中華民國第52屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

最佳創意獎

030413

動態還原－探討一種創新的相似形作圖法

學校名稱：基隆市立中正國民中學

作者：	指導老師：
國二 羅芝婷	陳政暉
國二 吳紹齊	林耀南
國二 簡翊如	

關鍵詞：延伸比、動態還原、動態作圖

動態還原--

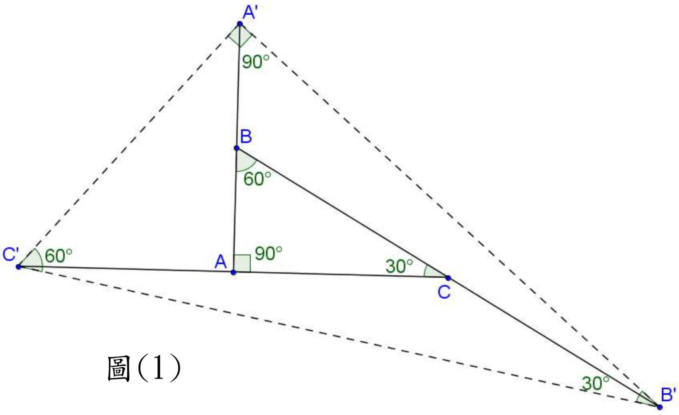
探討一種創新的相似形作圖法

摘要

最被廣泛使用的相似形尺規作圖法是使用投射中心作相似圖。這方法也被應用於相機、影印機……等依靠光源作放大縮小的機器上，本文創造了一種全新的相似形作圖法，不依賴投射中心，改成在各邊的延長線上依所要求的面積比，先建立一系列的動態還原表，擇最易操作組做動態操作。Δ依指定的投射比經一次順時針再一次逆時針後即可相似，多邊形則從一固定頂點處切割後，分別依指定的投射比及相同次序的順逆時針各一次操作，再合併回來後，即可得所要的相似形。放大圖及縮小圖本文的新方法都能達成。

壹、研究動機

在一次數學課時，老師出了一道幾何題，如圖(1)，已知ΔABC為$30°-60°-90°$的三角形依順時針方向分別在$\overrightarrow{CA}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$上，取$\overline{AC'}=\overline{CA}$，$\overline{BA'}=\overline{AB}$，$\overline{CB'}=\overline{BC}$，試問$\Delta A'B'C'$是何種三角形？同學試了好多圖後發現$\Delta A'B'C'$很像直角三角形且形狀差不多和原$\Delta ABC$相似，好神奇喔！答案是真的。這時大家也好奇，是否任意直角三角形都可以這樣操作出相似形呢？老師又說如果你們進一步能從$\Delta A'B'C'$倒過來畫出內部的ΔABC才叫神奇。老師鼓勵我們研究看看 。



圖(1)

貳、研究目的

一、將 N 邊形依指定的相等或不相等延伸比畫回原圖形的代數法探討

二、將 N 邊形依指定的相等或不相等延伸比畫回原圖形的尺規作圖法探討

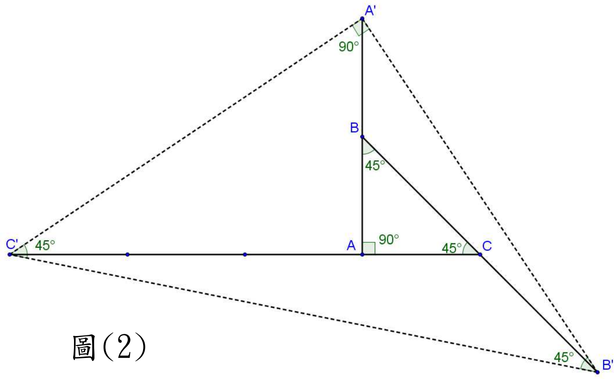
三、一個創新的相似形作圖法探討

參、使用設備及器材

Geogebra 軟體、紙、筆

肆、研究過程或方法

在動機中提到的延伸$\Delta A'B'C'$和原ΔABC相似，我們也是畫過很多其他的直角Δ，其中有的可以，例如:圖(1)或圖(2)，但大部分都不能，雖然是這樣但也激起了我們更多的想法，(一)也許可以嘗試從外側的$\Delta A'B'C'$按等比例如 1:1 畫回原ΔABC，看是否存在?(二)也許利用平面座標先給定外側$\Delta A'B'C'$三頂點座標，再推導出原ΔABC三頂點座標或反過來運算。(三)若沒辦法在等比例的延伸中找到相似形，是否可以改成較高難度的不同比例延伸比計算或作圖，甚至做延伸之後再延伸的嘗試。底下就是我們耗盡無數個晝夜的報告。



圖(2)

一、 名詞定義

(一)延伸比：在同一直線上$\overline{AB}:\overline{BA'}=1:1$，稱延伸比1:1

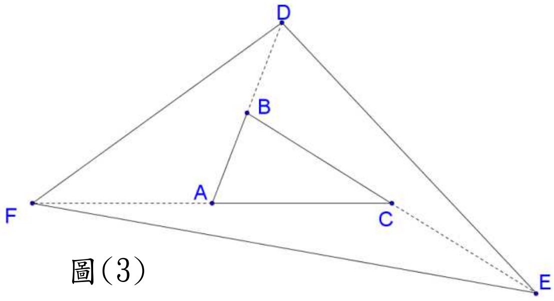
$\overline{CA}:\overline{AC'}=1:3$，稱延伸比1:3，見圖(2)

(二)同比例延伸:如圖(1)，例如:$\overline{AB}:\overline{BA'}=\overline{BC}:\overline{CB'}=\overline{CA}:\overline{AC'}=1:1$

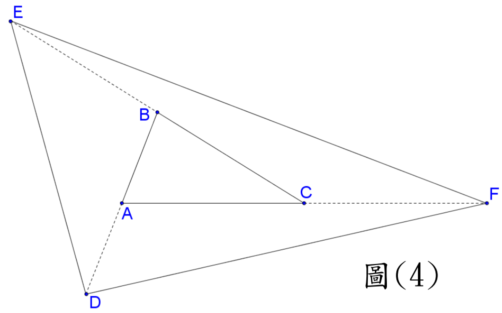
(三)不同比例延伸:如圖(2)，例如:$\overline{AB}:\overline{BA'}=1:1$，$\overline{BC}:\overline{CB'}=1:1$，$\overline{CA}:\overline{AC'}=1:3$

(四)順時針延伸：如圖(3)，將ΔABC畫成ΔDEF

(五)逆時針延伸：如圖(4)，將ΔABC畫成ΔDEF



圖(3)



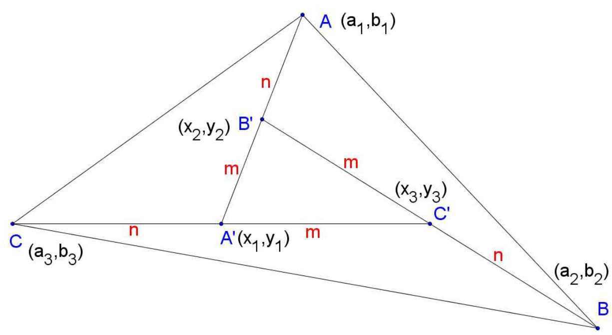
圖(4)

二、 將N邊形依指定的相等延伸比畫回原圖形的代數法探討

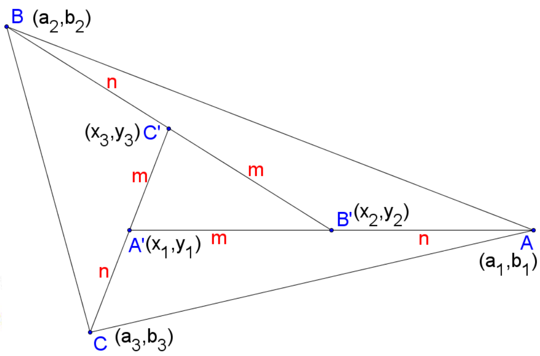
因為將每一個N邊形的各邊依同比例往外延伸求得的新圖形的各項點座標和從新圖形依同比例往內反求算出的原圖形各頂點座標，在代數求解的過程中只是已知座標和未知座標之間的變數轉換而已，因此我們在這裡只推其中一個即可，後文中會用到這個關係式。

(一)三角形

已知ΔABC為$\Delta A'B'C'$依順時針延伸比m:n所做出之三角形，設座標各為$A(a_1, b_1)$、$B(a_2, b_2)$、$C(a_3, b_3)$，而原$\Delta A'B'C'$的座標依次為$A'(x_1, y_1)$、$B'(x_2, y_2)$、$C'(x_3, y_3)$，如圖(5)為順時針方向，又如圖(6)為逆時針方向。



圖(5) 三角形m:n同比例順時針延伸各座標定義示意圖



圖(6) 三角形m:n同比例逆時針延伸各座標定義示意圖

三角形1:1同比例延伸，計算過程如下:

$$\frac{a_1-x_1}{2}+x_1=x_2 \qquad \frac{a_2-x_2}{2}+x_2=x_3 \qquad \frac{a_3-x_3}{2}+x_3=x_1$$

$$\frac{a_1-x_1}{2}=x_2-x_1 \qquad \frac{a_2-x_2}{2}=x_3-x_2 \qquad \frac{a_3-x_3}{2}=x_1-x_3$$

$$a_1-x_1=2x_2-2x_1 \qquad a_2-x_2=2x_3-2x_2 \qquad a_3-x_3=2x_1-2x_3$$

$$a_1=2x_2-x_1 \qquad a_2=2x_3-x_2 \qquad a_3=2x_1-x_3$$

$$\begin{cases} a_1 = 2x_2 - x_1 \\ a_2 = 2x_3 - x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = 2x_3 - x_2 \\ a_3 = 2x_1 - x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} a_3 = 2x_1 - x_3 \\ a_1 = 2x_2 - x_1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} a_1 = 2x_2 - x_1 \\ +)\ 2a_2 = 4x_3 - 2x_2 \\ \hline a_1 + 2a_2 = 4x_3 - x_1 \end{array} \quad \begin{array}{r} a_2 = 2x_3 - x_2 \\ +)\ 2a_3 = 4x_1 - 2x_3 \\ \hline a_2 + 2a_3 = 4x_1 - x_2 \end{array} \quad \begin{array}{r} a_3 = 2x_1 - x_3 \\ +)\ 2a_1 = 4x_2 - 2x_1 \\ \hline a_3 + 2a_1 = 4x_2 - x_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a_1 + 2a_2 = 4x_3 - x_1 \\ +)\ 4a_3 = 8x_1 - 4x_3 \\ \hline a_1 + 2a_2 + 4a_3 = 7x_1 \end{array} \quad \begin{array}{r} a_2 + 2a_3 = 4x_1 - x_2 \\ +)\ 4a_1 = 8x_2 - 4x_1 \\ \hline 4a_1 + a_2 + 2a_3 = 7x_2 \end{array} \quad \begin{array}{r} a_3 + 2a_1 = 4x_2 - x_3 \\ +)\ 4a_2 = 8x_3 - 4x_2 \\ \hline 2a_1 + 4a_2 + a_3 = 7x_3 \end{array}$$

$$(a_1 + 2a_2 + 4a_3)/7 = x_1 \quad (4a_1 + a_2 + 2a_3)/7 = x_2 \quad (2a_1 + 4a_2 + a_3)/7 = x_3$$

同理:

$$(b_1 + 2b_2 + 4b_3)/7 = y_1 \quad (4b_1 + b_2 + 2b_3)/7 = y_2 \quad (2b_1 + 4b_2 + b_3)/7 = y_3$$

依照上列計算過程同理推算三角形其他比例下的 x_i、y_i 係數，並列成下表:

(只列出 x_1、x_2、x_3……的係數，y_i 略)

三角形 1:1 順時針、逆時針延長		三角形 1:2 順時針、逆時針延長	
$x_1 =$	$(a_1+2a_2+4a_3)/7$	$x_1 =$	$(4a_1+6a_2+9a_3)/19$
$x_2 =$	$(4a_1+a_2+2a_3)/7$	$x_2 =$	$(9a_1+4a_2+6a_3)/19$
$x_3 =$	$(2a_1+4a_2+a_3)/7$	$x_3 =$	$(6a_1+9a_2+4a_3)/19$
三角形 1:3 順時針、逆時針延長		三角形 1:n 順時針、逆時針延長	
$x_1 =$	$(9a_1+12a_2+16a_3)/37$	$x_1 =$	$[n^2a_1+n(1+n)a_2+(1+n)^2a_3]/[n^2+n(1+n)+(1+n)^2]$
$x_2 =$	$(16a_1+9a_2+12a_3)/37$	$x_2 =$	$[(1+n)^2a_1+n^2a_2+n(1+n)a_3]/[n^2+n(1+n)+(1+n)^2]$
$x_3 =$	$(12a_1+16a_2+9a_3)/37$	$x_3 =$	$[n(1+n)a_1+(1+n)^2a_2+n^2a_3]/[n^2+n(1+n)+(1+n)^2]$
三角形 2:1 順時針、逆時針延長		三角形 2:2 順時針、逆時針延長	
$x_1 =$	$(2a_1+6a_2+18a_3)/26$	$x_1 =$	$(3a_1+6a_2+12a_3)/21$
$x_2 =$	$(18a_1+2a_2+6a_3)/26$	$x_2 =$	$(12a_1+3a_2+6a_3)/21$
$x_3 =$	$(6a_1+18a_2+2a_3)/26$	$x_3 =$	$(6a_1+12a_2+3a_3)/21$
三角形 2:3 順時針、逆時針延長		三角形 2:n 順時針、逆時針延長	
$x_1 =$	$(18a_1+30a_2+50a_3)/98$	$x_1 =$	$[2n^2a_1+2n(2+n)a_2+2(2+n)^2a_3]/[2n^2+2n(2+n)+2(2+n)^2]$

$x_2=$	$(50a_1+18a_2+30a_3)/98$	$x_2=$	$[2(2+n)^2a_1+2n^2a_2+2n(2+n)a_3]/$ $[2n^2+2n(2+n)+2(2+n)^2]$
$x_3=$	$(30a_1+50a_2+18a_3)/98$	$x_3=$	$[2n(2+n)a_1+2(2+n)^2a_2+2n^2a_3]/$ $[2n^2+2n(2+n)+2(2+n)^2]$
三角形 3:n 順時針、逆時針延長		三角形 m:n 順時針、逆時針延長	
$x_1=$	$[3n^2a_1+3n(3+n)a_2+3(3+n)^2a_3]/$ $[3n^2+3n(3+n)+3(3+n)^2]$	$x_1=$	$[mn^2a_1+mn(m+n)a_2+m(m+n)^2a_3]/$ $[mn^2+mn(m+n)+m(m+n)^2]$
$x_2=$	$[3(3+n)^2a_1+3n^2a_2+3n(3+n)a_3]/$ $[3n^2+3n(3+n)+3(3+n)^2]$	$x_2=$	$[m(m+n)^2a_1+mn^2a_2+mn(m+n)a_3]/$ $[mn^2+mn(m+n)+m(m+n)^2]$
$x_3=$	$[3n(3+n)a_1+3(3+n)^2a_2+3n^2a_3]/$ $[3n^2+3n(3+n)+3(3+n)^2]$	$x_3=$	$[mn(m+n)a_1+m(m+n)^2a_2+mn^2a_3]/$ $[mn^2+mn(m+n)+m(m+n)^2]$

在相同的延伸比例中所得到的各個 x_i 係數都有輪動的規律，例如在延伸比為 1:1 時，x_1 的係數為$(a_1+2a_2+4a_3)/7$，其中 a_1、a_2、a_3 的係數為 1,2,4 而 x_2 、x_3 的係數則為 4,1,2 及 2,4,1，這就好比 x_2 是將 1,2,4 的 4 輪到第一位，而 x_3 是將 4,1,2 的 2 再輪到第一位。這個規律在後文中皆可用。其中 y_i 的係數與 x_i 相同，只是將 a_i 改成 b_i， $i=1,2,3,\cdots\cdots,n$(N 邊形)。

(二)四邊形

仿造三角形的計算(詳細過程見附件一)，可得下表

四邊形 m：n 順時針、逆時針延長	
$x_1=$	$[mn^3a_1+mn^2(m+n)a_2+mn(m+n)^2a_3+m(m+n)^3a_4]/(m^4+4m^3n+6m^2n^2+4mn^3)$
$x_2=$	$[m(m+n)^3a_1+mn^3a_2+mn^2(m+n)a_3+mn(m+n)^2a_4]/(m^4+4m^3n+6m^2n^2+4mn^3)$
$x_3=$	$[mn(m+n)^2a_1+m(m+n)^3a_2+mn^3a_3+mn^2(m+n)a_4]/(m^4+4m^3n+6m^2n^2+4mn^3)$
$x_4=$	$[mn^2(m+n)a_1+mn(m+n)^2a_2+m(m+n)^3a_3+mn^3a_4]/(m^4+4m^3n+6m^2n^2+4mn^3)$

