

中華民國第 52 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 數學科

030412

摺「正」稱「奇」

學校名稱：連江縣立介壽國民中學

作者： 國二 曹茗凱 國二 林禹碩 國二 陳泊宇	指導老師： 錢雄武
---	------------------

關鍵詞：中垂線、角平分線、摺線

名稱：摺「正」稱「奇」

摘要

本學期，我們開始學習幾何的內容，與尺規作圖的方法，經由老師的教導，我們對對稱圖形有了一定的認識。因此，我們本次研究的內容，即是在探討正多邊形的摺紙方法，運用角平分線、中垂線的原理，是否能摺出所有的正多邊形？如果能，其原理與方法為何？

壹、研究動機

這一學期，我們開始接觸上國中以來的一個新單元—幾何圖形，「幾何」有別於以往我們學的不等式、方程式，是另一截然不同的領域。因此，好奇的我們便去詢問老師許許多多有關於幾何的問題。一日，老師用一張 A4 紙摺出了一正六邊形，A5 紙張摺出正五邊形，要我們拼湊出一個足球，我們大吃一驚，也覺得很有趣。在詢問老師是用何種方法摺出正五、正六邊形時，只見老師露出神秘兮兮的笑容，告訴我們：「你們可以參考這摺紙的痕跡，自己動手來試試看，另外除了這兩類的正多邊形，你們還可以摺出哪些類的正多邊形呢？如果給你們一些誤差範圍，是不是所有的正多邊形都可以摺出來呢？」於是，我們這摺「正」稱「奇」的探索之旅，就此展開了……

貳、研究目的

- 一、探討一般紙張（A4、B4）編版原理。
- 二、探討正三邊形、正六邊形、正十二邊形的摺法與原理。
- 三、探討正四邊形、正八邊形的摺法與原理。
- 四、探討正奇數邊形（5、7、9、11、13、15、17……）的摺法與原理。

參、研究設備及器材

一般紙張、GeoGebra 幾何繪圖軟體、gsp 幾何繪圖軟體

肆、研究過程或方法

一、探討一般紙張（A4、B4）編版原理

一般紙張為長方形設計，其中 A4、A5、B4、B5 的長寬比值為：

A4 紙張:29.7:21 比值 \approx 1.414 A5 紙張:21:14.8 比值 \approx 1.419

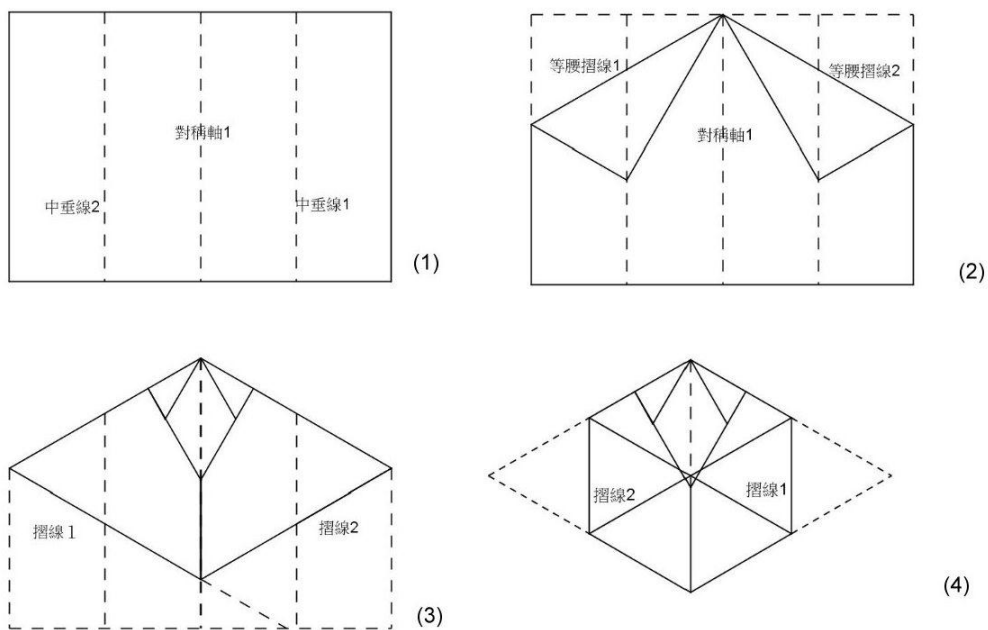
B4 紙張:36.4:25.71 比值 \approx 1.416 B5 紙張:25.71:18.2 比值 \approx 1.413

