中華民國第 52 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030411

「三角形負責區域位置設置問題」之探討

學校名稱：宜蘭縣立國華國民中學

作者：	指導老師：
國三 黃士軒	沈志強
國三 吳書帆	吳秉鴻
國三 藍　皓	

關鍵詞：三角形、中垂線、面積三等分

「三角形負責區域位置設置問題」之探討

摘要

研究在一三角形上，要分配 P、Q、R 三點分別在頂點或三邊上(不可在同一邊，在同一邊則未能達到最好分工效率)，P、Q、R 三點所負責的區域爲「距離最近則劃分給誰」，要如何定位才能使 P、Q、R 三點負責的面積一樣大。我們先依序從正三角形、等腰三角形、等腰直角三角形、直角三角形以及特殊角度的順序做起。我們在交點上設幾個參數，找出重要交點作標，在計算的過程中用 Mathematica 找出參數解，最後再用多邊形面積公式計算區域面積找出解，並利用 GSP 作圖模擬。

壹、 研究動機:

有一次，當我們在做三角形等面積分割的題目時，突然想到可不可以把這個題目和「游泳池救生員」的科展結合起來，變成如何在一三角形的三邊上分別分配一個救生員，使得此三角形分割成三個等面積區域。我們想要知道哪些三角形會有一種解?兩種以上解?無限多解?無解? 最後我們再想辦法能不能得到最佳解，也就是各點的負責區域跟其他點相較之下是最短距離。

貳、 研究目的:

研究在一三角形上，要分配 P、Q、R 三點分別在頂點或三邊上(不可在同一邊，在同一邊則未能達到最好分工效率)，P、Q、R 三點所負責的區域爲「距離最近則劃分給誰」，要如何定位才能使 P、Q、R 三點負責的面積一樣大。

1. 定義出在直角坐標上以最長邊在(-1 , 0)、(1 , 0)之所有三角形。
2. 探討正三角形時，P、Q、R 三點所站位置之最佳解。
3. 探討在等腰三角形，R 點固定在原點時，P、Q 兩點的解。
4. 探討在等腰三角形，R 點不固定在原點時，P、Q 兩點的通解。
5. 探討直角三角形，R 點固定在原點時，P、Q 兩點的解。
6. 探討直角三角形，R 點不固定在原點時，P、Q 兩點的通解。
7. 探討任意三角形，R、P、Q 三點的通解。

參、 研究設備及器材:

GSP, Mathematica, Microsoft Office Excel, Microsoft Office Word

肆、 研究過程:

我們先依序從正三角形、等腰三角形、等腰直角三角形、直角三角形特殊角度、任意直角三角形的順序做起，最後再擴及任意三角形。我們在交點上設幾個參數。途中，利用 *GSP* 作圖模擬。利用三角函數找出重要交點作標，在計算的過程中用 *Mathematica* 找出參數解，最後再用多邊形面積公式計算區域面積。看 P、Q、R 三點在三角形上站的位子方式有幾組解(有可能無解、無限多組解)

為使研究易於進行，因此我們從特殊三角形—**正三角形**、**等腰三角形**、**直角三角形**討論起，並將三角形及 P、Q、R 三點”**座標化**”。

一、 定義所有三角形最長邊在(-1 , 0)、(1 , 0)：

首先，我們想找出所有三角形的表示法。

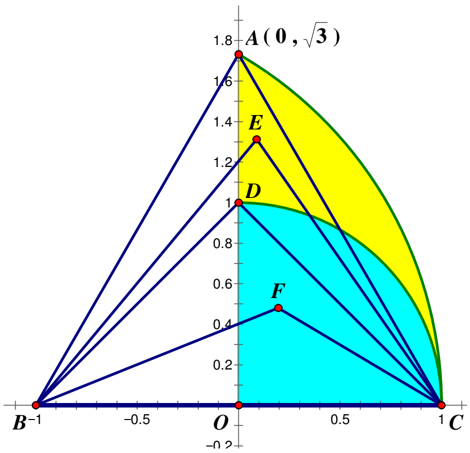
我們將三角形最長邊 $\overline{BC}$ 定義在 $B(-1,0)$、$C(1,0)$，利用**對稱性**及**相似形**，我們定義出所有的三角形範圍如圖(一)，也就是說，其他三角形皆可在此範圍內找出相似形，討論如下：

AC 弧：以 B 為圓心，$\overline{BC}$ 為半徑，所畫出之弧。

DC 弧：以 O 為圓心，$\overline{OC}$ 為半徑，所畫出之弧。

利用對稱性，我們只討論右邊區域。

1. **銳角三角形：**
   第三點落在黃色區域及 AC 弧上，則為銳角三角形，特別是 $\triangle ABC$ 為正三角形。
2. **直角三角形：**
   第三點落在 DC 弧上，則為直角三角形，特別是 $\triangle BDC$ 為等腰直角三角形。
3. **鈍角三角形：**
   第三點落在 DC 弧內(淡藍色區域)，則為鈍角三角形。



圖(一)

其它最長邊不在(-1 , 0)、(1 , 0)之三角形，皆可利用旋轉、翻轉及將最長邊放大縮小成 $\overline{BC}$，使得第三點落於我們所討論的區域內，也就是說，所有的三角形皆可表示成我們所討論區域內的相似形。

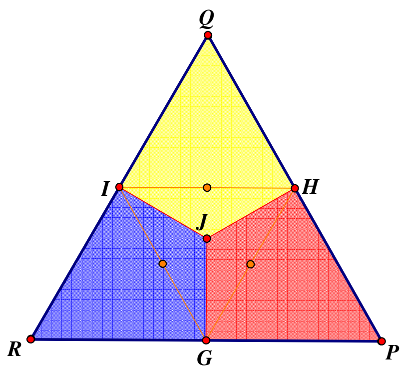
二、 正三角形：

我們知道正三角形時，當三點 P、Q、R 位在三頂點及在各邊中點必是其中一組解，甚至當我們把 P、Q、R 由下圖(二)或下圖(三)在邊上做等距移動時，如下圖(四)，P、Q、R 依然會是我們的一組解。這可利用簡單的全等性質證明此三個四邊形會全等，當然面積也會相等。

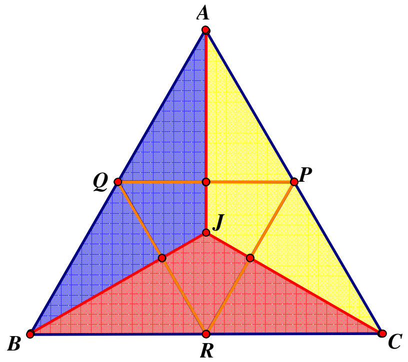
也就是說，正三角形時會有無限多組解。既是無限多組解，那是否我們可以來求出『最佳解』？因此我們定義了『最佳解』。

定義 1：所謂『最佳解』為 P、Q、R 三點離所負責區域範圍最遠之距離最短。

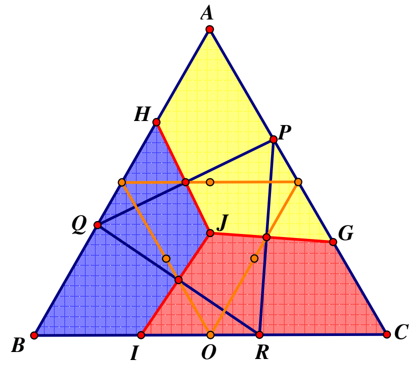
依照定義一，我們想找出正三角形的『最佳解』，且當找出 R 點，P、Q 兩點也隨之被決定，因此底下研究只針對 R 點研究。



圖(二)



圖(三)



圖(四)

研究 1：正三角形 ΔABC 三點頂座標為 $A\,(0,\sqrt{3})$、$B\,(-1,0)$、$C\,(1,0)$，當 R 點的座標為 $(\frac{1}{3},0)$ 為『最佳解』

證明： 我們知道 ΔPQR 之外新 J 點固定，且為 ΔABC 重心，故 J 為 $(\frac{\sqrt{3}}{3},0)$

當 R 點在頂點時，如圖(二)，負責範圍內最遠距離為 $\overline{RJ}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

當 R 點在 $\overline{BC}$ 中點時，如圖(三)，負責範圍內最遠距離為 $\overline{RC}=1$

$\Theta\ \overline{RJ}>\overline{RC}$，因此最佳解不會在頂點

當 R 點在 $\overline{BC}$ 中點時 $\overline{RC}=1$、$\overline{RJ}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

相較於當 R 點在 $\overline{BC}$ 中點，若 R 點往 C 點移動時，如圖(四)

$\overline{RC}$ 在減少，而 $\overline{RJ}$ 在增加，因此當 $\overline{RJ}=\overline{RC}$ 時即為所求

設 R 點座標 $(r,0)$

則 $r^2+(\frac{\sqrt{3}}{3})^2=(r-1)^2$，得 $r=\frac{1}{3}$

另外，$\overline{RI}=\overline{RG}=\frac{1}{3}$ 故當 R 點的座標為 $(\frac{1}{3},0)$ 為『最佳解』

三、 等腰三角形：

接著我們探討等腰三角形，**最長邊**$\overline{BC}$定義在$B(-1,0)$、$C(1,0)$， 則A點有兩種可能性：

1.A 點在 y 軸上：為保持最長邊為$\overline{BC}$，因此A點的y座標必小於等於$\sqrt{3}$

2.A 點在AC弧上：為使研究方便，我們利用相似形，必可找到一三角形旋轉後與其相似且底邊為$\overline{BC}$，此時A點的y座標必大於等於$\sqrt{3}$

依照上述兩點，我們定義等腰三角形的底為$\overline{BC}$，頂點**A 點座標($0,a$)，$a>0$**。

(一)將一點固定在底邊中點($0,0$)

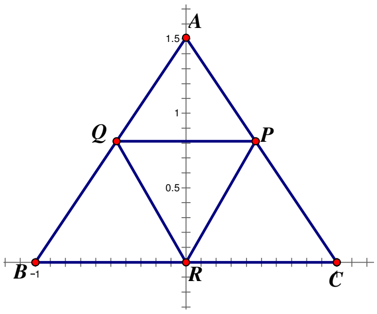
要找出P、Q、R三點，因為等腰三角形的對稱性，我們**先將R點定在($0,0$)**，看是否有解，若有解再找出是否有其他解。想法及作法敘述如下：

1. 因為P、Q兩點必須分別在$\overline{AC}$、$\overline{AB}$上，利用參數式可算出兩點座標P、Q的參數。

2. 而為使「距離最近則劃分給誰」，因此作$\overline{RP}$、$\overline{RQ}$之中垂線。

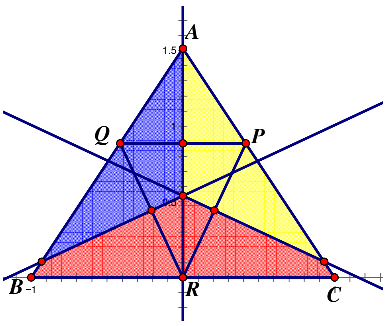
3. 再利用使三位負責的面積一樣大，列出方程式來找出P、Q兩點實際座標。

因此，我們利用參數式假設 **P 點座標(p , $a-ap$)**，又由等腰三角形的對稱性.，**Q 點座標應為($-p$, $a-ap$)**，如圖(五)。

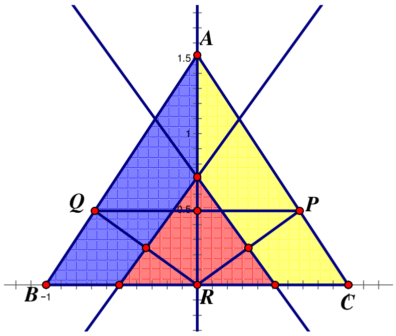


圖(五)

接著我們利用 *GSP* 去模擬，當我們移動P點時，$\overline{RP}$、$\overline{RQ}$之中垂線有可能分別交ΔABC於$\overline{AC}$、$\overline{AB}$或分別交$\overline{BC}$，如圖(六)、圖(七)，這對計算負責的面積時會有不一樣的公式，因此我們先探討何時會交於$\overline{AC}$、$\overline{AB}$，何時會交於$\overline{BC}$。因為對稱，因此我們只探討$\overline{RP}$之中垂線。



圖(六)



圖(七)

