3x+k+2}$，最少次數爲兩次，$S=HR$

當 $a_1=F_{3x+2}$，若滿足 $f(m)=-1$，且 $F_{3x+k-1} \leqq m \leqq F_{3x+k+2}$，最少次數爲兩次，$S=HR$

當 $a_1=F_{3x}$，若滿足 $f(m)=-1$，且 $F_{3x+k-1} \leqq m \leqq F_{3x+k+2}$，最少次數爲兩次，$S=HR$

接下來我們先討論在 $F_{3x+(k-1)} > m$ 的情況中，要如何分類並探討其翻轉模式及次數：

引理一：當翻動量爲費氏數列時：

在可翻出的反面個數中，一個循環必定同時包括奇數與偶數，分成三種情況：

(1)當 $a_1=F_{3x+1}$ 時，翻出的反面個數奇、偶、偶爲一個循環。

(2)當 $a_1=F_{3x+2}$ 時，翻出的反面個數奇、奇、偶爲一個循環。

(3)當 $a_1=F_{3x}$ 時，翻出的反面個數偶、奇、偶爲一個循環。

引理二：若 $a_1=F_{3x+k}$，則可翻出反面個數的一個循環中：

當一奇偶性只出現在第**(3n+h)**次時，將同一奇偶性的 m 分成兩類：

(a) $(F_{3n+(h+2)}-1)-(F_{3x+(k+1)}-1) < m \leqq (F_{3n+(h+4)}-1)-(F_{3x+(k+1)}-1)$，

最少次數爲**(3n+h-3x-k+4)**次，$S=R^{3n+h-3x-k+1}YHR$

(b) $(F_{3n+(h+4)}-1)-(F_{3x+(k+1)}-1) < m \leqq (F_{3n+(h+5)}-1)-(F_{3x+(k+1)}-1)$，

最少次數爲**(3n+h-3x-k+4)**次，$S=R^{3n+h-3x-k+2}HR$

引理三：若 $a_1=F_{3x+k}$，則可翻出反面個數的一個循環中：

(1)當一奇偶性出現在第**(3n+h)**次和第**(3n+(h+1))**次時，將同一奇偶性的 m 分成兩類：

(a) $(F_{3n+(h+2)}-1)-(F_{3x+(k+1)}-1) < m \leqq (F_{3n+(h+3)}-1)-(F_{3x+(k+1)}-1)$，

最少次數爲**(3n+h-3x-k+2)**次，$S=R^{3n+h-3x-k}HR$

(b) $(F_{3n+(h+3)}-1)-(F_{3x+(k+1)}-1) < m \leqq (F_{3n+(h+5)}-1)-(F_{3x+(k+1)}-1)$，

最少次數爲**(3n+h-3x-k+4)**次，$S=R^{3n+h-3x-k+2}HR$

(2)當一奇偶性出現在第**(3n+h)**次和第**(3n+(h+2))**次時，將同一奇偶性的 m 分成兩類：

(a) $(F_{3n+(h+2)}-1)-(F_{3x+(k+1)}-1) < m \leqq (F_{3n+(h+4)}-1)-(F_{3x+(k+1)}-1)$，

最少次數爲**(3n+h-3x-k+3)**次，$S=R^{3n+h-3x-k+1}HR$

(b) $(F_{3n+(h+4)}-1)-(F_{3x+(k+1)}-1) < m \leqq (F_{3n+(h+5)}-1)-(F_{3x+(k+1)}-1)$，

最少次數爲**(3n+h-3x-k+4)**次，$S=R^{3n+h-3x-k+2}HR$

引理四：架設在足夠翻的條件下，不管 a_1 是多少，若反面個數爲 **1** 或 **2** 時，透過 n 次的翻轉後可得全部正面，其中 n 必爲 **3**、**4**、**5** 的其中一者。

引理五：分別討論 $m > F_{3x+k-1}$ 和 $m < F_{3x+k-1}$ 這 2 種情形。

利用上述的引理，我們可以研究出三類情況($a_1=F_{3x+1}$，$a_1=F_{3x+2}$，$a_1=F_{3x}$)不同的結果：

類型 A-3：當 $a_1=F_{3x+1}$，且 $F_{3x} < m$ 時，

(1)若 $f(m)=-1$，m 的解滿足 $(F_{3n+3}-1)-(F_{3x+2}-1) < m \leqq (F_{3n+5}-1)-(F_{3x+2}-1)$

最少次數為(3n-3x+4)次，$S=R^{3n-3x+1}YHR$

(2)若 $f(m)=-1$，m 的解滿足 $(F_{3n+5}-1)-(F_{3x+2}-1) < m \leqq (F_{3n+6}-1)-(F_{3x+2}-1)$

最少次數為(3n-3x+4)次，$S=R^{3n-3x+2}HR$

(3)若 $f(m)=1$，m 的解滿足 $(F_{3n+4}-1)-(F_{3x+2}-1) < m \leqq (F_{3n+5}-1)-(F_{3x+2}-1)$

最少次數為(3n-3x+3)次，$S=R^{3n-3x+1}HR$

(4)若 $f(m)=1$，m 的解滿足 $(F_{3n+5}-1)-(F_{3x+2}-1) < m \leqq (F_{3n+7}-1)-(F_{3x+2}-1)$

最少次數為(3n-3x+5)次，$S=R^{3n-3x+3}HR$

當 $a_1=F_{3x+1}$，且 $F_{3x} > m$ 時，

(5)若 $f(m)=-1$ 時，最少次數為四次，$S=Y^2HR$

(6)若 $f(m)=1$ 時，最少次數為三次，$S=YHR$

類型 A-4：當 $a_1=F_{3x+2}$，且 $F_{3x+1} < m$ 時，

(1)若 $f(m)=-1$，m 的解滿足 $(F_{3n+4}-1)-(F_{3x+3}-1) < m \leqq (F_{3n+5}-1)-(F_{3x+3}-1)$

最少次數為(3n-3x+1)次，$S=R^{3n-3x-1}HR$

(2)若 $f(m)=-1$，m 的解滿足 $(F_{3n+5}-1)-(F_{3x+3}-1) < m \leqq (F_{3n+7}-1)-(F_{3x+3}-1)$

最少次數為(3n-3x+2)次，$S=R^{3n-3x}HR$

(3)若 $f(m)=1$，m 的解滿足 $(F_{3n+2}-1)-(F_{3x+3}-1) < m \leqq (F_{3n+4}-1)-(F_{3x+3}-1)$

最少次數為(3n-3x+5)次，$S=R^{3n-3x+2}YHR$

(4)若 $f(m)=1$，m 的解滿足 $(F_{3n+4}-1)-(F_{3x+3}-1) < m \leqq (F_{3n+5}-1)-(F_{3x+3}-1)$

最少次數為(3n-3x+5)次，$S=R^{3n-3x+3}HR$

當 $a_1=F_{3x+2}$，且 $F_{3x+1} > m$ 時，

(5)若 $f(m)=-1$ 時，最少次數為四次，$S=Y^2HR$

(6)若 $f(m)=1$ 時，最少次數為三次，$S=YHR$

類型 A-5：當 $a_1=F_{3x}$，且 $F_{3x-1} < m$ 時，

(1)若 $f(m)=-1$，m 的解滿足 $(F_{3n+3}-1)-(F_{3x+1}-1) < m \leqq (F_{3n+5}-1)-(F_{3x+1}-1)$

最少次數為(3n-3x+5)次，$S=R^{3n-3x+3}YHR$

(2)若 $f(m)=-1$，m 的解滿足 $(F_{3n+5}-1)-(F_{3x+1}-1) < m \leqq (F_{3n+6}-1)-(F_{3x+1}-1)$

最少次數為(3n-3x+5)次，$S=R^{3n-3x+4}HR$

(3)若 $f(m)=1$，m 的解滿足 $(F_{3n+2}-1)-(F_{3x+1}-1) < m \leqq (F_{3n+4}-1)-(F_{3x+1}-1)$

最少次數為(3n-3x+3)次，$S=R^{3n-3x+2}HR$

(4)若 $f(m)=1$，m 的解滿足 $(F_{3n+4}-1)-(F_{3x+1}-1) < m \leqq (F_{3n+5}-1)-(F_{3x+1}-1)$

最少次數為(3n-3x+4)次，$S=R^{3n-3x+3}HR$

當 $a_1=F_{3x}$，且 $F_{3x-1} > m$ 時，

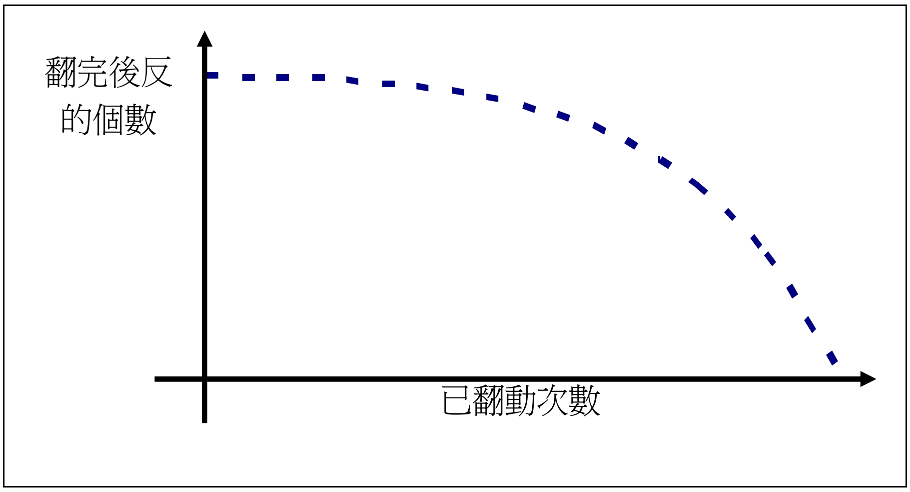
(5)若 $f(m)=-1$ 時，最少次數為五次，$S=Y^3HR$

(6)若 $f(m)=1$ 時，最少次數為三次，$S=YHR$

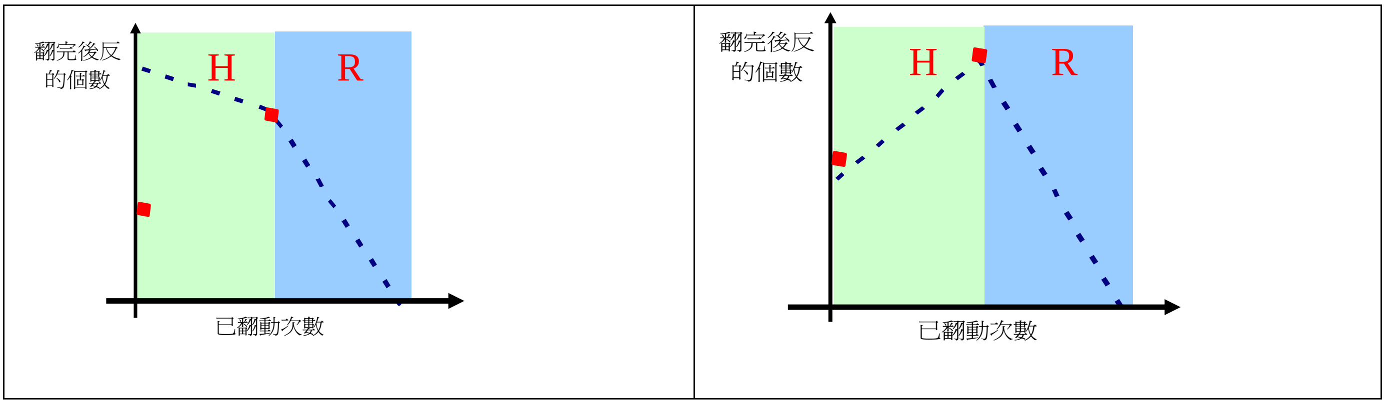
(三) 依據翻轉模式建構「反面數量變化曲線圖」

為了看出每次翻完後盤面所剩反面個數的變化性，同樣的，我們要作出每一種類型的反面個數變化曲線圖，將「已翻動次數」和「個數」分別設為 x 軸與 y 軸，將「每次翻完後的反面個數」的點和點相連作成藍色虛曲線，「每次翻動量」以紅點表示，如下：