依據三角形 SAS 相似性質，一般紙張幾乎是相似的設計。

二、正三邊形、正六邊形、正十二邊形的摺法

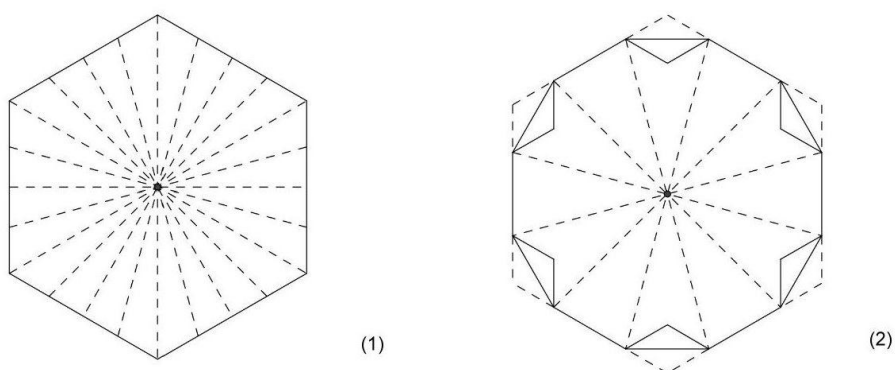
在尺規作圖中，我們可以做的是中垂線作圖與角平分線作圖，同樣的，紙張的摺法也是。中垂線摺法為點對點摺圖，角平分線摺法為線對線摺法。

正三角形、正六邊形摺法:



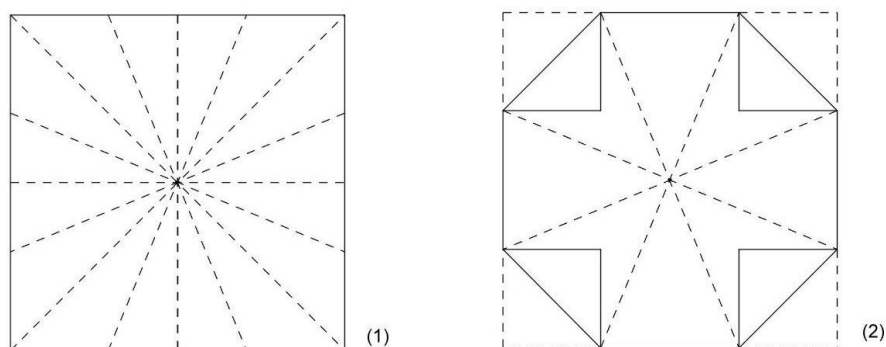
圖(3)對摺為正三角形，虛線對摺如圖(4)為正六邊形。

以正六邊形為底，摺出對角線、中垂線與角平分線，內摺即為正十二邊形。



三、正四邊形、正八邊形的摺法：

正方形摺法為摺出任一直角角平分線即可，以正方形為底，摺出對角線、中垂線與角平分線，內摺即為正八邊形，如下圖所示。



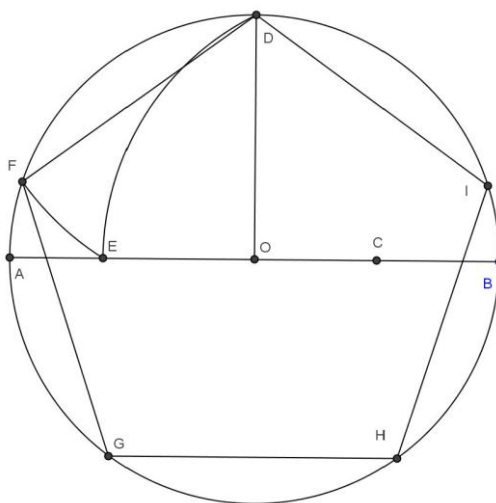
四、正奇數邊形（5、7、9、11、13、15、17……）的摺法

（一）正五邊形

正五邊形的尺規作圖

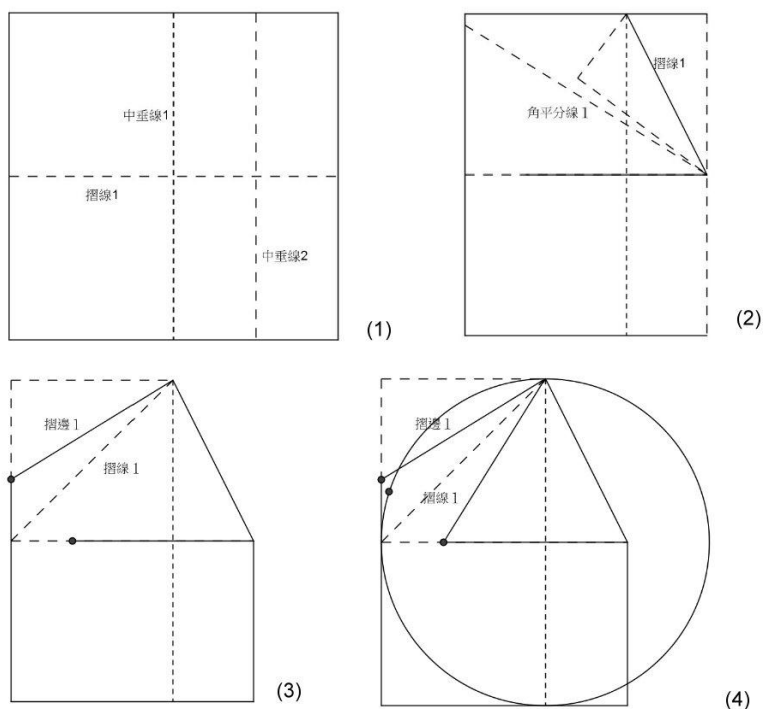
1. 畫一直線 L ，以 O 為圓心，畫一圓， \overline{AB} 為直徑。
2. 過 O 點作 \overline{AB} 的垂直線交圓 O 於 D 點。
3. 以 C 點為圓心， \overline{CD} 為半徑畫弧交 \overline{AB} 於 E 點。
4. 以 D 點為圓心， \overline{DE} 為半徑畫弧交圓於一點。再連續可取四個等弧，連接端點，

就可以做出正五邊形。

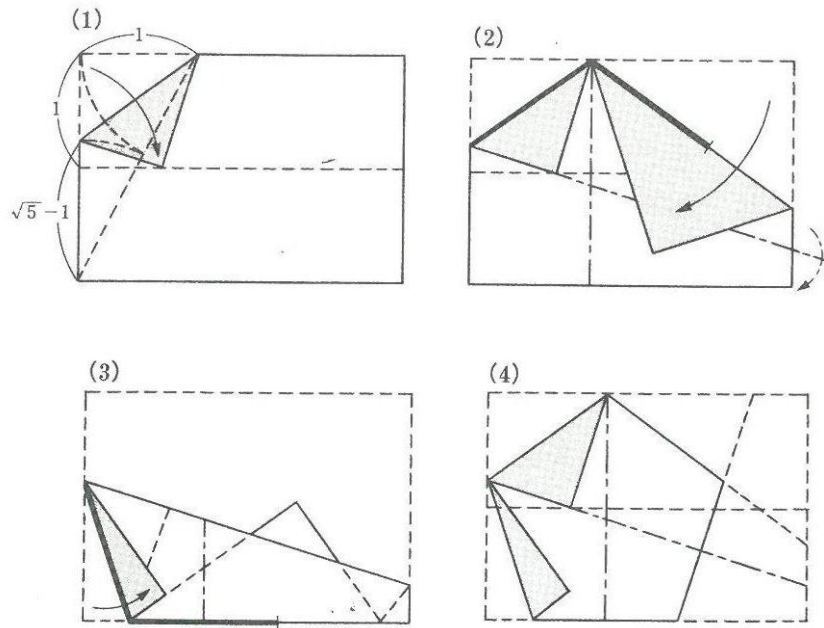


以正方形紙張摺紙， F 點無法如同圓規方式摺出，摺法如下：

圖(1)~圖(3)，其 F 點位置比較如圖(4)。



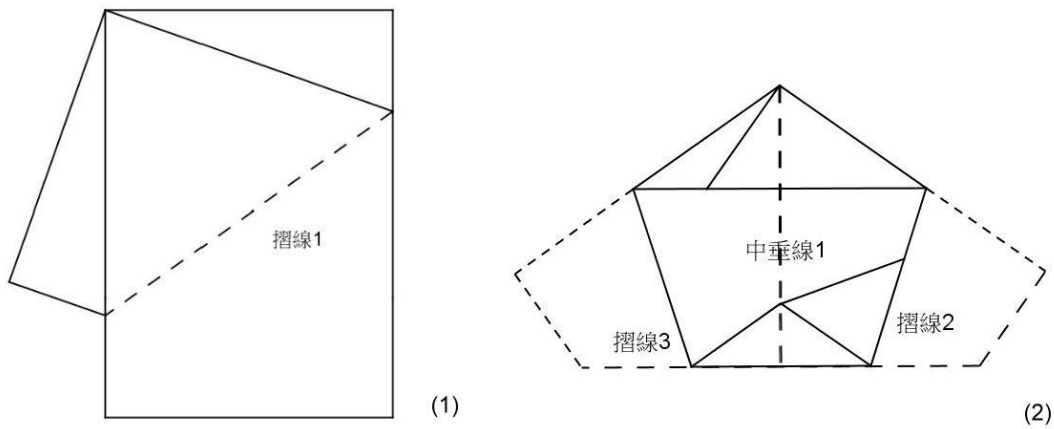
以 A4 紙張摺法(銀林浩，2002：15)