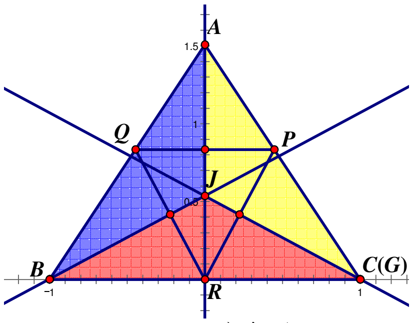
研究 2：等腰ΔABC 三點頂座標爲 $A\,(\,0\,,a\,)$、$B\,(\,-1\,,0\,)$、$C\,(\,1\,,0\,)$，若 P 點座標 $(\,p\,,a\text{-}ap\,)$，則當 $0<p<1-\sqrt{\dfrac{1}{1+a^2}}$ 時，$\overline{RP}$ 之中垂線交ΔABC 於 $\overline{AC}$，當 $1-\sqrt{\dfrac{1}{1+a^2}}<p<\sqrt{\dfrac{a}{1+a^2}}$ 時，$\overline{RP}$ 之中垂線交ΔABC 於 $\overline{BC}$。

證明：Θ $\overline{AC}$ 必大於 $\overline{RC}$，$\therefore P$ 在 $\overline{AC}$ 上必存在某一點使得 $\overline{PC}=\overline{RC}$

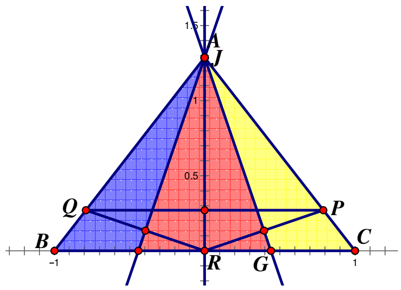
此時 $\overline{RP}$ 之中垂線 $\overline{JG}$ 會通過 C 點，如圖(八)

若 $\overline{PC}\geq\overline{RC}$，則 $\overline{JG}$ 會交於 $\overline{AC}$，若 $\overline{PC}\leq\overline{RC}$，則 $\overline{JG}$ 會交於 $\overline{BC}$

又當 $\overline{PA}>\overline{AR}$，$\overline{JG}$ 與 y 軸交點會高於 A 點，因此需加一個條件 $\overline{PA}\leq\overline{AR}$，如圖(九)



圖(八)



圖(九)

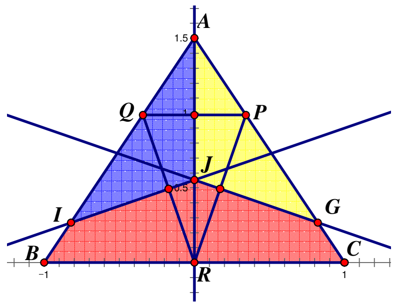
1. 若 $\overline{PC}\geq\overline{RC}$，如圖(十)

   則 $(p-1)^2+(a-ap)^2\geq 1$

   得 $p\leq 1-\sqrt{\dfrac{1}{1+a^2}}$

   又因爲 $p\geq 0$

   所以當 $0\leq p\leq 1-\sqrt{\dfrac{1}{1+a^2}}$，則 $\overline{JG}$ 會交於 $\overline{AC}$



圖(十)

2. 若 $\overline{PC}\leq\overline{RC}$，如圖(十一)

   則　$(p-1)^2+(a-ap)^2\leq 1$

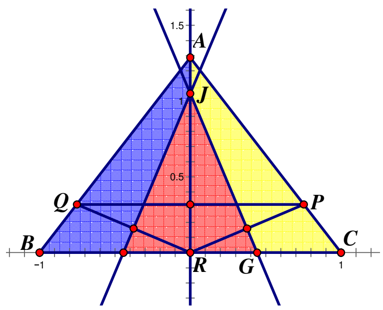
   得　$1-\sqrt{\dfrac{1}{1+a^2}}\leq p\leq 1+\sqrt{\dfrac{1}{1+a^2}}$ ……(1)

   又 $\overline{PA}\leq\overline{AR}$

   則 $p^2+(a-ap-a)^2\leq a^2$

   得 $-\sqrt{\dfrac{a^2}{1+a^2}}\leq p\leq\sqrt{\dfrac{a^2}{1+a^2}}$ ……(2)

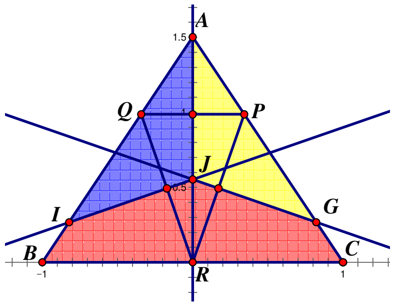
   由(1)、(2)得知當 $1-\sqrt{\dfrac{1}{1+a^2}}\leq p\leq\sqrt{\dfrac{a^2}{1+a^2}}$，則 $\overline{JG}$ 會交於 $\overline{BC}$



圖(十一)

當我們確定 $\overline{RP}$、$\overline{RQ}$ 之中垂線與ΔABC 的交點後，我們開始來求所有等腰三角形的解。

1. 當 $\overline{RP}$ 之中垂線與ΔABC 交於 $\overline{AC}$ ：如圖(十二)，



圖(十二)

(1)我們先求出 $\overline{RP}$ 及其中垂線 $\overline{JG}$ 的直線方程式，再

解出 $\overline{AC}$ 、 $\overline{JG}$ 的交點座標 $G(G_x, G_y)$，其中

$G_x = \dfrac{p^2 + a^2(-1+p^2)}{2(a^2(-1+p)+p)}$，$G_y = \dfrac{a((2-p)p - a^2(-1+p)^2)}{2(a^2(-1+p)+p)}$，

利用對稱性可知 $I(I_x, I_y)$，

其中 $I_x = -\dfrac{p^2 + a^2(-1+p^2)}{2(a^2(-1+p)+p)}$，$I_y = \dfrac{a((2-p)p - a^2(-1+p)^2)}{2(a^2(-1+p)+p)}$

(2)求出 $\overline{JG}$ 、 $\overline{JI}$ 的交點 $J(J_x, J_y)$，其中 $J_x=0$，$J_y = \dfrac{p^2+(a-ap)^2}{2(a-ap)}$

(3)因為所負責區域面積需相等知 $\Delta AJG=\dfrac{1}{3}\Delta ABC$，利用多邊形面積公式

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & J_x & G_x & 0 \\ a & J_y & G_y & a \end{vmatrix} = \frac{1}{3}a \text{，化簡後得} \frac{(p^2 + a^2(-1+p^2))^2}{8a(-1+p)(a^2(-1+p)+p)} = \frac{1}{3}a$$

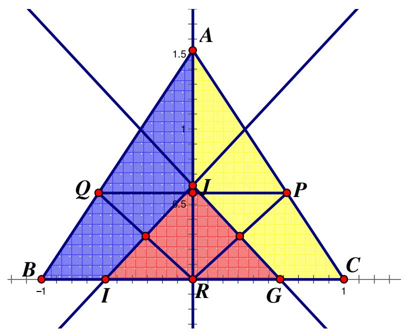
2. 當 $\overline{RP}$ 之中垂線與ΔABC 交於 $\overline{BC}$ ：如圖(十三)

(1)如同上述方法，我們可解出 $\overline{BC}$ 、 $\overline{JG}$ 的交點座標 $G(G_x, G_y)$，其中

$G_x = \dfrac{a^2(-1+p)^2 + p^2}{2p}$，$G_y=0$，利用對稱性可知 $I(I_x, I_y)$，其中

$I_x = -\dfrac{a^2(-1+p)^2 + p^2}{2p}$，$I_y=0$

(2)求出 $\overline{JG}$ 、 $\overline{JI}$ 的交點 $J(J_x, J_y)$，其中 $J_x=0$，$J_y = \dfrac{p^2+(a-ap)^2}{2(a-ap)}$



圖(十三)

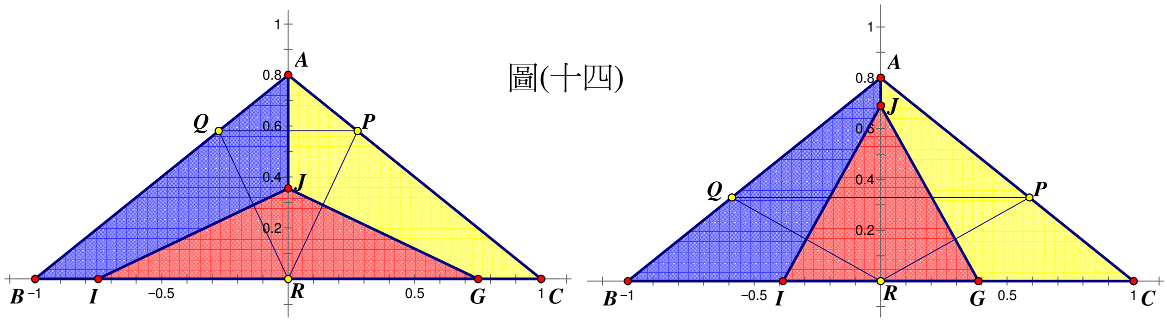
(3)為求運算方便，此次改解$\Delta IJG=\dfrac{1}{3}\Delta ABC$，利用多邊形面積公式

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} G_x & J_x & I_x & G_x \\ G_y & J_y & I_y & G_y \end{vmatrix} = \frac{1}{3}a \text{，化簡後得} \frac{(a^2(-1+p)^2 + p^2)^2}{4a(1-p)p} = \frac{1}{3}a$$

我們利用 Mathematica 求解，並以**研究 2** 中 p 的範圍協助判斷解是否正確，將 a 帶入數值後得到 P 點座標(近似值)，製作成表格如下：

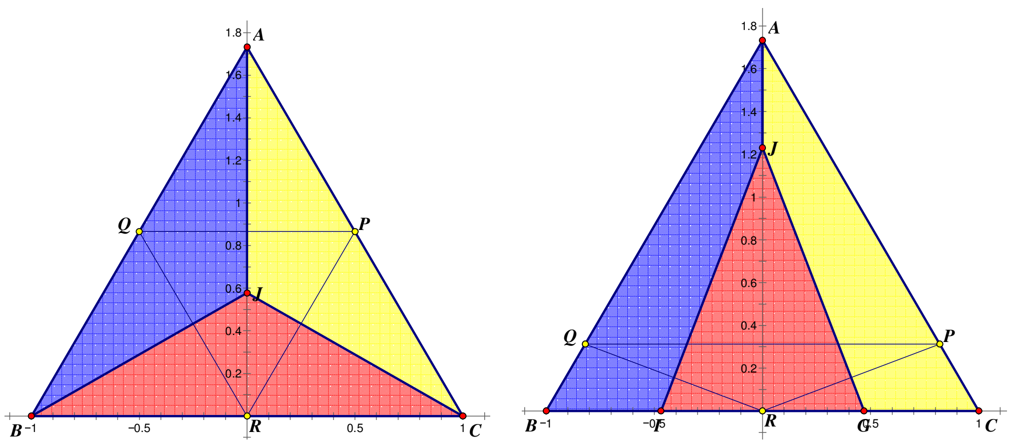
	$\overline{IG}$ 交於 $\overline{BC}$				$\overline{IG}$ 交於 $\overline{AC}$	
a	$P_x(1)$	$P_y(1)$	$P_x(2)$	$P_y(2)$	P_x	P_y
0.2	0.0287036	0.19425928				
0.4	0.101482	0.3594072				
0.6	0.19067	0.485598	0.509713	0.2941722		
0.8	0.274471	035804232	0.588356	0.3293152		
1	0.344141	0.655859	0.655859	0.344141		
1.2	0.399651	0.7204188	0.712864	0.3445632		
1.4	0.44389	0.778554	0.759948	0.3360728		
1.6	0.479777	0.8323568	0.79826	0.322784		
$\sqrt{3}$	0.5	0.866025404	0.819448	0.312725237	0.5	0.866025404
2	0.534702	0.854309			0.532655	0.93469
4	0.6726	0.956221			0.610751	1.556996

從表格中我們發現，在 a 爲某些值時，$\overline{RP}$ 之中垂線與ΔABC 交於 $\overline{BC}$ 且 P 點座標會有兩組解。我們將所得的結果在 GSP 上繪圖，發現某些值確實會有兩組解，如圖(十四)。