(三)五邊形

五邊形 m:n 順時針、逆時針延長	
$x_1=$	$[mn^4a_1+mn^3(n+m)a_2+mn^2(n+m)^2a_3+mn(n+m)^3a_4+m(n+m)^4a_5]$ $/[mn^4+mn^3(n+m)+mn^2(n+m)^2+mn(n+m)^3+m(n+m)^4]$
$x_2=$	$[m(n+m)^4a_1+mn^4a_2+mn^3(n+m)a_3+mn^2(n+m)^2a_4+mn(n+m)^3a_5]$ $/[mn^4+mn^3(n+m)+mn^2(n+m)^2+mn(n+m)^3+m(n+m)^4]$
$x_3=$	$[mn(n+m)^3a_1+m(n+m)^4a_2+mn^4a_3+mn^3(n+m)a_4+mn^2(n+m)^2a_5]$ $/[mn^4+mn^3(n+m)+mn^2(n+m)^2+mn(n+m)^3+m(n+m)^4]$
$x_4=$	$[mn^2(n+m)^2a_1+mn(n+m)^3a_2+m(n+m)^4a_3+mn^4a_4+mn^3(n+m)a_5]$ $/[mn^4+mn^3(n+m)+mn^2(n+m)^2+mn(n+m)^3+m(n+m)^4]$
$x_5=$	$[mn^3(n+m)a_1+mn^2(n+m)^2a_2+mn(n+m)^3a_3+m(n+m)^4a_4+mn^4a_5]$ $/[mn^4+mn^3(n+m)+mn^2(n+m)^2+mn(n+m)^3+m(n+m)^4]$

(四)六邊形

六邊形 m：n 順時針、逆時針延長	
$x_1=$	$[mn^5a_1+mn^4(m+n)a_2+mn^3(m+n)^2a_3+mn^2(m+n)^3a_4+mn(m+n)^4a_5+m(m+n)^5a_6]$ $/[mn^5+mn^4(m+n)+mn^3(m+n)^2+mn^2(m+n)^3+mn(m+n)^4\ m(m+n)^5]$
$x_2=$	$[m(m+n)^5a_1+mn^5a_2+mn^4(m+n)a_3+mn^3(m+n)^2a_4+mn^2(m+n)^3a_5+mn(m+n)^4a_6]$ $/[mn^5+mn^4(m+n)+mn^3(m+n)^2+mn^2(m+n)^3+mn(m+n)^4\ m(m+n)^5]$
$x_3=$	$[mn(m+n)^4a_1+m(m+n)^5a_2+mn^5a_3+mn^4(m+n)a_4+mn^3(m+n)^2a_5+mn^2(m+n)^3a_6]$ $/[mn^5+mn^4(m+n)+mn^3(m+n)^2+mn^2(m+n)^3+mn(m+n)^4\ m(m+n)^5]$
$x_4=$	$[mn^2(m+n)^3a_1+mn(m+n)^4a_2+m(m+n)^5a_3+mn^5a_4+mn^4(m+n)a_5+mn^3(m+n)^2a_6]$ $/[mn^5+mn^4(m+n)+mn^3(m+n)^2+mn^2(m+n)^3+mn(m+n)^4\ m(m+n)^5]$
$x_5=$	$[mn^3(m+n)^2a_1+mn^2(m+n)^3a_2+mn(m+n)^4a_3+m(m+n)^5a_4+mn^5a_5+mn^4(m+n)a_6]$ $/[mn^5+mn^4(m+n)+mn^3(m+n)^2+mn^2(m+n)^3+mn(m+n)^4\ m(m+n)^5]$
$x_6=$	$[mn^4(m+n)a_1+mn^3(m+n)^2a_2+mn^2(m+n)^3a_3+mn(m+n)^4a_4+m(m+n)^5a_5+mn^5a_6]$ $/[mn^5+mn^4(m+n)+mn^3(m+n)^2+mn^2(m+n)^3+mn(m+n)^4+m(m+n)^5]$

藉由前文多邊形的係數關係，我們推出以下公式，如表(一)，來找回延伸 N 邊形的原始多邊形：

a_1的係數	a_2的係數	a_3的係數
$mn^{(p-1)}$	$mn^{(p-2)}(m+n)$	$mn^{(p-3)}(m+n)^2$
a_4的係數	……	$a_{p'}$ 的係數
$mn^{(p-4)}(m+n)^3$	……	$mn^{(p-p')}(m+n)^{(p'-1)}$
$a_{(p-2)}$ 的係數	$a_{(p-1)}$ 的係數	a_p的係數
$mn^{[p-(p-2)]}(m+n)^{[(p-2)-1]}$	$mn^{[p-(p-1)]}(m+n)^{[(p-1)-1]}$	$m(m+n)^{(p-1)}$

表(一)N 邊形各 a_i 的係數公式

只要將他們代入多邊形各頂點座標，並且將其除以 ai 各項係數總和，我們就可以得到其中一點的座標，最後再將係數做適當的循環輪動即可完成還原。

三、 將 N 邊形依指定的不同延伸比畫回原圖形的代數法探討

(一)三角形

$x_1=$	$[m_1n_2n_3a_1+m_2n_3(m_1+n_1)a_2+m_3(m_1+n_1)(m_2+n_2)a_3] / [(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)-n_1n_2n_3]$
$x_2=$	$[m_1(m_2+n_2)(m_3+n_3)a_1+n_1m_2n_3a_2+n_1m_3(m_2+n_2)a_3] / [(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)-n_1n_2n_3]$
$x_3=$	$[m_1n_2(m_3+n_3)a_1+m_2(m_1+n_1)(m_3+n_3)a_2+n_1n_2m_3a_3] / [(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)-n_1n_2n_3]$

(二)四邊形

x_2 =	$[m_1n_2n_3n_4a_1+(m_1+n_1)m_2n_3n_4a_2+(m_1+n_1)(m_2+n_2)m_3n_4a_3+(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)m_4a_4]$ $/[(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)(m_4+n_4)-n_1n_2n_3n_4]$
x_2 =	$[(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)m_4a_1+m_1n_2n_3n_4a_2+(m_1+n_1)m_2n_3n_4a_3+(m_1+n_1)(m_2+n_2)m_3n_4a_4]$ $/[(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)(m_4+n_4)-n_1n_2n_3n_4]$
x_3 =	$[(m_1+n_1)(m_2+n_2)m_3n_4a_1+(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)m_4a_2+m_1n_2n_3n_4a_3+(m_1+n_1)m_2n_3n_4a_4]$ $/[(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)(m_4+n_4)-n_1n_2n_3n_4]$
x_4 =	$[(m_1+n_1)m_2n_3n_4a_1+(m_1+n_1)(m_2+n_2)m_3n_4a_2+(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)m_4a_3+m_1n_2n_3n_4a_4]$ $/[(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)(m_4+n_4)-n_1n_2n_3n_4]$

(三)當 N 邊形、分別依序以 $m_1:n_1$、$m_2:n_2$、$m_3:n_3$、$m_4:n_4$ ……不同比例延伸時，經由與前文相同的計算概念，可得 x、y 座標的排列，如下表(二)：

x_1 =	$[m_1n_2n_3n_4\cdots n_pa_1+(m_1+n_1)m_2n_3n_4\cdots n_pa_2+(m_1+n_1)(m_2+n_2)m_3n_4\cdots n_pa_3+\cdots+(m_1+n_1)(m_2+n_2)$ $(m_3+n_3)(m_4+n_4)\cdots m_{(p-2)}n_{(p-1)}n_pa_{(p-2)}+(m_1+n_1)(m_2+n_2)$ $(m_3+n_3)(m_4+n_4)\cdots[m_{(p-2)}+n_{(p-2)}]m_{(p-1)}n_pa_{(p-1)}+(m_1+n_1)(m_2+n_2)\ (m_3+n_3)(m_4+n_4)\cdots[m_{(p-2)}+n_{(p-2)}]$ $[m_{(p-1)}+n_{(p-1)}]m_pa_p]\ /\ [(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)\cdots(m_p+n_p)-n_1n_2n_3\cdots n_p]$
x_2 =	$[m_1(m_2+n_2)(m_3+n_3)(m_4+n_4)\cdots[m_{(p-2)}+n_{(p-2)}]\ [m_{(p-1)}+n_{(p-1)}]$ $(m_p+n_p)a_1+n_1m_2n_3n_4\cdots n_pa_2+m_1(m_2+n_2)m_3n_4\cdots n_pa_3+\cdots+n_1(m_2+n_2)$ $(m_3+n_3)(m_4+n_4)\cdots m_{(p-2)}n_{(p-1)}n_pa_{(p-2)}+n_1(m_2+n_2)\ (m_3+n_3)(m_4+n_4)\cdots[m_{(p-2)}+n_{(p-2)}]\ m_{(p-1)}n_pa_{(p-1)}+n_1(m_2+n_2)$ $(m_3+n_3)(m_4+n_4)\cdots[m_{(p-2)}+n_{(p-2)}]\ [m_{(p-1)}+n_{(p-1)}]m_pa_p]\ /\ [(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)\cdots(m_p+n_p)-n_1n_2n_3\cdots n_p]$
x_3 =	$[m_1n_2(m_3+n_3)(m_4+n_4)\cdots[m_{(p-2)}+n_{(p-2)}]\ [m_{(p-1)}+n_{(p-1)}]\ (m_p+n_p)a_1+(m_1+n_1)\ m_2(m_3+n_3)\ (m_4+n_4)\cdots[m_{(p-2)}+n_{(p-2)}]$ $[m_{(p-1)}+n_{(p-1)}]\ (m_p+n_p)a_2+n_1n_2m_3n_4\cdots n_pa_3+\cdots+n_1n_2(m_3+n_3)(m_4+n_4)\cdots m_{(p-2)}n_{(p-1)}n_pa_{(p-2)}+n_1n_2$ $(m_3+n_3)(m_4+n_4)\cdots[m_{(p-2)}+n_{(p-2)}]m_{(p-1)}n_pa_{(p-1)}+n_1n_2(m_3+n_3)(m_4+n_4)\cdots[m_{(p-2)}+n_{(p-2)}]\ [m_{(p-1)}+n_{(p-1)}]m_pa_p]\ /$ $[(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)\cdots(m_p+n_p)-n_1n_2n_3\cdots n_p]$
：	：
$x_{(p-2)}$ =	$[m_1n_2n_3\cdots[m_{(p-2)}+n_{(p-2)}]\ [m_{(p-1)}+n_{(p-1)}](m_p+n_p)a_1+(m_1+m_1)m_2n_3\cdots[m_{(p-2)}+n_{(p-2)}]\ [m_{(p-1)}+n_{(p-1)}](m_p+n_p)a_2+(m_1+m_1)$ $(m_2+m_2)m_3\cdots[m_{(p-2)}+n_{(p-2)}]$ $[m_{(p-1)}+n_{(p-1)}](m_p+n_p)a_3+\cdots+n_1n_2n_3n_4\cdots m_{(p-2)}n_{(p-1)}n_pa_{(p-2)}+n_1n_2n_3\cdots[m_{(p-2)}+n_{(p-2)}]m_{(p-1)}n_pa_{(p-1)}+$ $n_1n_2n_3\cdots[m_{(p-2)}+n_{(p-2)}]\ [m_{(p-1)}+n_{(p-1)}]m_pa_p]\ /\ [(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)\cdots(m_p+n_p)-n_1n_2n_3\cdots n_p]$
$x_{(p-1)}$ =	$[m_1n_2n_3\cdots[m_{(p-1)}+n_{(p-1)}]\ (m_p+n_p)a_1+(m_1+n_1)m_2n_3\cdots[m_{(p-1)}+n_{(p-1)}]$ $(m_p+n_p)a_2+(m_1+n_1)(m_2+n_2)m_3\cdots[m_{(p-1)}+n_{(p-1)}]\ (m_p+n_p)a_3+\cdots+(m_1+n_1)(m_2+n_2)$ $(m_3+n_3)(m_4+n_4)\cdots m_{(p-2)}[m_{(p-1)}+n_{(p-1)}](m_p+n_p)a_{(p-2)}+$ $n_1n_2n_3n_4\cdots n_{(p-2)}m_{(p-1)}n_pa_{(p-1)}+n_1n_2n_3\cdots n_{(p-2)}[m_{(p-1)}+n_{(p-1)}]m_pa_p]\ /$ $[(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)\cdots(m_p+n_p)-n_1n_2n_3\cdots n_p]$

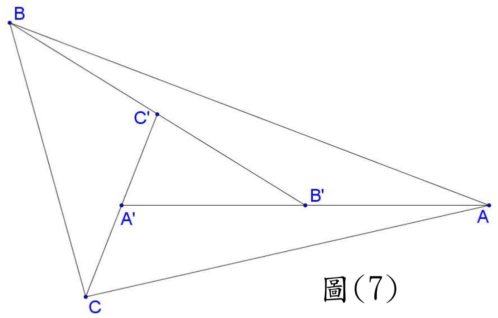
x_p =	$[m_1n_2n_3\cdots n_{(p-2)}n_{(p-1)}(m_p+n_p)a_1+(m_1+n_1)m_2n_3\cdots n_{(p-1)}(m_p+n_p)a_2+(m_1+n_1)m_2n_3\cdots[m_{(p-1)}+n_{(p-1)}](m_p+n_p)a_3+\cdots+(m_1+n_1)(m_2+n_2)\ (m_3+n_3)(m_4+n_4)\cdots[m_{(p-2)}+n_{(p-2)}]\ m_{(p-1)}n_p\ a_{(p-2)}+(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)(m_4+n_4)\cdots[m_{(p-2)}+n_{(p-2)}]\ m_{(p-1)}(m_p+n_p)a_{(p-1)}+n_1n_2n_3n_4\cdots n_{(p-2)}n_{(p-1)}m_pa_p]\ /\ [(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)\cdots(m_p+n_p)-n_1n_2n_3\cdots n_p]$

表(二)N 邊形依不同延伸比還原的各頂點座標公式

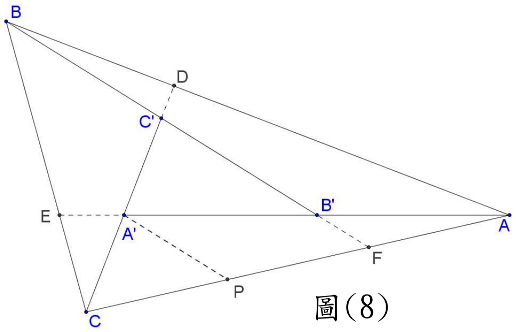
同樣的，對於任意 N 邊形，及指定的各自延伸比，代入表(二)，即可算出原 N 邊形的各項點座標，進而找到原 N 多邊形。

四、將 N 邊形依指定的**相同延伸比**畫回原圖形的尺規作圖法探討

（一）將一個三角形的三邊長依同比例延伸後，畫回原圖形的方法探討



圖(7)



圖(8)

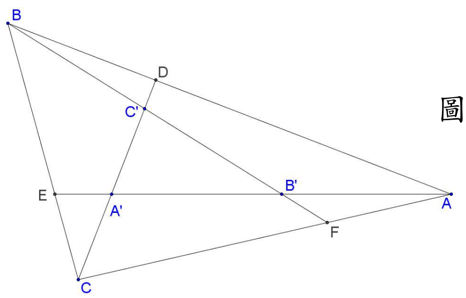
如圖(7)，作一$\Delta A'B'C'$，並以 1:1 逆時針延伸成大ΔABC

此時若塗擦掉內部的所有線條後，要如何由外部的大ΔABC找回原來內部的$\Delta A'B'C'$呢?首先觀察圖(8)，我們發現延長$\overline{BB'}$，交$\overline{AC}$於 F 點後，$\overline{AF}:\overline{FC}$=1:2，說明如下:

1. 過A'，作$\overline{A'P}//\overline{B'F}$，交$\overline{AC}$於 P
2. 在$\Delta C'CF$中，因$\overline{A'P}//\overline{B'F}$，且$A'$為$\overline{CC'}$的中點，所以 P 為$\overline{CF}$中點，即$\overline{CP}=\overline{PF}$。同理$\overline{PF}=\overline{FA}$，故$\overline{AF}:\overline{FC}$=1:2，同理$\overline{CE}:\overline{EB}=\overline{BD}:\overline{DA}$=1:2

（二）因此從外面大任意ΔABC，以 1:1 逆時針找回原$\Delta A'B'C'$的作法敘述如下:

1. 將大△三邊長，依序分成 1:2，得 D、E、F 三點，如圖(9)
2. 分別連$\overline{AE}$、$\overline{BF}$、$\overline{CD}$，設各相交於A'、B'、C'，則$\Delta A'B'C'$即為所求



圖(9)

（三）我們改變延伸比這個變因歸納$\overline{AF}:\overline{FC}$的比，見表(三)

延伸比	$\overline{AF}:\overline{FC}$		延伸比	$\overline{AF}:\overline{FC}$		延伸比	$\overline{AF}:\overline{FC}$
1:1	1:2		2:1	1:3		3:1	1:4
1:2	2:3		2:2	2:4		3:2	2:5
1:3	3:4		2:3	3:5		3:3	3:6
1:4	4:5		2:4	4:6		3:4	4:7
1:n	n:(n+1)		2:n	n:(n+2)		3:n	n:(n+3)
m:n	n:(m+n)						

