中華民國第52屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030410

找尋三階質數魔方陣

學校名稱：桃園縣立大竹國民中學

作者：	指導老師：
國二 黃欣怡 國二 徐麗萍	林俊杰

關鍵詞：魔方陣、魔方、縱橫圖

找尋 3 階質數魔方陣

摘要

我們以魔方陣做爲科展的出發點，過程中，發現到多種魔方陣的快速解法，但質數魔方陣並沒有快速解法，進而有了找出 3 階質數魔方陣快速解法的念頭。

首先對質數的性質作探討，瞭解質數並沒有一般式的表示法，增加了尋找快速解法的難度。在後續的過程中，本研究將質數分爲兩大類，一類爲 3k+1 的型態，另一類爲 3k-1 的型態，發現都可找到 3 階質數魔方陣，在限制定和爲最小的要求下，確定魔方陣的中心數字爲 59 時，有定和最小的 3 階質數魔方陣。

本研究採用因數與倍數的概念，分析 3 階質數魔方陣定和性質，瞭解定和爲 3 的倍數，藉由將質數分爲 3k+1 及 3k-1 兩類，根據其中 k 的數字相加爲定數，以較快速且有系統的方式找到 3 階質數魔方陣。

壹、研究動機

自進入國中開始，學校推行著閱讀運動，也因為這樣子的活動，使得平常大多接觸電腦的我們，開始練習閱讀書本上的文字，在一次偶然的機會中，看到同學從圖書館借了一套金庸的射雕英雄傳，也利用這個機會跟同學借來看了一下，沒想到一看之下就開始沈浸武俠小說的世界中，在射雕英雄傳當中有一段有趣的是，黃蓉因為受傷需要請段皇爺療傷，在途中被一位叫瑛姑的女子所刁難，其中所問的問題就是我們以前小時候在玩的一種數學遊戲，題目是有一個九宮格，將 1 到 9 這九個數字填入格子中，使得直的加、橫的加、斜的加總和都是一樣大，也因為這個題目的啓發，在好奇心的驅使下，我就把這個問題利用下課時間去問了數學老師，當時老師很快就將答案解出來了，並且說這種題目叫做魔方陣，有興趣的話還可以去試著解 16 格或 25 格的魔方陣。

後來，數學老師問我說有沒有興趣參加此次的數學科展，當時也不知道科展要怎樣做，就想說老師會教就答應了，參與之後才發現，科展是要我們主動學習發現問題、研究問題並解決問題，在選定題目的討論中，我就把當時魔方陣的想法提了出來，也獲得同學及老師的同意。進而確立我們研究的主題，希望藉由此次科展的機會，將魔方陣介紹給所有同學，包含它的性質，種類以及解法。

貳、研究目的

一、瞭解魔方陣的種類

二、找出各階魔方陣的解法

三、探討 3 階質數魔方陣

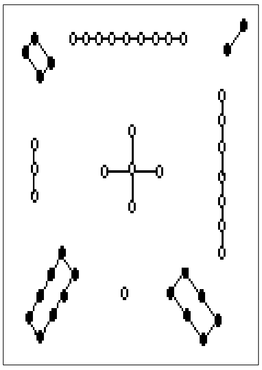
參、研究設備及器材

紙、筆、計算機、電腦、印表機。

肆、研究過程或方法

一、魔方陣的由來

世界上最早出現的魔方陣目前公認是出現在中國。夏禹治水時，河南洛陽附近的洛水裡浮出一隻烏龜，龜背上刻畫著一種圖案，古人認爲是一種祥瑞。到了西元四世紀，晉朝的數學家程子華編了一首歌來形容三階魔方陣：「二與四抱九而上濟，六與八滔一而下沉；戴九履一，據三而持七；五居中官數之所由生」。