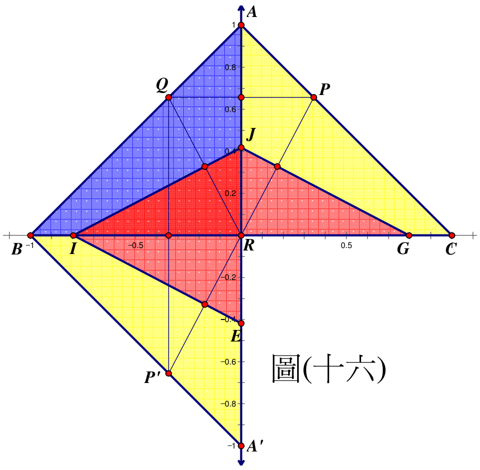
圖(十四)

甚至連正三角形都有兩組解，如圖(十五)



圖(十五)

藉由 GSP 的模擬，我們觀察到若以 R 點爲圓心 ΔARC 旋轉 180^0，讓 C 點和 B 點重合，得到新的三角形 $\Delta ABA'$，如圖(十六)，則當我們透過旋轉及放大縮小 $\frac{1}{\overline{AA'}}$，$\Delta ABA'$會與最長邊 $\overline{BC}$ 定義在 $B(-1,0)$、$C(1,0)$ 之等腰三角形重合，屆時 P'、Q 即爲另一組解。



圖(十六)

另外，我們發現當 A 點之 y 座標 $a>\sqrt{3}$ 時，$\overline{RP}$ 之中垂線與 ΔABC 交於 $\overline{BC}$ 有一組解，而 $\overline{RP}$ 之中垂線與 ΔABC 交於 $\overline{AC}$ 時有另一組解。但因爲我們主要是討論最長邊 $\overline{BC}$ 定義在 $B(-1,0)$、$C(1,0)$ 之等腰三角形，因此這部分目前暫不討論。

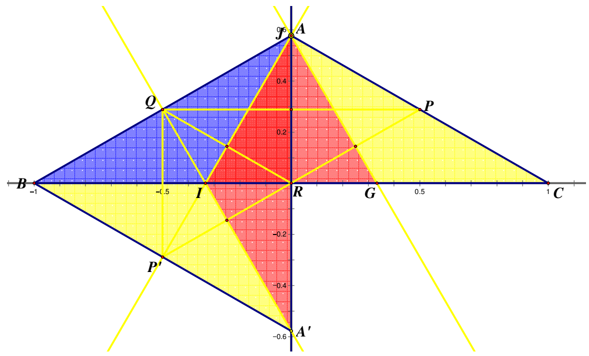
進一步，我們希望能確切知道當 a 在什麼範圍會有兩組解？因此我們做了底下的研究。

研究 3：等腰 ΔABC 三點頂座標爲 $A(0,a)$、$B(-1,0)$、$C(1,0)$，若 $\frac{\sqrt{3}}{3}\le a\le\sqrt{3}$，則 $\overline{RP}$ 之中垂線與 ΔABC 交於 $\overline{BC}$，且 P 點座標會有兩組解。

證明： 藉由之前對圖(十六)的觀察，可以分兩個部分討論。

1.求 a 的範圍爲何時，使用 $\overline{RP}$ 之中垂線與 ΔABC 交於 $\overline{BC}$ 之公式。

如圖(十七)，若要使用 $\overline{RP}$ 之中垂線與 ΔABC 交於 $\overline{BC}$ 之公式，則中垂線 $\overline{JG}$ 與 $\overline{BC}$ 交點的臨界點爲 C 點，



圖(十七)

(1)利用參數式假設 P 點座標及 $\overline{PC}=\overline{RC}$，可將 P 點座標以 a 來表示，

P 點爲 $P(P_x, P_y)$，其中

$$P_x=1-\sqrt{\frac{1}{1+a^2}}\text{，}\quad P_y=a-a(1-\sqrt{\frac{1}{1+a^2}}))\text{，}$$

又因爲對稱性，因此 Q 點爲 $Q(Q_x, Q_y)$，其中

$$Q_x=-1+\sqrt{\frac{1}{1+a^2}}\text{，}Q_y=a-a(1-\sqrt{\frac{1}{1+a^2}})\text{。}$$

(2)求出$\overline{IJ}$與$\overline{JG}$之交點，$J(J_x, J_y)$，其中$J_x=0$，$J_y=\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{1}{1+a^2}}}{a\sqrt{\dfrac{1}{1+a^2}}}$

(3)又因爲$\Delta IJG=\dfrac{1}{3}\Delta ABC$，利用多邊形面積公式

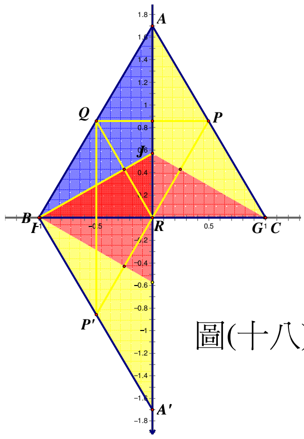
$\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} G_x & J_x & I_x & G_x \\ G_y & J_y & I_y & G_y \end{vmatrix}=\dfrac{1}{3}a$，化簡後得 $\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{1}{1+a^2}}}{a\sqrt{\dfrac{1}{1+a^2}}}=\dfrac{1}{3}a$

解得 $a=\pm\sqrt{3}$(負不合)

所以，當$a\le\sqrt{3}$時，則$P_x\le 1-\sqrt{\dfrac{1}{1+a^2}}$

，所形成三角形面積會$>\dfrac{1}{3}\Delta ABC$，若要使

$\Delta IJG=\dfrac{1}{3}\Delta ABC$，因此$\overline{PR}$之中垂線必交於$\overline{BC}$。



圖(十八)

2. $\overline{RP}$之中垂線與$\overline{RQ}$之中垂線交點需在ΔABC內。

如圖(十八)，若要使$\overline{RP}$之中垂線與$\overline{RQ}$之中垂線交點需在ΔABC內，則交點的臨界點爲A點，

(1)利用參數式假設P點座標及$\overline{PA}=\overline{AR}$，其餘做法與第1點相似

得P點爲$P(P_x, P_y)$，其中$P_x=\sqrt{\dfrac{a^2}{1+a^2}}$，$P_y=a-a\sqrt{\dfrac{a^2}{1+a^2}}$

Q點爲$Q(Q_x, Q_y)$，其中$Q_x=-\sqrt{\dfrac{a^2}{1+a^2}}$，$Q_y=a-a\sqrt{\dfrac{a^2}{1+a^2}}$

(2)又因爲$1-\sqrt{\dfrac{1}{1+a^2}}<\sqrt{\dfrac{a^2}{1+a^2}}$，因此$I$點和$G$點必交於$\overline{BC}$，而$J(J_x, J_y)$，其中$J_x=0$，$J_y=1$，因此可求出$I$點和$G$點，

$I(I_x, I_y)$，其中

$$Ix=\frac{1}{2\left(p^2+a^2(-1+p^2)\right)}\left(-2(a^2)^{3/2}\sqrt{1+a^2}-2a^4(-1+p)+2(a^2)^{3/2}\sqrt{1+a^2}p+\sqrt{a^2}\sqrt{1+a^2}p^2+2p^3+a^2p(-3+2p^2)\right)$$

$I_y=0$

$G(G_x, G_y)$，

$Gx=$

$$-\frac{1}{2(p^2+a^2(-1+p^2))}(-2(a^2)^{3/2}\sqrt{1+a^2}-2a^4(-1+p)+2(a^2)^{3/2}\sqrt{1+a^2}p+\sqrt{a^2}\sqrt{1+a^2}p^2+2p^3+a^2p(-3+2p^2))$$

$G_y=0$

(3)又因爲$\Delta IJG=\frac{1}{3}\Delta ABC$，利用多邊形面積公式

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} G_x & J_x & I_x & G_x \\ G_y & J_y & I_y & G_y \end{vmatrix}=\frac{1}{3}a$$

$$\frac{1}{2(p^2+a^2(-1+p^2))}(-2(a^2)^{3/2}\sqrt{1+a^2}-2a^4(-1+p)+2(a^2)^{3/2}\sqrt{1+a^2}p+\sqrt{a^2}\sqrt{1+a^2}p^2+2p^3+a^2p(-3+2p^2))\geq\frac{1}{3}$$

化簡解得 $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ (負不合)

所以，當$a\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$時，則 $P_x\geq\sqrt{\frac{a^2}{1+a^2}}$，所形成三角形面積會$>\frac{1}{3}\Delta ABC$，

$\overline{RP}$之中垂線與$\overline{RQ}$之中垂線交點在ΔABC內

故$\frac{\sqrt{3}}{3}\leq a\leq\sqrt{3}$，則$\overline{RP}$之中垂線與$\Delta ABC$交於$\overline{BC}$，且 P 點座標會有兩組解

現在我們知道，當固定 R 在$(0,0)$時會有一、二組解，如下表：

	解的個數
$a<\frac{\sqrt{3}}{3}$	1 個($\overline{PR}$之中垂線交於$\overline{BC}$)
$\frac{\sqrt{3}}{3}\leq a\leq\sqrt{3}$	2 個($\overline{PR}$之中垂線皆交於$\overline{BC}$)
$a>\sqrt{3}$	2 個($\overline{PR}$之中垂線一組交於$\overline{BC}$，一組交於$\overline{AC}$)

但等腰三角形是否有其他組解呢？我們希望能得到等腰三角形的通解。

(二) 等腰三角形通解

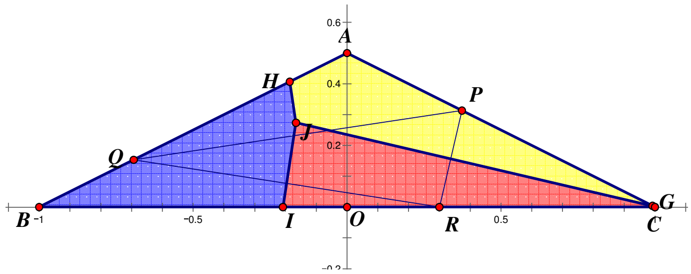
爲尋找等腰三角形其它解，我們讓 R 點在 $\overline{BC}$ 上移動，而由於等腰三角形的對稱性，因此我們只討論 R 點在原點右邊的情況。也因爲 R 點不在原點上，因此 P、Q 兩點或許不再對稱於 y 軸，這將使研究變得較複雜。

和之前做法一樣，我們先探討 $\overline{RP}$、$\overline{RQ}$ 之中垂線何時會交於 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$，何時會交於 $\overline{BC}$，且 $\overline{PQ}$ 之中垂線何時會交於 $\overline{AC}$，何時會交於 $\overline{AB}$。

我們先定義 $\overline{RP}$、$\overline{PQ}$、$\overline{RQ}$ 之中垂線分別交 ΔABC 於 G、H、I。又因爲當 R 往右移動時 G、H、I 三點會做逆時針移動，因此我們分別探討不同情況的影響，如下：

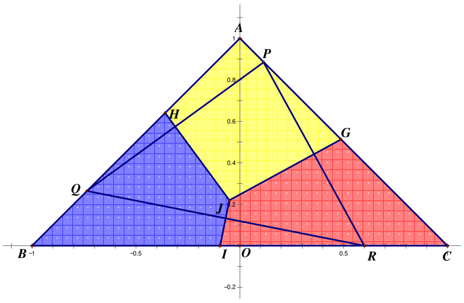
1. 對 I,G 點影響

(1)若 $a<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，在 r=0 有 1 解，$\overline{PR}$ 之中垂線交於 $\overline{BC}$。當 R 往右移一定距離後 $\overline{PR}$ 之中垂線會交於 $\overline{AC}$，如圖(十九)，因此我們利用**研究 2** 的方法，假設 G 點交於 C 點時，求出 R 的座標，如附錄 1，即可求出 R 點對 I,G 點影響。

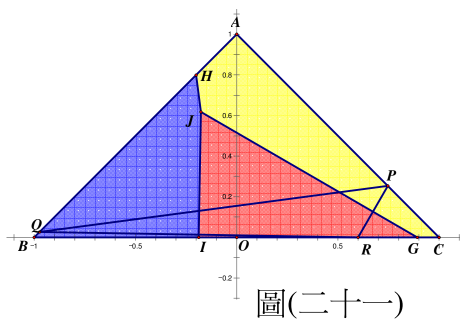


圖(十九)