表(三)三角形三邊延伸比 m:n

有了這個表以後，當我們要依相同的延伸比 m:n 畫回原三角形時，我們可以在各邊上找到 **n:(m+n)**的分點，再連到對面頂點，找到原三角形

(四) 將一個四邊形的四邊長依同比例延伸後，畫回原圖形的方法探討

如圖(10)，作一四邊形 $ABCD$，並以 1:1 逆時針延伸成大四邊形 $EFGH$

此時若塗擦掉內部的所有線條後，要如何由外部的大四邊形 $EFGH$ 找回原來內部的四邊形 $ABCD$ 呢?首先觀察圖(10)，我們發現分別畫出 $ABCD$ 的兩條對角線並延長，假設交外部四邊形 $EFGH$ 於 M、N、O、L，則 $EFGH$ 個邊被切成 1:2 兩段，說明如下:

(五)已知四邊形 EFGH 為四邊形 ABCD 依 1:1 延伸邊長而來，如圖(10)

求證: $\overline{EO}:\overline{OH}=1:2$ 且 $\overline{OB}:\overline{BD}:\overline{DM}=1:3:1$

證明:

1. 過 O，作 $\overline{OP}\,//\,\overline{EA}$
2. 令 $\overline{EO}=x$，$\overline{OH}=y$

   在△HEA 中

   $\overline{HP}:\overline{PA}=y:x$

   令 $\overline{HP}=ky$，$\overline{PA}=kx$

   $\therefore \overline{AD}=k(x+y)$
3. 承(2)

   $\overline{OP}:\overline{EA}=y:(y+x)$

   令 $\overline{OP}=hy$，$\overline{EA}=h(x+y)$

   $\therefore \overline{AB}=\dfrac{h(y+x)}{2}$
4. 在△DPO 中

   $\overline{AB}:\overline{PO}=\overline{DA}:\overline{DP}$

   $\dfrac{h(y+x)}{2}$: hy = k(x+y):[kx+k(y+x)]

   $\dfrac{y+x}{2}$: y = x+y: x+y+x

   x+y : 2y = x+y : 2x+y

   $2y^2+2xy=2x^2+xy+2xy+y^2$

   $2x^2+xy-y^2=0$

   $(2x-y)(x+y)=0$

   $2x-y=0$

   $2x=y$
5. △DOP 中

   $\overline{DB}:\overline{BO}=\overline{DA}:\overline{AP}$

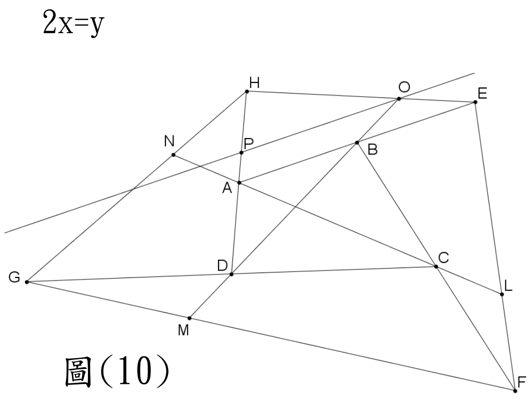
   = k(x+y): kx

   =(x+y):x

   =(2x+x):x

   =3x:x

   =3:1



圖(10)

同理 $\overline{BD}$： $\overline{DM}$ =3:1，得 $\overline{OB}:\overline{BD}:\overline{DM}$ =1:3:1

得證： $\overline{EO}:\overline{OH}$ =1:2 且 $\overline{OB}:\overline{BD}:\overline{DM}$ =1:3:1

（六）同理其他延伸比可計算出來並列於下表(四)

延伸比	$\overline{EG}:\overline{FG}$	$\overline{IB}:\overline{BD}:\overline{DJ}$ $\overline{KA}:\overline{AC}:\overline{CL}$		延伸比	$\overline{EG}:\overline{FG}$	$\overline{IB}:\overline{BD}:\overline{DJ}$ $\overline{KA}:\overline{AC}:\overline{CL}$
1:1	1:2	1:3:1		2:4	4:6	16:20:16
1:2	2:3	4:5:4		2:n	n: (n+2)	$n^2:(4n+4):n^2$
1:3	3:4	9:7:9		3:1	1:4	1:15:1
1:4	4:5	16:9:16		3:2	2:5	4:21:4
1:n	n: (n+1)	$n^2:(2n+1):n^2$		3:3	3:6	9:27:9
2:1	1:3	1:8:1		3:4	4:7	16:33:16
2:2	2:4	4:12:4		3:n	n: (n+3)	$n^2:(6n+9):n^2$
2:3	3:5	9:16:9		m:n	n: (m+n)	$n^2:(2mn+m^2):n^2$

表(四)四邊形四邊延伸比 m:n

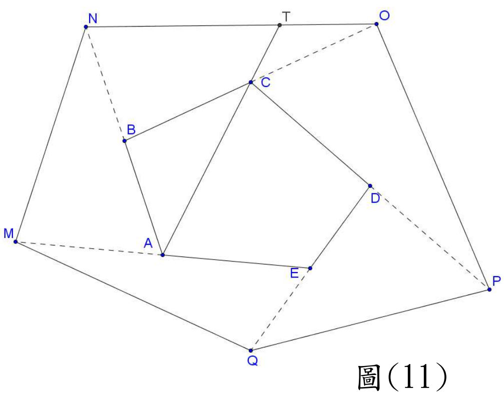
有了這個表以後，當我們要依相同的延伸比 m:n 畫回原四邊形時，我們可以在各邊上找到 **n: (m+n)** 的分點，分別連到對面分點，再在這兩條分點連線上各分成 **$n^2:(2mn+m^2):n^2$**，則這四個分點即為原四邊形的四個頂點

（七）將一個任意五邊形的五邊長依同比例延伸後，反畫回原圖形的方法探討

關於五邊以上的任意多邊形，我們想了好幾個月，查了很多資料，一直都想不出來，不得不靜下心來靠自己，將圖形徹底的再分析一次，我們發現如下的現象，以 1:1 延伸比為例，如圖(11)

將五邊形 ABCDE 延伸成 MNOPQ 後，連 $\overline{AC}$ ，並延長，交 $\overline{NO}$ 於 T，我們依前文三角形、四邊形中的證明，可得出 $\overline{OT}:\overline{TN}$ =1:2、$\overline{TC}:\overline{CA}$ =1:3(延伸比 1:1)

雖然有了這兩個比例，我們以為可以仿造三、四邊形的畫法，很快的畫出內部的五邊形，但事實上在五邊形以上一開始的 $\overline{TC}:\overline{CA}$ 的 $\overleftrightarrow{TA}$ 並不知道要擺哪裡，因此光在這個關鍵點上就耗了好幾個月，還好最後我們找到一種**動態作圖法**，才突破這道難關



圖(11)

我們反畫回了原多邊形，非常高興。

已知五邊形 FGHIJ，如圖(12-1)

求作:畫出原來延伸比 1:1 的五邊形 ABCDE

作法:

(1)將各邊長分成 1:2，分點各為 K、L、M、N、O

(2)過 L，任畫一線段 $\overline{LP}$

(3)取 P_1 點，將 $\overline{LP}$ 分成 1:3

(4)連 $\overline{P_1N}$

(5)取 P_2 點，將 $\overline{P_1N}$ 分成 1:3

(6)連 $\overline{P_2K}$

(15)如圖(12-5)，作 $\overleftrightarrow{OR}$

(16)在 $\overleftrightarrow{OR}$ 上，作 $\overline{RD}$ =3 $\overline{OR}$

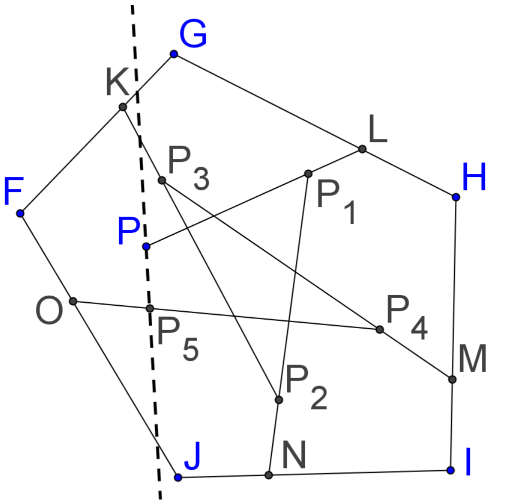
(17)作 $\overleftrightarrow{MD}$

(18)在 $\overleftrightarrow{MD}$ 上，作 $\overline{BD}$ =3 $\overline{DM}$

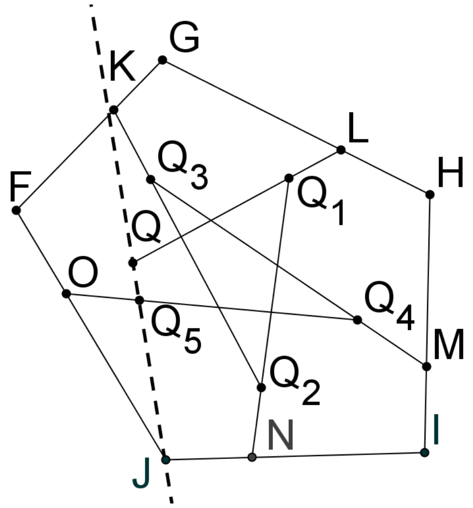
(19)作 $\overleftrightarrow{KB}$

(7)取 P_3 點，將 $\overline{P_2K}$ 分成 1:3
(8)連 $\overline{P_3M}$
(9)取 P_4 點，將 $\overline{P_3M}$ 分成 1:3
(10)連 $\overline{P_4O}$
(11)取 P_5 點，將 $\overline{P_4O}$ 分成 1:3
(12)畫出 $\overleftrightarrow{PP_5}$
(13)如圖(12-2)，在相同的五邊形 FGHIJ，及相同的 L 點處再任意畫一條線段 $\overline{LQ}$，並重複前述(2)到(12)的步驟得出直線 $\overleftrightarrow{QQ_5}$
(14)如圖(12-3)，設 $\overleftrightarrow{PP_5}$ 和 $\overleftrightarrow{QQ_5}$ 交於 R 點，如圖(12-4)

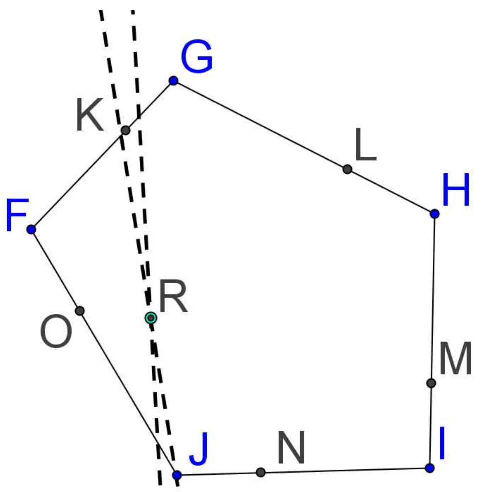
(20)在 $\overleftrightarrow{KB}$ 上，作 $\overline{BE}=3\overline{KB}$
(21)作 $\overleftrightarrow{NE}$
(22)在 $\overleftrightarrow{NE}$ 上，作 $\overline{CE}=3\overline{NE}$
(23)作 $\overleftrightarrow{LC}$
(24)在 $\overleftrightarrow{LC}$ 上，作 $\overline{CA}=3\overline{LC}$
則點 A 和點 R 重合
(25)分別連 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EA}$，則原五邊形 ABCDE 即為所求



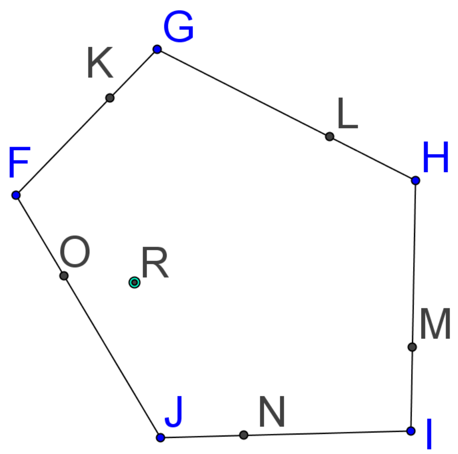
圖(12-1)



圖(12-2)

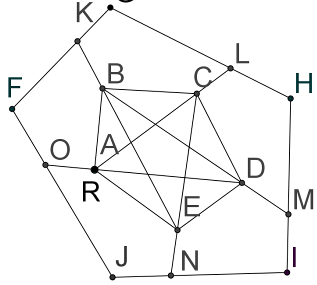


圖(12-3)



圖(12-4)

證明:依作圖的設計想法，我們所要找的 R 點應該落在 $\overleftrightarrow{PP_5}$ 上，又應該同時落在 $\overleftrightarrow{QQ_5}$ 上，因此取 $\overleftrightarrow{PP_5}$ 和 $\overleftrightarrow{QQ_5}$ 的交點即可，因此這 R 點必為原五邊形的一頂點 A，得證。



圖(12-5)

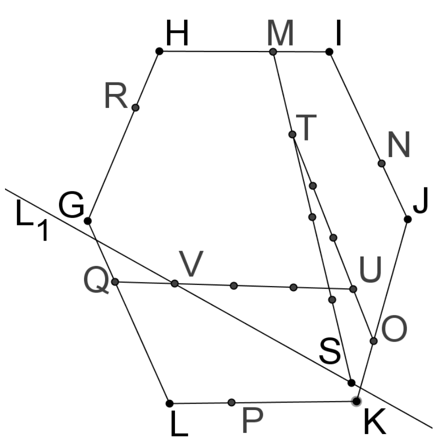
(十一)將一個任意六邊形的六邊長依同比例延伸後，反畫回原圖形的方法探討

我們發現偶數邊多邊形作圖時需分成兩組(第 1、3、5...邊，和第 2、4、6...邊)每一組的作法和五邊形作法類似，簡述如下:

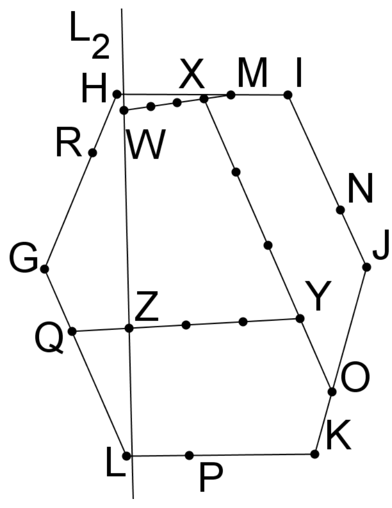
已知六邊形 GHIJKL，圖(13-1)為$\overline{HI}$ 、$\overline{JK}$ 、$\overline{LG}$ 這一組共三邊
求作:畫出原六邊形 ABCDEF 中的 A、C、E 三點
作法:
(1)如圖(13-1)，在$\overline{HI}$ 、$\overline{JK}$ 、$\overline{LG}$ 三邊上各取一點 M、O、Q
(2)從 M 點開始，任取$\overline{MS}$
(3)在$\overline{MS}$ 上取一點 T，使$\overline{MT}:\overline{TS}=1:3$
(4)連$\overline{TO}$
(5)在$\overline{TO}$ 上取一點 U，使$\overline{OU}:\overline{UT}=1:3$
(6) 連$\overline{UQ}$
(7) 在$\overline{UQ}$ 上取一點 V，使$\overline{QV}:\overline{VU}=1:3$
(8) 連$\overline{SV}$ ，作$\overleftrightarrow{SV}$
(9)如圖(13-2)，相同的作法，一樣從 M 點開始，再任取$\overline{MW}$ ，重複(1)到(8)
的步驟，得一條$\overleftrightarrow{MZ}$
(10)如圖(13-3)，取$\overleftrightarrow{SV}$ 和$\overleftrightarrow{MZ}$ 的交點 A_1
(11)從 Q 點和 A_1 點，可以反畫回原六邊形中的 A、C、E 三點
(12)作$\overleftrightarrow{QA_1}$ ，並在此直線上取一點 B_1，使$\overline{QA_1}:\overline{A_1B_1}=1:3$
(13)作$\overleftrightarrow{OB_1}$ ，並在此直線上取一點 C_1，使$\overline{OB_1}:\overline{B_1C_1}=1:3$
(14)作$\overleftrightarrow{MG}$ ，此直線會通過 A_1 點，且$\overline{MC_1}:\overline{C_1A_1}=1:3$
(15)我們發現這 A_1、B_1、C_1 三點，即是原六邊形的 A、C、E 三頂點

依上述作法，在相同的六邊形 GHIJKL 中，針對另外一組的三邊$\overline{GH}$ 、$\overline{IJ}$ 、$\overline{KL}$
畫出原六邊形 ABCDEF 中的 B、D、F 三點