實際摺出，頂角為 105.25° ，誤差 2.75°

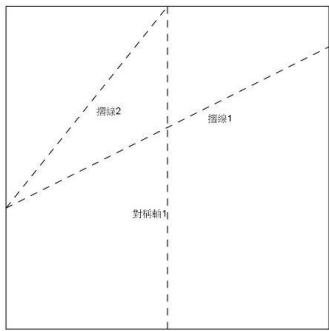
正五邊形無法以單張紙摺出，在允許誤差為 3° 角以內，其簡易摺法如下：

以 A4 紙張為準，對角相摺，摺出摺線中垂線，邊線內摺(摺出角平分線)

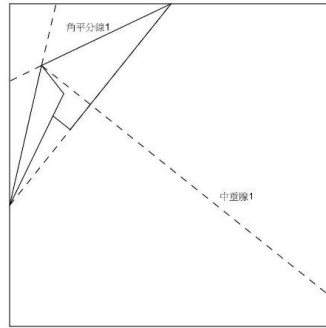


(二) 正七邊形

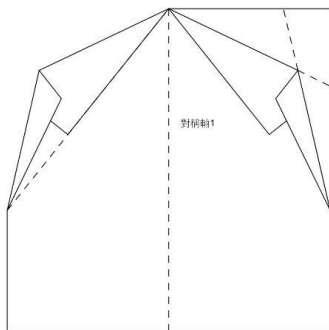
在允許誤差情況下，正七邊形以後，以正方形紙張摺法較為簡化，仿照正五邊形摺法，頂點摺至對邊中點，對邊上段摺圖，其摺法如下：



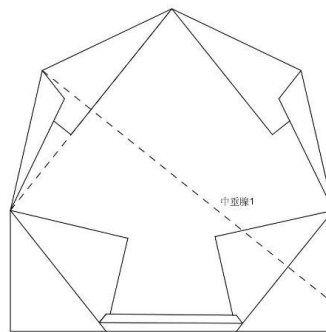
(1)



(2)

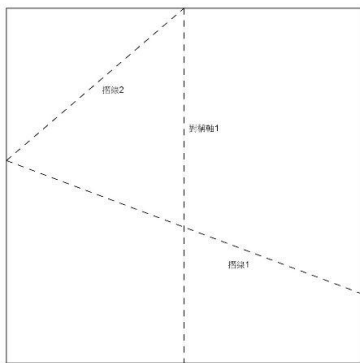


(3)

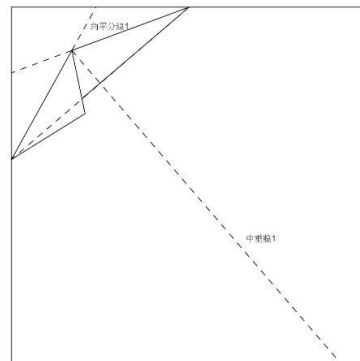


(4)

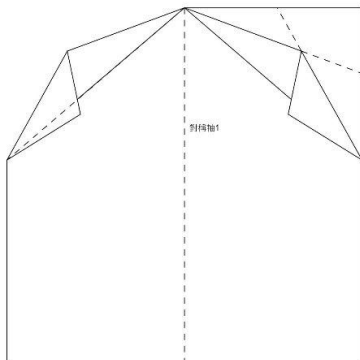
(三) 正九邊形：頂點摺至對邊 $\frac{3}{8}$ 點，上段摺圖



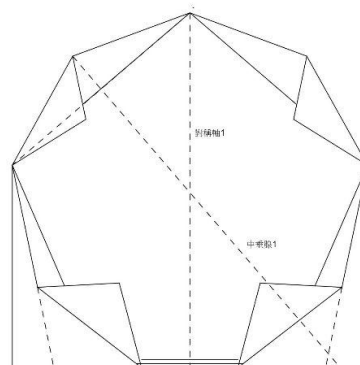
(1)



(2)

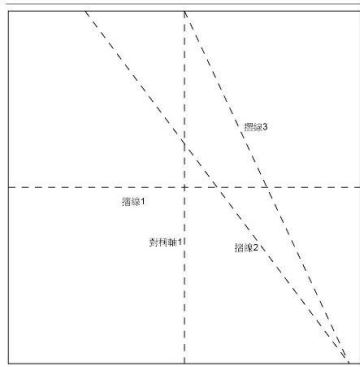


(3)