(2) 若 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le a\le\sqrt{3}$，在 r=0 有 2 解，$\overline{PR}$ 之中垂線皆交於 $\overline{BC}$。當 R 往右移一定距離後其中一解 $\overline{PR}$ 之中垂線會交於 $\overline{AC}$，如圖(二十)中 I、G 與 I'、G'，因此其中一組 P'、Q' 的範圍值求法亦如附錄 1，而另一解 $\overline{PR}$ 之中垂線會一直交於 $\overline{BC}$，而另外一組 P、Q 會因爲 Q 點之在極限值時(如下**研究 4**)，G 點會交於 $\overline{BC}$，因此其 I,G 點永遠交於 $\overline{BC}$，如圖(二十一)



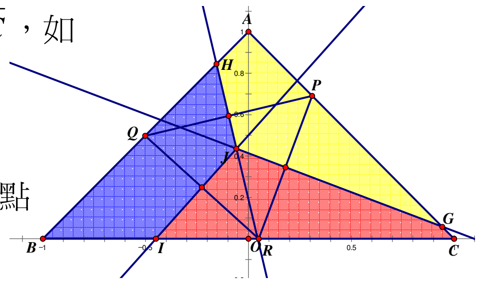
圖(二十)



圖(二十一)

2. 對 H 點影響

(1)當 $R(r,0)$，r 爲正數，H 點會交於 $\overline{AB}$。反之，r 爲負數，H 點會交於 $\overline{AC}$，如圖(二十二)



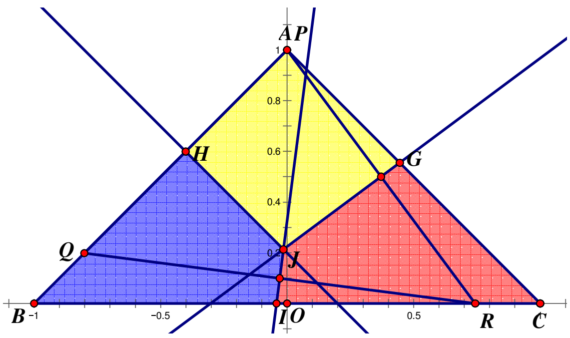
圖(二十二)

由此我們可以整理出下列列出表格

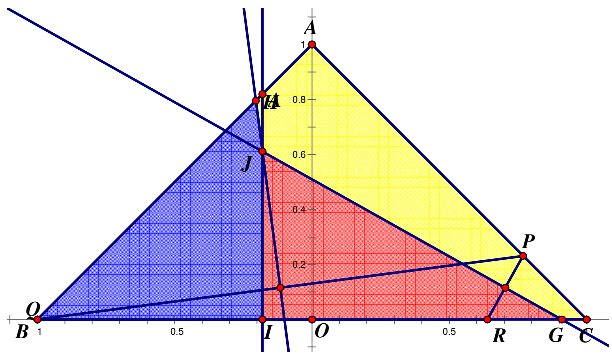
	解數量	I,G 點影響	H 點影響
$a<\frac{\sqrt{3}}{3}$	1 個	永遠交於 $\overline{BC}$	$r>0$，$Hx<0$ $r<0$，$Hx>0$
$\frac{\sqrt{3}}{3}\le a\le\sqrt{3}$	2 個	永遠交於 $\overline{BC}$ R 向右移動一段距離後，$\overline{JG}$ 會交於 $\overline{AC}$	$r>0$，$Hx<0$ $r<0$，$Hx>0$
$a>\sqrt{3}$	2 個	永遠交於 $\overline{BC}$ R 向右移動一段距離後，$\overline{JI}$ 會交於 $\overline{BC}$	$r>0$，$Hx<0$ $r<0$，$Hx>0$

當我們求出 I,G,H 點交點影響後，藉由 GSP 模擬，我們發現到當 r 超過某一數值後，便無解，因此，我們接著探討有解的範圍值。

1. 首先，我們發現到，因爲等腰三角形的對稱性，因此我們只要討論當 R 向右移動時的可能，會產生無解的情形有兩種，分別爲：
   (1) $P_x<0$ 時，則 P 點超出三角形，無解，因此 $P(0,1)$時，能找到 R 的最大極限值。如圖(二十三)。
   (2) $Q_x<0$ 時，則 Q 點超出三角形，無解，因此 $Q(-1,0)$時，能找到 R 的最大極限值。如圖(二十四)。



圖(二十三)



圖(二十四)

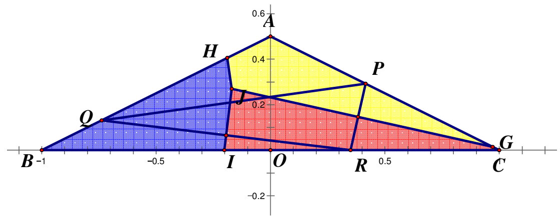
2. 接著，分別探討 $A(0,a)$在不同範圍時會有不同情況：

(1) 當 $a<\frac{\sqrt{3}}{3}$時，有 1 解，如圖(二十五)

當 $a<\frac{\sqrt{3}}{3}$時，I,G 點會因爲 R 值而有所影響，分別代入兩種超出範圍，

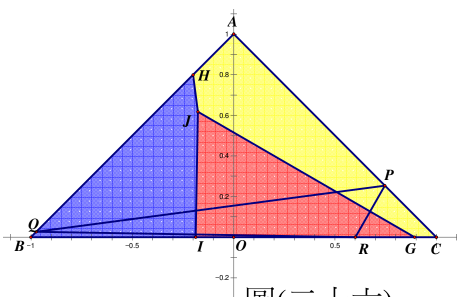
當 $Q_x=-1$ 時，因爲 P 點會超出$\overline{AC}$，因此當

$P_x=0$ 時，爲 $a<\frac{\sqrt{3}}{3}$時的極值

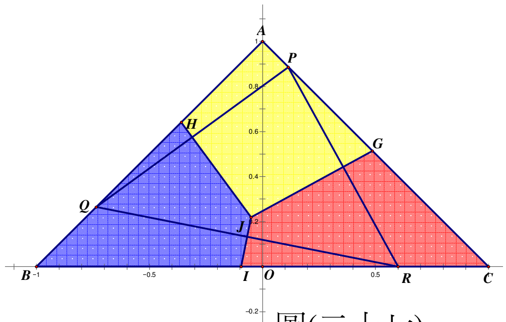


圖(二十五)

(2) 當 $\frac{\sqrt{3}}{3}\le a\le\sqrt{3}$時，有 2 解，如圖(二十六)、圖(二十七)



圖(二十六)



圖(二十七)

其中一解 I,G 點永遠交於$\overline{BC}$，若分別代入兩種超出範圍，

當 $P_x=0$ 時，因爲 Q 點會超出$\overline{AB}$，因此當 $Q_x=-1$ 時，爲$\frac{\sqrt{3}}{3}\le a\le\sqrt{3}$時的極值

另一解 I,G 點會因爲 R 值而有所影響，若分別代入兩種超出範圍，

當 $Q_x=-1$ 時，因爲 P 點會超出$\overline{AC}$，因此當 $P_x=0$ 時，爲$\frac{\sqrt{3}}{3}\le a\le\sqrt{3}$時的極值

由上，可整理出表格

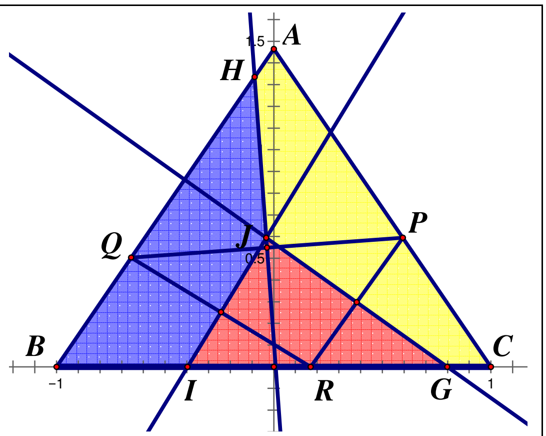
	I,G 點永遠交於$\overline{BC}$	I,G 點因 R 值有影響
$a<\frac{\sqrt{3}}{3}$		$Px=0$ 時有極端值
$\frac{\sqrt{3}}{3}\le a\le\sqrt{3}$	$Qx=-1$ 時有極端值	$Px=0$ 時有極端值

有了以上的討論，我們確定了解所有所有等腰三角形通解的步驟如下：

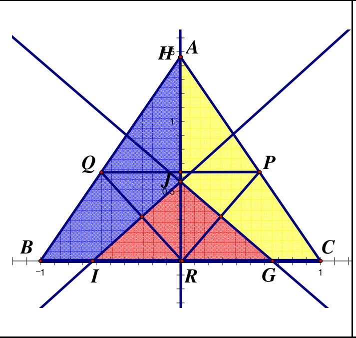
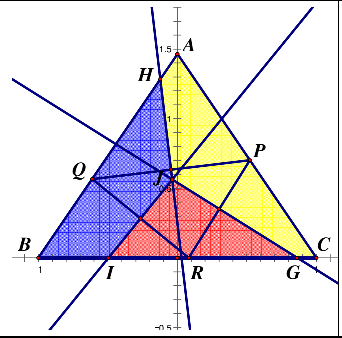
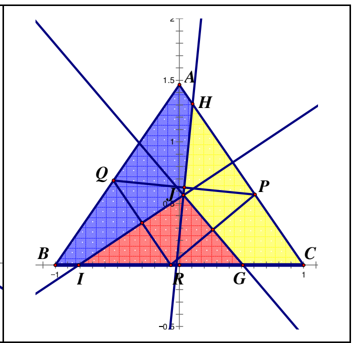
確定$\overline{RP}$、$\overline{RQ}$、$\overline{PQ}$之中垂線與ΔABC的交點後，即可開始求 P、Q 兩點的座標，其做法與一般等腰三角形 R 點在原點時求 P 點的座標方法類似，因此不再此贅述。但由於 P 點座標$(p\ ,\ -ap+a\ )$、Q 點座標$(q,\ aq+a)$有兩個參數，因此求出各點之座標也相對複雜，且在最後求解時需解聯立方程式。整理之表格如下：

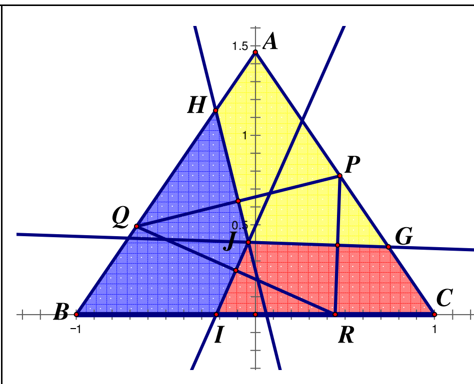
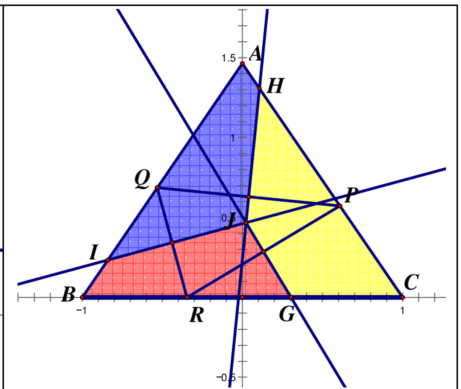
令所求 R 點座標的範圍極值爲$(\ t\ ,\ 0\ )$，我們分兩部分討論：

(一)當 I,G 點永遠交於$\overline{BC}$

圖形	
範圍	$a>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$時，任意 r
I點位置	交於$\overline{BC}$
G 點位置	交於$\overline{BC}$
H 點位置	若 $r>0$，交於$\overline{AB}$。若 $r>0$，交於$\overline{AC}$

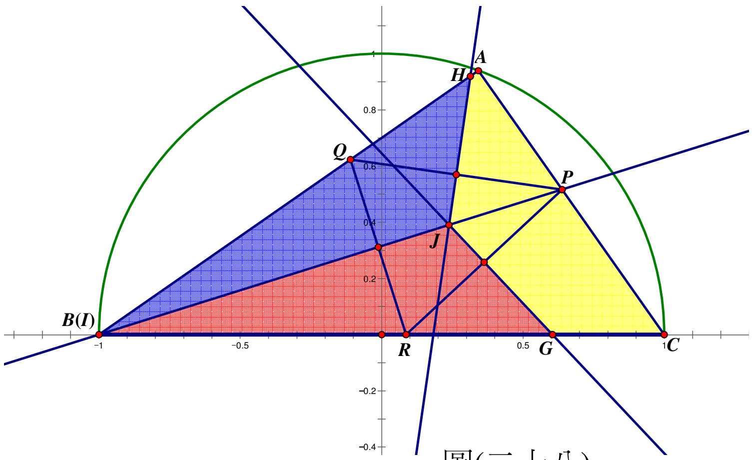
(二) I,G 點因 R 值有影響

圖形			
範圍	$a\le\sqrt{3}$ 時，$r=0$	$a\le\sqrt{3}$ 時，$0<r\le t$	$a\le\sqrt{3}$ 時，$-t\le r<0$
I 點位置	交於 $\overline{BC}$	交於 $\overline{BC}$	交於 $\overline{BC}$
G 點位置	交於 $\overline{BC}$	交於 $\overline{BC}$	交於 $\overline{BC}$
H 點位置	交於 A 點	交於 $\overline{AB}$	交於 $\overline{AC}$