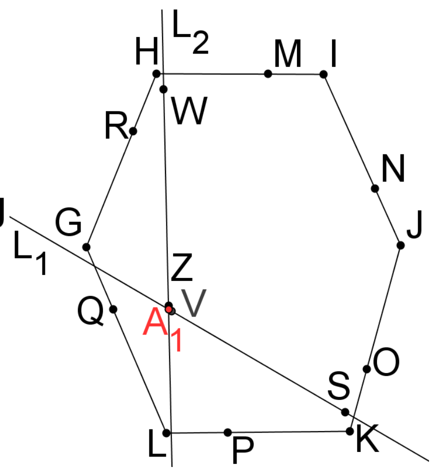
作法:
(1)圖(14-1)，任取$\overline{RD_1}$ ，得$\overleftrightarrow{D_1G_1}$
(2)圖(14-2)，再任取另一線段$\overline{RH_1}$ ，得$\overleftrightarrow{H_1K_1}$
(3)圖(14-3)，取$\overleftrightarrow{D_1G_1}$ 和$\overleftrightarrow{H_1K_1}$ 的交點 M_1
(4)圖(27-4)，從 P 和 M_1 兩點，反畫回原六邊形中的 B、D、F 三點，即為所求



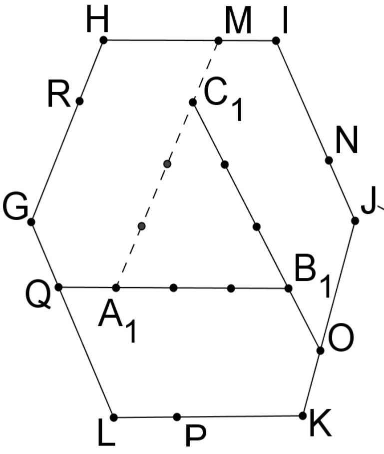
圖(13-1)



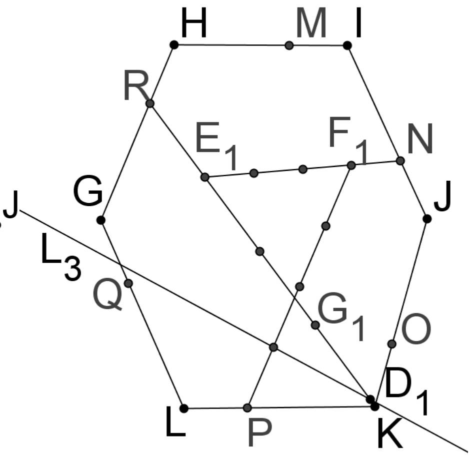
圖(13-2)



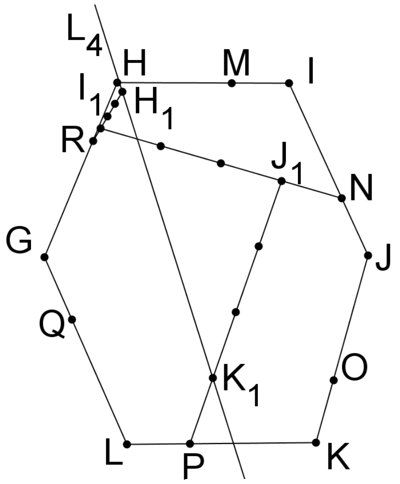
圖(13-3)



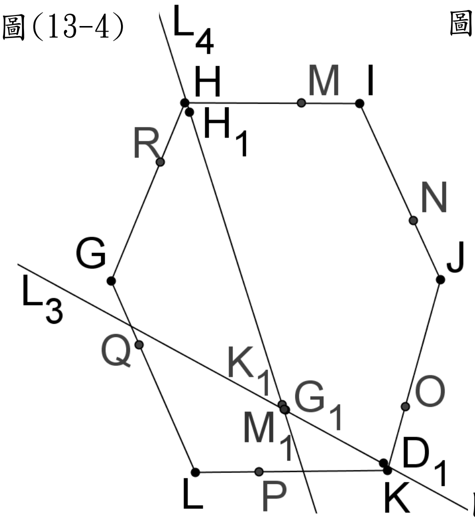
圖(13-4)



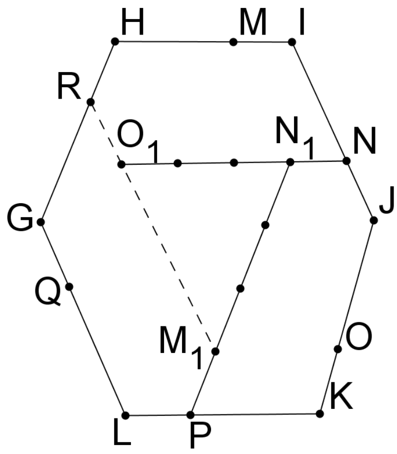
圖(14-1)



圖(14-2)

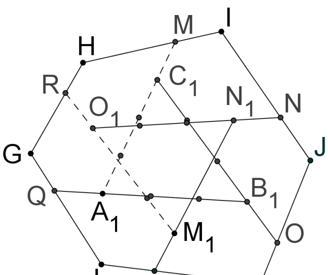


圖(14-3)

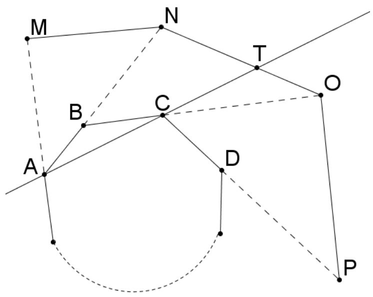


圖(14-4)

最後合併上面兩組作法，並連接 $\overline{AB}$ $\overline{BC}$ $\overline{CD}$ $\overline{DE}$ $\overline{EF}$ $\overline{FA}$ 後即得原六邊形 ABCDEF，如圖(15)



圖(15)



圖(16)

討論:對於其它 N 邊形的 m:n 相同延伸比的還原畫法，作法相同，所須取得的比例歸納在表(五) 中，若遇到奇數邊形還原作圖時，如同在五邊形作圖各邊跑一輪即完成，而遇到偶數邊形時，其還原作圖要分成兩組(即第一、三、五…邊和第二、四、六…邊)，每一組各自獨立操作跑一輪，完成後就找到還原多邊形的 N 個頂點，最後再依次連接各頂點，即得該多邊形，如圖(16)

延伸比	$\overline{OT}:\overline{TN}$	$\overline{TC}:\overline{CA}$		延伸比	$\overline{OT}:\overline{TN}$	$\overline{TC}:\overline{CA}$
1:1	1:2	1:3		3:4	4:7	16:33
1:2	2:3	4:5		3:n	n: (n+3)	n^2: (6n+9)

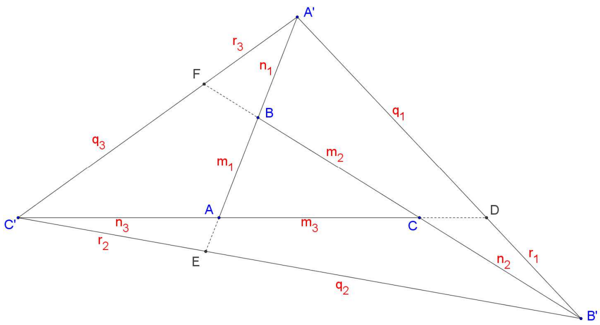
1:3	3:4	9:7		2:1	1:3	1:8
1:4	4:5	16:9		2:2	2:4	4:12
1:n	n: (n+1)	n^2: (2n+1)		2:3	3:5	9:16
3:1	1:4	1:15		2:4	4:6	16:20
3:2	2:5	4:21		2:n	n: (n+2)	n^2: (4n+4)
3:3	3:6	9:27		m:n	n: (m+n)	n^2: (2mn+ m^2)

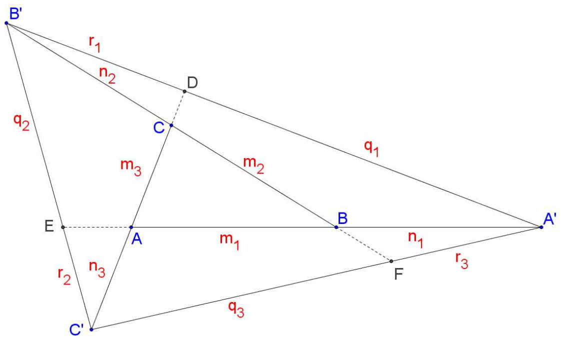
表(五)延伸比m:n時,N邊多邊形的 $\overline{OT}:\overline{TN}$ 與 $\overline{TC}:\overline{CA}$

五、 對任意N邊形，依**不同延伸比**找回原圖形的尺規作圖法探討

(一)三角形

由於不同延伸比的尺規還原作圖難度非常高，一開始我們只好使用「暴力作圖」,控制變因，不停輪動延伸比並列表觀察，定義圖如下圖(17-1)及圖(17-2):





圖(17-1)三角形各邊不同延伸比順時針延伸定義圖

圖(17-2)三角形各邊不同延伸比逆時針延伸定義圖

$m_1:n_1$	$m_2:n_2$	$m_3:n_3$	$q_1:r_1$	$q_2:r_2$	$q_3:r_3$
1:1	1:1	1:1	2:1	2:1	2:1
1:1	1:1	1:2	2:1	1:1	3:1
1:1	1:1	1:3	2:1	2:3	4:1
1:1	1:2	1:1	1:1	3:1	2:1
1:1	1:2	1:2	1:1	3:2	3:1
1:1	1:2	1:3	1:1	1:1	4:1

藉由前3組比例，我們可以得知:若只改變一組比例，就會有兩組比例受改變。因此，我們先假設 $q_1:r_1$、$q_2:r_2$、$q_3:r_3$ 分別受到 $m_1:n_1$ 和 $m_2:n_2$、$m_2:n_2$ 和 $m_3:n_3$、$m_3:n_3$ 和 $m_1:n_1$ 改變，最後可寫成下列表格:

$m_1:n_1$	$m_2:n_2$	$q_1:r_1$	$m_2:n_2$	$m_3:n_3$	$q_2:r_2$	$m_3:n_3$	$m_1:n_1$	$q_3:r_3$
1:1	1:1	2:1	1:1	1:1	2:1	1:1	1:1	2:1
1:1	1:1	2:1	1:1	1:2	1:1	1:2	1:1	3:1
1:1	1:1	2:1	1:1	1:3	2:3	1:3	1:1	4:1
1:1	1:2	1:1	1:2	1:1	3:1	1:1	1:1	2:1
1:1	1:2	1:1	1:2	1:2	3:2	1:2	1:1	3:1
1:1	1:2	1:1	1:2	1:3	1:1	1:3	1:1	4:1

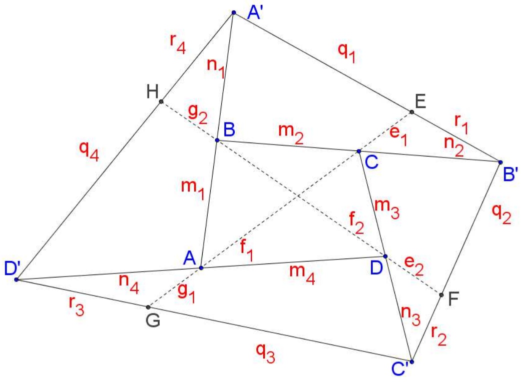
經過我們長時間的思考後，我們發現到 q_1:r_1 可以寫成(n_1+m_2):m_1n_2，q_2:r_2 可以寫成(n_2+m_3):m_2n_3，q_3:r_3 可以寫成(n_3+m_1):m_3n_1，但是，當我們正對於發現此公式感到十分開心時，我們拿到 2:n 的圖形中代入比例時，卻發現竟然不合!不過，我們馬上就又有了一個獨特的想法:如果這個公式對 1:n 都有用的話，那麼我們為何不將 m:n 的比例寫成 1:$\frac{n}{m}$ 呢?我們重新寫了一次式子，最後，得到了以下 m:n 的通式:

$$q_1:r_1 = \left(\frac{n_1}{m_1}+1\right):\frac{n_2}{m_2} \qquad q_2:r_2 = \left(\frac{n_2}{m_2}+1\right):\frac{n_3}{m_3} \qquad q_3:r_3 = \left(\frac{n_3}{m_3}+1\right):\frac{n_1}{m_1}$$

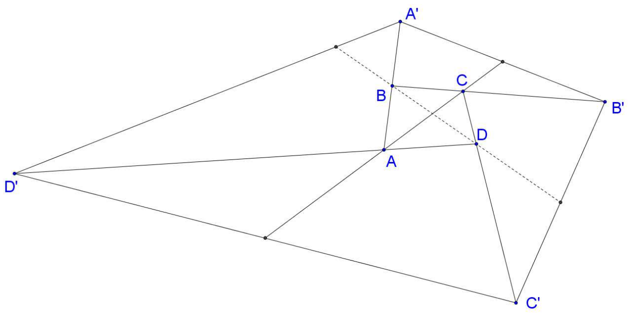
經過多次的代入其他比例後，這個式子能夠還原任意比例的三角形

(二)四邊形：

四邊形有 4 種不同的延伸比，遠比三角形複雜，我們利用課外的孟氏定理幫忙。



圖(18) 四邊形不同延伸比定義圖



圖(19) 還原圖

已知：四邊形 $A'B'C'D'$ 為四邊形 ABCD 依順時針以 m_1：n_1、m_2：n_2、m_3：n_3、m_4：n_4 延伸，試算出 q_1：r_1、q_2：r_2 、q_3：r_3、q_4：r_4 、e_1：f_1：g_1、e_2：f_2：g_2，如圖(18)

算法：(1)在 $\Delta A'BB'$ 中，∵E、C、A 三點共線，$\therefore \frac{r_1}{q_1}\times\frac{(m_1+n_1)}{m_1}\times\frac{m_2}{n_2}=1$ (孟氏定理)

⇒即可求出 q_1：r_1

(2)同理，依孟氏定理，則 q_2：r_2、q_3：r_3、q_4：r_4 可依序算出

(3)在 $\Delta AA'E$ 中，∵B、C、B' 三點共線，$\therefore \frac{n_1}{m_1}\times\frac{f_1}{e_1}\times\frac{r_1}{(q_1+r_1)}=1$(孟氏定理)

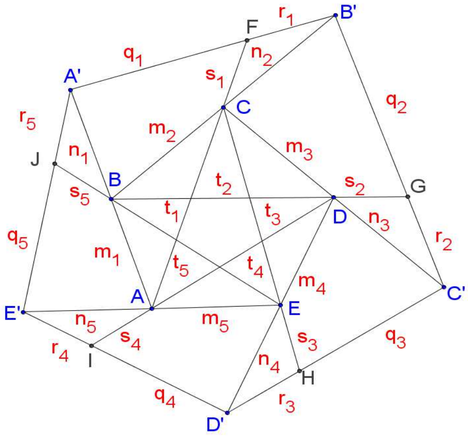
⇒即可求出 f_1：e_1

(4)同理，依孟氏定理，可得 f_1：g_1，再得連比 e_1：f_1：g_1

(5)同理，得連比 e_2：f_2：g_2

有這些線段的比例後，我們即可畫回去原四邊形 ABCD，如圖(19)。

(三)五邊形：



圖(20)

已知：五邊形 A'B'C'D'E' 為五邊形 ABCDE 依順時針以 $m_1:n_1$、$m_2:n_2$、$m_3:n_3$、$m_4:n_4$、$m_5:n_5$ 延伸，如圖(20)，計算出 $q_1:r_1$、$q_2:r_2$、$q_3:r_3$、$q_4:r_4$、$q_5:r_5$；$s_1:t_1$、$s_2:t_2$、$s_3:t_3$、$s_4:t_4$、$s_5:t_5$

作法：(1)在 $\Delta A'BB'$ 中 $\because F$、C、A 三點共線 $\therefore \frac{(m_1+n_1)}{m_1}\times\frac{m_2}{n_2}\times\frac{r_1}{q_1}=1$(根據孟氏定理)，即可算出 $q_1:r_1$

(2)同理，依孟氏定理，則 $q_2:r_2$、$q_3:r_3$、$q_4:r_4$、$q_5:r_5$ 可依續算出

(3)在 $\Delta A'BB'$ 中 $\because F$、C、A 三點共線 $\therefore \frac{n_1}{m_1}\times\frac{t_1}{s_1}\times\frac{r_1}{(r_1+q_1)}=1$(根據孟氏定理)

$\Rightarrow$ 即可算出 $s_1:t_1$

(4)同理依孟氏定理，則 $s_2:t_2$、$s_3:t_3$、$s_4:t_4$、$s_5:t_5$ 可依續算出

p.s 有了這些線段的比例後，我們試著畫回原五邊形 ABCDE，如圖(20)，這仍要延用五邊形相同延伸比的**動態作圖法**，我們以五邊形 $A'B'C'D'E'$ 為例，操作次序如圖(21-1)、圖(21-2)、圖(21-3)、圖(21-4)，最後完成，如圖(21-5)，詳細作法如下。

已知：五邊形 $A'B'C'D'E'$ 為五邊形 ABCDE 依順時針以 1:1、1:2、1:3、1:4、1:5 延伸，如圖(21-5)

求作：利用五邊形 $A'B'C'D'E'$ 倒做出原五邊形 ABCDE

作法：(1)利用孟氏定理計算出 $q_1:r_1$、$q_2:r_2$、$q_3:r_3$、$q_4:r_4$、$q_5:r_5$；$s_1:t_1$、$s_2:t_2$、$s_3:t_3$、$s_4:t_4$、$s_5:t_5$，如下表(六)