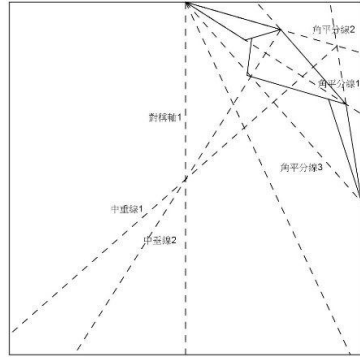


(4)

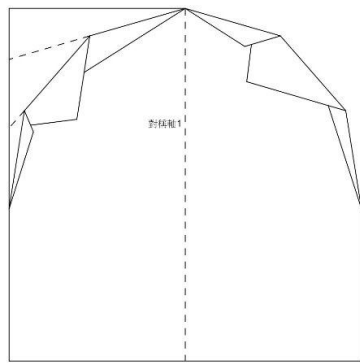
(四) 正十一邊形：頂點摺至對側邊 $\frac{3}{4}$ 點



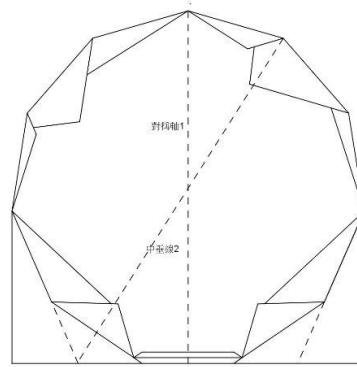
(1)



(2)

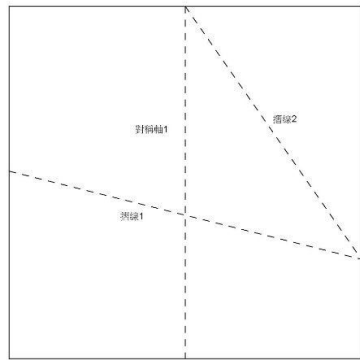


(3)

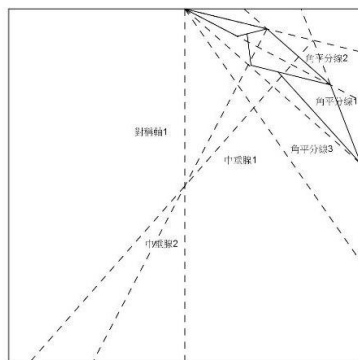


(4)

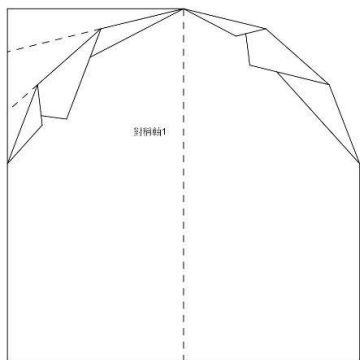
(五) 正十三邊形：頂點摺至對邊 $\frac{1}{4}$ 點，右上段摺圖



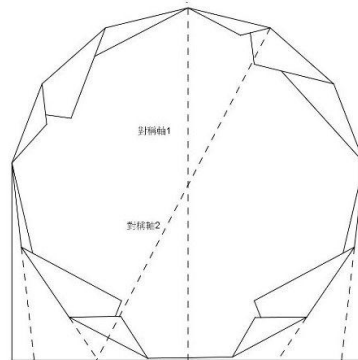
(1)



(2)

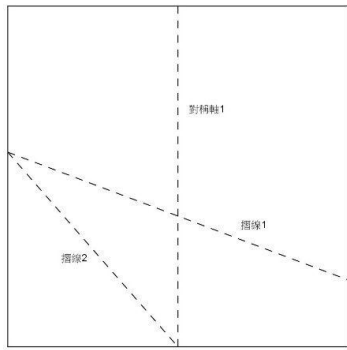


(3)

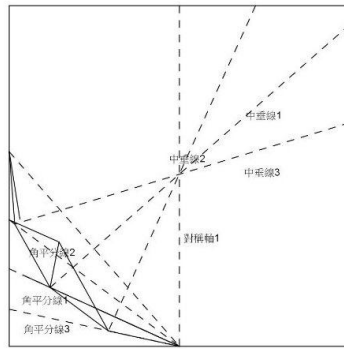


(4)