圖形		
範圍	$a\le\sqrt{3}$ 時，$t<r<1$	$a\le\sqrt{3}$ 時，$-1<r<t$
I 點位置	交於 $\overline{BC}$	交於 $\overline{AB}$
G 點位置	交於 $\overline{AC}$	交於 $\overline{BC}$
H 點位置	交於 $\overline{AB}$	交於 $\overline{AC}$

四、直角三角形：

接著我們探討直角三角形，定義$\overline{BC}$爲最長邊，B 座標爲(-1 , 0)，C 座標爲(1 , 0)，有別於上述等腰三角形利用邊長來定義其座標，我們爲了方便觀察及套用至所有直角三角形，因此我們以角度來定義其座標，首先定 **A 點座標**爲$(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$，我們假設 P、Q、R 分別在$\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 、$\overline{BC}$上，並做$\overline{PQ}$ 、$\overline{QR}$ 、$\overline{PR}$三線段之中垂線，如圖(二十八)。首先我們先探討等腰直角三角形，藉此與原本的等腰三角形做法比較、驗證。



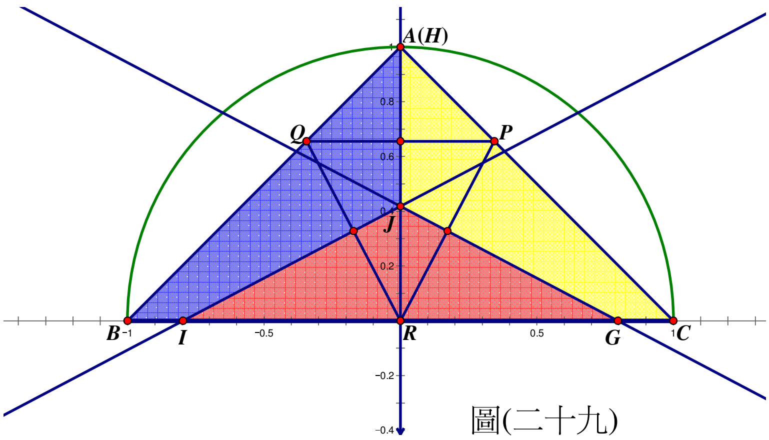
圖(二十八)

等腰直角三角形

在等腰三角形裡我們是以邊長關係來定義其點座標，現在我們要用角度來定義，先定$\angle QBR = \theta = 45^{\circ}$，依照上述方法操作。首先我們知道等腰直角三角形應有兩解，因此我們先分開求範圍值後再一起探討。之後令 P 點座標爲$(p, \sin 2\theta(p-1)/(\cos 2\theta - 1))$ 、Q 點座標爲$(q, \sin 2\theta(q+1)/(\cos 2\theta + 1))$ 、R 點座標爲 (t , 0)

等腰直角三角形第一組解

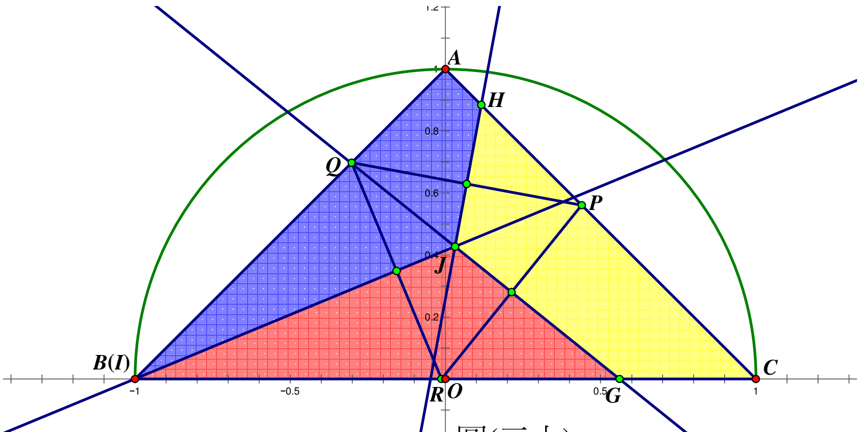
爲了要知道三中垂線分別交ΔABC於何種線段上，我們要先求出 t 的範圍值：
定義 H 點於 A 點上，如圖(二十九)



圖(二十九)

令 H 點座標爲 $(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$，如此一來可將 P 點及 Q 點的兩個參數化爲一個，我們假設 Q 點參數爲 $(q, \sin 2\theta(q+1)/(\cos 2\theta+1))$，藉由 $\overline{HQ}=\overline{HP}$ 我們得知 P 點參數爲 $(-q, \sin 2\theta(-q-1)/(\cos 2\theta-1))$，根據等腰三角形研究發現 I 點與 G 點的位在 x 軸上，利用 $\overline{IQ}=\overline{IR}$ 求得 I 座標，$\overline{GP}=\overline{GR}$ 求得 G 座標，之後利用多邊形面積公式列出聯立方程式求出 q 值及 t 值，就可推出 P 點、Q 點及 R 點的正確座標，我們得知當 H 點位於 A 點時，t 值爲 0。

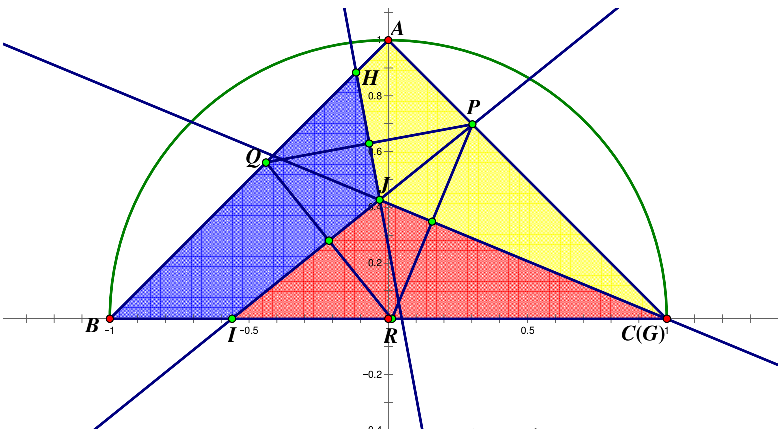
定義 I 點於 B 點上，如圖(三十)



圖(三十)

令 I 點座標爲 $(-1,0)$，做 $\angle QIR$ 角平分線，以此線段做爲對稱軸，Q 點及 R 點互爲對稱點，故可將 Q 點視爲隨 R 點變動的定點，令 R 點座標 $(t,0)$，則 Q 點座標爲：$(0.05(-2+1.41421\sqrt{t^2+100t+20}), \sin 2\theta(0.05(-2+1.41421\sqrt{t^2+100t+20})+1)/(\cos 2\theta+1))$ 另外設 P點座標爲 $(p, \sin 2\theta(p-1)/(\cos 2\theta-1))$，求 p 和 t 值，由等腰三角形研究得知 H點應位於 $\overline{AC}$ 線段上，G 點應位於 X 軸上，利用距離公式求出 G 點及 H 點座標，並藉由多邊形面積公式求出 p 值和 t 值，得知 t 值約等於-0.0130372。

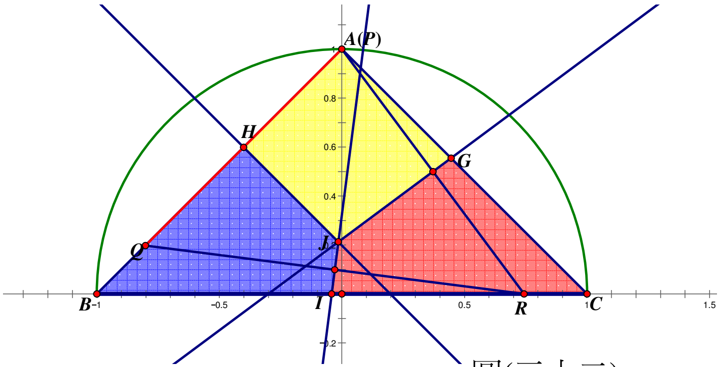
由於等腰直角三角形有所謂的對稱性，因此若要定義 G 點於 C 點上，直接將定義 I 點的圖翻轉即可，如圖(三十一)，所以 t 值約等於 0. 0130372



圖(三十一)

考慮到上述等腰三角形所提到極限值的問題，我們先將 *R* 點右移，發現 *P* 點會往 *A* 點移動，*Q* 點會往 *B* 點移動，由於 *P* 點距離 *A* 點較近，因此我們可以知道當 *P* 點移到 A 點上之後，就會產生無解的狀況，所以我們要定義 *P* 點在 *A* 點上來求解。

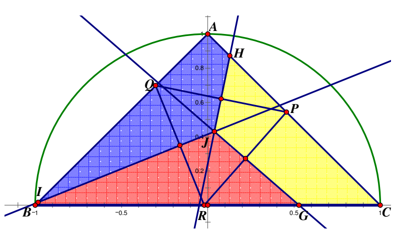
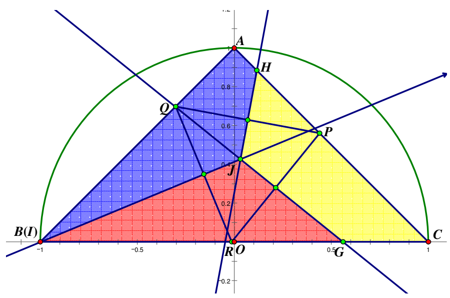
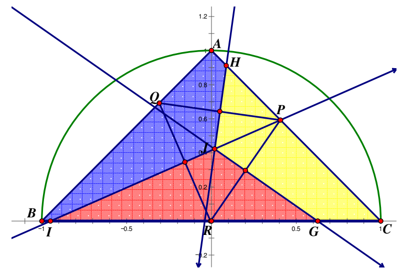
得到結果爲 *t* 值約爲 0.743167，將數據代入 *GSP* 後，如圖(三十二)

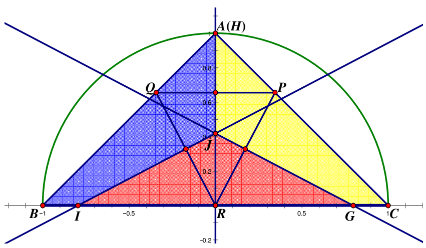
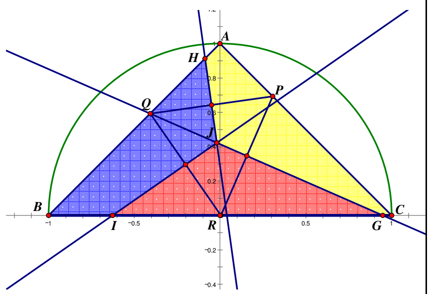
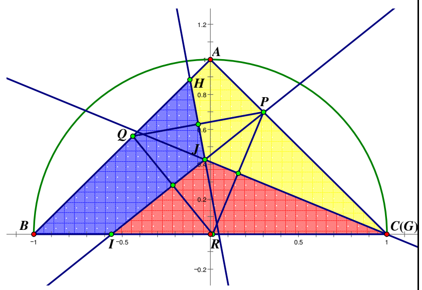


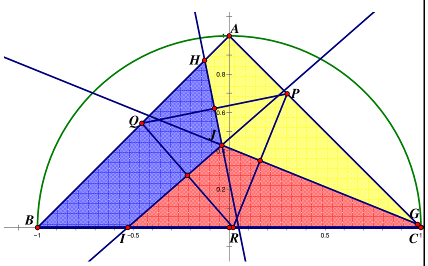
圖(三十二)