$m_1:n_1$	$m_2:n_2$	$m_3:n_3$	$m_4:n_4$	$m_5:n_5$
1:1	1:2	1:3	1:4	1:5
$q_1:r_1$	$q_2:r_2$	$q_3:r_3$	$q_4:r_4$	$q_5:r_5$
1:1	1:1	1:1	1:1	6:1
$s_1:t_1$	$s_2:t_2$	$s_3:t_3$	$s_4:t_4$	$s_5:t_5$
1:2	1:1	3:2	2:1	5:7

表(六)五邊形作圖前先備資料

(2)分別作 $\overline{A'F}:\overline{FB'}=q_1:r_1=1:1$、$\overline{B'G}:\overline{GC'}=q_2:r_2=1:1$、$\overline{C'H}:\overline{HD'}=q_3:r_3=1:1$、$\overline{D'I}:\overline{IE'}=q_4:r_4=1:1$、$\overline{EJ'}:\overline{JA'}=q_5:r_5=6:1$

(3)過 F，任作一線段 $\overline{FP}$

(4)在 $\overline{FP}$ 上，作 $\overline{FP_1}:\overline{P_1P}=s_1:t_1=1:2$

(5)連 $\overline{P_1H}$ ，在 $\overline{P_1H}$ 上，作 $\overline{P_2H}:\overline{P_2P_1}=s_3:t_3=3:2$

(6)連 $\overline{P_2J}$ ，在 $\overline{P_2J}$ 上，作 $\overline{P_3J}:\overline{P_3P_2}=s_5:t_5=5:7$

(7)連 $\overline{P_3G}$ ，在 $\overline{P_3G}$ 上，作 $\overline{P_4G}:\overline{P_4P_3}=s_2:t_2=1:1$

(8)連 $\overline{P_4I}$ ，在 $\overline{P_4I}$ 上，作 $\overline{P_5I}:\overline{P_5P_4}=s_4:t_4=2:1$

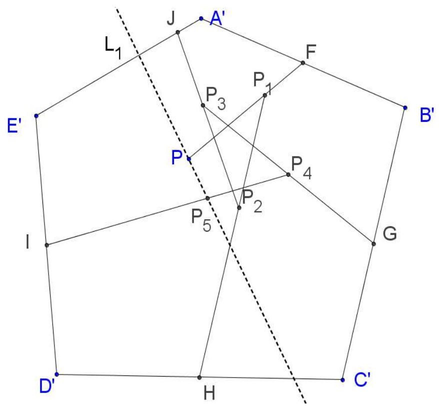
(9)連 $\overline{PP_5}$ ，如圖(21-1)

(10)同理，過 F，任作一線段 $\overline{FQ}$ ，依續作出 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4、Q_5，如圖(21-2)

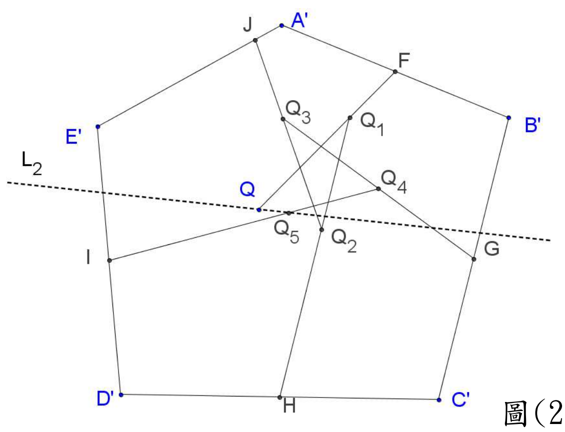
(11)連 $\overline{QQ_5}$

(12)設 $\overleftrightarrow{PP_5}$ 、 $\overleftrightarrow{QQ_5}$ 交於 W，如圖(21-3)

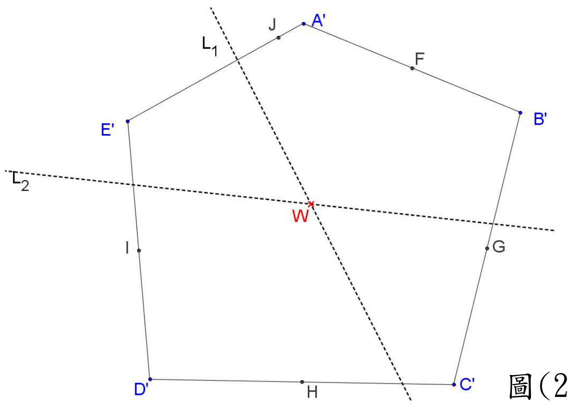
(13)連 $\overline{FW}$ ，同理依序作出 W_1、W_2、W_3、W_4、W_5，如圖(21-4)，則 W_1、W_2、W_3、W_4、W_5 五點即為原五邊形 ABCDE 的五頂點，此五邊形即為所求，如圖(21-5)



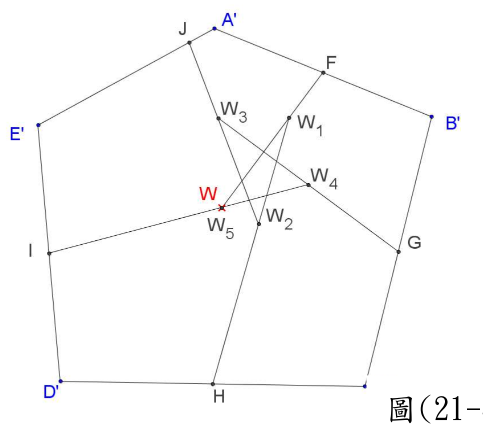
圖(21-1)



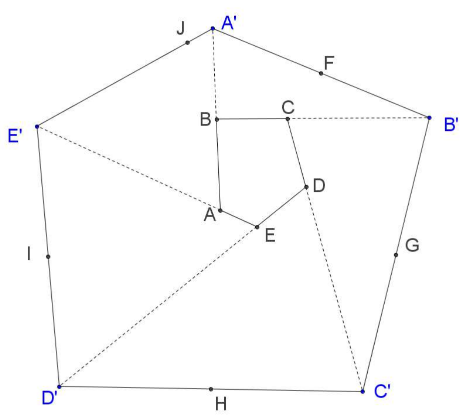
圖(21-2)



圖(21-3)



圖(21-4)



圖(21-5)

(四)六邊形以上見附件一

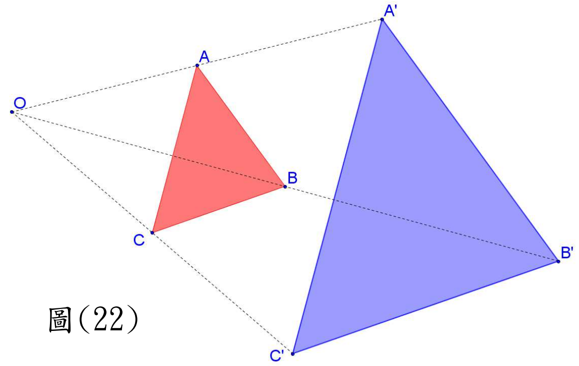
P.S. (1)以上的幾何作圖，不論往外延伸或往內還原，都可用代數作法檢驗

(2)多邊形依不同延伸比的尺規作圖還原操作法，開啟了後文中相似形能**動態還原作圖**的契機

六、 利用前文的探討創造一種新的相似形尺規作圖法

(一)三角形

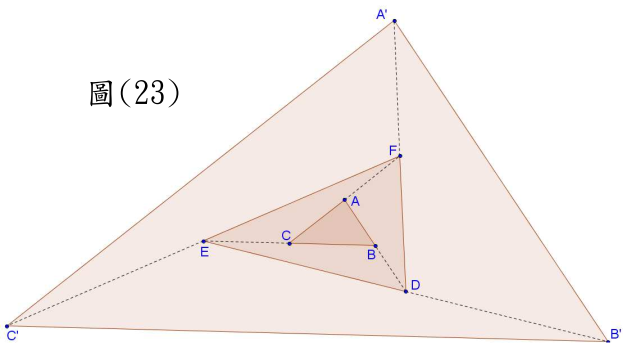
在相似形的單元中，利用尺規作圖，我們選定一投射中心點 O 後，即可依想要的比例畫出相似 $\Delta A'B'C'$，如圖(22)。可是如果不想依賴中心點 O 呢？在沒有中心點的狀態下可否畫出相似三角形？



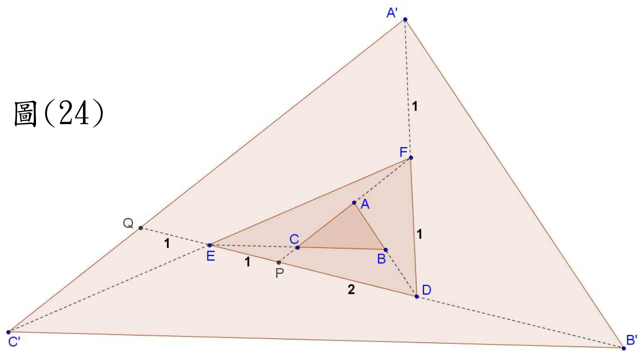
圖(22)

根據前文的代數法可計算，在相同的延伸比下，先順時針往外畫出一個三角形後，再接著將他依逆時針往外畫出去，則 $\overleftrightarrow{AC}$ 和 $\overleftrightarrow{A'C'}$ 的斜率會相等，如圖(23)，也可以利用孟氏定理，分別延長 $\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{DE}$，交 $\overline{DE}$、$\overline{A'C'}$ 於 P、Q，如圖(24)，並計算 $\overline{DF}:\overline{FA'}=\overline{DP}:\overline{PQ}=1:1$，故 $\overleftrightarrow{AC}//\overleftrightarrow{A'C'}$，另兩對也是，即可得到一個與原三角形相似的三角形，如圖(23)。又透過還原作圖，我們也能輕鬆的畫出任一三角形的縮小圖(先順再逆或先逆再順均可），且畫出的兩個 Δ 是全等的。

圖(23)



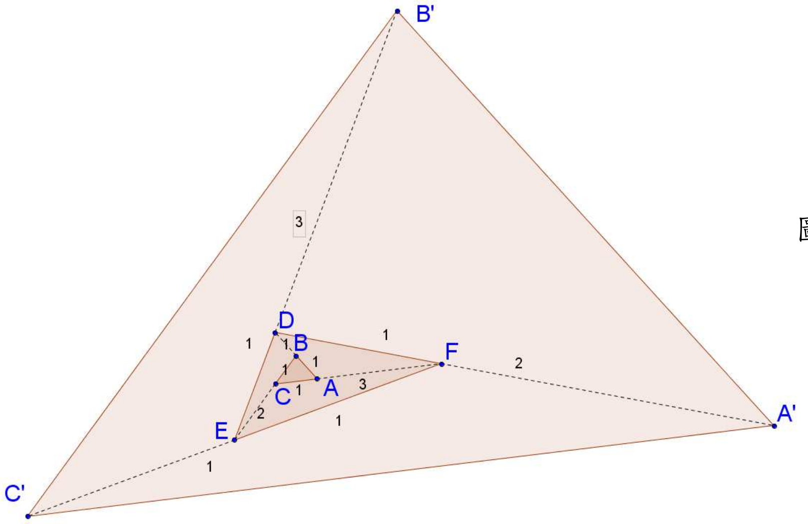
圖(24)



在圖(23)中，可輕易的證明 ΔABC 與 $\Delta A'B'C'$ 面積比為 $1:49$，但明顯的可以發現若要畫出其他面積比，大部分都不容易，例如作面積比為 $1:4$ 時，三邊上的延伸比需取 $1:\dfrac{(-3)+\sqrt{21}}{6}$，看了就腳軟，縮小圖也一樣困難，為克服這個缺點，

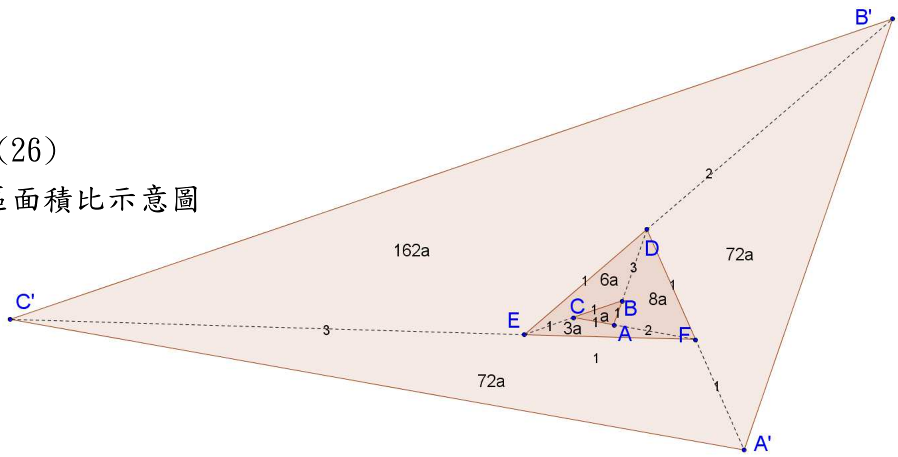
我們嘗試使用三邊不同的延伸比，敘述如下:

在教科書上的投射比 $\overline{OA}:\overline{OA'}$，$\overline{OB}:\overline{OB'}$，$\overline{OC}:\overline{OC'}$ 都要相等，但在我們的新作圖法下，可以任意取不同的比例，例如，先逆時針延伸成 ΔDEF，其中 $\overline{AB}:\overline{BD}=1:1$，$\overline{BC}:\overline{CE}=1:2$，$\overline{CA}:\overline{AF}=1:3$，如圖(25)，再順時針取 $\overline{ED}:\overline{DB'}=1:3$，$\overline{DF}:\overline{FA'}=1:2$，$\overline{EF}:\overline{EC'}=1:1$ 這樣的**對應搭配**，我們也是嘗試了很久，才可畫出與原三角形 ΔABC 相似的放大圖 $\Delta A'B'C'$，且 ΔABC 面積：$\Delta A'B'C'$ 面積 $=1:324$。計算見圖(26)



圖(25) 第一次延伸成ΔDEF
第二次延伸成$\Delta A'B'C'$

圖(26)
各區面積比示意圖

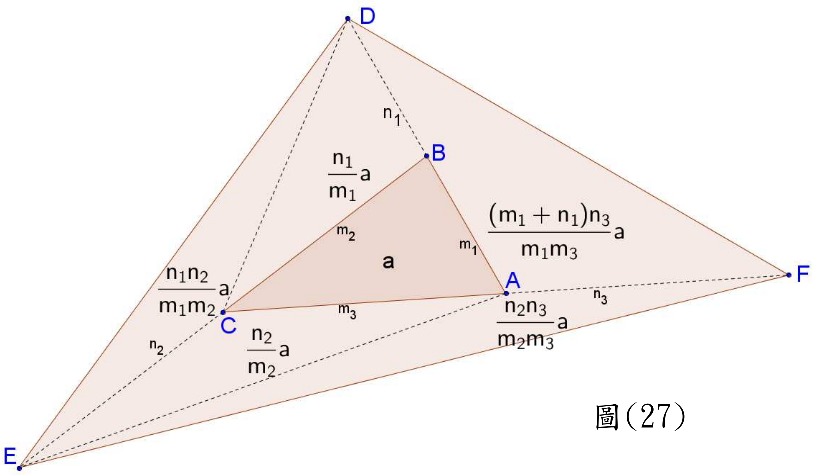


綜合上文，我們發現的相似Δ放大圖新作圖法，操作步驟敘述如下:

步驟一:以順時針(或逆時針)方向以不同比例延伸一次，可以得到一延伸三角形，假設我們取的比例依序是 $m_1:n_1$、$m_2:n_2$、$m_3:n_3$

步驟二:再由此延伸Δ以逆時針(或順時針)方向，搭配之前的三個延伸比去延伸，即可畫出相似的放大圖。搭配方式如圖(25)

因此若延伸比各為 $m_1:n_1$、$m_2:n_2$、$m_3:n_3$ 則經一順一逆操作後即可得到一個放大的相似三角形，且所成的面積比為 $(m_1m_2m_3)^2:[(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)-n_1n_2n_3]^2$，如圖(26)。面積比公式證明：



圖(27)

ΔABC 面積 ： ΔDEF 面積（第一層）

$$=a:a+\frac{n_1}{m_1}a+\frac{n_1n_2}{m_1m_2}a+\frac{n_2}{m_2}a+\frac{n_2n_3}{m_2m_3}a+\frac{(m_1+n_1)n_3}{m_1m_3}a$$ ，如圖(27)

$$=m_1m_2m_3:m_1m_2m_3+m_2m_3n_1+m_3n_1n_2+m_1m_2n_2+m_1n_2n_3+m_1m_2n_3+m_2n_1n_3$$

$$=m_1m_2m_3:(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)-n_1n_2n_3$$

同理第二層的 ΔDEF 面積 ： $\Delta A'B'C'$ 面積也是一樣，故經第一層再第二層後，

所得的 ΔABC 面積： $\Delta A'B'C'$ 面積= $(m_1m_2m_3)^2:[(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)-n_1n_2n_3]^2$