圖一　洛書的三階魔方陣

魔方陣其實是由英文 magic square 轉譯而來，也有人稱爲魔方。我國古代把魔方陣稱爲縱橫圖、幻方。而在本研究中，統稱爲魔方陣。

二、魔方陣的定義

n 階魔方陣的定義如下：

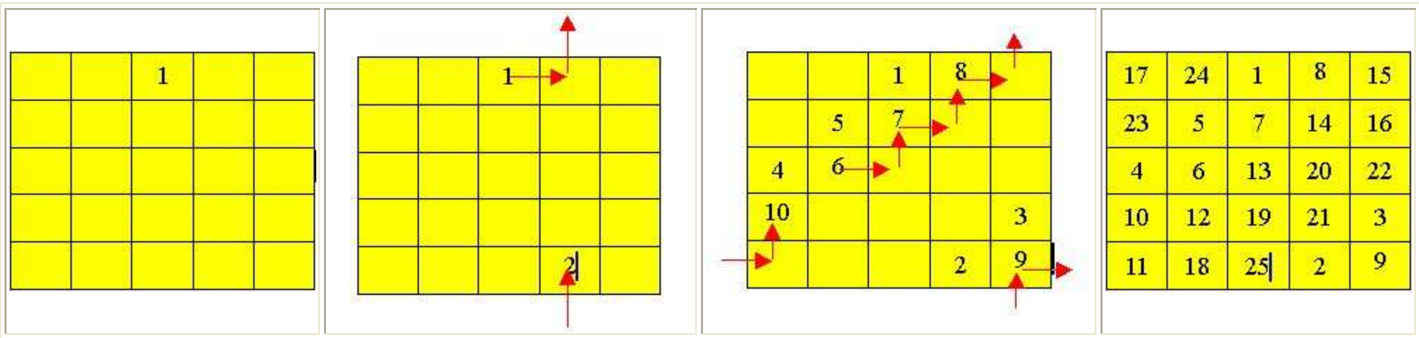
1. 每邊恰有 n 個格子的方形，稱爲是一個 n 階方陣，且方陣中的數字是由 1 到 n^2 的連續整數。(此爲嚴格狹義的定義，廣義的魔方陣只要數字不重複即可)
2. 方陣的行和、列和、對角線和全等於定和。

三、魔方陣的解法

魔方陣解法在分類時，大致上可分爲兩大類：奇數階方陣解法與偶數階方陣解法。而兩類型的解法中，又因爲各家解法的不同，而產生了許多不同的填製方式，故本研究在搜尋資料時，以符合研究小組理解範圍內的解法爲主，以下爲大家做解法上的大致介紹：

1. 奇數階魔方陣解法：

所有的奇數階的魔方陣，都能由 De La Laubere 所提出的簡捷連續填製法解出，其步驟是：「1 立首列中， 右 1 上 1， 受阻下 1」。說明如下：



圖二 5 階魔方陣的填製範例

2.偶數階魔方陣解法：

偶數階的魔方陣，目前被區分爲兩類：4 k 階以及 4 k+2 階，分別由不同的方法填製，說明如下：

（1）4 k 階魔方陣解法：斜角註記法

本方法只適用於 4 的倍數(即 4、8、12、16、20、24 … …)階魔方陣的填製， 相傳是十四世紀時一個叫 Manuel Moschopulus 的人留下的作法。

現以四階魔方陣做爲示範，填製時，先將整個方陣劃分成 k^2 個 4 階方陣，然後在每個 4 階方陣的對角線上做記號，如圖三所示。

*			*
	*	*	
	*	*	
*			*

圖三　將 4 階方陣的對角線上做記號

接著自左上角開始，由左而右、由上而下，遇到有記號的位置才填數字，但不管是否填入數字，每移動一格數字都要加 1 ，如圖四所示。

1			4
	6	7	
	10	11	
13			16

圖四　遇到有記號的位置才填數字

最後自右下角開始，由右而左、由下而上，遇到沒有數字的位置就填入數字，但每移動一格數字都要加 1，如圖五所示。填滿方陣後，即是 4k 階的魔方陣了。

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

圖五　完成 4 階魔方陣

（2）4 k+2 階魔方陣解法：田字鏡射法

本方法只適用於 4k+2 的倍數(即 6、10、14、18、22、26、30......)階魔方陣的填製。

現以 6 階魔方陣做爲示範，以田字鏡射法填製魔方陣時，先將整個方陣劃成田字型的四個 2 k + 1 階的奇數階小方陣，並且按照以下 3 個要點，對小方陣中的格子做註記，如圖六所示。

- 右半兩個小方陣中大於 k+2 的行
- 左半兩個小方陣中 (k + 1 , k + 1) 的格位
- 左半兩個小方陣中除了 (1 , k + 1) 的格位之外，小於 k +1 的行

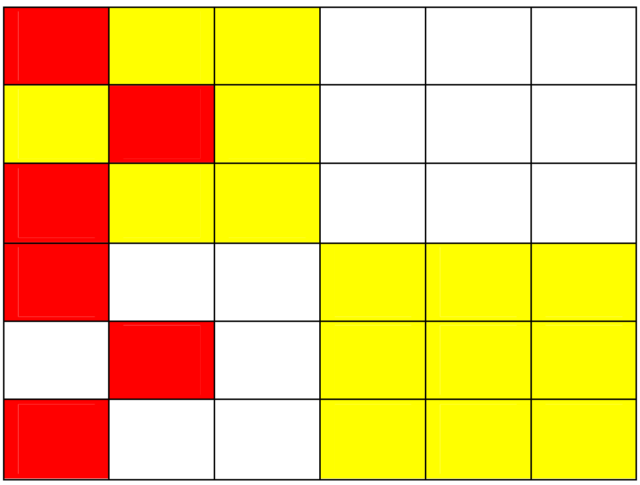


圖 6　6 階魔方陣劃分成四個 3 階小方陣

再以簡捷連續填製法依左上、右下、右上、左下的順序分別填製這四個小方陣，如圖七所示。

8	1	6	26	19	24
3	5	7	21	23	25
4	9	2	22	27	20
35	28	33	17	10	15
30	32	34	12	14	16
31	36	29	13	18	11