如此一來，我們可以知道當 *t* 值在 0.741367 之外時，就會產生無解的情況。

由以上幾種結果可以得到等腰直角三角形之範圍值，歸納出七種結論。

t 值	−0.741367≤*t*<−0.0130372	*t*=−0.0130372	−0.0130372<*t*<0
圖示			
H 點位置	$\overline{AC}$ 線段上	$\overline{AC}$ 線段上	$\overline{AC}$ 線段上
G 點位置	*X* 軸上	*X* 軸上	*X* 軸上
I 點位置	$\overline{AB}$ 線段上	*B* 點上	*X* 軸上

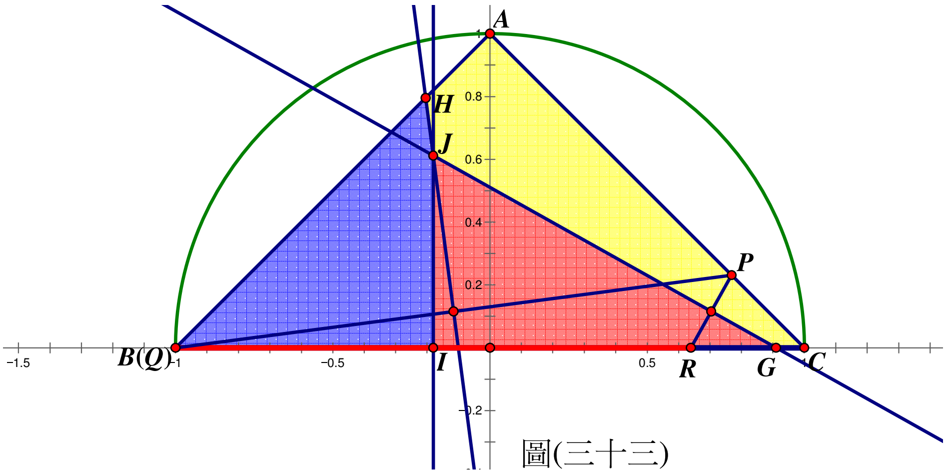
t 值	t=0	0<t<0.0130372	t=0.0130372
圖示			
H 點位置	A 點上	$\overline{AB}$ 線段上	$\overline{AB}$ 線段上
G 點位置	X 軸上	X 軸上	C 點上
I 點位置	X 軸上	X 軸上	X 軸上

t 值	0.0130372<t≤0.741367
圖示	
H 點位置	$\overline{AB}$ 線段上
G 點位置	$\overline{AC}$ 線段上
I 點位置	X 軸上

備註：當我們在進行 t 值移動時，發現當 t 在 x 軸上向右移動時，H、I 及 G 點做逆時針移動，反之則做順時針移動。當我們求出值之後，發現我們點的移動方式及位置與研究的等腰直角三角形有異曲同工之妙，故可對照出我們的方法是正確的。

等腰直角三角形第二組解

此解較爲特殊，由上述等腰三角形通解表格可知，t 值在大約 0.6 多的時候就無解了，因此我們無法使用以上的求範圍值方法，因此我們決定另外找方法求解。由等腰三角形通解 *GSP* 模擬後發現，當 t 值到 0.6 多的時候，由於 Q 點會碰到 B 點，因此之後的解都不存在，因此我們決定定義 Q 點在 B 點上求解。經過計算後，求得 t 值約爲 0.639131，將數據代入 *GSP* 後，如圖(三十三)



圖(三十三)

所以當我 t 值到 0.639131 後，我們的第二組解就不存在了，而經過核對，此解與上述等腰三角形通解結果相符，故可以證明此方法正確。

等腰直角三角形有解範圍

首先我們可以觀察到等腰直角三角形解的變化爲：兩組解→一組解→無解

之後我們歸納出結論：

t 值範圍	解的數量
$t < -0.743167$	無解
$-0.743167 \le t < -0.639131$	一組解
$-0.639131 \le t \le 0.639131$	兩組解
$0.639131 < t \le 0.743167$	一組解
$t > 0.743167$	無解

有了範圍值之後，我們就能求出等腰直角三角形的所有解了。

任意直角三角形通解−以 30−60−90 爲例

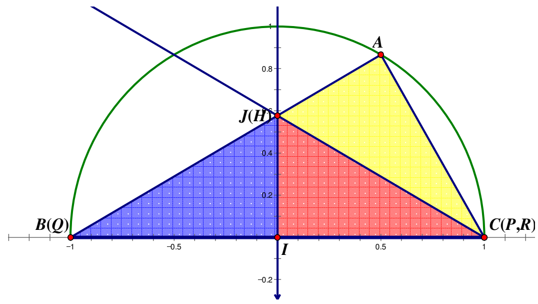
探討完等腰直角三角形後，由於其具有對稱性，其性質與其他的直角三角形有些許的不同，因此我們必須再探討 30−60−90 的直角三角形其範圍值的變化，大致上的方法與等腰直角三角形相似。其中，有一個明顯可發現的解，證明如下：如圖(三十四)

$\Theta\ \overline{CH}$ 爲 $\angle ACB$ 之角平分線，根據內分比性質，

$\overline{AH}:\overline{BH}=\overline{AC}:\overline{BC}=1:2$ ，故可證明 $\Delta AHC=\frac{1}{3}\Delta ABC$ 。

$\Theta\ I$位於原點 ，$\therefore \overline{BI}=\overline{CI}$ ，又 ΔHBI和ΔHCI 同高，

$\therefore \Delta HBI$面積 $=\Delta HCI$面積 。



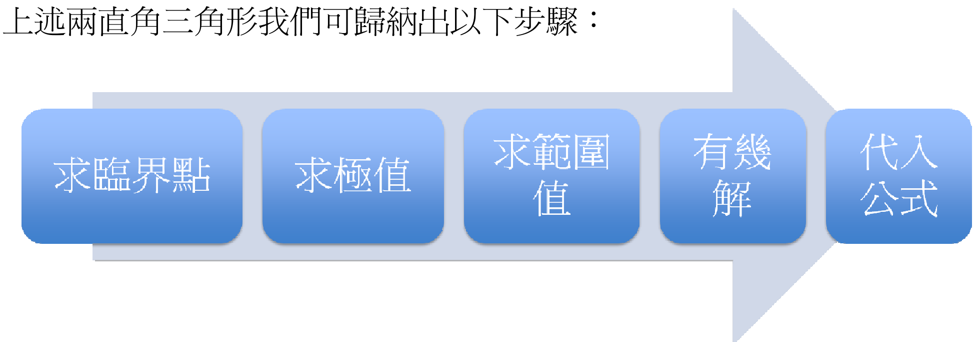
圖(三十四)

根據上述可得 $\Delta HBI=\Delta HCI=\Delta AHC=\frac{1}{3}\Delta ABC$ 。

由於有以上等腰直角三角形的成果，排除掉 30-60-90 直角三角形無對稱性，我們可以套用等腰直角三角形的方式求範圍值。先定 $\angle ABC=\theta=30^{\circ}$，之後令 R 點座標爲（ t ，0 ） 。經過計算後歸納出以下結論：

t 值範圍	**解的數量**
$t<-0.707627$	無解
$-0.70627\le t<-0.191265$	一組解
$-0.191265\le t\le 0.176023$	兩組解
$0.176023<t\le 0.821939$	一組解
$t>0.821939$	無解

總結：由上述兩直角三角形我們可歸納出以下步驟：



依照上述步驟我們便可求得其他任意直角三角形的解，由於方法與 30−60−90 類似，故在此不再說明。

五、任意三角形：

研究完等腰、直角三角形後，我們進行「任意三角形」的研究，首先我們要先思考該如何去定義這個任意三角形，最後決定還是用角度去定義其座標，因爲這樣比較方便去控制三角形的變化，於是我們還是先固定最長邊 $\overline{BC}$ 爲底邊，假設 $\angle B = \alpha^{\circ}$ 、 $\angle C = \beta^{\circ}$ ，如此一來便可定義出 A 點座標，A 點座標爲 $((Tan[\beta]-Tan[\alpha])/(Tan[\beta]+Tan[\alpha]),2Csc[\beta+\alpha]Sin[\alpha]Sin[\beta])$ 。剛開始畫分的方法與上述等腰、直角三角形方法類似，在此不再贅述，我們將任意三角形分開成銳角及鈍角去討論，並固定各三角形之頂角與 R 點於原點後，改變其兩底角觀察解變化，整理出來數據如下表：

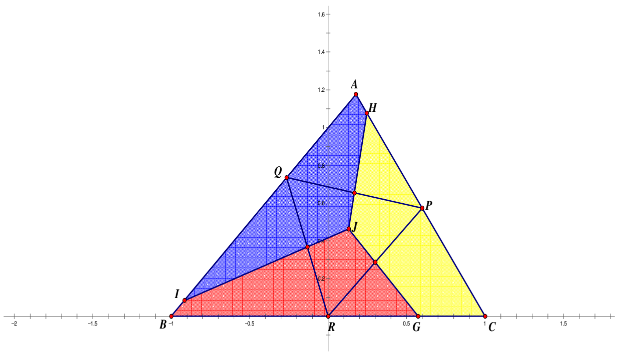
銳角：

圖(三十五)

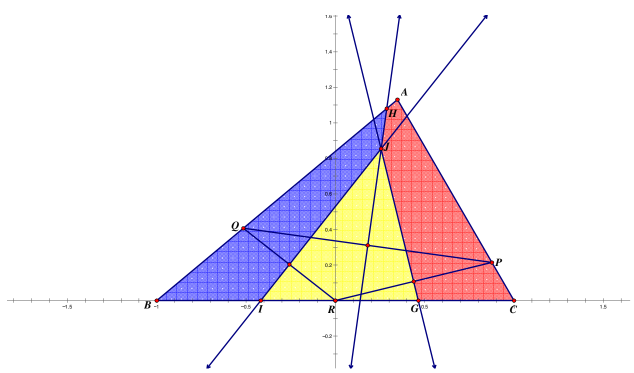
頂角	角 B	角 C	R 值	Px	Py	Qx	Qy
80	50	50	0	0.397607	0.717904	-0.39761	0.717904
80	45	55	0	0.599139	0.57249	-0.26537	0.734629
80	40	60	0	0.731006	0.465912	-0.18704	0.682151
80	35	65	0	0.840171	0.342755	-0.12435	0.61314
80	30	70	0	0.926217	0.202718	-0.07601	0.533466
80	25	75	0	0.984778	0.05681	-0.04066	0.447348

圖(三十六)

頂角	角 B	角 C	R 值	Px	Py	Qx	Qy
80	50	50	0	0.710716	0.344755	-0.71072	0.344755
80	45	55	0	0.799038	0.287003	-0.6149	0.385101
80	40	60	0	0.876335	0.214195	-0.51547	0.406565
80	35	65	0	0.940033	0.128599	-0.41596	0.408948
80	30	70	0	0.98803	0.032888	-0.31994	0.392634



圖(三十五)



圖(三十六)

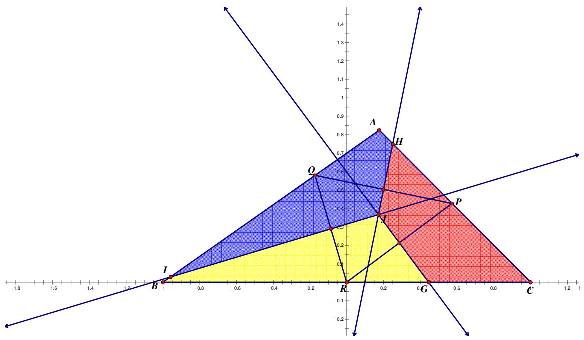
鈍角：

圖(三十七)

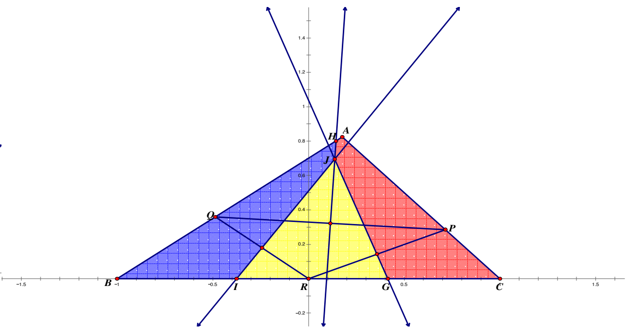
頂點	角度 B	角度 C	R 值	Px	Py	Qx	Qy
100	40	40	0	0.289284	0.596362	-0.28928	0.596362
100	35	45	0	0.573164	0.426836	-0.17369	0.578586
100	30	50	0	0.717052	0.337204	-0.12018	0.507964
100	25	55	0	0.84813	0.216892	-0.07999	0.429009
100	20	60	0	0.950495	0.085745	-0.04981	0.345842