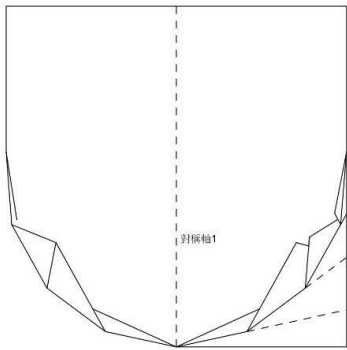
(六) 正十五邊形：頂點摺至對邊 $\frac{3}{8}$ 點，下段摺圖



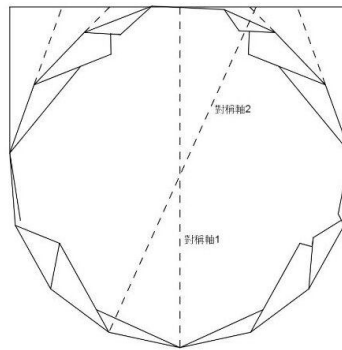
(1)



(2)

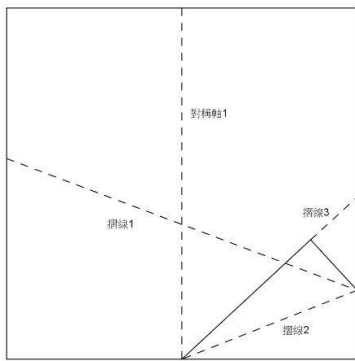


(3)

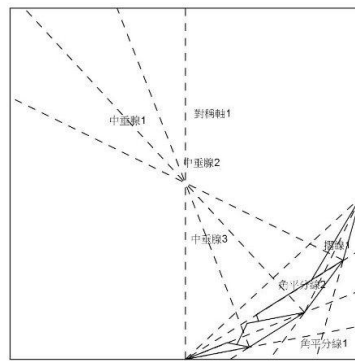


(4)

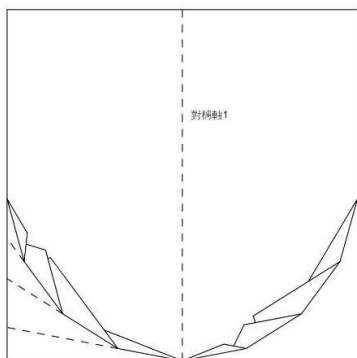
(七) 正十七邊形：頂點摺至對邊 $\frac{3}{8}$ 點，右下段摺圖



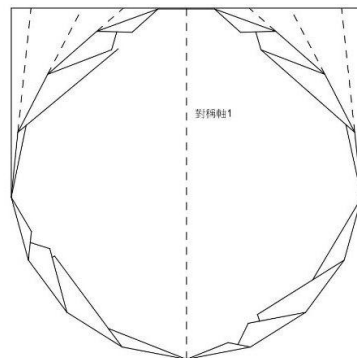
(1)



(2)



(3)



(4)