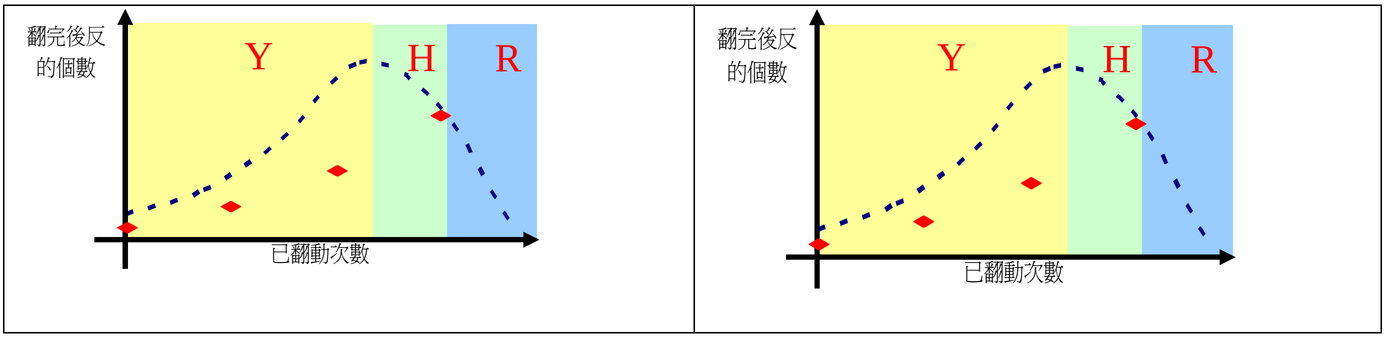
1.S=R^y



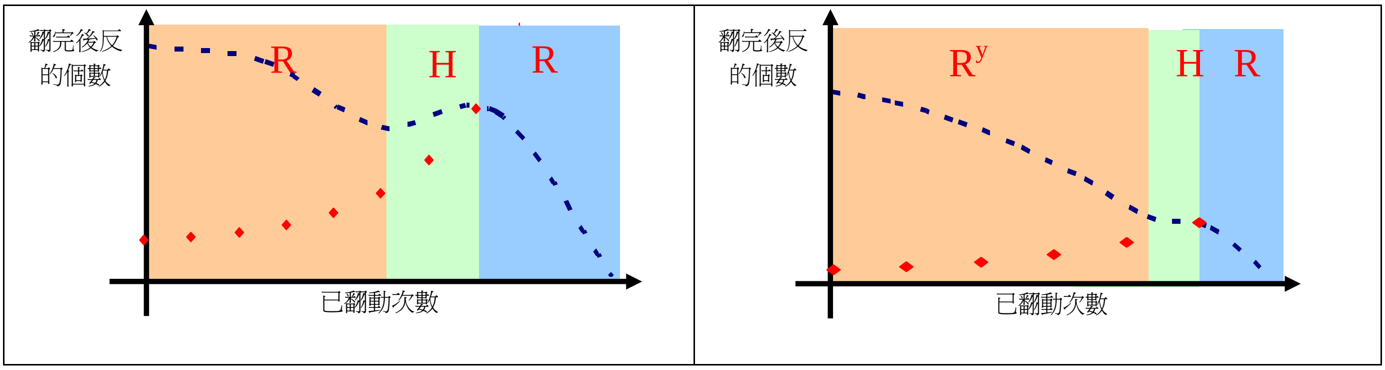
2.S=HR



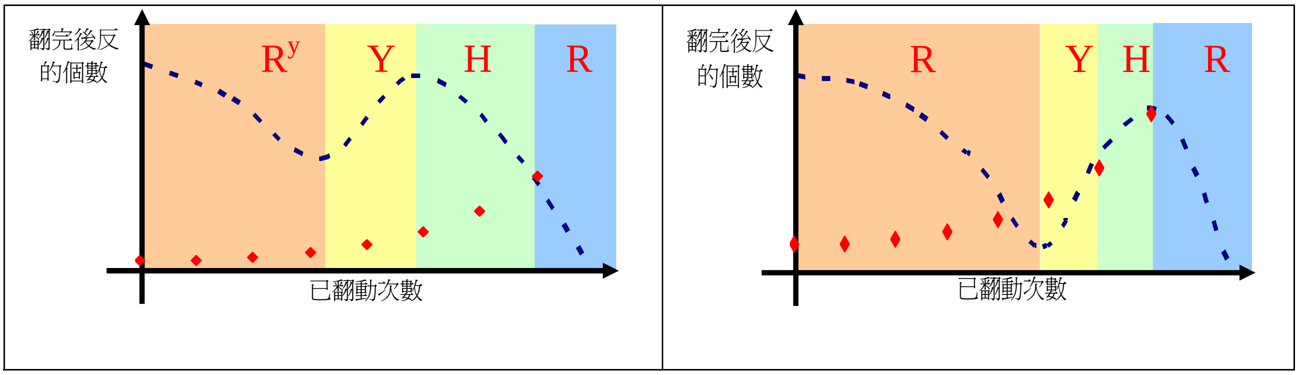
3.S=Y^{y}HR



4.S=R^{y}HR



5.S=R^yYHR



(四) 探討差量計算公式以滿足足夠翻

本研究都是架設在足夠翻的情況下進行探討，但在實際翻動時到底要多少個正面硬幣才能算是足夠翻？底下我們依照五大類型做足夠翻的定量個數探討，依此即可判定任意圖形是否可翻轉成功，若<u>不成功，也可以算出須加入多少個正面硬幣才可翻轉成功</u>。

因為每一類型中要重複同一操作的次數不一定相同，例如類型 A-3 的情況五與情況六皆屬於第三類型，但情況六的操作步驟為 YFR；情況五的操作步驟為 Y^2FR，因此在進行足夠翻的定量分析時，我們必須先找出 n 的值為何(最少次數的計算公式)，再套入其類型求出 y 值(求出翻轉步驟中的 y 值滿足最少次數)，有了 y 值即可知最少正面個數。

舉例 $a_1=F_5=F_{3x+2}$ (翻動量首項)，m=9(反面個數)，k-m=1(正面個數)

(1) $a_1=F_5=F_{3x+2}$ <u>已知 x=1</u>

(2) 查看條件，$(F_7-1)-(F_4-1)<9\leq(F_8-1)-(F_6-1)$知其為類型 A-4 情況(2)，得 <u>n=1</u>

(3) 代入 S=R^{3n-3x}HR，為 S=R^yHR 類型，<u>y=3n-3x=0</u>

用此方法，以兩步驟查出次數及步驟，步驟(3)查出類型，就能套用以下計算公式推出足夠翻正面個數的最小值[正]，作翻成功與否的判斷，甚至是無法翻成功時的修正動作，依五大類的翻轉步驟分別計算。

1.S=R^y

(1)在這個情況中，所有的翻轉步驟皆為 R(R：翻動可以翻的反，使其為正)，所以不需要正的硬幣。

2.S=HR

(1)在這個情況中，第一步是 H，因此 N_1(反,正)=$\frac{m-F_{3x+(k-1)}}{2}$

(2)因為 N_1(反,正)=$\frac{m-F_{3x+(k-1)}}{2}$，所以 N_1(正,反)=$F_{3x+k}-\frac{m-F_{3x+(k-1)}}{2}$

(3) [正] =$\left(F_{3x+k}-\frac{m-F_{3x+(k-1)}}{2}\right)$

3.S=Y^yHR

在這個情況中，前 y 步是 Y^y(Y 為翻動可以翻的正，使其變為反)因此 N_1(正,反)=F_{3x+k}，N_2(正,反)=F_{3x+k+1}，……，N_y(正,反)=$F_{3x+k+y-1}$

(1)因為前 y 步是 Y^y，所以 N_y(反)=$m+F_{3x+k+y+1}-F_{3x+k+1}$

(2)第(y+1)步為 H，所以 N_{y+1}(反,正)= $\frac{m+F_{3x+k+y+1}-F_{3x+k+1}-F_{3x+k+y-1}}{2}$，且

N_{y+1}(正,反)=$F_{3x+k+y}-\frac{m+F_{3x+k+y+1}-F_{3x+k+1}-F_{3x+k+y-1}}{2}$

(3)足夠翻至少需要$\left(F_{3x+k+y}-\frac{m+F_{3x+k+y+1}-F_{3x+k+1}-F_{3x+k+y-1}}{2}\right)$個正，除此之外，還需要原本用來翻 Y^y (Y 為翻動可以翻的正，使其變為反)，因此共需要$\left(F_{3x+k+y}-\frac{m+F_{3x+k+y+1}-F_{3x+k+1}-F_{3x+k+y-1}}{2}+F_{3x+k+y+1}-F_{3x+k+1}\right)$個正，[正] =$\frac{-m-F_{3x+k+1}+F_{3x+k+y+1}+F_{3x+k+y+2}}{2}$ 。

4.S=R^yHR

(1)在這個情況中，前 y 步是 R^y(R 爲翻動可以翻的反，使其變爲正)，因此 N_1(反,正)=F_{3x+k}，N_2(反,正)=$F_{3x+k}+F_{3x+(k-1)}$，……，N_y(反,正)=$F_{y-3x-k+1}$

(2)因爲前 y 步是 R^y，所以 N_y(反)=$m-F_{3x+k+y+1}-F_{3x+k+1}$

(3)第(y+1)步爲 H，所以 N_{y+1}(反,正)=$\frac{m-F_{3x+k+y+1}+F_{3x+k+1}-F_{3x+k+y-1}}{2}$ ，

且 N_{y+1}(正,反)=$F_{3x+k+y+1}-\frac{m-U_{3x+k+y+1}+F_{3x+k+1}-F_{3x+k+y-1}}{2}$

(4)足夠翻需要($F_{3x+k+y+1}-\frac{m-F_{3x+k+y+1}+F_{3x+k+1}-F_{3x+k+y-1}}{2}$)個正，但因 R^y(R 爲翻動可以翻的反，使其變爲正)，表示前面已經翻出 $F_{3x+k+y+1}-F_{3x+k+1}$ 個正了，

故只需要($F_{y-3x-k+2}-\frac{m-F_{y-3x-k+3}+1-(F_{y+2}-F_{y+1})}{2} - F_{3x+k+y+1}+F_{3x+k+1}$)個正，

[正] = $\frac{-m-F_{3x+k+1}+F_{3x+k+y}}{2}$ 。

5.S=R^yYHR

(1)在這個情況中，前 y 步是 R^y(R 爲翻動可以翻的反，使其變爲正)，
因此 N_1(反,正)=F_{3x+k}，N_2(反,正)=$F_{3x+k}+F_{3x+(k-1)}$，……，N_y(反,正)=$F_{y-3x-k+1}$

(2)因爲前 y 步是 R^y，所以 N_y(反)=$m-F_{3x+k+y+1}-F_{3x+k+1}$

(3)第(y+1)步爲 Y，N_{y+1}(正,反)=F_{3x+k+y}，所以 N_{y+1}(反)=$m-F_{3x+k+y+1}+F_{3x+k+1}+F_{3x+k+y}$