得證。

有了上面這個式子後，要如何去使用它呢？這就是本報告主題「動態還原」的精髓所在，請看以下的討論。

討論：

(1)當使用者提出所要的面積比，例如 $\Delta ABC:\Delta A'B'C'$ ＝ 1:4，我們即可先算出各層延伸比，求延伸比之速算法說明如下：

由 $\Delta ABC \Rightarrow \Delta DEF \Rightarrow \Delta A'B'C'$

假設 ΔABC ＝ 1，ΔDEF ＝ x，$\Delta A'B'C'$ ＝ 4

前面面積比證明可知 1：x ＝ x：4，得 x^2 ＝ 4，∴x ＝ 2

ΔABC 面積：ΔDEF 面積 ＝ 1：2，再代入延伸比得

$$m_1m_2m_3:(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)-n_1n_2n_3=1:2$$

指定 m_1＝1，m_2＝1，m_3＝1 代入

$$1\times1\times1:(1+n_1)(1+n_2)(1+n_3)-n_1n_2n_3=1:2$$

得 $(1+n_1)(1+n_2)(1+n_3)-n_1n_2n_3=2$......①

此方程式有無限多組解，但為方便尺規作圖，取 n_1＝1 、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{8}$、 ……，n_2＝1、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{8}$、 ……，搭配後，可得到很多種的 n_3，再篩選最簡易操作的當 n_3 即可依順、逆動態作圖畫出面積比為 1：4 的相似形。(這個構想大部分都能比之前有所改善)

例：由①式及動態隨意的指定 n_1 和 n_2 的值代入，算出 n_3 如下(給五個範例)：

1. 取 $n_1=\frac{1}{2}$ ，$n_2=\frac{1}{4}$ 代入

$$(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{4})(1+n_3)-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times n_3=2$$

$$(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{4})(1+n_3)-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times n_3=2$$

$$\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}n_3-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}n_3=2$$

2. 取 $n_1=\frac{1}{2}$ ，$n_2=\frac{1}{8}$ 代入

$$(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{8})(1+n_3)-\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\times n_3=2$$

$$(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{8})(1+n_3)-\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\times n_3=2$$

$$\frac{3}{2}\times\frac{9}{8}+\frac{3}{2}\times\frac{9}{8}n_3-\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}n_3=2$$

$$\frac{15}{8}+\frac{(15-1)}{8}n_3=2$$

$$n_3=(\frac{16}{8}-\frac{15}{8})\times\frac{8}{15-1}=\frac{1}{14}$$

$$\frac{27}{16}+\frac{(27-1)}{16}n_3=2$$

$$n_3=(\frac{32}{16}-\frac{27}{16})\times\frac{16}{27-1}=\frac{5}{26}$$

3. 同理取 $n_1=\frac{1}{4}$，$n_2=\frac{1}{4}$ 代入，得 $n_3=\frac{7}{24}$

4. 同理取 $n_1=\frac{1}{4}$，$n_2=\frac{1}{8}$ 代入，得 $n_3=\frac{19}{44}$

5. 同理取 $n_1=\frac{1}{8}$，$n_2=\frac{1}{8}$ 代入，得 $n_3=\frac{47}{80}$

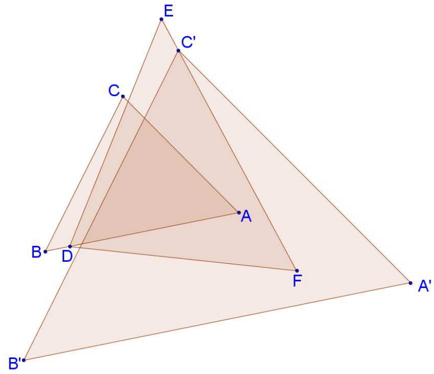
6. 同理取 $n_1=\frac{1}{2}$，$n_2=\frac{1}{2}$ 代入，得 $n_3=-\frac{1}{8}$

綜合上述內容，列成表(七)。當△ABC 面積 ： △$A'B'C'$ 面積 = 1:4 時，可以取得如表(七)的一些解；其中選取 $n_1=\frac{1}{2}$，$n_2=\frac{1}{2}$，$n_3=-\frac{1}{8}$ 是**最迅速操作**的一組解，因為都只用**中點作圖法**。

n_1	n_2	n_3
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{14}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{26}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{24}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{19}{44}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{47}{80}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
⋮	⋮	⋮

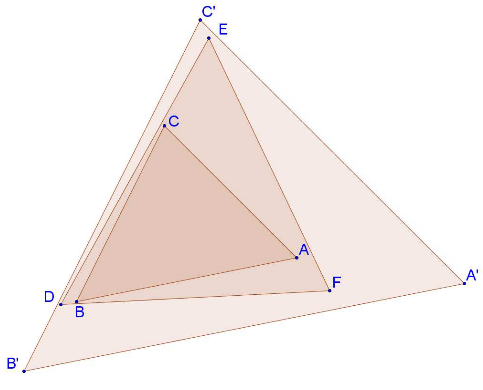
表(七)動態 n_1、n_2、n_3

(2)其中 $n_3=-\frac{1}{8}$ 表示作圖往外延長的方向改成往內作，即負數表示往內延長，如圖(28)，$\overline{BD}$ ： $\overline{BA}$= (-1)：8，而 D 點落在 B、A 之間。此為往內作示意圖：



圖(28)　$\overline{BD}$：$\overline{BA}$=(-1)：8，$\overline{CE}$ ：$\overline{BC}$=1：2，$\overline{AF}$ ：$\overline{CA}$=1：2

(3) $n_3=\frac{1}{14}$ 表示作圖往外延長，即正數表示往外延長，如圖(29)



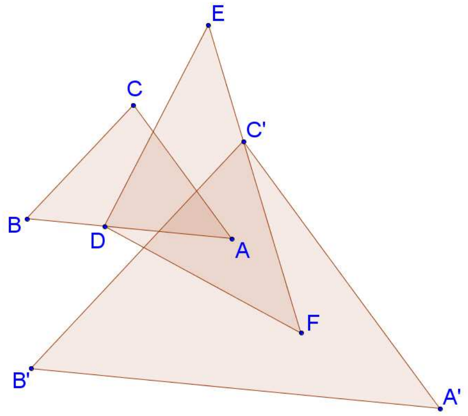
圖(29) $\overline{BD}$ ：$\overline{BA}$= 1：14，$\overline{CE}$ ：$\overline{BC}$=1：2，$\overline{AF}$ ：$\overline{CA}$= 1：4

(4)計算 n_3 也有速算法，我們歸納如下：

當 ΔABC ： $\Delta A'B'C'$ 的面積比 = 1:4，ΔABC ： ΔDEF = 1:2，歸納 n_3 的速算法為

$$n_3=\frac{2(n_1\text{的分母})(n_2\text{的分母})-(n_1\text{的分母}+n_1\text{的分子})(n_2\text{的分母}+n_2\text{的分子})}{(n_1\text{的分母}+n_1\text{的分子})(n_2\text{的分母}+n_2\text{的分子})-(n_1\text{的分子})(n_2\text{的分子})}$$

(5)思考假使利用根號作為比例，是否也能求出延伸比，做出相似的圖形?當然可以!我們利用公式求出數據，可以畫出此相似圖形，如圖(30)

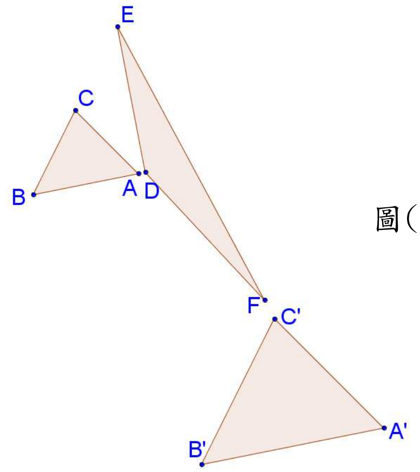


圖(30)

如：$n_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$n_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得 $n_3=\frac{3\sqrt{2}-5}{2}$ （$\Delta ABC:\Delta A'B'C'$ =1:4 的要求時）

(6)又例如當 $\Delta ABC:\Delta A'B'C'$ = 1:3，則 $\Delta ABC:\Delta DEF$ = $1:\sqrt{3}$

那要如何找到 n_3 呢?我們試做了以下範例，如圖(31)



圖(31)

取 m_1 = m_2 = m_3 = 1，n_1 =1，n_2 =2，得 $n_3=\frac{\sqrt{3}-6}{4}$（負數往內畫）

而且，我們發現其 n_3 的算法仍然符合以下公式

$$n_3=\frac{\sqrt{3}(n_1\text{的分母})(n_2\text{的分母})-(n_1\text{的分母}+n_1\text{的分子})(n_2\text{的分母}+n_2\text{的分子})}{(n_1\text{的分母}+n_1\text{的分子})(n_2\text{的分母}+n_2\text{的分子})-(n_1\text{的分子})(n_2\text{的分子})}$$

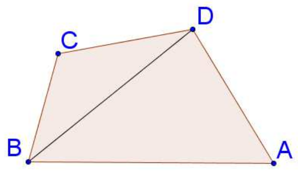
(7)總結來說，若 ΔABC： $\Delta A'B'C'$ 的面積比= 1：k^2，此時 ΔABC： ΔDEF = 1：k，n_3 的速算法為：

$$n_3=\frac{\kappa(n_1\text{的分母})(n_2\text{的分母})-(n_1\text{的分母}+n_1\text{的分子})(n_2\text{的分母}+n_2\text{的分子})}{(n_1\text{的分母}+n_1\text{的分子})(n_2\text{的分母}+n_2\text{的分子})-(n_1\text{的分子})(n_2\text{的分子})}$$

(二)四邊形

(1)任意四邊形同比例或不同比例經切割成兩個三角形之後個別順逆延伸後再重組可形成相似形，以不同比例作圖為例

步驟一:做一對角線將四邊形分成兩部分，如圖(32-1)

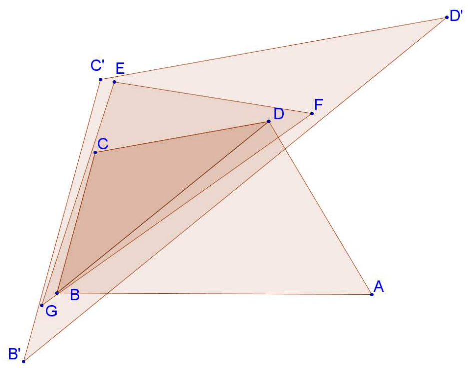


圖(32-1)

步驟二:建立操作的先備資料表(含 n_1、n_2、n_3)

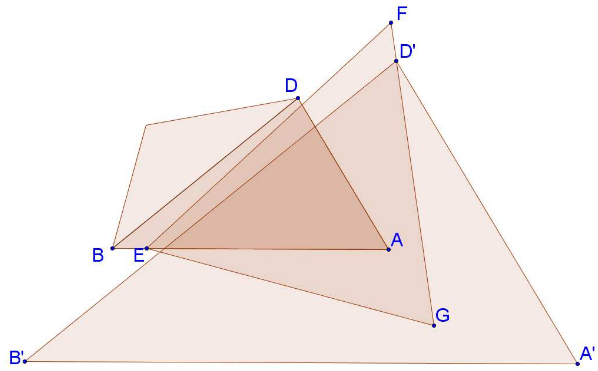
步驟三:將兩三角形分別以同比例或不同比例的先備資料順逆各往外操作一次(必須是①算出來面積比相同的兩組比例②從同一頂點開始③同樣先順再逆或同樣先逆再順⇒最後的邊長成比例才會相似)

例如:我們取面積比為 1:4 的比例，一組做$1:\frac{1}{2}$、$1:\frac{1}{4}$、$1:\frac{1}{14}$為延伸比，如圖(32-2)，另一組做$1:\frac{1}{2}$、$1:\frac{1}{2}$、$1:-\frac{1}{8}$為延伸比，如圖(32-3)



圖(32-2)

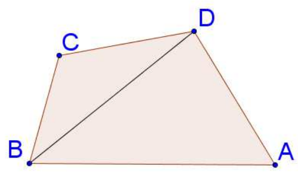
左半ΔBCD經一順一逆放大成$\Delta B'C'D'$

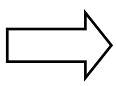


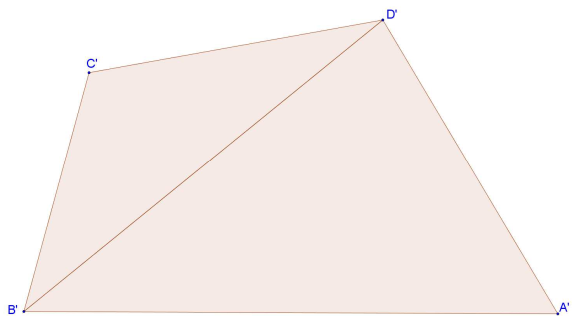
圖(32-3)

右半ΔABD經一順一逆放大成$\Delta A'B'D'$

步驟四:將兩圖中對角線的對應邊相組合，便可形成一個面積為原來 4 倍的相似四邊形，如圖(32-4)







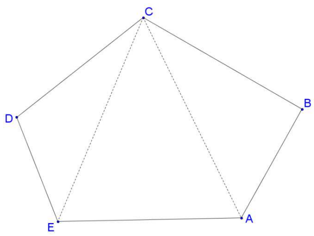
圖(32-4)

利用上述的方法，我們也可以將五邊形、六邊形等多邊形放大，並形成相似形。

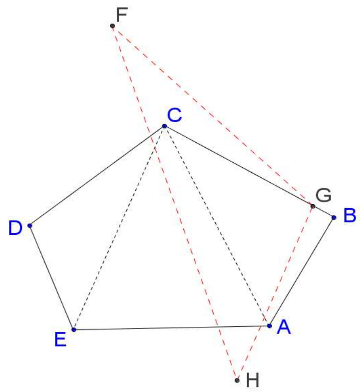
(三)五邊形以上的相似形新作圖法示範

以作面積比 1：4 為例，以同比例延伸為例

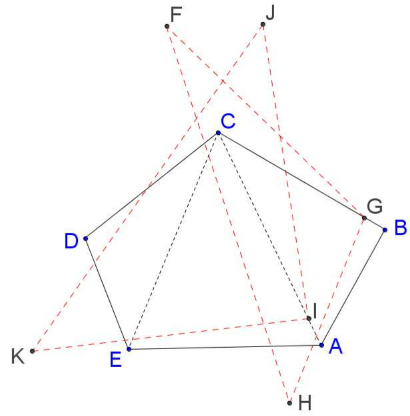
作法：



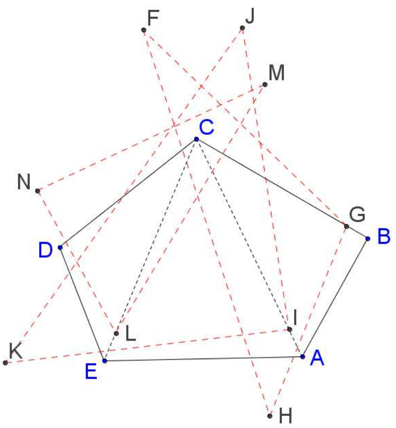
圖(33-1)從 C 點切割成三塊



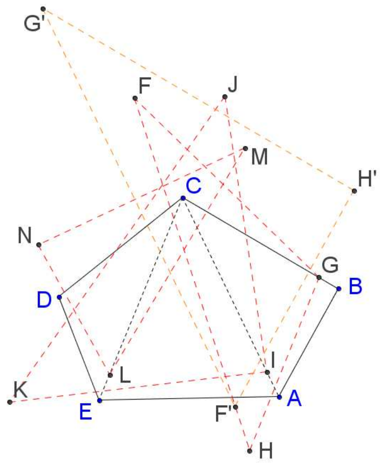
圖(33-2)ΔCBA 第一次操作



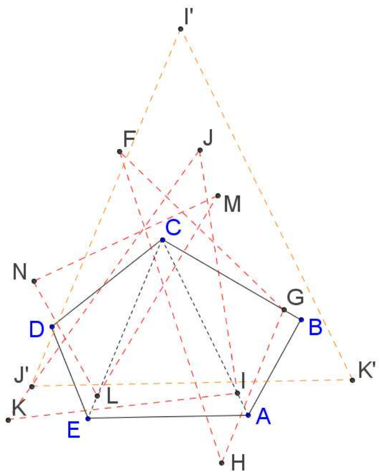
圖(33-3) ΔCAE 第一次操作



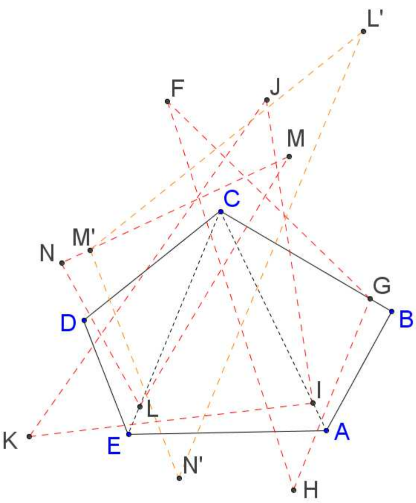
圖(33-4)ΔCED 第一次操作



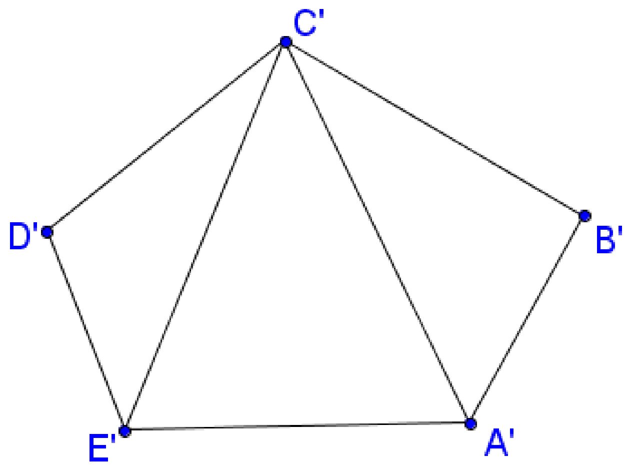
圖(33-5) ΔCBA 第二次操作



圖(33-6) ΔCAE 第二次操作



圖(33-7) ΔCED 第二次操作



圖(33-8)合併完成圖

(1)由原圖與放大圖面積比 1：4，推得原圖與中間圖面積比為 1：2

(2)將五邊形從同一頂點開始切成三塊三角形，例如，由 C 點出發，連 $\overline{CE}$ 、$\overline{CA}$ 將五邊形切成 ΔCDE 、ΔCEA、ΔCAB ，如圖(33-1)。