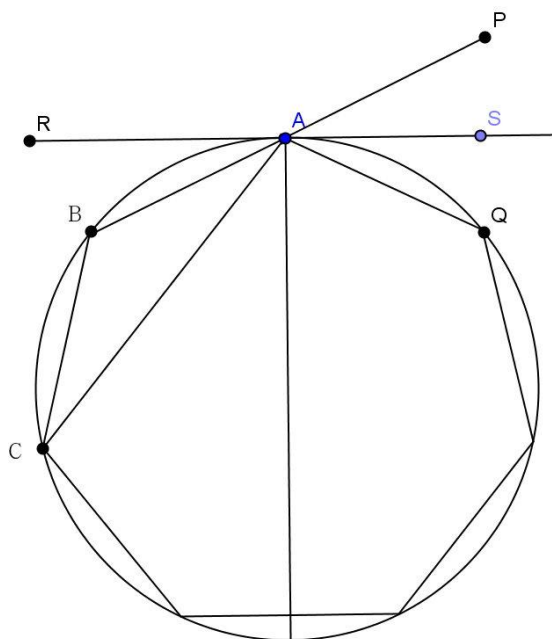
伍、 研究結果

針對摺紙結果，比較各摺紙的邊長、角度與正多邊形角度比較，其結果如下：

邊數	正 n 邊形單一內角	摺紙單一角		摺紙收尾角		誤差		摺紙邊長		收尾邊長		誤差	
		角度	個數	角度	個數			長度	邊數	長度	邊數		
3	60	60	3	60	0	0	0	0	17.15	3	17.15	0	0
4	90	90	4	90	0	0	0	0	21	4	21	0	0
5	108	107.63	4	109.47	1	0.37	1.47	0	11.56	3	12.08	2	0.52
6	120	120	6	120	0	0	0	0	8.57	6	8.57	0	0
7	128.57	128.66	5	128.35	2	0.09	0.22	0	9.32	6	9.43	1	0.11
8	135	135	8	135	0	0	0	0	8.70	8	8.70	0	0
9	140	139.33	7	142.36	2	0.67	2.36	0	7.38	8	6.32	1	1.06
11	147.27	147.56	9	145.99	2	0.28	1.28	0	5.91	10	6.47	1	0.56
12	150	150	12	150	0	0	0	0	3.98	12	3.98	0	0
13	152.31	152.41	11	151.73	2	0.10	0.58	0	5.05	12	5.29	1	0.24
15	156	155.62	13	158.47	2	0.38	2.47	0	4.47	14	3.44	1	1.03
17	158.82	158.66	15	160.03	2	0.16	1.20	0	3.90	16	3.41	1	0.49

由上表整理結果及摺圖過程發現：

- 一、由尺規作圖可完成 60° 、 90° 及其倍角或半角，在摺紙方面一樣可以完成。
- 二、正 $k * 2^n$ 邊形 (k 為 3、4 及大於 3 的奇數， n 為正整數) 可利用角平分線摺出所有對應圖形。
- 三、摺紙部分無法如同圓規作圖處處等長，是其限制，若允許摺紙有一定範圍的誤差，則以兩條相鄰對稱軸，即可摺出所有圖形。
- 四、以正方形一邊中點為頂點，摺紙第一摺線 (即第一決定角) 為正 n 邊形的外角 ($\frac{360}{n}$) 及 $\frac{m}{2}$ 倍 (m 為整數)，以正 7 邊形為例，第一決定點為 $\frac{360}{n}$ ，正 15 邊形第一決定點為 $\frac{360}{n} \times 2$ ，選點證明如下圖所示：



$$\angle PAQ \text{ 為外角} = \angle PAS + \angle SAQ = \frac{360}{n}$$

$$\angle PAS = \angle RAB \text{ (對頂角)}$$

$$\therefore \widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{AQ} \text{ (等弧)}$$

$$\therefore \angle RAB = \angle SAQ \text{ (弦切角)} = \angle BAC \text{ (圓周角)} = \frac{360}{2n}$$

第一決定角為 $\frac{360}{2n} \times [\frac{n+1}{4}]$ 由角平分線作法即可得到。

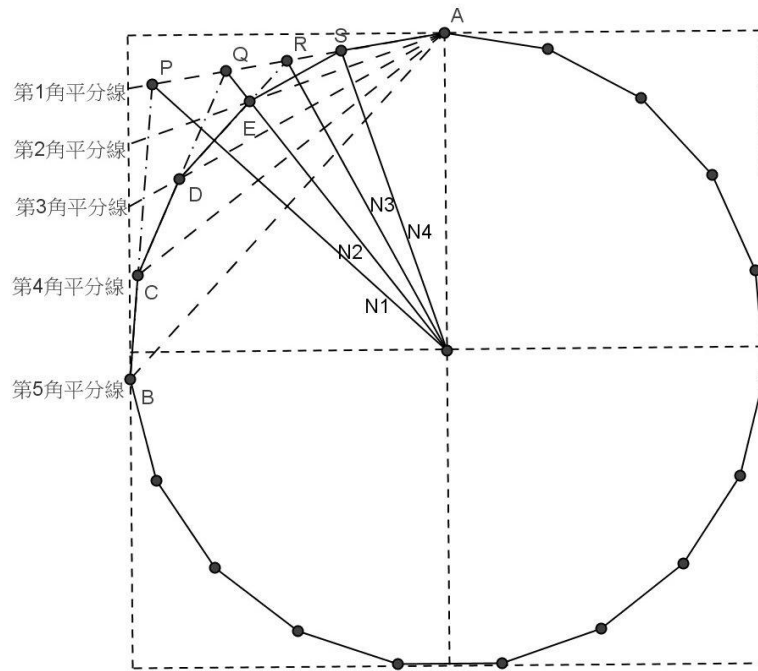
五、以正方形一邊中點為頂點，側邊 $[\frac{n+1}{4}]$ 為最外側對應頂點，為圖形第一決定點，以

正 7 邊形為例，第一決定點為 $[\frac{8}{4}] = 2$ ，正 13 邊形為 $[\frac{14}{4}] = 3$ ，正 17 邊形為 $[\frac{18}{4}] = 4$ ，正

19 邊形為 $[\frac{20}{4}] = 5$ ，其摺法為第 $[\frac{n+1}{4}]$ 線對第 1 線摺中垂線，第 $[\frac{n+1}{4}] - 1$ 線對第 1 線摺