(4)因爲第(y+2)步爲 H，所以 N_{y+2}(反,正)=$\frac{m-F_{3x+k+y+1}+F_{3x+k+1}+F_{3x+k+y}- F_{3x+k+y}}{2}$ ，

且 N_{y+2}(正,反)=$F_{3x+k+y+1}-\frac{m-F_{3x+k+y+1}+F_{3x+k+1}+F_{3x+k+y}-F_{3x+k+y}}{2}$

(5)足夠翻需要($F_{3x+k+y+1}-\frac{m-F_{3x+k+y+1}+F_{3x+k+1}+F_{3x+k+y}-F_{3x+k+y}}{2}$)個正，但因翻動了 R^y
(R 爲翻動可以翻的反，使其變爲正)，

故只需要($F_{3x+k+y+1}-\frac{m-F_{3x+k+y+1}+F_{3x+k+1}+F_{3x+k+y}- F_{3x+k+y}}{2}$ $+F_{3x+k+y}- F_{3x+k+y+1} +F_{3x+k+1}$)個正，

[正] =$\frac{-m+F_{3x+k+y+2}+F_{3x+k+y}+F_{3x+k+1}}{2}$ 。

我們將計算的差量公式整理如下，若差量大於 0，則表示需要補足正面個數，若小於等於 0，則表示不需要補足正面個數。

S	費氏數列滿足足夠翻的差量計算公式 即[正]-(k-m)
R^y	0
HR	$F_{3x+k} -\frac{m-F_{3x+(k-1)}}{2}$ -(k-m)
Y^yHR	$\frac{-m-F_{3x+k+1}+F_{3x+k+y+1}+F_{3x+k+y+2}}{2}$ -(k-m)
R^yHR	$\frac{-m-F_{3x+k+1}+F_{3x+k+y}}{2}$ -(k-m)
R^yYHR	$\frac{-m+F_{3x+k+y+2}+F_{3x+k+y}+F_{3x+k+1}}{2}$ -(k-m)

註：此處的 k 即爲全部的硬幣個數
此處的 m 即爲反面的硬幣個數

繼續用以上的例子說明，當推得類型及 y 值之後，套入計算公式：R^yHR 的定量個數 $=\frac{-m-U_y+U_{y-3x-k+2}+1}{2}$ =3(理論最小值)，但本例中 k-m=1(實際值)，算得差量爲 3-1=2，再補足 2 個正面即可滿足足夠翻，用最少次數及規律翻動翻轉成功。我們把這個問題用規律翻動手法探討，並且算出無法成功時的修正模式，以成功操作所有題目。

(五)任意兩圖形互相轉換的翻法及次數分析

我們想要找個方法，既能判斷圖 A 是否能翻成圖 B，又能與前述的結果有關聯，由於我們已能夠判斷任一圖是否能全部翻成正，因此我們想試著從這方面進行探究。於是我們不眠不休的想，直到有天一覺醒來，一個「比照圖」的想法突然從腦中閃過。所謂的「比照圖」是指：若圖 A 與圖 B 相對位置的硬幣(圖 A 第 1 個硬幣對圖 B 的第 1 個硬幣，圖 A 第 2 個硬幣對圖 B 的第 2 個硬幣...... 圖 A 第 n 個硬幣對圖 B 的第 n 個硬幣)，若圖 A 與圖 B 相對應位置的硬幣同正同反時，則在比照圖的位置上記爲「正」；若圖 A 與圖 B 相對應位置的硬幣爲一正面一反面則在比照圖的位置上記爲「反」。此時若將比照圖全部翻成正面，即爲將 A 圖翻成 B 圖。

我們利用的是一個「比較」的概念就是將兩圖形的異同製成比照圖，只要找出比照圖的翻法，即找到兩圖間轉換的翻法，舉例說明如下：設 $a_1=F_3=2$，a=13

A 圖：m=12，B 圖：m=12

反反正反反反正正反反反反正
圖 A(起始圖)

→

正正反正正正反反正正正正正
圖 B(目標圖)

↓

反反反反反反反反反反反反正
比照圖

$\boxed{反反}$正反反反正正反反反反正 圖 A(起始圖)	$\boxed{反反}$反反反反反反反反反反正 比照圖
正正$\boxed{正反反}$反正正反反反反正	正正$\boxed{反反反}$反反反反反反反正
正正$\boxed{反正正反正}$正反反反反正	正正$\boxed{正正正反反}$反反反反反正
正正$\boxed{正反反}$正反$\boxed{正反反反反}$正	正正$\boxed{反反反}$正正$\boxed{反反反反反}$正
正正反正正正反反正正正正正	正正正正正正正正正正正正正

由於這個想法只是用比照圖紀錄兩圖的異同，將比照圖的反面全部翻爲正面即達到目的，此翻法就是兩圖轉換的最少步驟，因此不論是等差數列翻還是費氏數列翻，都可以利用比照圖作爲轉換橋樑。

結論一：要判斷是否可從 A 圖翻到 B 圖，必須先找出比照圖，再利用研究目的二判斷此比照圖是否可翻成功，若能翻成功表示可從 A 圖翻到 B 圖；若不能翻成功表示無法從 A 圖翻到 B 圖。

結論二：要找出從 A 圖翻到 B 圖的翻法，必須先找出比照圖，再利用比照圖判斷其翻法及最少次數。

研究目的三：翻動量呈現爲等差數列時，研究翻轉問題的相關性質

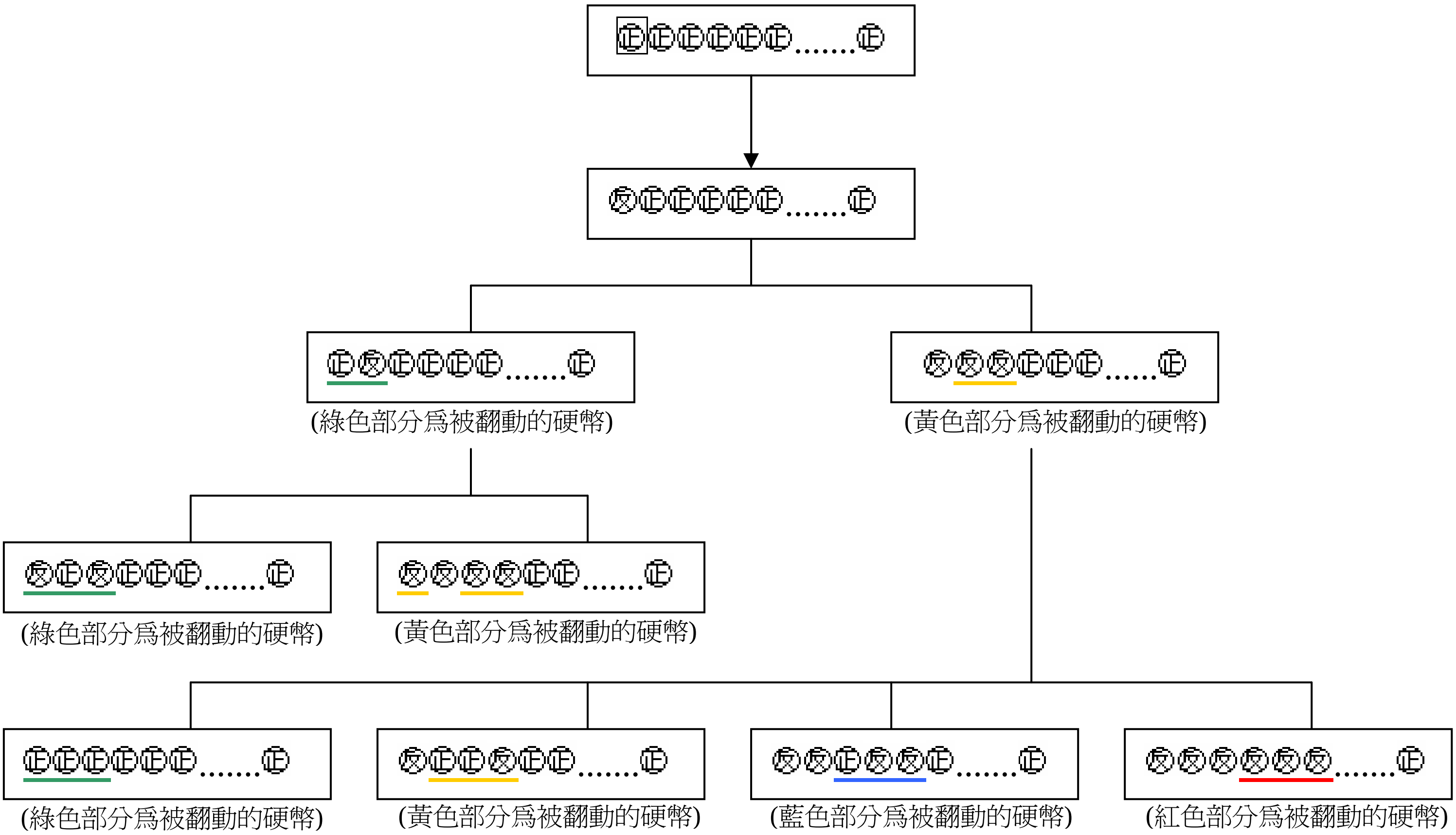
(一)探討任意的硬幣圖形，是否都能使全部硬幣翻成爲正面

在探討每種情況的翻法與最少次數前，我們要先找出判斷某情況是否可翻成功的方法，我們發現必須判斷其奇偶性。(小提醒：a_1 爲第一次翻動硬幣個數，d 爲翻動量的公差，m 爲一開始反的硬幣個數，詳情請看研究方法)

推論一：若 $f(a_1)=1$，$f(d)=1$ 且 $f(m)=-1$，則 $N_n(反)\neq a_n$，即無法將所有反面的硬幣翻成正面。

(二)運用數學符號，進行任意硬幣圖形全部翻爲正面的翻法及次數探討

爲了要進行有系統的研究，我們決定從全部都是正面的棋面開始討論，並且也從 $a_1=1$，$d=1$ 的情況開始探討。首先，把第一次翻完後所有可能會出現的棋面紀錄下來，接著，翻動第二次時會因爲選取不同的硬幣而有不同結果，翻動第三次時，也會因爲選取不同的硬幣而有不同結果，整理如下面之樹狀圖：



觀察上圖，我們可以知道：次數愈多，棋面的變化也愈大，由於等差數列翻的翻動量是遞增的，因此複雜性也愈大，而且可看出不同的翻法也能翻出同樣數量的反，重複性很高。因此，我們覺得其中一定有某些規律性的存在，但是這種研究方式必須紀錄每一種可能情形，效率太低，所以我們想用這種思考模式，再搭配前面提到的第一種想法，*有結構的將所有情況利用歸納法找出。*

由於本研究的遊戲方式是從有正有反的棋面開始，目的要全部翻爲正的，但硬幣的個數會因正面及反面的數量而有無限多種組合，所以我們不想用一般的方法進行探究。

用逆推的方式進行探討：從全部都是正的局面開始（假設正的數量恆足夠進行所需的操作）我們要記錄翻了 1 次後，會出現幾個反面；翻了 2 次後，會出現幾個反面；翻了 3 次後，會出現幾個反面……，而我們想要用圖表的方式呈現以方便觀察，反覆思考後，設計了「次數關係圖」。

次數關係圖

所謂的次數關係圖，是固定 a_1(第一次翻動量)和 d(翻動量公差)後，探討所有可能翻出的反面個數，並依序列在「次數關係圖」中，先舉個實例協助說明，下圖 1 爲第一次翻動量爲 1(a_1=1)，且翻動量的公差亦爲 1(d=1)的次數關係圖：