圖(三十八)

頂點	角度 B	角度 C	R 值	Px	Py	Qx	Qy
100	40	40	0	0.602393	0.333632	-0.60239	0.333632
100	35	45	0	0.714511	0.285489	-0.48692	0.359261
100	30	50	0	0.817751	0.217196	-0.37393	0.361464
100	25	55	0	0.908222	0.131073	-0.26831	0.341194
100	20	60	0	0.982651	0.03005	-0.17498	0.300282



圖(三十七)



圖(三十八)

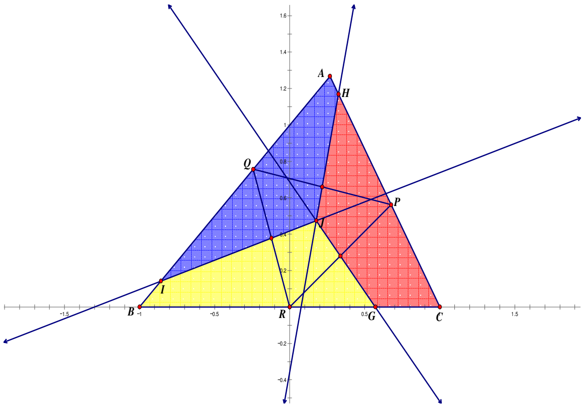
接下來我們要探討 R 點在 $\overline{BC}$ 上移動時解的變化，以及求出三角形解的極限值，因此我們還是分成銳角及鈍角三角形去討論，整理出來如下表：

銳角：圖(三十九)~圖(四十)

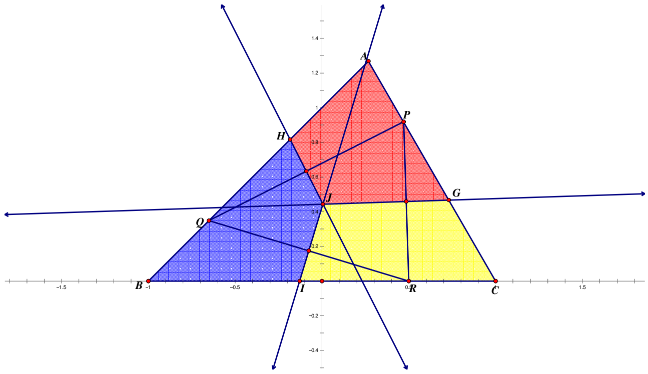
頂角	角 B	角 C	R 值	Px	Py	Qx	Qy
75	45	60	0	0.675847	0.56145	-0.24289	0.757114
75	45	60	0.1	0.518262	0.834394	-0.38302	0.616978
75	45	60	0.2	0.521129	0.82943	-0.49158	0.508416
75	45	60	0.5	0.469871	0.91821	-0.65162	0.348376
75	45	60	0.7	0.372697	1.08669	-0.749	0.250998
75	45	60	0.903058	0.26795	1.26795	-0.8633	0.136698

圖(四十一)~圖(四十二)

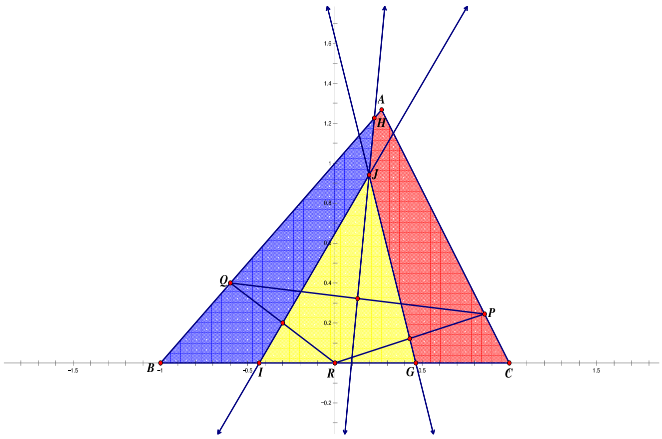
頂角	角 B	角 C	R 值	Px	Py	Qx	Qy
75	45	60	0	0.858715	0.244712	-0.59928	0.400722
75	45	60	0.1	0.837083	0.282181	-0.61355	0.386454
75	45	60	0.2	0.820964	0.3101	-0.64077	0.359229
75	45	60	0.5	0.825406	0.302405	-0.78374	0.216263
75	45	60	0.7	0.879037	0.209513	-0.90781	0.092192
75	45	60	0.839541	0.931689	0.118318	-1	0



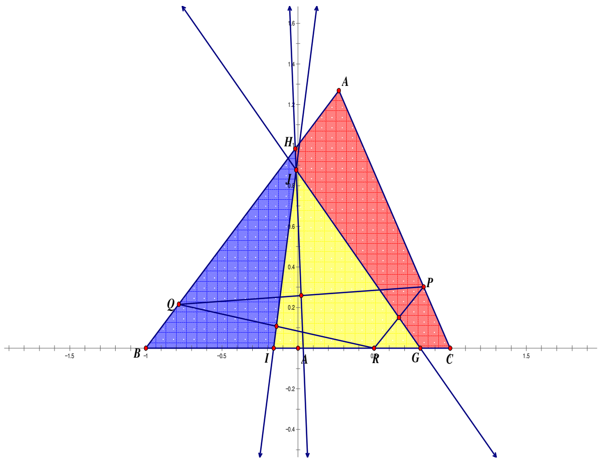
圖(三十九)



圖(四十)



圖(四十一)



圖(四十二)

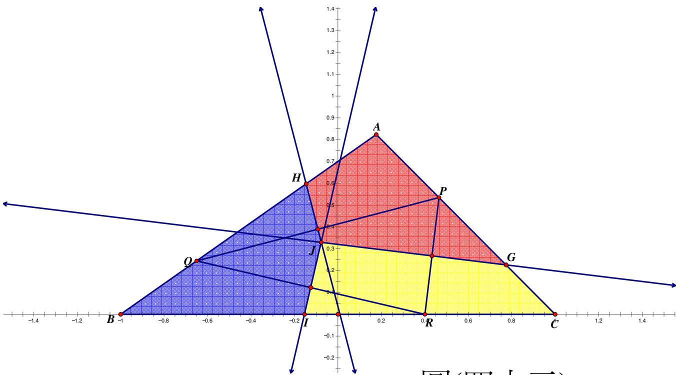
鈍角：

圖(四十三)~圖(四十四)

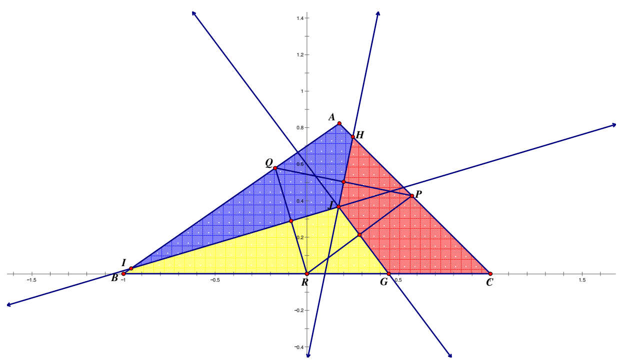
頂點	角度 B	角度 C	R 值	Px	Py	Qx	Qy
100	35	45	0	0.714511	0.285489	-0.48692	0.359261
100	35	45	0.1	0.674296	0.325704	-0.51976	0.336265
100	35	45	0.2	0.643736	0.356264	-0.57148	0.300055
100	35	45	0.3	0.629726	0.370274	-0.63574	0.255061
100	35	45	0.4	0.639716	0.360284	-0.70653	0.205489
100	35	45	0.5	0.676949	0.323051	-0.78188	0.152729
100	35	45	0.7	0.719904	0.280096	-0.903577	0.0675163
100	35	45	0.77288	0.844619	0.155381	-1	0

圖(四十五)~圖(四十六)

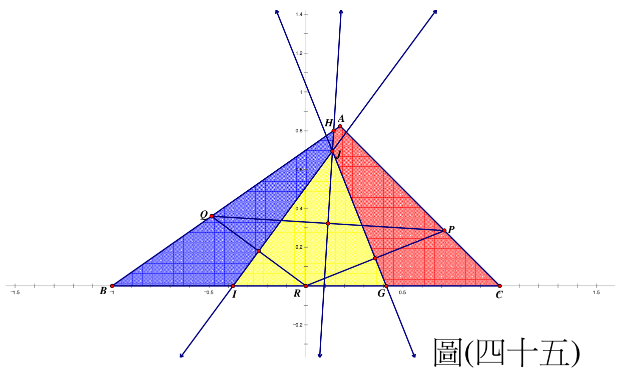
頂點	角度 B	角度 C	R 值	Px	Py	Qx	Qy
100	35	45	0	0.572657	0.427343	-0.17298	0.579083
100	35	45	0.1	0.361337	0.638663	-0.42484	0.40273
100	35	45	0.2	0.421487	0.578513	-0.51688	0.338281
100	35	45	0.3	0.475457	0.524543	-0.59779	0.281633
100	35	45	0.4	0.464728	0.535272	-0.65041	0.244785
100	35	45	0.5	0.350543	0.649457	-0.65451	0.241918
100	35	45	0.69068	0.17633	0.82367	-0.703521	0.207597



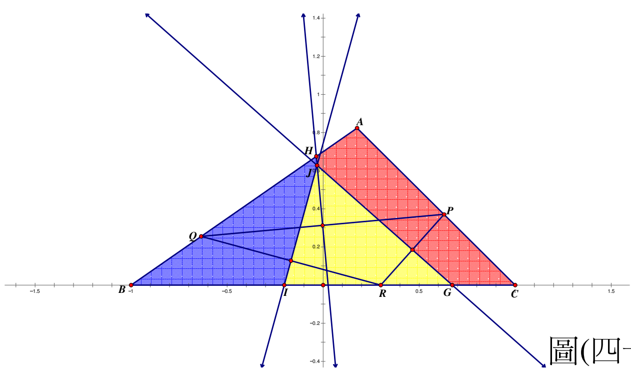
圖(四十三)



圖(四十四)



圖(四十五)



圖(四十六)

經由上述研究之後，我們終於可以完成我們科展的最終目標了，其實我們另外還有用定義 A 點之座標的方法，但是那個方法只適用於驗證我們用角度解的正確性 但是也值得參考。我們整理出任意三角形的解法，如下：

伍、**延伸研究：**

當我們找出所有等腰三角形的通解時，更進一步我們希望能在 *GSP* 上將其結果**模擬出來**，也就是說當我們在 *GSP* 上輸入 *A* 點座標及 *R* 點座標即可畫出所負責的區域及 *P*、*Q* 兩點座標。

因爲 *GSP* 並無法解如此複雜之方程式，因此我們想用所學過的「多項式」去做**曲線擬合 (curve fitting)**。

首先，依我們上述的公式做出等腰三角形在 *R* 點座標移動時的數據，以等腰直角三角形爲例，資料如下：

第一組解

r	Px	Py	Qx	Qy	
0	0.344141	0.655859	-0.34414	0.655859	
0.05	0.310058	0.689942	-0.50271	0.497294	
0.1	0.329973	0.670027	-0.55456	0.445438	
0.15	0.349763	0.650237	-0.59545	0.404547	
0.2	0.364987	0.635013	-0.62967	0.370328	
0.25	0.369908	0.630092	-0.65663	0.343372	
0.3	0.357247	0.642753	-0.67389	0.326108	
0.35	0.326127	0.673873	-0.68217	0.317832	
0.4	0.285231	0.714769	-0.68724	0.312761	
0.45	0.241775	0.758225	-0.69389	0.306112	
0.5	0.198492	0.801508	-0.70402	0.295977	
0.55	0.156084	0.843916	-0.71803	0.281973	
0.6	0.114615	0.885385	-0.73566	0.264341	
0.65	0.073976	0.926024	-0.75645	0.243555	
0.7	0.034028	0.965972	-0.77987	0.220135	
0.743166	0	1	-0.80183	0.198173	極值