中垂線，依序到第 2 線對第 1 線摺圖，即可依序完成 $\frac{1}{4}$ 部分摺圖，摺圖證明如下。

以正 19 邊形摺圖法為例：



N_1 、 N_2 、 N_3 、 N_4 分別為 \overline{AB} 、 \overline{AC} 、 \overline{AD} 、 \overline{AE} 的中垂線

$$\therefore \overline{AP} = \overline{PB}、\overline{AQ} = \overline{QC}、\overline{AR} = \overline{RD}、\overline{AS} = \overline{SE}$$

$$\angle SAD = 2\angle SA E = \angle R S E \text{ (外角)} \therefore \overline{SE} \parallel \overline{AD} \text{ (同位角相等)}$$

$$\angle RES = \angle RDA = \angle RAD = \angle R S E, \Delta RSE \text{ 為等腰三角形 } \overline{RS} = \overline{RE}$$

$$\text{則 } \overline{ED} = \overline{RD} - \overline{RE} = \overline{RA} - \overline{RS} = \overline{AS} = \overline{SE}$$

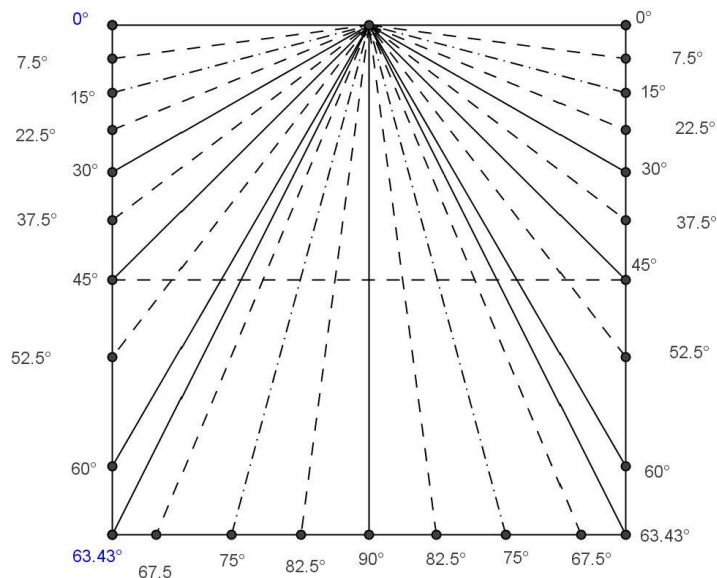
$$\text{同理, } \overline{QS} = \overline{QD}, \overline{PS} = \overline{PC}$$

$$\text{則 } \overline{BC} = \overline{AS} = \overline{SE} = \overline{ED} = \overline{DC} \text{ (得證)}$$

陸、 討論

由以上正 n 邊形摺法的研究，可以清楚的了解，摺出正 n 邊形可以固定的一種摺紙方法完成，其重點在於如何摺出正 n 邊形外角度數，正五邊形對角摺法是一種方式摺出誤差值較小的角度，透過幾何繪圖軟體，可以準確的判斷誤差值，再者，利用自製量角器(或以量角器)，計算出正多邊形外角，也可以簡單摺出正多邊形。

量角器設計原理是以正方形圖形，確定 45° (比例 1:1)， 30° 、 60° (以正三角形方式摺出)，其餘角度以角平分線即可摺出，更細的角度可以自行摺出，其圖形如下：



柒、 結論

透過摺紙活動，可以對線對稱圖形有更清楚的認知，以角平分線與中垂線的摺紙活動，在一定的誤差範圍內，是可以完成正多邊形的摺紙活動，如果搭配適當的工具(筆、直尺與量角器)，可以更精確的完成。

本研究探討能否利用一般紙張摺出正多邊形，答案是不能，但在合理的誤差範圍內及量角器工具，則可以最簡化的步驟完成所有的正多邊形摺紙。

捌、 參考資料及其他

圖書資料

1. 徐立民等人(民 99)。八下數學。新北市：康軒。
2. 徐立民等人(民 99)。九上數學。新北市：康軒。
3. 銀林浩(2002)。用摺紙來學數學。台北市：國際村。
4. 沖田浩(2006)。77 個好玩得停不下來的數學謎題。台北市：圓神。

網路資料

1. <http://www.mathland.idv.tw/fun/rn.htm>。尺規作圖正多邊形

【評語】 030412

本研究透過摺紙作出正多邊形的方法，並靈活運用對稱的原理，內容可以與國中課程的尺規作圖相呼應，既有趣又可供在課堂中動手操作的機會。

本研究在原創性方面仍可加強，此外，數學內容亦可增加，例如可以從摺紙作圖的公理系統出發，作出進一步的推理，以及與尺規作圖做比較與討論。