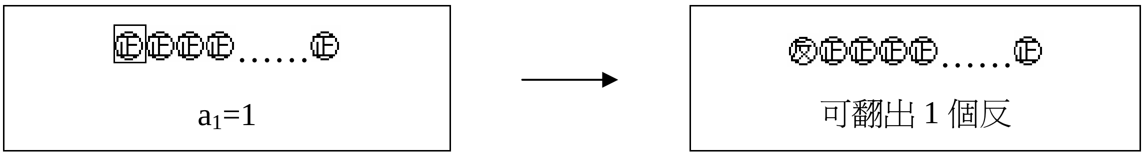
翻動累積次數	能翻出的反面個數圖形(架設在足夠翻的情況)	反面個數的奇偶性分析
8	2.4.6.8.10.12.14.16.18.20.22.24.26.28.30.32.34.36	偶
7	2.4.6.8.10.12.14.16.18.20.22.24.26.28	偶
6	1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21	奇
5	1.3.5.7.9.11.13.15	奇
4	2.4.6.8.10	偶
3	2.4.6	偶
2	1.3	奇
1	1	奇

(圖 1)(a_1=1，且 d=1 的次數關係圖)

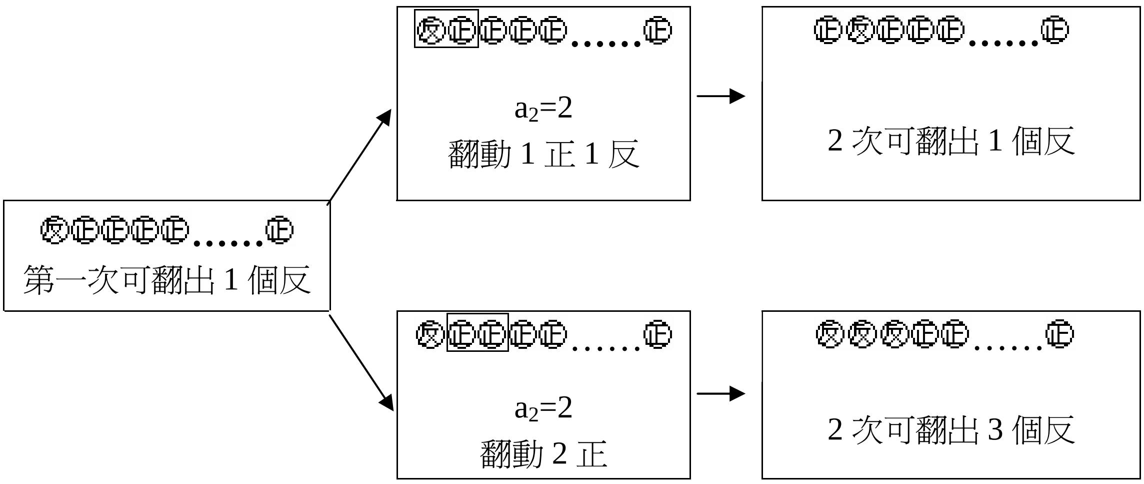
在圖 1 中，左側的 1 次、2 次、3 次……，表示全部爲正的局面累積了幾次操作，若只進行了 1 次的翻動(在此例中第一次翻動量爲 1)，表示只能翻出 1 個反；若進行了 2 次的翻動（在此例中第二次翻動量爲 2），則有 2 種翻法：

(1)再翻動 1 個正與 1 個反，則在盤面上總共會出現 1 個反，如圖 2

(2)再翻動 2 個正，則在盤面上總共會出現 3 個反，如圖 3



(圖 2)



(圖 3)

從圖 1、圖 2 和圖 3，我們發現次數關係圖中數列的共同特性，如下：

定理二：第二次翻動後，所有可能得到的反面個數之奇偶性必相同，且公差爲 2。

推論：在等差數列翻，第 i 次翻動後，所有可能得到的反面個數之奇偶性必相同，且公差爲 2。

在研究的過程中，我們發現：在次數關係圖中可能翻出反面個數的奇偶性非常有規律。然而，想要推導出最少次數的計算公式，達到「即使不透過次數關係圖，也可判斷翻動次數與翻法」的目的，直接判斷可能翻出反面個數的奇偶性便具必要性。最後，我們利用等差數列翻本身的性質，搭配函數模型，得到定理三，並運用定理三巧妙的設計出「奇偶函數推算表」，可以快速進行奇偶性分析，定理三與奇偶函數推算表如下。

定理三：f(本次翻動後的反面個數)＝f(上一次翻動後的反面個數)×f(本次翻動量)

奇偶函數推算表

舉例說明，下圖 5 爲 $f(a_1)=-1$，$f(d)=1$ 的奇偶函數推算表，可參考圖 4，$a_1=7$，$d=6$ 即屬此例，A、B、C、D、E 格皆代表不同意義：

翻動次數	反面個數計數(架設在足夠翻的情況)	反面個數的奇偶性分析
4	2.4.6.8.10.12.14.16.18.20......64	偶
3	1.3.5.7.9.11.13.15.17......39	奇
2	6.8.10.12.14.16.18.20	偶
1	7	奇

(圖 4)($a_1=7$，$d=6$ 的次數關係圖)

次數	一次	C 二次	三次	四次	五次	六次	……
f(翻動量)	-1	A -1	B -1	-1	-1	-1	……
f(反面個數)	-1	D 1	-1	E 1	-1	1	……

(圖 5)($f(d)=-1$，$f(a_1)=1$ 的奇偶函數推算表)

A：表示第二次翻動量爲奇數。

因 a_1 爲偶數，a_2 爲 a_1 加 d，$f(a_2)=f(a_1+d)=f(a_1)\times f(d)=(-1)\times 1=-1$

B：表示第三次翻動量爲奇數。

因 a_2 爲奇數，a_3 爲 a_2 加 d，$f(a_3)=f(a_2)+f(d)=f(a_2)\times f(d)=(-1)\times -=-1$，

C：表示此欄爲翻動二次的狀況。

D：翻動二次後，反面個數必爲偶數，因 $f(a_{1+}a_2)=f(a_1)\times f(a_2)=(-1)\times(-1)=1$

E：翻動三次後，反面個數必爲奇數，

因 f(本次翻動後的反面個數)＝f(上一次翻動後的反面個數)×f(本次翻動量) ，

即 $f(a_{1+}a_2+a_3)=f(a_1+a_2)\times f(a_3)=1\times(-1)= -1$

由「次數關係圖」和「奇偶函數推算表」可以快速知道，在任一情形中，出現反的個數規律性為何，可充分發揮於往後公式的推導。

我們想循序漸進，做有層次的研究，經討論後決定由最簡單的情況開始探究，再不斷加入難度，從翻動量首項為 1 推演到首項為多，從翻動量公差為 1 推演到公差為多，而且奇數偶數皆要試驗，最後再由例子推論到任意未知數。最後，我們得到以下結論：

結論一：

(1) 當 $f(d)=-1$，$f(a_1)=-1$ 時，能翻出的反個數奇偶性排列為奇、奇、偶、偶、奇、奇......
(奇奇偶偶為一個循環)

(2) 當 $f(d)=-1$，$f(a_1)=1$ 時，能翻出的反個數奇偶性排列為偶、奇、奇、偶、偶、奇、奇......
(偶奇奇偶為一個循環)

(3) 當 $f(d)=1$，$f(a_1)=-1$ 時，能翻出的反個數奇偶性排列為奇、偶、奇、偶、奇、偶......
(奇偶奇偶為一個循環)

(4) 當 $f(d)=1$，$f(a_1)=1$ 時，能翻出的反個數奇偶性排列為偶、偶、偶、偶、偶、偶......
(偶偶偶偶為一個循環)

證明：

我們將所有情況分成四種來討論，分別是 $f(d)=-1$，$f(a_1)=-1$、$f(d)=-1$，$f(a_1)=1$、$f(d)=1$，$f(a_1)=-1$、$f(d)=1$，$f(a_1)=1$，我們利用奇偶函數推算表來進行推導即演算：

(1) $f(d)=-1$，$f(a_1)=-1$：

翻動累積次數	能翻出的反面個數圖形(架設在足夠翻的情況)
i	$(a_i-a_{i-1}-......-a_1)$、$(a_i-a_{i-1}-......-a_1+2)$...... $(a_i+a_{i-1}+.....+a_1)$
⋮	⋮
4	$(a_4-a_3-a_2-a_1)$、$(a_4-a_3-a_2-a_1+2)$...... $(a_4+a_3+a_2+a_1)$
3	$(a_3-a_2-a_1)$、$(a_3-a_2-a_1+2)$...... $(a_3+a_2+a_1)$
2	(a_2-a_1)、(a_2-a_1+2)...... (a_2+a_1)
1	a_1

次數	一次	二次	三次	四次	五次	六次	……
f(翻動量)	A -1	B 1	C -1	1	-1	1	……
f(反面個數)	D -1	E -1	F 1	1	-1	-1	……

由 a_1、d 可推出所有的翻動量：當 $f(d)=-1$ 且 $f(a_1)=-1$ 時，則 a_2(第二次翻動量)$=a_1+d$，可推得 $f(a_2)=f(a_1+d)= f(a_1)\times f(d)$，也就是 A 格可推得 B 格，再推得 C 格，依序把翻動量的奇偶性填完。這就是我們在上表中箭號所表達的意思，即 D 格與 B 格相乘得 E 格。。

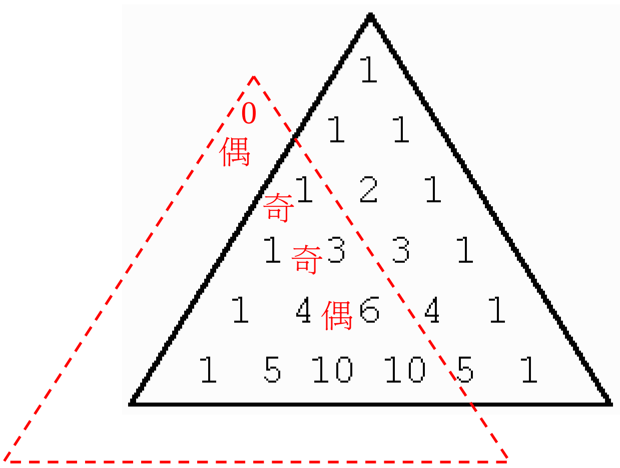
又因為 A 格代表 a_1，$a_1 =S_1$，依據定理二：$f(S_i)= f(S_{i-1})\times(a_i)$，所以可用 B 格和 D 格推出 E 格，用 C 格和 E 格推出 F 格......以此類推。

由上表我們發現此例能翻出的反個數奇偶性排列為奇、奇、偶、偶、奇、奇......「奇奇偶偶」每 4 個為一個循環，並做了以下的推論。

每一種類型不論反面個數的奇偶性排列為何，都是 4 個為「一個循環」。

證明：依據定理一，得 $f(m)=f(S_n)=f(n\cdot a_1+d\cdot\frac{n(n-1)}{2})$ (n 爲任意正整數)

由於$\frac{n(n-1)}{2}$恰等於巴斯卡三角形內紅色框框所圈的三角形數，而三角形數依 n=1、2、3......代入所得的值必呈偶、奇、奇、偶，4 個爲一循環的形態(如圖)。