第二組解

r	Px	Py	Qx	Qy	
0	0.655859	0.344141	-0.65586	0.344141	
0.05	0.644059	0.355941	-0.67048	0.329522	
0.1	0.634763	0.365237	-0.68832	0.311678	
0.15	0.628413	0.371587	-0.70907	0.290934	
0.2	0.625482	0.374518	-0.73234	0.267663	
0.25	0.626417	0.373583	-0.75776	0.242243	
0.3	0.63158	0.36842	-0.78499	0.215013	
0.35	0.641171	0.358829	-0.81375	0.186251	
0.4	0.655158	0.344842	-0.84382	0.156177	
0.45	0.67324	0.32676	-0.87502	0.124984	
0.5	0.694896	0.305104	-0.90714	0.092857	
0.55	0.719495	0.280505	-0.94003	0.059975	
0.6	0.746408	0.253592	-0.97349	0.026507	
0.639129	0.76873	0.23127	-1	0	極值

接著，我們將以上兩解的 P_x，Q_x 值分別作曲線擬合(如附錄 5)，而因爲在用聯立方程式取其正解時，兩方程式的 P、Q 值最高次方爲 6 次，因此，我們用曲線擬合後的方程式也選擇用 6 次。方程式如下:

第一組解 (I,G 點因 R 值有影響)

$P_x = 0.343638 - 1.3701\,r + 18.7453\,r^2 - 82.5036\,r^3 + 156.304\,r^4 - 139.234\,r^5 + 47.9025\,r^6$

$P_y = -P_x + 1$

$Q_x = -0.347413 - 4.03104\,r + 28.1107\,r^2 - 116.647\,r^3 + 262.975\,r^4 - 295.146\,r^5 + 128.116\,r^6$

$Q_y = Q_x + 1$

第二組解 (I,G 點永遠交於 $\overline{BC}$)

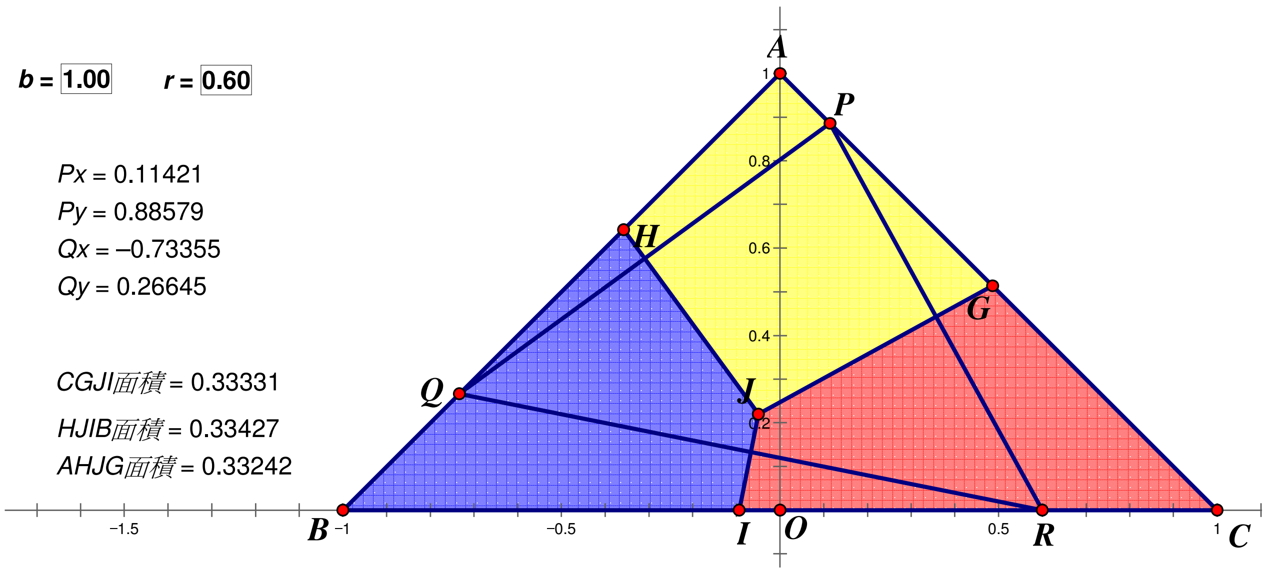
$P_x = 0.655865 - 0.261349\,r + 0.50193\,r^2 - 0.274589\,r^3 + 3.64903\,r^4 - 6.40125\,r^5 + 3.23266\,r^6$

$P_y = -P_x + 1$

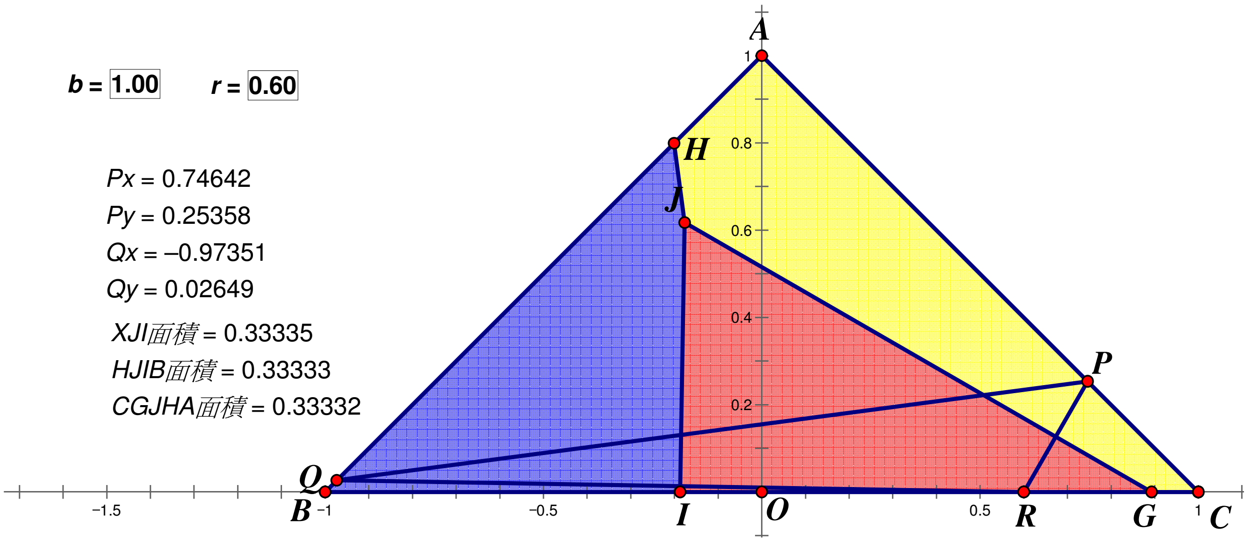
$Q_x = -0.655863 - 0.257134\,r - 0.720562\,r^2 + 0.417905\,r^3 + 0.45524\,r^4 - 1.04173\,r^5 + 0.595356\,r^6$

$Q_y = Q_x + 1$

有了此曲線模擬，便可在 *GSP* 上作圖。只要我們輸入 R 點座標，便可得到 P、Q 兩點座標的近似值，並畫好各負責區域，如圖(四十七)、圖(四十八)，這樣的結果令人興奮。



圖(四十七)



圖(四十八)

用上述曲線擬合的方式，我們也可以做出正三角形、直角三角形、任意三角形的大致模擬結果，因做法相同及頁數限制關係將於科展報告時加以呈現。

陸、結論：

一、以對稱性及相似形概念，定義出所有三角形的表示法(其餘皆是其相似形)

二、正三角形，P、Q、R 三點的站法有無限多組解，而最佳站法為當 R 點的座標為 $(\frac{1}{3}, 0)$。

三、等腰三角形，當 R 固定在原點，若 $\frac{\sqrt{3}}{3} \le a \le \sqrt{3}$ 則 P 點的座標有兩組解，$a < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 時只有一組解。

四、等腰三角形，當 R 不一定固定在原點時，解出 P、Q 兩點座標的通解需考慮五種公式，如附錄五，利用 Mathematica 可快速算出其解。

五、直角三角形，利用三角函數表示 A 點座標，並利用三中垂線功過頂點方式去尋找其交點情形及有解的範圍。

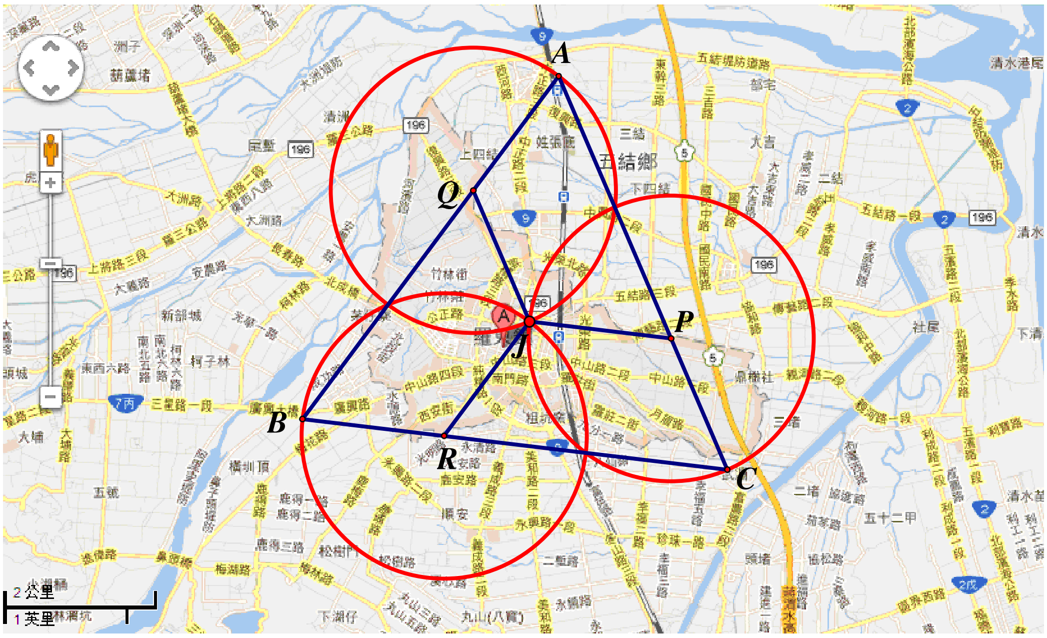
六、任意三角形可套用直角三角形利用三角函數來表示點座標，並利用中垂線性質及直線方程式代入所有多邊形面積公式找出解來。

七、我們可利用曲線模擬，便可在 *GSP* 上作圖。只要我們輸入 R 點座標，便可得到 P、Q 兩點座標的近似值，並畫好各負責區域。

我們目前找到正三角形最佳解。礙於時間的關係，我們尚未能找出等腰三角形和直角三角形的最佳解，因為 P、Q、R 根據外心交於各邊的變化，它們在 ΔABC 的解是不固定的，且無法用正三角形的方式找。至於這部份，仍須做深入的研究。

柒、生活應用：

在現代的社會中，電信基地台的設置越來越多，但人們卻不喜歡設置在自己的居家附近，就目前基地台發射距離最遠爲 2 公里，所以我們試著將基地台分配在人口較少的地方，但又能夠使訊號是最清晰的。以羅東鎮爲例，如圖：



假設以圖中 J 點爲羅東鎮市中心範圍。我們以 J 爲中心點，向外做一正三角形。設置在正三角形上會有兩組最佳解(上圖是其中一組最佳解)。設三角形各邊長約爲 5.7 公里，基地台則設立在三角形各邊長的$\frac{1}{3}$處(P、Q、R 三點) → $\overline{QB}=\overline{RC}=\overline{AP}=1.9$ 公里。

之前證明過→ $\overline{QJ}=\overline{QB}=\overline{JR}=\overline{RC}=\overline{JP}=\overline{AP}=\frac{1}{3}$ ΔABC 邊長，所以 $\overline{QJ}=\overline{JR}=\overline{PJ}=1.9< 2$ 公里。電磁波是以半徑爲 2 公里圓形的方式擴散，在圖(一)可發現在三角形範圍內均有電磁波，且三圓交於 J 點。無線基地台是設立在距離 J 點 2 公里內(P、Q、R 三點)，且是在偏離城鎭的區域，故可達到最佳設置位置。

捌、參考資料：

一、 2009 年台灣國際科學展覽會，數學科，「游泳池救生員最佳設置位置問題」之探討極延伸
二、 國中數學第四冊—翰林出版社。
三、 國中數學第五冊—翰林出版社。

【評語】030411

1. 研究方法未見創新。

2. 善用 GSP 軟體繪圖尋求可能答案。

3. 團隊合作良好，報告中肯。

4. 研究成果未完整，有待加強。