圖七　以簡捷連續法填製四個小方陣

最後，將上半及下半方陣中有註記的數字對調，魔方陣完成，如圖八所示。

35	1	6	26	19	24
3	32	7	21	23	25
31	9	2	22	27	20
8	28	33	17	10	15
30	5	34	12	14	16
4	36	29	13	18	11

圖八　完成 6 階魔方陣

四、3 階質數魔方陣的探討

本研究此次的主要目的是探討限制更多的 3 階質數魔方陣，按先前所探討的填製法，只適用於每邊恰有 n 個格子的 n 階方

陣，且方陣中的數字是由 1 到 n^2 的連續整數，但現在如果說是要求我們，填入格子中的數字只能是質數時，那要用什麼方法來填製呢？

首先，我們先針對 3 階魔方陣中，各格子中數字間的關係作一個探討，假設 3 階方陣中的數字如下圖九所示，其定和爲 x：

a	b	c
d	e	f
g	h	I

圖九　　3 階魔方陣

則與中心 e 相關的行列和有：

（1）　$b+e+h=x$

（2）　$d+e+f=x$

（3）　$a+e+i=x$

（4）　$g+e+c=x$

（5）　$a+b+c+d+e+f+g+h+i=3x$

將（1）~（4）相加再減去（5）式，則發現到 $3e=x$。所以，x 必爲 3 的倍數。當方陣中心位置的數字確定之後，因定和爲 x，週邊位置的數字必爲圖十所示（當左上及右上角的數字決定後，其他位置的數字就因而決定了）：

E+x	e-x-y	e+y
e-x+y	e	e+y-x
e-y	e+x+y	e-x

圖十　　3 階魔方陣各數間的關係

有了三階魔方陣的數字關係圖之後，尋找 3 階質數魔方陣變得不再那麼困難了。因爲，3 階質數魔方陣如果不限制填入質數大小的話，將會有許多種的組合出現，爲了找到答案的唯一性，我們希望是找到定和爲最小的 3 階質數魔方陣。因此，我們把 200 以內的所有質數找出來，嘗試將 200 內的質數做組合期望能找到最小定和的魔方陣。

以下是我們找到 3 階質數魔方陣的步驟：

1. 首先將 200 內的質數做分類，因爲定和 x 爲 3 的倍數，所以填入魔方陣中的質數，不管是行、列或對角線的數，都可將其分類爲 3k+1（k 爲正整數）或 3k-1（k 爲正整數）等兩類，所以我們先把 200 內的質數分兩類，如表一所示。

表一　　200 內質數的分類

3k+1 類的質數	7,13,19,31,37,43,61,67,73,79,97,103,109,127, 139,151,157,163,181,193,199
3k-1 類的質數	2,5,11,17,23,29,41,47,53,59,71,83,89,101,107, 113,131,137,149,167,173,179,191,197

2. 因爲定和爲 3 的倍數，所以，我們可以確定 3k+1 類與 3k-1 類的質數不可同時填入魔方陣中，必須要先選定哪一類的質數要先填入魔方陣中，在我們的嘗試過程中，先選定了 3k+1 類的質數做實驗。
3. 爲了讓我們在實驗的過程中各爲簡便，我們將 3k+1 類的質數做了表二的處理。

表二　3k+1 類質數的分解

7=3×2+1	103=3×34+1
13=3×4+1	109=3×36+1
19=3×6+1	127=3×42+1
31=3×10+1	139=3×46+1
37=3×12+1	151=3×50+1
43=3×14+1	157=3×52+1
61=3×20+1	163=3×54+1
67=3×22+1	181=3×60+1
73=3×24+1	193=3×64+1
79=3×26+1	199=3×66+1
97=3×32+1	

4. 決定方陣的中心數字 e ，因爲太小或太大的質數都不可能做中心數字，在經過多次的嘗試後，選定 73 爲中心數字，則定和必爲 73×3=219。
5. 以 73 爲分界，小於 73 的質數必定要與大於 73 的質數做配對，因爲我們已經將質數分解成表二的形式，所以，在填入數字的過程中，我們只需要注意 3k+1 中 k 的數字就好。例如魔方陣