(2)$f(d)=-1$，$f(a_1)=1$

次數	一次	二次	三次	四次	五次	六次	……
f(翻動量)	1	-1	1	-1	1	-1	……
f(反面個數)	1	-1	-1	1	1	-1	……

由上表得知能翻出的反個數奇偶性排列爲偶、奇、奇、偶、偶、奇......(偶奇奇偶爲一個循環)。

(3)$f(d)=1$，$f(a_1)=-1$

次數	一次	二次	三次	四次	五次	六次	……
f(翻動量)	-1	-1	-1	-1	-1	-1	……
f(反面個數)	-1	1	-1	1	-1	1	……

由上表得知能翻出的反個數奇偶性排列爲奇、偶、奇、偶、奇、偶......(奇偶奇偶爲一個循環)。

(4)$f(d)=1$，$f(a_1)=1$

次數	一次	二次	三次	四次	五次	六次	……
f(翻動量)	1	1	1	1	1	1	……
f(反面個數)	1	1	1	1	1	1	……

由上表得知能翻出的反個數奇偶性排列爲偶、偶、偶、偶、偶、偶......(偶偶偶偶爲一個循環)。

結論二：

倒數第二步取的反個數必定只有兩種，分別爲 a_{n-1} 或$\frac{N_{n-2}(反)-d}{2}$ 。

我們想探討結論二是否套用在任何情況中，討論過程如下：

任一硬幣圖形在第 n-1 次翻完後，

(1)已知若要翻成功，必須使 $N_{n-1}(\text{反})=a_n$，之後再翻一次就可翻成功。

(2) 為了使 $N_{n-1}(\text{反})=a_n$，則 $N_{n-1}(\text{反},\text{正})$必須等於$\dfrac{N_{n-2}(\text{反})-d}{2}$，如此才能使 $N_{n-1}(\text{反})=a_n$。

(3)若 $f(N_{n-2}(\text{反})-d)=1$，

可得$\dfrac{N_{n-2}(\text{反})-d}{2}\in N$(正整數)，

因此，若取 $N_{n-1}(\text{反},\text{正})=\dfrac{N_{n-2}(\text{反})-d}{2}$，則 $N_{n-1}(\text{正},\text{反})=a_{n-1}-\dfrac{N_{n-2}(\text{反})-d}{2}$，

會使 $N_{n-1}(\text{反})=N_{n-2}(\text{反})-\dfrac{N_{n-2}(\text{反})-d}{2}+a_{n-1}-\dfrac{N_{n-2}(\text{反})-d}{2}=a_{n-1}+d=a_n$

(4) 統整上述，若符合此情況，則只須再翻兩次便可翻成功，接下來的翻法為 ER。

接下來我們想進一步探討任何情況的最少次數為何：

我們發現，在次數關係圖中，除了能翻出反的個數之奇偶性的排列具有規律性，其數量的分布也具有規律。

類型 B-1：若 $f(d)=1$，$f(a_1)=-1$，且 $m<a_1$，則翻動次數為下列 4 個情形之一：

(1)當 $f(m)=1$，滿足 $d\leqq m$ 時，最少次數為 2 次，此情況的翻轉步驟為 ER

(2)當 $f(m)=1$，滿足 $d>m$ 時，最少次數為 4 次，此情況的翻轉步驟為 Y^2ER

(3)當 $f(m)=-1$，滿足 $d-a_1\leqq m$ 時，最少次數為 3 次，此情況的翻轉步驟為 YER

(4)當 $f(m)=-1$，滿足 $d-a_1>m$ 時，最少次數為 5 次，此情況的翻轉步驟為 Y^3ER

類型 B-2：若 $f(d)=1$，$f(a_1)=-1$，且 $m>a_1$，則翻動次數為下列 5 個情形之一：

(1)當 $d>m$，$f(m)=1$，最少次數 4 次，翻轉步驟為 Y^2ER

(2)當 $d>m$，$f(m)=-1$，滿足 $d-a_1>m$ 時，最少次數 5 次，翻轉步驟為 Y^3ER

(3)當 $d>m$，$f(m)=-1$，滿足 $d-a_1\leqq m$ 時，最少次數 3 次，翻轉步驟為 YER

(4)當 $d\leqq m$，$f(m)=1$，滿足$\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}<m<\dfrac{(n+2)[2a_1+(n+1)d]}{2}$時，

且 $f\left(\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}\right)=1$，最少次數(n+2)次，翻轉步驟為 $R^{n-1}YER$

(5)當 $d\leqq m$，$f(m)=-1$，滿足$\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}<m<\dfrac{(n+2)[2a_1+(n+1)d]}{2}$時，

且 $f\left(\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}\right)=-1$，最少次數(n+2)次，翻轉步驟為 $R^{n-1}YER$

類型 B-3：若 $f(d)=1$，$f(a_1)=1$，且 $m<a_1$，則翻動次數為下列 2 個情形之一：

(1)當 $f(m)=1$，滿足 $d\leqq m$ 時，最少次數為 2 次，翻轉步驟為 ER

(2)當 $f(m)=1$，滿足 $d>m\geqq d-a_1$ 時，最少次數為 3 次，翻轉步驟為 YER

(3)當 $f(m)=1$，滿足 $d-a_1>m$ 時，最少次數為 4 次，翻轉步驟為 YER

(4)當 $f(m)=-1$，無法翻成功

類型 B-4：若 **$f(d)=1$**，**$f(a_1)=1$**，且 **$m>a_1$**，則翻動次數爲下列 **2** 個情形之一：

(1)當 **$d>m$**，**$f(m)=1$**，滿足 **$d-a_1>m$** 時，最少次數爲 **4** 次，翻轉步驟爲 **Y^2ER**

(2)當 **$d>m$**，**$f(m)=1$**，滿足 **$d-a_1\leqq m$** 時，最少次數爲 **3** 次，翻轉步驟爲 **YER**

(3)當 **$d>m$**，**$f(m)=-1$**，無法翻成功

(4)當 **$d\leqq m$**，**$f(m)=1$**，滿足 $\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}\leqq m<\frac{(n+1)[2a_1+nd]}{2}$ 時，

最少次數爲**(n+1)**次，翻轉步驟爲 **$R^{n-1}ER$**

(5)當 **$d\leqq m$**，**$f(m)=-1$**，無法翻成功

討論了公差爲偶數的情況後，我們再從公差爲奇數的情況進行探討，同樣可依第一次翻動量的奇偶性作區分，又可分爲反的個數小於第一次翻動量及大於第一次翻動量($m<a_1$ 及 $m>a_1$)：

類型 B-5：若 **$f(d)=-1$**，**$f(a_1)=-1$**，且 **$m<a_1$**，則翻動次數爲下列 **4** 個情形之一：

(1)當 **$f(m)=-1$**，滿足 **$d\leqq m<a_1$** 時，最少次數爲 **2** 次，翻轉步驟爲 **ER**

(2)當 **$f(m)=-1$**，滿足 **$d>m$** 時，最少次數爲 **5** 次，翻轉步驟爲 **Y^3ER**

(3)當 **$f(m)=1$**，滿足 **$d-a_1\leqq m<a_1$** 時，最少次數爲 **3** 次，翻轉步驟爲 **YER**

(4)當 **$f(m)=1$**，滿足 **$d-a_1>m$** 時，最少次數爲 **4** 次，翻轉步驟爲 **Y^2ER**

類型 B-6：若 **$f(d)=-1$**，**$f(a_1)=-1$**，且 **$m>a_1$**，則翻動次數爲下列 **7** 個情形之一：

(1)當 **$d>m$**，**$f(m)=1$**，滿足 **$d-a_1>m$** 時，最少次數爲 **4** 次，翻轉步驟爲 **Y^2ER**

(2)當 **$d>m$**，**$f(m)=1$**，滿足 **$d-a_1\leqq m$** 時，最少次數爲 **3** 次，翻轉步驟爲 **YER**

(3)當 **$d>m$**，**$f(m)=-1$**，則最少次數爲 **5** 次，翻轉步驟爲 **Y^3ER**

(4)當 **$d\leqq m$**，**$f(m)=1$**，滿足 $\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}<m<\frac{(n+3)[2a_1+(n+2)d]}{2}$ 時，

且 $f(\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2})=1$，**$f(n)=1$**，最少次數爲**(n+3)**次，翻轉步驟爲 **R^nYER**。

(5)當 **$d\leqq m$**，**$f(m)=1$**，滿足 $\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}<m<\frac{(n+1)[2a_1+nd]}{2}$ 時，

且 $f(\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2})=1$，**$f(n)=-1$**，最少次數爲**(n+1)**次，翻轉步驟爲 **$R^{n-1}ER$**。

(6)當 **$d\leqq m$**，**$f(m)=-1$**，滿足 $\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}<m<\frac{(n+3)[2a_1+(n+2)d]}{2}$ 時，

且 $f(\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2})=-1$，**$f(n)=1$**，最少次數爲**(n+3)**次，翻轉步驟爲 **R^nYER**。

(7)當 **$d\leqq m$**，**$f(m)=-1$**，滿足 $\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}<m<\frac{(n+1)[2a_1+nd]}{2}$ 時，

且 $f(\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2})=-1$，**$f(n)=-1$**，最少次數爲**(n+1)**次，翻轉步驟爲 **$R^{n-1}ER$**。

類型 **B-7**：若 $f(d)=-1$，$f(a_1)=1$，且 $m<a_1$，則翻動次數為下列 4 個情形之一：

(1)當 $f(m)=-1$，滿足 $d\leqq m<a_1$ 時，最少次數為 2 次，翻轉步驟為 ER

(2)當 $f(m)=-1$，滿足 $d-a_1\leqq m<d$ 時，最少次數為 3 次，翻轉步驟為 YER

(3)當 $f(m)=-1$，滿足 $d-a_1>m$ 時，最少次數為 6 次，翻轉步驟為 Y^4ER

(4)當 $f(m)=1$，最少次數為 4 次，翻轉步驟為 Y^2ER

類型 **B-8**：若 $f(d)=-1$，$f(a_1)=1$，且 $m>a_1$，可分為 7 個情況：

(1)當 $d>m$，$f(m)=-1$，且滿足 $d-a_1\leqq m$ 時，最少次數為 3 次，翻轉步驟為 YER

(2)當 $d>m$，$f(m)=-1$，且滿足 $d-a_1>m$ 時，最少次數為 6 次，翻轉步驟為 Y^4ER

(3)當 $d>m$，$f(m)=1$，最少次數為 4 次時，翻轉步驟為 Y^2ER

(4)當 $d\leqq m$，$f(m)=1$，滿足 $\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}<m<\frac{(n+3)[2a_1+(n+2)d]}{2}$ 時，

且 $f(\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2})=1$，$f(n)=-1$，最少次數為(n+3)次，翻轉步驟為 R^nYER

(5)當 $d\leqq m$，$f(m)=1$，滿足 $\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}<m<\frac{(n+1)[2a_1+nd]}{2}$ 時，

且 $f(\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2})=1$，$f(n)=1$，最少次數為(n+1)次，翻轉步驟為 $R^{n-1}ER$

(6)當 $d\leqq m$，$f(m)=-1$，滿足 $\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}<m<\frac{(n+3)[2a_1+(n+2)d]}{2}$ 時，

且 $f(\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2})=-1$，$f(n)=-1$，最少次數為(n+3)次，翻轉步驟為 R^nYER

(7)當 $d\leqq m$，$f(m)=-1$，滿足 $\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}<m<\frac{(n+1)[2a_1+nd]}{2}$ 時，