(3)取 $m_1=m_2=m_3=1$，建立如同表(七) 的表，任取一組較易尺規操作的數據當 n_1、n_2、n_3。例如：$n_1=\frac{1}{2}$、$n_2=\frac{1}{2}$ 、$n_3=-\frac{1}{8}$(正數往外畫、負數往內畫)。

(4)都從切割點 C 開始，分別將ΔCDE 、ΔCEA、ΔCAB同樣先順再逆或先逆再順的操作。如圖(33-2) 、圖(33-3)、 圖(33-4)、 圖(33-5)、 圖(33-6)、 圖(33-7)

(5)操作完後兩個對應的$\overline{C'E'}$會等長，兩個對應的$\overline{C'A'}$也會等長，因此可以將三塊合併起來得到放大圖，如圖(33-8)

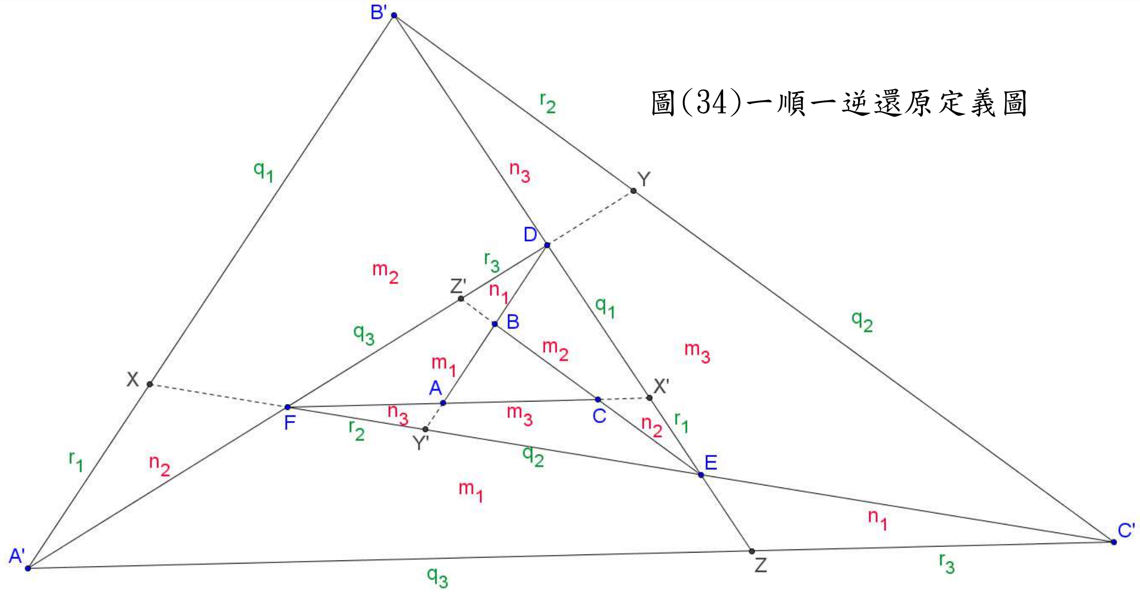
七、 相似多邊形的縮小圖尺規作圖法示範

除了放大之外，我們也可以利用前文中所提到利用尺規作圖的方法，將放大後的各三角形縮小成各自原本的樣子再拼起來

(一)作$\Delta A'B'C'$的$\dfrac{1}{4}$倍縮小圖

若欲操作縮小圖，則須按照前文，先還原第一層，緊接著再逆方向還原第二層即可，其中要注意不同延伸比的排列次序。

作法：



圖(34)一順一逆還原定義圖

步驟一:利用之前的公式代入延伸比(參考第 14 頁公式及圖(34)定義圖)

求出 $q_1:r_1$、$q_2:r_2$、$q_3:r_3$的算法:

$$q_1:r_1 = \left(\frac{n_1}{m_1}+1\right):\frac{n_2}{m_2} \qquad q_2:r_2 = \left(\frac{n_2}{m_2}+1\right):\frac{n_3}{m_3} \qquad q_3:r_3 = \left(\frac{n_3}{m_3}+1\right):\frac{n_1}{m_1}$$

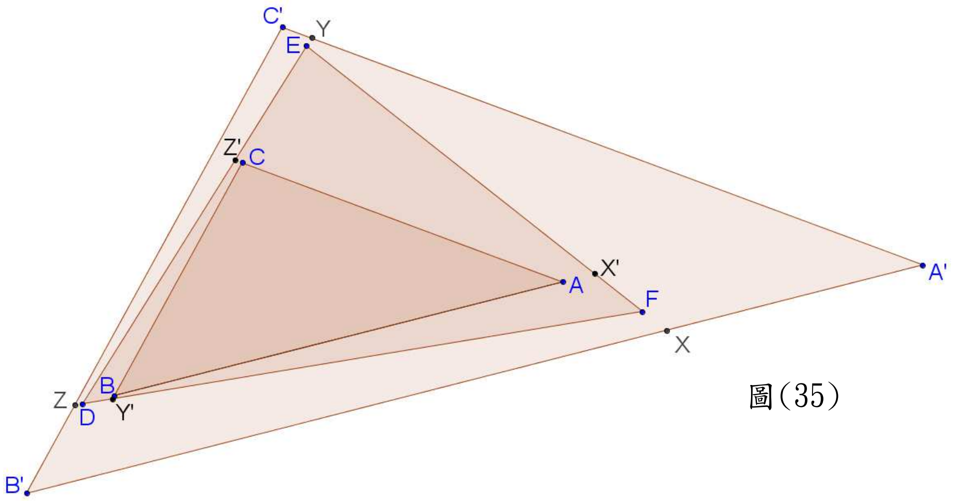
ΔABC的延伸比例為$1:\dfrac{1}{2}$ 、$1:\dfrac{1}{4}$ 、$1:\dfrac{1}{14}$ ，

代入公式可得:（比例位置定義請見第 14 頁）

$$q_1:r_1 = \left(\frac{\frac{1}{2}}{1}+1\right):\frac{\frac{1}{4}}{1} \qquad q_2:r_2 = \left(\frac{\frac{1}{4}}{1}+1\right):\frac{\frac{1}{14}}{1} \qquad q_3:r_3 = \left(\frac{\frac{1}{14}}{1}+1\right):\frac{\frac{1}{2}}{1}$$

$$\Rightarrow \quad q_1:r_1 = \frac{3}{2}:\frac{1}{4} \qquad q_2:r_2 = \frac{5}{4}:\frac{1}{14} \qquad q_3:r_3 = \frac{15}{14}:\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad q_1:r_1 = 6:1 \qquad q_2:r_2 = 35:2 \qquad q_3:r_3 = 15:7$$



圖(35)

作圖法：(1)將$\overline{C'A'}$分成 2:35，得 Y 點

(2)將$\overline{B'A'}$分成 15:7，得 X 點

(3)將$\overline{C'B'}$分成 6:1，得 Z 點

(4)將 X、Y、Z 三點分別與其對面的頂點相連可求得ΔDEF

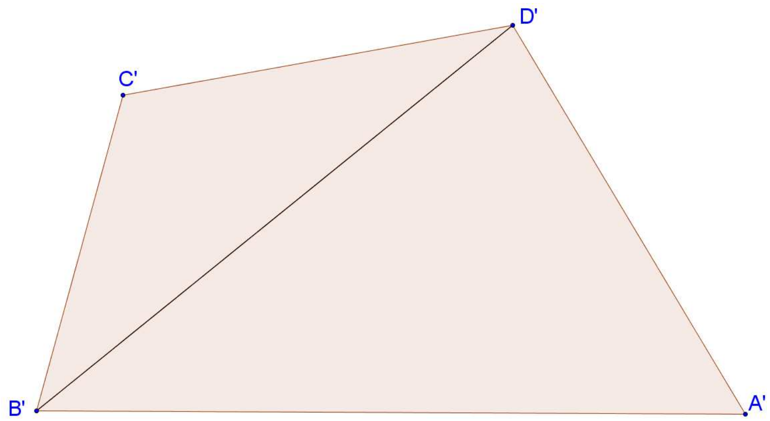
(5)再依上述做法在ΔDEF的三邊上可取得X'、Y'、Z'三點

(6)將這三點再分別與其對面的頂點相連可求得ΔABC，如圖(35)

(二)作四邊形$A'B'C'D'$的$\dfrac{1}{4}$倍縮小圖

作圖法:

步驟一:將四邊形分成兩個三角形，如圖(36-1)



圖(36-1)

步驟二:利用之前的公式代入延伸比(參考第 14 頁公式)

求出 $q_1:r_1$、$q_2:r_2$、$q_3:r_3$的算法:

$$q_1:r_1 = \left(\frac{n_1}{m_1}+1\right):\frac{n_2}{m_2} \qquad q_2:r_2 = \left(\frac{n_2}{m_2}+1\right):\frac{n_3}{m_3} \qquad q_3:r_3 = \left(\frac{n_3}{m_3}+1\right):\frac{n_1}{m_1}$$

ΔBCD的延伸比例為$1:\dfrac{1}{2}$、$1:\dfrac{1}{4}$、$1:\dfrac{1}{14}$，

代入公式可得:(比例位置定義請見第 14 頁)

$$q_1:r_1 = \left(\frac{\frac{1}{2}}{1}+1\right):\frac{\frac{1}{4}}{1} \qquad q_2:r_2 = \left(\frac{\frac{1}{4}}{1}+1\right):\frac{\frac{1}{14}}{1} \qquad q_3:r_3 = \left(\frac{\frac{1}{14}}{1}+1\right):\frac{\frac{1}{2}}{1}$$

$\Rightarrow$ $q_1:r_1 = \frac{3}{2}:\frac{1}{4}$ $q_2:r_2 = \frac{5}{4}:\frac{1}{14}$ $q_3:r_3 = \frac{15}{14}:\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $q_1:r_1 = 6:1$ $q_2:r_2 = 35:2$ $q_3:r_3 = 15:7$

ΔABD 的延伸比例為$1:\frac{1}{2}$、$1:\frac{1}{2}$、$1:-\frac{1}{8}$，

代入公式可得:（比例位置定義請見第 14 頁）

$q_1:r_1 = \left(\frac{\frac{1}{2}}{1}+1\right):\frac{\frac{1}{2}}{1}$ $q_2:r_2 = \left(\frac{\frac{1}{2}}{1}+1\right):\frac{-\frac{1}{8}}{1}$ $q_3:r_3 = \left(\frac{-\frac{1}{8}}{1}+1\right):\frac{\frac{1}{2}}{1}$

$\Rightarrow$ $q_1:r_1 = \frac{3}{2}:\frac{1}{2}$ $q_2:r_2 = \frac{3}{2}:-\frac{1}{8}$ $q_3:r_3 = \frac{7}{8}:\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $q_1:r_1 = 3:1$ $q_2:r_2 = 12:-1$ $q_3:r_3 = 7:4$

作圖法:

(1)將$\overline{C'D'}$分成 2:35，得 Y 點

(2)將$\overline{B'D'}$分成 15:7，得 X 點

(3)將$\overline{C'B'}$分成 6:1，得 Z 點

(4)將 X、Y、Z 三點分別與其對面的頂點相連可求得ΔDEF

(5)再依上述做法在ΔEFG的三邊上可取得X'、Y'、Z'三點

(6)將這三點再分別與其對面的頂點相連可求得ΔACD，如圖(36-2)

(7)將$\overline{B'D'}$分成 4:7，得 Z 點

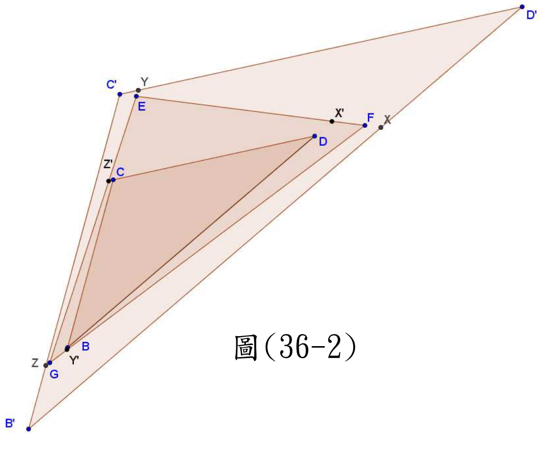
(8)將$\overline{A'D'}$分成 12:(-1)，得 X 點

在$\overline{A'D'}$做 12:(-1)，取 X 點的做法:先把$\overline{A'D'}$分成 11 段後，在向外做$\overline{A'D'}$的$\frac{1}{11}$，如圖(36-3)，做$\overline{XD'}$，得比例 12:(-1)，得 X 點

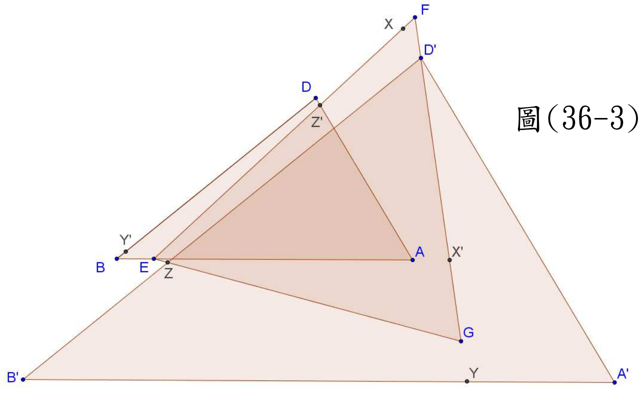
(9)將$\overline{B'A'}$分成 3:1，得 Y 點

(10)再依上述做法在ΔEFG的三邊上可取得X'、Y'、Z'三點

(11)將這三點再分別與其對面的頂點相連可求得ΔABD，如圖(36-3)

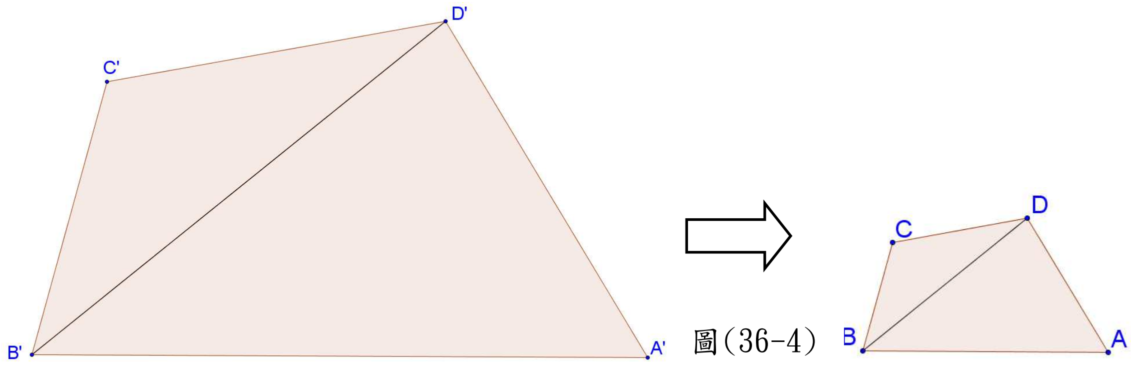


圖(36-2)



圖(36-3)