左上角的數字 a，我們填入的是 $103=3\times34+1$ 則右下角的數字必定為 $43=3\times14+1$，這樣才符合定和為 219 的限制。

6. 同時，因為我們也可以觀察到 103 及 43 分解出來 k 的值為 34 及 14，將 34 及 14 相加，和為 48。
7. 接下來我們只需要將表二中 k 的和為 48 的數字配對，則就可以很快的將魔方陣填出，如圖十一所示。

$103=3\times34+1$	$7=3\times2+1$	$109=3\times36+1$
$79=3\times26+1$	$73=3\times24+1$	$67=3\times22+1$
$37=3\times12+1$	$139=3\times46+1$	$43=3\times14+1$

圖十一　73 為中心的質數魔方陣

8. 接下來我們再把 3k-1 類的質數，按照上述的步驟，先分解成表三所示。

表三　3k-1 類質數的分解

2=3×1-1	89=3×30-1
5=3×2-1	101=3×34-1
11=3×4-1	107=3×36-1
17=3×6-1	113=3×38-1
23=3×8-1	131=3×44-1
29=3×10-1	137=3×46-1
41=3×14-1	149=3×50-1
47=3×16-1	167=3×56-1
53=3×18-1	173=3×58-1
59=3×20-1	179=3×60-1
71=3×24-1	191=3×64-1
83=3×28-1	197=3×66-1

9. 經嘗試後，發現到以 71 爲中心，可以找到另一個 3 階質數魔方陣，如圖十二所示。

83=3×28-1	29=3×10-1	101=3×34-1
89=3×30-1	71=3×24-1	53=3×18-1
41=3×14-1	113=3×38-1	59=3×20-1

圖十二　71 爲中心的質數魔方陣

伍、研究結果

綜合上面的方法，我們發現到，中心爲 59 的 3 階質數魔方陣定和爲最小（如圖十三所示）。魔方陣的填製方法並不唯一，雖然以上所研究的方法，可以幫助我們解出魔方陣，但是不同的方法，亦可找到不同的解答，這次數學科展，在群策群力下，我們找到了解答，不過，還沒有辦法像先前探討的魔方陣解法一樣，能夠有一套快速的記憶公式，讓我們能很快找到答案。

101=3×34-1	5=3×2-1	71=3×24-1
29=3×10-1	59=3×20-1	89=3×30-1
47=3×16-1	113=3×38-1	17=3×6-1

圖十三　59 爲中心定和最小的質數魔方陣

陸、討論

在科展研究期間，對於魔方陣的內容，我們做了相當的探討，其中對質數魔方陣的介紹，卻較爲稀少，也沒有比較快速的填製方法，只能利用所學的基礎去分析。

爲了要瞭解質數的性質，我們也特別從網路上查閱了資料，讓我們瞭解到，目前還沒有一個表示法，能夠完全將所有的質數做完整的表示，這也增加了要填製魔方陣時的難度，爲此，我們決定利用 3 階質數魔方陣定和爲 3 倍數的想法去作分析，進而將質數分爲兩大類，不管是在何種分類中，都可以找到符合的 3 階質數魔方陣，當我們不再限制質數大小範圍

時，相信可以有許多組不同的 3 階質數魔方陣出現。

柒、結論

在研究過程中，可以發現到魔方陣的變化真是很多，也讓我們見識到數學的奇妙，以下是我們針對研究目的所得到的研究結論。

一、魔方陣的分類

大致可以分為三大類，第一類為奇數階的魔方陣、第二類為偶數階的魔方陣，第三類為不可用上述兩類特殊解法找到答案的特殊魔方陣。本研究所找尋的 3 階質數魔方陣，屬於第三類。

二、魔方陣的解法

奇數階魔方陣與偶數階魔方陣都有特殊的填製技巧能夠快速的完成魔方陣，兩類的魔方陣解法有所不同，不能夠混用，在網路及坊間的書籍裡都有介紹此類魔方陣的解法。本研究所探討的 3 階質數魔方陣則沒有快速填製的特殊解法。

三、3 階質數魔方陣的解法

本研究採用因數與倍數的概念，分析 3 階質數魔方陣定和的性質，瞭解定和為 3 的倍數，藉由將質數分為 $3k+1$ 及 $3k-1$ 兩類，根據其中 k 的數字相加為定數，可以用較快速且有系統的方式找到 3 階質數魔方陣，而不是一昧的採用試誤法找出答案。

捌、參考資料及其他

1.尤怪之家　http://oddest.nc.hcc.edu.tw/index.htm

2.求 1-300 質數表
http://hk.knowledge.yahoo.com/question/question?qid=7007071202982

3.質數
http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E8%B3%AA%E6%95%B8&variant=zh-tw

【評語】030410

1. 研究方法未見新穎。

2. 未呈現有系統找 3 階質數魔方陣的方法。

3. 研究題目有趣。

4. 團隊合作良好，報告中肯。

5. 應加強數學方法方面的研究。