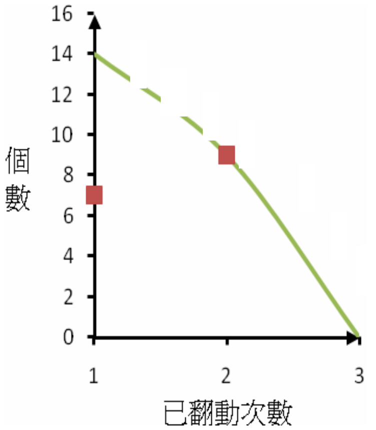
且 $f(\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2})=-1$，$f(n)=1$，最少次數為(n+1)次，翻轉步驟為 $R^{n-1}ER$

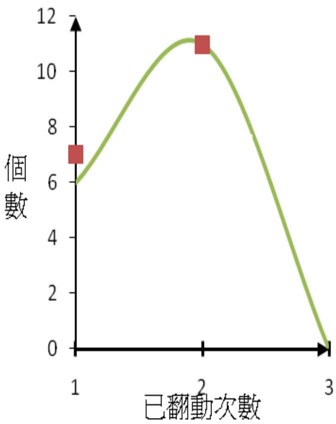
(三) 依據翻轉模式建構「反面數量變化曲線圖」

為了看出每次翻完後盤面所剩反面個數的變化性，我們將「已翻動次數」和「個數」分別設為 x 軸與 y 軸，將「每次翻完後的反面個數」的點和點相連作成綠色虛曲線，「每次翻動量」以紅點表示，如下，因此紅點與綠線交接處的重大意義就是：再一次操作即可翻完。道理很簡單：盤面所剩的反面個數與下次翻動量相同，而這個交接處，也就是我們千方百計想要求得的。

我們猜測：每種類型的曲線圖只有一種，原因是類型分類的依據是翻轉步驟，所以每種類型的曲線圖理所當然只會有一種。然而，事實並非如我們所想像的那麼簡單，嘗試畫了幾個例子後，發現除了 $S=R^x$ 之外，其他類型都有兩種變化曲線，舉 S=ER 的兩個例子，如下。

$a_1=7$，$d=2$，$m=14$ 的曲線圖　　　$a_1=7$，$d=4$，$m=6$ 的曲線圖



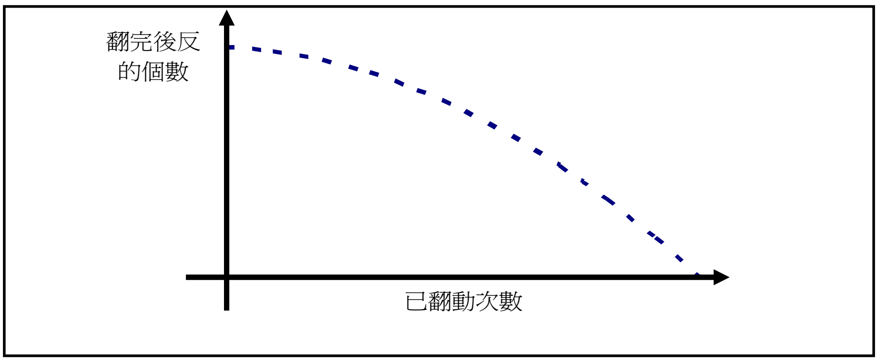


事實與推測結果不同讓我們更想研究這個部分，試了諸多例子後，我們利用表格與代數運算出每一步翻動的過程和每一次翻完的反面個數，更加確定原因。請看下表，同樣用簡單的 S=FR 為例，相信用代數配合曲線圖呈現很快就能看出原因了。

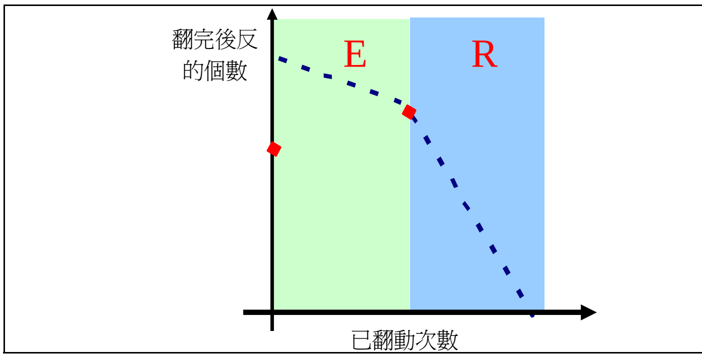
已翻動次數	0	1	2
翻動正面個數	0	$\frac{m-d}{2}$	a_1+d
翻動反面個數	0	$a_1-\frac{m-d}{2}$	0
翻完後所剩反面個數	m	a_1+d	0

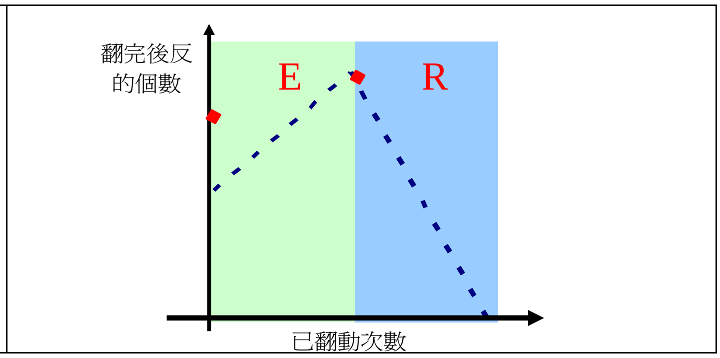
從曲線圖中可看出已翻動 1 次到 2 次之間的曲線有所差異，搭配表格，差異就是藍格內的數量，由於 a_1、d 和 m 沒有一定的大小關係，因此無法確定 m 與 a_1+d 誰大誰小，也造就有兩種曲線圖。以下為每種類型的反面個數變化曲線圖，紅點是犯動量的變化，將每個線段所代表的翻轉步驟標示出來，能更方便看出每種類型的差異：

1.$S=R^x$

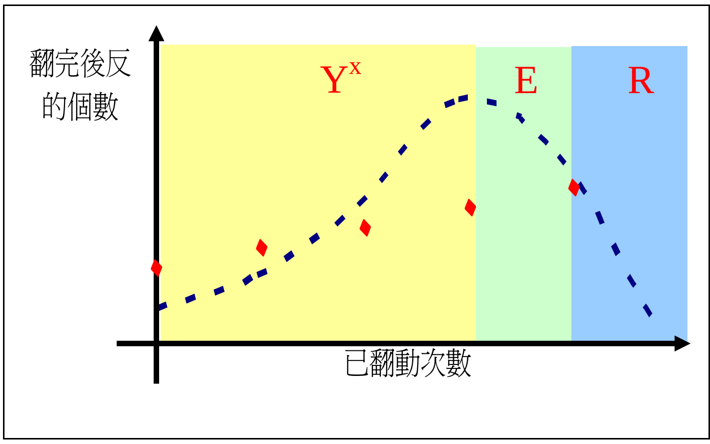


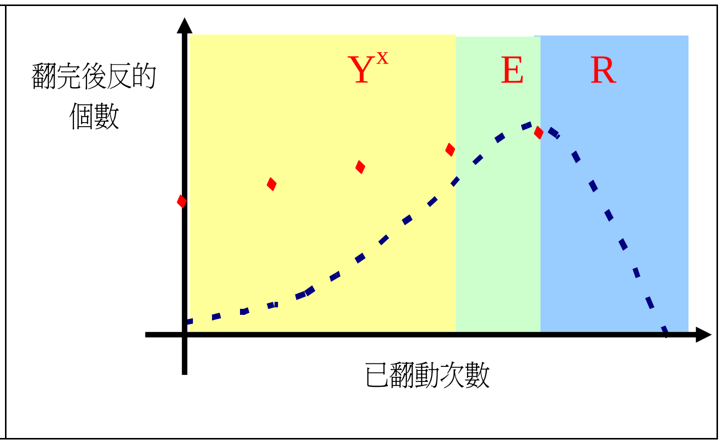
2.S=ER



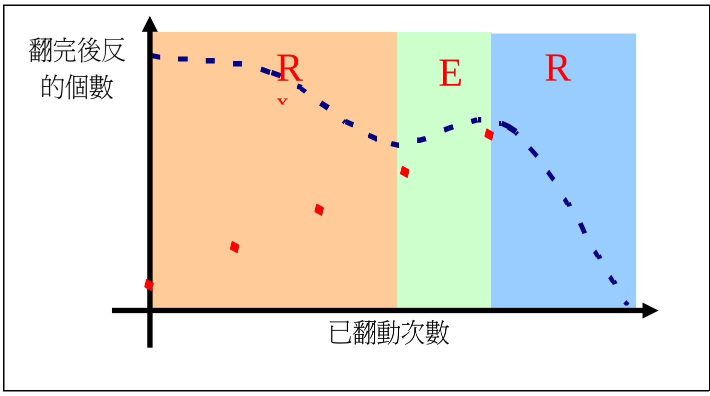


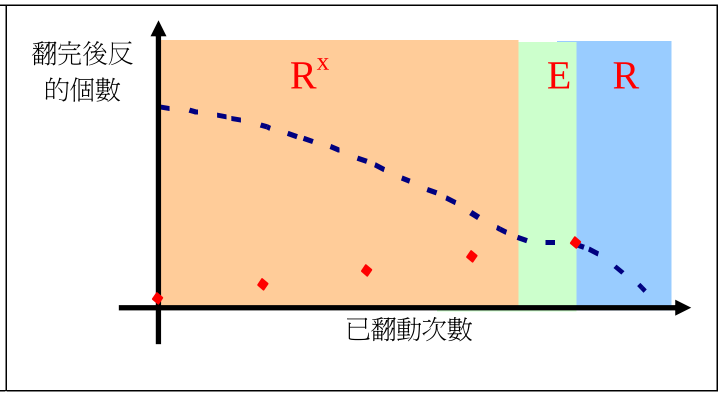
3.S=Y^xER



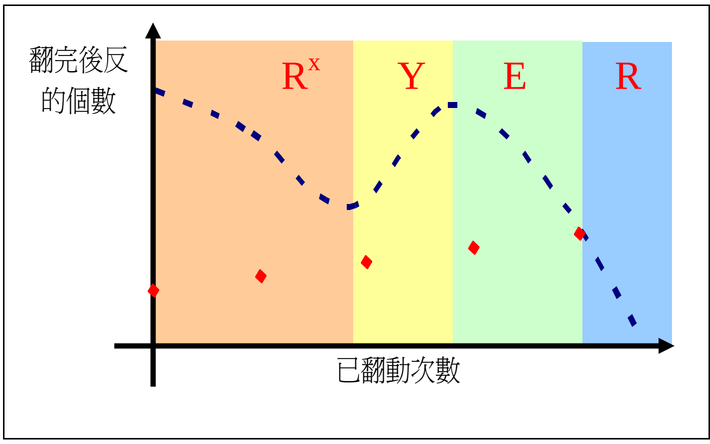


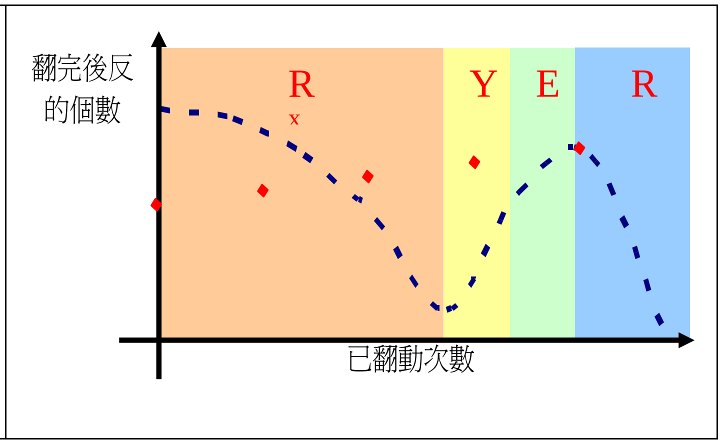
4.S=R^xER





5.S=R^xYER





(四)探討差量計算公式以滿足足夠翻

如同費氏數列翻的問題探討，底下同樣利用五大類的翻轉步驟算出等差數列翻下足夠翻的定量個數，也須先找出 n 的值為何，再套入其類型求出 x 值，有了 x 值即可知最少正面個數，以[正]表示，因此差量即為所須正面個數減盤面已有正面個數，即[正]-(k-m)。