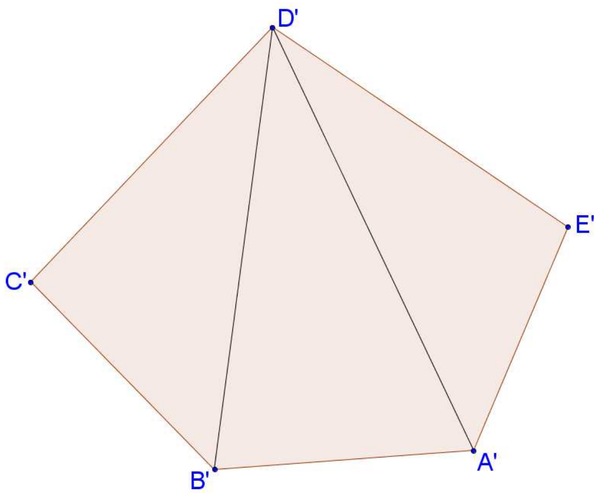
步驟三:將兩圖中對角線的對應邊相組合,便可形成一個面積為原來$\frac{1}{4}$倍的相似四邊形，如圖(36-4)



圖(36-4)

(三)做五邊形$A'B'C'D'E'$的$\frac{1}{4}$倍縮小圖

步驟一:以同一頂點畫出五邊形$ABCDE$的兩條對角線$\overline{DA}$、$\overline{DB}$，將五邊形分割成三個三角形，如圖(37-1)



圖(37-1)

步驟二:利用之前的公式代入延伸比(參考第 14 頁公式)

求出 $q_1:r_1$、$q_2:r_2$、$q_3:r_3$的算法:

$q_1:r_1 = \left(\frac{n_1}{m_1}+1\right):\frac{n_2}{m_2}$　　$q_2:r_2 = \left(\frac{n_2}{m_2}+1\right):\frac{n_3}{m_3}$　　$q_3:r_3 = \left(\frac{n_3}{m_3}+1\right):\frac{n_1}{m_1}$

各Δ的延伸比例為$1:\frac{1}{2}$、$1:\frac{1}{2}$、$1:-\frac{1}{8}$，

代入公式可得:(比例位置定義請見第 14 頁)

$q_1:r_1 = \left(\frac{\frac{1}{2}}{1}+1\right):\frac{\frac{1}{2}}{1}$　　$q_2:r_2 = \left(\frac{\frac{1}{2}}{1}+1\right):\frac{-\frac{1}{8}}{1}$　　$q_3:r_3 = \left(\frac{-\frac{1}{8}}{1}+1\right):\frac{\frac{1}{2}}{1}$

$\Rightarrow\ q_1:r_1 = \frac{3}{2}:\frac{1}{2}$ $\qquad q_2:r_2 = \frac{3}{2}:-\frac{1}{8}$ $\qquad q_3:r_3 = \frac{7}{8}:\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\ q_1:r_1 = 3:1$ $\qquad q_2:r_2 = 12:-1$ $\qquad q_3:r_3 = 7:4$

作圖法:

(1)將 $\overline{C'D'}$ 分成 4:7，得 Z 點

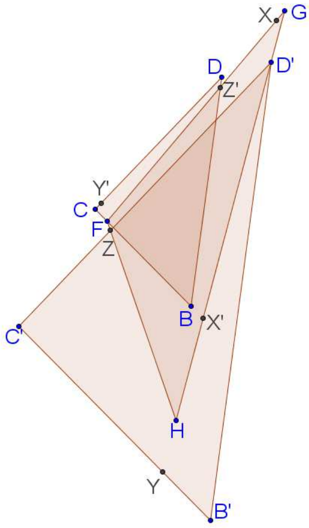
(2)將 $\overline{B'D'}$ 分成 12:(-1)，得 X 點

(3)將 $\overline{C'B'}$ 分成 3:1，得 Y 點

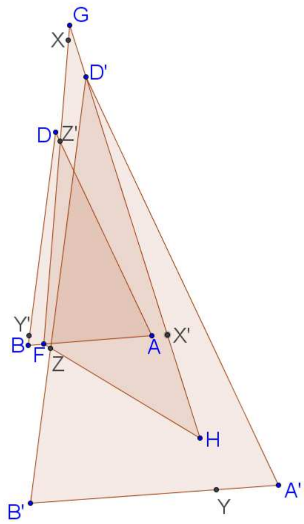
(4)再依上述做法在 ΔFGH 的三邊上可取得 X' 、Y' 、 Z' 三點

(5)將這三點再分別與其對面的頂點相連可求得 ΔBCD ，如圖(37-2)

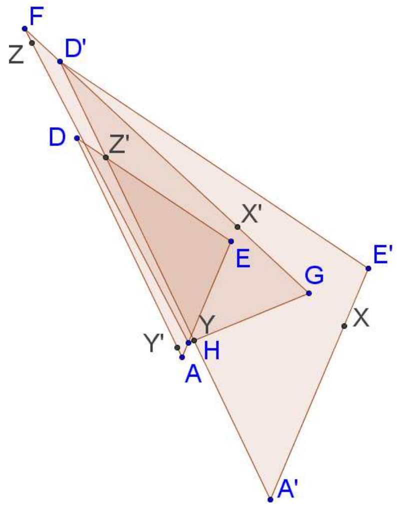
(6)依照此種作圖方式我們也能夠將 ΔABD 及 ΔAED 還原為原始的三角形，如圖(37-3)、圖(37-4)



圖(37-2)

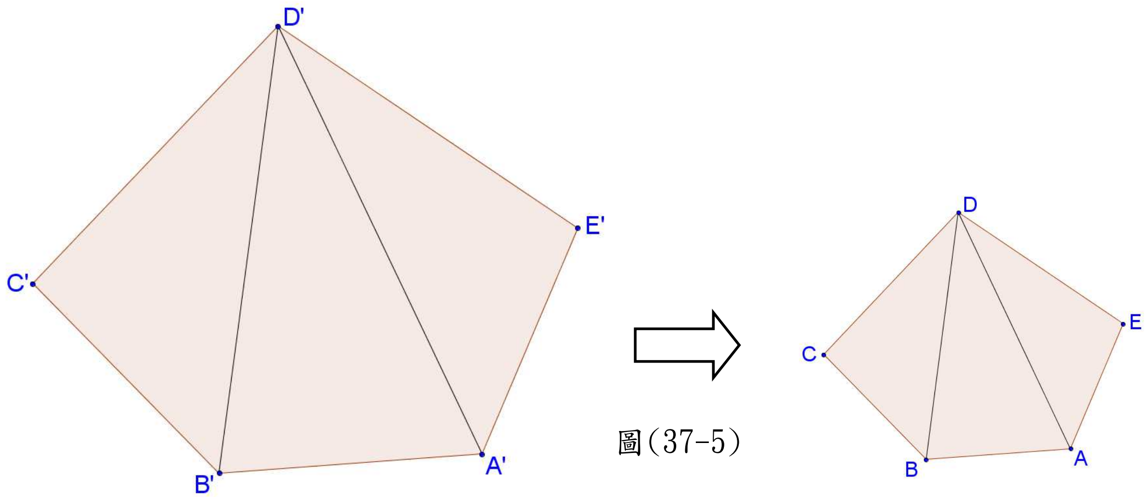


圖(37-3)



圖(37-4)

步驟三:將還原得到的三個三角形組合起來，得 $\frac{1}{4}$ 倍縮小圖五邊形 $ABCDE$ ，如圖(37-5)



圖(37-5)

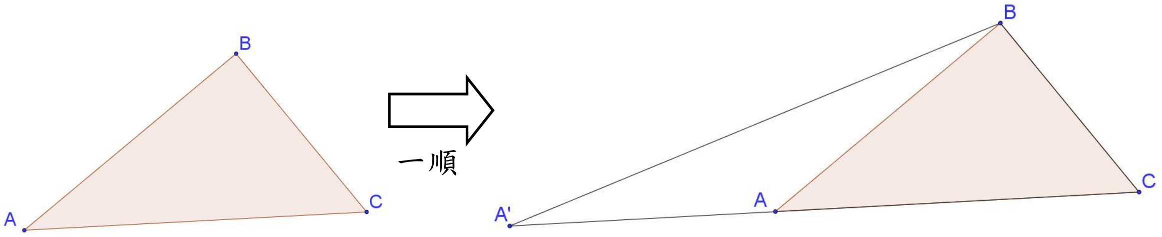
八、 將動態作圖中 n_1、n_2、n_3 的選取再一次淬鍊精進

因 n_1、n_2、n_3 是正值時，往外延伸作圖，而 n_1、n_2、n_3 是負值時，往內作圖，故明顯的當 n_1、n_2、n_3 是零值時，作圖留在原線段處。此時放大作圖與縮小作圖簡化許多，

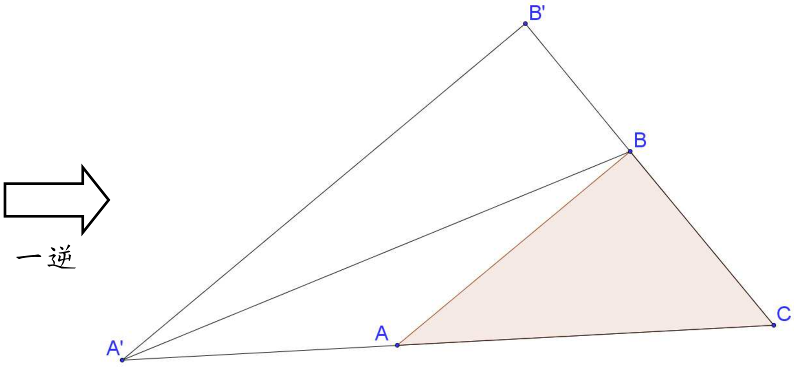
敘述如下:

如果要求作面積比 $1:k^2$ 的放大圖，我們可以選取 $n_1=0$，$n_2=0$，再代入 n_3 速算公式，得 $n_3=k-1$，再順逆操作一輪即可得一放大圖，非常方便。

例如:求作 ΔABC 的 1:3 放大圖，如圖(37-1)~圖(37-3)



圖(37-1)　　　　圖(37-2)



圖(37-3)

因為 $k^2=3$，故 $k=\sqrt{3}$，$\therefore n_3=\sqrt{3}-1$

由 $n_1=0$，故順時針作圖時取 $\overline{AB}:n_1=1:0$，所以 $\overline{AB}$ 不必延伸，同理 $n_2=0$，故 $\overline{BC}:n_2=1:0$，不必延伸，但 $\overline{CA}:n_3=1:\sqrt{3}-1$ 要往外延伸，得 $\Delta BCA'$，如圖(37-2)，又同理逆時針作圖時，$\overline{BA'}: n_1=1:0$，$\overline{A'C}: n_2=1:0$，$\overline{CB}: n_3=1:\sqrt{3}-1$，得 $\Delta A'B'C$，故 $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C$，見圖(37-3)

上述的精簡作圖，大大的簡化本文動態相似形作圖步驟，可與課本上的作圖相媲美，縮小圖也是。

伍、結論

一、若任意 P 邊形，頂點依序為(a_1, b_1)、(a_2, b_2)……(a_p, b_p)，經**相同延伸比** m:n 順時針或逆時針還原成的對應頂點為(x_1, y_1)、(x_2, y_2)……(a_p, b_p)，則各 x_i、y_i 有如下的關係式

$$x_1=[\,mn^{(p-1)}a_1+mn^{(p-2)}(m+n)a_2+mn^{(p-3)}(m+n)^2a_3+mn^{(p-4)}(m+n)^3a_4+\ldots\ldots+mn^{[p-(p-2)]}(m+n)^{[(p-2)-1]}a_{(p-2)}+mn^{[p-(p-1)]}(m+n)^{[(p-1)-1]}a_{(p-1)}+m(m+n)^{(p-1)}a_p]/[(m+n)^p-n^p]$$

其中分母$(m+n)^p-n^p$代表分子的係數總和

$$y_1=[\,mn^{(p-1)}b_1+mn^{(p-2)}(m+n)b_2+mn^{(p-3)}(m+n)^2b_3+mn^{(p-4)}(m+n)^3b_4+\ldots\ldots+mn^{[p-(p-2)]}(m+n)^{[(p-2)-1]}b_{(p-2)}+mn^{[p-(p-1)]}(m+n)^{[(p-1)-1]}b_{(p-1)}+m(m+n)^{(p-1)}b_p]/[(m+n)^p-n^p]$$

其餘的座標，依本文敘述規則輪動。(其中分母$(m+n)^p-n^p$代表分子的係數總和)

二、若任意 P 邊形，頂點依序為(a_1, b_1)、(a_2, b_2)……(a_p, b_p)，經**不同延伸比** $m_1:n_1$、$m_2:n_2$、$m_3:n_3$ …… $m_p:n_p$ 順時針或逆時針還原成的對應頂點為(x_1, y_1)、(x_2, y_2)……(a_p, b_p)，則各 x_i、y_i 有如下的關係式

$$x_1=[m_1n_2n_3n_4\cdots n_pa_1+(m_1+n_1)m_2n_3n_4\cdots n_pa_2+(m_1+n_1)(m_2+n_2)m_3n_4\cdots n_pa_3+\cdots+(m_1+n_1)(m_2+n_2)$$

$(m_3+n_3)(m_4+n_4)\cdots m_{(p-2)}n_{(p-1)}n_p a_{(p-2)}+(m_1+n_1)(m_2+n_2)$

$(m_3+n_3)(m_4+n_4)\cdots[m_{(p-2)}+n_{(p-2)}]m_{(p-1)}n_p a_{(p-1)}+(m_1+n_1)(m_2+n_2)\ (m_3+n_3)(m_4+n_4)\cdots[m_{(p-2)}+n_{(p-2)}]$

$[m_{(p-1)}+n_{(p-1)}]m_p a_p]\ /\ [(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)\cdots(m_p+n_p)-n_1n_2n_3\cdots n_p]$

$x_2=[m_1(m_2+n_2)(m_3+n_3)(m_4+n_4)\cdots[m_{(p-2)}+n_{(p-2)}]\ [m_{(p-1)}+n_{(p-1)}]$

$(m_p+n_p)a_1+n_1m_2n_3n_4\cdots n_p a_2+m_1(m_2+n_2)m_3n_4\cdots n_p a_3+\cdots+n_1(m_2+n_2)$

$(m_3+n_3)(m_4+n_4)\cdots m_{(p-2)}n_{(p-1)}n_p a_{(p-2)}+n_1(m_2+n_2)\ (m_3+n_3)(m_4+n_4)\cdots[m_{(p-2)}+n_{(p-2)}]$

$m_{(p-1)}n_p a_{(p-1)}+n_1(m_2+n_2)\ (m_3+n_3)(m_4+n_4)\cdots[m_{(p-2)}+n_{(p-2)}]\ [m_{(p-1)}+n_{(p-1)}]m_p a_p]\ /$

$[(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)\cdots(m_p+n_p)-n_1n_2n_3\cdots n_p]$ ……其餘的座標，依本文敘述輪動

三、對任意多邊形的各邊依不同延伸比畫出新多邊形後，本文提出一套動態還原尺規作圖法，依之前的延伸比找回原多邊形

四、上述之還原尺規作圖或延伸作圖，不論各邊長延伸比相同與否，畫出的多邊形很難和原圖形相似。但我們發現針對三角形，不論延伸比相同與否，先順再逆或先逆再順，其中順序交換時所對應之延伸比須按本文發現的規則佈置，則兩Δ必相似，且面積比為 $(m_1m_2m_3)^2:[(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)-n_1n_2n_3]^2$ ，其中 $m_i:n_i$ 為各對應邊的延伸比

五、由上文的面積比關係式知原Δ和中間層Δ的面積比為 $m_1m_2m_3:[(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)-n_1n_2n_3]$ ，指定 m_1、m_2、m_3 後可找到多組的 n_1、n_2、n_3，取較易尺規操作(即動態作圖)的比值後，即可畫出指定面積比的相似放大圖或縮小圖。其中，當再指定 n_1、n_2 後，取 n_3 的速算法為

$$n_3=\frac{\kappa(n_1\text{的分母})(n_2\text{的分母})-(n_1\text{的分母}+n_1\text{的分子})(n_2\text{的分母}+n_2\text{的分子})}{(n_1\text{的分母}+n_1\text{的分子})(n_2\text{的分母}+n_2\text{的分子})-(n_1\text{的分子})(n_2\text{的分子})}$$

此時母層與延伸的第一層面積比為 1:k

六、對四邊形以上的多邊形，可從固定一頂點開始，將此 N 多邊形切割成 N-2 個Δ，再依給定的面積比，找出易操作的 n_1、n_2、n_3 比值，且都從該共同的頂點開始，一順一逆或一逆一順分別操作後，最後就能組合成與原圖形相似的放大圖或縮小圖。

七、n_1、n_2、n_3 的取值可為正數、負數或 0，而當選取 $n_1=0$、$n_2=0$ 時，$n_3=k-1$，此時大大的簡化了本文中相似形的操作作圖，簡化的程度可以媲美課本中的的相似形作圖法

陸、參考資料及其他

一、康軒國中數學課本第三冊、第四冊、第五冊、高中第一冊、第二冊

二、維基百科-孟氏定理

http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%AD%9F%E6%B0%8F%E5%AE%9A%E7%90%86

三、Geogebra 操作手冊

【評語】030413

1. 動態還原觀念創新，有創意。
2. 團隊合作良好，報告中肯。
3. 善用繪圖軟體。
4. 數學內涵，深度稍嫌不足。