1.$S=R^x$

(1)在這個情況中，所有的翻轉步驟皆為 R(R 為翻動可以翻的反，使其變為正)，所以不需要正的硬幣。

2.S=ER

(1) 在這個情況中，第一步是 F，因此 $N_1(反,正)=\frac{m-d}{2}$

(2) 因為 $N_1(反,正)=\frac{m-d}{2}$ ，所以 $N_1(正,反)=a_1-\frac{m-d}{2}$

(3) $[正]=a_1-\frac{m}{2}+\frac{d}{2}$ 。

3.$S=Y^xER$

在這個情況中，前 x 步是 Y^x(Y 為翻動可以翻的正，使其變為反)因此 $N_1(正,反)=a_1$，$N_2(正,反)=a_2$，……，$N_x(正,反)=a_x$

(1) 因為前 x 步是 Y^x，所以 $N_x(反)=m+\frac{x[2a_1+(x-1)d]}{2}$

(2) 第(x+1)步為 E，所以 $N_{x+1}(反,正)=\dfrac{m+\frac{x[2a_1+(x-1)d]}{2}-d}{2}$ ，且 $N_{x+1}(正,反)=a_1+xd-\dfrac{m+\frac{x[2a_1+(x-1)d]}{2}-d}{2}$

(3) 足夠翻至少需要$\left(a_1+xd-\dfrac{m+\frac{x[2a_1+(x-1)d]}{2}-d}{2}\right)$個正，除此之外，

還需要原本用來翻 Y^x(Y 為翻動可以翻的正，使其變為反)，

因此共需要$\left(a_1+xd-\dfrac{m+\frac{x[2a_1+(x-1)d]}{2}-d}{2}+\frac{x[2a_1+(x-1)d]}{2}\right)$個正，$[正]=\frac{a_1(4+2x)+d(x^2+3x+2)-2m}{4}$ 。

4. $S=R^xER$

(1) 在這個情況中，前 x 步是 R^x(R 為翻動可以翻的反，使其變為正)，因此 $N_1(反,正)=a_1$，$N_2(反,正)=a_2$，……，$N_x(反,正)=a_x$

(2) 因為前 x 步是 R^x，所以 $N_x(反)=m-\frac{x[2a_1+(x-1)d]}{2}$

(3) 第(x+1)步為 E，所以 $N_{x+1}(反,正)=\dfrac{m-\frac{x[2a_1+(x-1)d]}{2}-d}{2}$ ，且 $N_{x+1}(正,反)=a_1+xd-\dfrac{m-\frac{x[2a_1+(x-1)d]}{2}-d}{2}$

(4)足夠翻需要$\left(a_1+xd-\dfrac{m-\frac{x[2a_1+(x-1)d]}{2}-d}{2}\right)$個正，但因 R^x(R 為翻動可以翻的反，使其變為正)，表示前面已經翻出$\frac{x[2a_1+(x-1)d]}{2}$ 個正了，

故只需要$\left(a_1+xd-\dfrac{m-\frac{x[2a_1+(x-1)d]}{2}-d}{2}-\frac{x[2a_1+(x-1)d]}{2}\right)$個正，

$[正]=\frac{a_1(4-6x)+d(x^2+3x+2)-2m}{4}$ 。

5. $S=R^xYER$

(1) 在這個情況中，前 x 步是 R^x(R 為翻動可以翻的反，使其變為正)， 因此 $N_1(反,正)=a_1$，$N_2(反,正)=a_2$，……，$N_x(反,正)=a_x$

(2) 因為前 x 步是 R^x，所以 $N_x(反)=m-\frac{x[2a_1+(x-1)d]}{2}$

(3) 第(x+1)步為 Y，$N_{x+1}(正,反)=a_{x+1}$，所以 $N_{x+1}(反)=m-\frac{x[2a_1+(x-1)d]}{2}+a_1+xd$

(4) 因為第(x+2)步為 E，所以 $N_{x+2}(反,正)=\frac{m-\frac{x[2a_1+(x-1)d]}{2}+a_1+(x-1)d}{2}$，且

$N_{x+2}(正,反)=a_1+(x+1)d-\frac{m-\frac{x[2a_1+(x-1)d]}{2}+a_1+(x-1)d}{2}$

(5) 足夠翻需要$\left(a_1+(x+1)d-\frac{m-\frac{x[2a_1+(x-1)d]}{2}+a_1+(x-1)d}{2}\right)$個正，但因 R^x(R 為翻動可以翻的反，使其變為正)，表示前面已經翻出$\frac{x[2a_1+(x-1)d]}{2}$個正了，

故只需要$\left(a_1+(x+1)d-\frac{m-\frac{x[2a_1+(x-1)d]}{2}+a_1+(x-1)d}{2}-\frac{x[2a_1+(x-1)d]}{2}+a_1+xd\right)$個正，

$[正]=\frac{a_1(6-2x)+d(-x^2+7x+6)-2m}{4}$ 。

因此就可以套用公式來判斷，以正的個數夠不夠決定是否能以本研究的翻法翻成功。

※註：以我們的翻法為準，才能說明翻成功至少需要幾個正，但其實也有其他的翻法，以更少的正便可翻成功，只是這些翻法是零散而不具規律性的，無法整理出有系統的結果，因此我們以本研究的翻法作為基準探討可翻成功的情況。

舉 2 個例子：d=3，$a_1=6$，m=17，分別搭配 3 個正與 7 個正，因為此情形為類型 B-8 的情況六，因此須符合$\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}<m<\frac{(n+1)(2a_1+nd)}{2}$，且 $f\left(\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}\right)=-1$，$f(n)=1$，經計算可得知 n=2，最少次數為 3 次，又因其翻轉步驟為 R^1ER，為第四大類，因此將 x=1 代入$\frac{a_1(4-6x)+d(x^2+3x+2)-2m}{4}$，得到-7，表示不需要再增加正面硬幣，所以 3 個正可以用我們的翻法翻成功，7 個正也可以用我們的翻法翻成功。

我們將計算的差量公式整理如下，若差量大於 0，則表示需要補足正面個數，若小於等於 0，則表示不需要補足正面個數。

S	等差數列滿足足夠翻的差量計算公式 即$[正]-(k-m)$
R^x	0
HR	$a_1-\frac{m}{2}+\frac{d}{2}-(k-m)$
Y^xHR	$\frac{a_1(4+2x)+d(x^2+3x+2)-2m}{4}-(k-m)$
R^xHR	$\frac{a_1(4-6x)+d(x^2+3x+2)-2m}{4}-(k-m)$
R^xYHR	$\frac{a_1(6-2x)+d(-x^2+7x+6)-2m}{4}-(k-m)$

(五)任意兩圖形互相轉換的翻法及次數分析

由於比照圖重在比較的概念，即做出一個比較起始圖與目標圖的圖形，因此與費氏數列翻、等差數列翻等翻動規則無關，故只要是將兩圖形做轉換，在等差數列翻中也可適用，只要找出比照圖權不翻成正的翻法再套用到起始圖即可，舉例說明如下：以費氏數列翻爲例，設 $a_1=2$，$d=3$，$a=20$ A 圖：m=11，B 圖：m=5

反反反反反反反反反反 反正正正正正正正正正 圖 A(起始圖) → 正正正正正正正正正正 反反反反反正正正正正 圖 B(目標圖) ↓ 反反反反反反反反反反 正反反反反正正正正正 比照圖	
反反反反反反反反反反 反正正正正正正正正正 圖 A(起始圖)	反反反反反反反反反反 正反反反反正正正正正 比照圖
正正反反反反反反反反 反正正正正正正正正正	正正反反反反反反反反 正反反反反正正正正正
正正正正正正正反反反 反正正正正正正正正正	正正正正正正正反反反 正反反反反正正正正正
正反反反反反反正正反 反正正正正正正正正正	正反反反反反反正正反 正反反反反正正正正正
正正正正正正正正正正 反反反反反正正正正正 圖 B	正正正正正正正正正正 正正正正正正正正正正 翻成功

柒、討論

一、等差數列翻與費氏數列翻的比較

比較項目	等差數列翻	費氏數列翻
變數	a_1、d、m	a_1、m
是否可翻成功	當 f(m)=-1 且 $f(a_1)=1$、 f(d)=1 時，必無法翻成功；其餘皆可翻成功	任意圖形皆可翻成功
最關鍵的翻轉步驟	E：$N_n(反,正)=\frac{N_{n-1}(反)-d}{2}$	H：$N_n(反,正)=\frac{N_{n-1}(反)-F_{n-1}}{2}$
翻轉類型	R^x、ER、Y^xER、R^xER、R^xYER	R^y、HR、Y^yHR、R^yHR、R^yYHR
任意兩圖形的轉換	比照圖	比照圖
[正]	1.R^x：0 2.ER：$a_1-\frac{m}{2}+\frac{d}{2}$	1.R^y：0 2.HR：$F_{3x+k}-\frac{m-F_{3x+(k-1)}}{2}$

	3.Y^xER：$\dfrac{a_1(4+2x)+d(x^2+3x+2)-2m}{4}$	3.Y^yHR：$\dfrac{-m-F_{3x+k+1}+F_{3x+k+y+1}+F_{3x+k+y+2}}{2}$
	4.R^xER：$\dfrac{a_1(4-6x)+d(x^2+3x+2)-2m}{4}$	4.R^yHR：$\dfrac{-m-F_{3x+k+1}+F_{3x+k+y}}{2}$
	5.R^xYER：$\dfrac{a_1(6-2x)+d(-x^2+7x+6)-2m}{4}$	5.R^yYHR：$\dfrac{-m+F_{3x+k+y+2}+F_{3x+k+y}+F_{3x+k+1}}{2}$

二、費氏數列翻

條件				次數	翻法
$m=F_n-F_x$				(n-x)次	R^{n-x}
$F_{3x+k-1}\leqq m\leqq F_{3x+k+2}$	$a_1=F_{3x+1}$	f(m)=1		2 次	HR
	$a_1=F_{3x+2}$	f(m)=-1		2 次	HR
	$a_1=F_{3x}$	f(m)=-1		2 次	HR
$a_1=F_{3x+1}$	$F_{3x}<m$	f(m)=-1	$(F_{3n+3}-1)-(F_{3x+2}-1)<m\leqq(F_{3n+4}-1)-(F_{3x+2}-1)$	(3n-3x+4)次	$S=R^{3n-3x+1}YHR$
		f(m)=-1	$(F_{3n+4}-1)-(F_{3x+2}-1)<m\leqq(F_{3n+6}-1)-(F_{3x+2}-1)$	(3n-3x+4)次	$S=R^{3n-3x+2}HR$
		f(m)=1	$(F_{3n+4}-1)-(F_{3x+2}-1)<m\leqq(F_{3n+5}-1)-(F_{3x+2}-1)$	(3n-3x+3)次	$S=R^{3n-3x+1}HR$
		f(m)=1	$(F_{3n+5}-1)-(F_{3x+2}-1)<m\leqq(F_{3n+7}-1)-(F_{3x+2}-1)$	(3n-3x+5)次	$S=R^{3n-3x+3}HR$
	$F_{3x}>m$	f(m)=-1		4 次	Y^2HR
		f(m)=1		3 次	YHR
$a_1=F_{3x+2}$	$F_{3x+1}<m$	f(m)=-1	$(F_{3n+3}-1)-(F_{3x+3}-1)<m\leqq(F_{3n+4}-1)-(F_{3x+3}-1)$	(3n-3x+1)次	$S=R^{3n-3x-1}HR$
		f(m)=-1	$(F_{3n+4}-1)-(F_{3x+3}-1)<m\leqq(F_{3n+5}-1)-(F_{3x+3}-1)$	(3n-3x+2)次	$S=R^{3n-3x}HR$
		f(m)=1	$(F_{3n+5}-1)-(F_{3x+3}-1)<m\leqq(F_{3n+6}-1)-(F_{3x+3}-1)$	(3n-3x+5)次	$S=R^{3n-3x+2}YHR$
		f(m)=1	$(F_{3n+6}-1)-(F_{3x+3}-1)<m\leqq(F_{3n+8}-1)-(F_{3x+3}-1)$	(3n-3x+5)次	$S=R^{3n-3x+3}HR$
	$F_{3x+1}>m$	f(m)=-1		4 次	Y^2HR
		f(m)=1		3 次	YHR
$a_1=F_{3x}$	$F_{3x-1}<m$	f(m)=-1	$(F_{3n+4}-1)-(F_{3x+1}-1)<m\leqq(F_{3n+5}-1)-(F_{3x+1}-1)$	(3n-3x+6)次	$S=R^{3n-3x+3}YHR$
		f(m)=-1	$(F_{3n+5}-1)-(F_{3x+1}-1)<m\leqq(F_{3n+7}-1)-(F_{3x+1}-1)$	(3n-3x+6)次	$S=R^{3n-3x+4}HR$
		f(m)=1	$(F_{3n+3}-1)-(F_{3x+1}-1)<m\leqq(F_{3n+5}-1)-(F_{3x+1}-1)$	(3n-3x+4)次	$S=R^{3n-3x+2}HR$
		f(m)=1	$(F_{3n+5}-1)-(F_{3x+1}-1)<m\leqq(F_{3n+6}-1)-(F_{3x+1}-1)$	(3n-3x+5)次	$S=R^{3n-3x+3}HR$
	$F_{3x-1}>m$	f(m)=-1		5 次	Y^3HR
		f(m)=1		3 次	YHR

三、等差數列翻

條件								次數	翻法	定量分析
$m=S_n$								n 次	R^n	0
$f(d)=1$	$f(a_1)=1$	$m<a_1$		$f(m)=1$	$d\leqq m$			2	ER	$\frac{2a_1+d-m}{2}$
				$f(m)=1$	$d>m\geqq d-a_1$			3	YER	$\frac{3a_1+3d-m}{2}$
				$f(m)=1$	$d-a_1>m$			4	Y^2ER	$\frac{4a_1+6d-m}{2}$
				$f(m)=-1$				無解		
		$m>a_1$	$d>m$	$f(m)=1$	$d-a_1>m$			4	Y^2ER	$\frac{4a_1+6d-m}{2}$
				$f(m)=1$	$d-a_1\leqq m$			3	YER	$\frac{3a_1+3d-m}{2}$
				$f(m)=-1$				無解		
			$d\leqq m$	$f(m)=1$	$S_n\leqq m<S_{n+1}$			n+1	$R^{n-1}ER$	
				$f(m)=-1$				無解		
	$f(a_1)=-1$	$m<a_1$		$f(m)=1$	$d\leqq m$			2	ER	$\frac{2a_1+d-m}{2}$
				$f(m)=1$	$d>m$			4	Y^2ER	$\frac{4a_1+6d-m}{2}$
				$f(m)=-1$	$d-a_1\leqq m$			3	YER	$\frac{3a_1+3d-m}{2}$
				$f(m)=-1$	$d-a_1>m$			5	Y^3ER	$\frac{5a_1+10d-m}{2}$
		$m>a_1$	$d>m$	$f(m)=1$				4	Y^2ER	$\frac{4a_1+6d-m}{2}$
				$f(m)=-1$	$d-a_1>m$			5	Y^3ER	$\frac{5a_1+10d-m}{2}$
				$f(m)=-1$	$d-a_1\leqq m$			3	YER	$\frac{3a_1+3d-m}{2}$
			$d\leqq m$	$f(m)=1$	$S_n<m<S_{n+2}$	$f(S_n)=1$		n+2	$R^{n-1}YER$	
				$f(m)=-1$	$S_n<m<S_{n+2}$	$f(S_n)=-1$		n+2	$R^{n-1}YER$	

條件								次數	翻法	定量分析
$f(d)=-1$	$f(a_1)=1$	$m<a_1$		$f(m)=1$				4	Y^2ER	$\frac{4a_1+6d-m}{2}$
				$f(m)=-1$	$a_1>m\geqq d$			2	ER	$\frac{2a_1+d-m}{2}$
				$f(m)=-1$	$d>m\geqq d-a_1$			3	YER	$\frac{3a_1+3d-m}{2}$
				$f(m)=-1$	$d-a_1>m$			6	Y^4ER	$\frac{6a_1+15d-m}{2}$
		$m>a_1$	$d>m$	$f(m)=1$				4	Y^2ER	$\frac{4a_1+6d-m}{2}$
				$f(m)=-1$	$d-a_1>m$			6	Y^4ER	$\frac{6a_1+15d-m}{2}$
				$f(m)=-1$	$d-a_1\leqq m$			3	YER	$\frac{3a_1+3d-m}{2}$
			$d\leqq m$	$f(m)=1$	$S_n<m<S_{n+3}$	$f(S_n)=1$	$f(n)=-1$	$n+3$	R^nYER	
				$f(m)=1$	$S_n<m<S_{n+1}$	$f(S_n)=1$	$f(n)=1$	$n+1$	$R^{n-1}ER$	
				$f(m)=-1$	$S_n<m<S_{n+3}$	$f(S_n)=-1$	$f(n)=-1$	$n+3$	R^nYER	
				$f(m)=-1$	$S_n<m<S_{n+1}$	$f(S_n)=-1$	$f(n)=1$	$n+1$	$R^{n-1}ER$	
	$f(a_1)=-1$	$m<a_1$		$f(m)=1$	$d-a_1\leqq m<a_1$			3	YER	$\frac{3a_1+3d-m}{2}$
				$f(m)=1$	$d-a_1>m$			4	Y^2ER	$\frac{4a_1+6d-m}{2}$
				$f(m)=-1$	$d\leqq m<a_1$			2	ER	$\frac{2a_1+d-m}{2}$
				$f(m)=-1$	$d>m$			5	Y^3ER	$\frac{5a_1+10d-m}{2}$
		$m>a_1$	$d>m$	$f(m)=1$	$d-a_1>m$			4	Y^2ER	$\frac{4a_1+6d-m}{2}$
				$f(m)=1$	$d-a_1\leqq m$			3	YER	$\frac{3a_1+3d-m}{2}$
				$f(m)=-1$				5	Y^3ER	$\frac{5a_1+10d-m}{2}$
			$d\leqq m$	$f(m)=1$	$S_n<m<S_{n+3}$	$f(S_n)=1$	$f(n)=1$	$n+3$	R^nYER	
				$f(m)=1$	$S_n<m<S_{n+1}$	$f(S_n)=1$	$f(n)=-1$	$n+1$	$R^{n-1}ER$	
				$f(m)=-1$	$S_n<m<S_{n+3}$	$f(S_n)=-1$	$f(n)=1$	$n+3$	R^nYER	
				$f(m)=-1$	$S_n<m<S_{n+1}$	$f(S_n)=-1$	$f(n)=-1$	$n+1$	$R^{n-1}ER$	

捌、結論

一、我們定義了 1 個函數與 4 個符號，函數 f(x)表示硬幣個數的奇偶性，$f(x)=\begin{cases}1，當x\in 偶數\\-1，當x\in 奇數\end{cases}$，

4 個符號如下：

符號 R：使 $N_n(\text{反},\text{正})=a_n$

符號 Y：使 $N_n(\text{反},\text{正})=0$

符號 E：使 $N_n(\text{反},\text{正})=\dfrac{N_{n-1}(\text{反})-d}{2}$

符號 H：使 $N_n(\text{反},\text{正})=\dfrac{N_{n-1}(\text{反})-F_{n-1}}{2}$

二、費波那契數列翻

我們採取跟等差數列翻相同的討論方法----「逆推法」進行研究，先運用奇偶函數推算表將所有情況分成三類，再運用其中奇偶的微妙差別討論出共同的公式，並依翻動步驟共分 5 大類，如下：

1.$S=R^n$，最少次數為 n 次，0 個正即可翻成功

2.S= HR，最少次數為 2 次，$(F_{3x+k}-\dfrac{m-F_{3x+(k-1)}}{2})$個正即可翻成功

3.$S=Y^xHR$，最少次數為(x+2)次，$(\dfrac{-m+2F_{y-3x-k+2}+F_{y-3x-k+3}+F_y}{2})$個正即可翻成功。

4.$S=R^xHR$，最少次數為(x+2)次，$(\dfrac{-m-F_y+F_{y-3x-k+2}+1}{2})$個正即可翻成功。

5. $S=R^xYHR$，最少次數為(x+3)次，$(\dfrac{-m+F_{y-3x-k+4}+F_{y-3x-k+2}-3}{2})$個正即可翻成功。

三、等差數列翻

我們比較兩圖得到比照圖後，以逆推法來進行探究，先假設兩圖相同，即從所有硬幣都為正面開始探討，每次都將正的翻為反的，探討幾次能翻出幾個，運用奇偶函數表知道次數與奇偶性的關係，再運用次數關係圖推算出最少次數的公式，並依翻動步驟共分為 5 大類，此外，判斷可不可以成功的方法是看看正的個數夠不夠翻，正的個數與 5 大類分別如下：

1.$S=R^n$，最少次數為 n 次，0 個正即可翻成功

2.S= ER，最少次數為 2 次，$(a_1-\dfrac{m}{2}+\dfrac{d}{2})$個正即可翻成功

3.$S=Y^xER$，最少次數為(x+2)次，$(\dfrac{a_1(4+2x)+d(x^2+3x+2)-2m}{4})$個正即可翻成功。

4.$S=R^xER$，最少次數為(x+2)次，$(\dfrac{a_1(4-6x)+d(x^2+3x+2)-2m}{4})$個正即可翻成功。

5. $S=R^xYER$，最少次數為(x+3)次，$(\dfrac{a_1(6-2x)+d(-x^2+7x+6)-2m}{4})$個正即可翻成功。

玖、參考文獻

一、第三十六屆中小學科學展覽高小組數學科全國第一名
『翻來覆去轉乾坤-翻硬幣遊戲的新發現』
二、第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯國小組數學科第二名
『最佳全翻位的探討』
三、第四十九屆中小學科學展覽國中組數學科『挑戰全翻位』
四、康軒版國中數學第二冊第四章『線型函數及其圖形』
五、康軒版國中數學第四冊第一章『等差數列與等差級數』
六、吳振奎，九章出版社『斐波那契數列』

【評語】030415

1. 函數 f 是很淺顯的奇偶觀念，不必多立新名稱，直接用$(-1)^n$會更清楚。

2. 本研究討論費氏數列翻，具創意以逆推法做了完整的討論也很好。

3. 若能針對一般二階遞迴關係所得之數列加以討論,延伸則更佳。

4. 團隊合作良好，報告中肯。