中華民國第52屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030409

說『三』道『四』,【大】哉正方！

學校名稱：花蓮縣立花崗國民中學

作者：	指導老師：
國二 楊孟哲	方建華
國二 鍾沂廷	陳貞泰
國二 陳彥宏	

關鍵詞：密克定理、半角公式、海龍公式

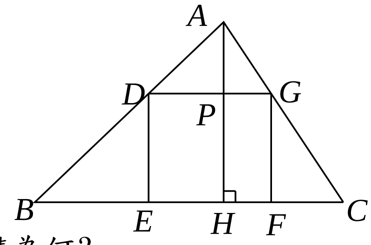
說『三』道『四』,【大】哉正方!

摘要

本作品是探討:在已知三角形內部中,如何利用尺規作圖找出最大的正方形(含內接與偏接),並導出最大正方形邊長與三角形元素的關係。進而推廣出在已知四邊形內部中,如何利用尺規作圖找出最大的正方形,並導出最大正方形邊長與四邊形元素的關係。

壹.研究動機:

在學校聯課社團「數研社」的課程中,我們學習了《比例線段與相似形》:其中有一道題目,引起了我莫大關注。



「如右圖,銳角ΔABC內接正方形$DEFG$,$\overline{AH}\perp\overline{BC}$於$H$,$\overline{AH}=10$,
且$\overline{AD}:\overline{BD}=2:3$;則$\overline{BC}=?$」

(1).這正方形$DEFG$是否唯一,又此正方形$DEFG$是否為最大?

(2)在直角或鈍角三角形中,是否也有如此的內接正方形?又最大的面積為何?

於是,我就利用課餘時間,作了以下的研究。

貳.研究目的:

(一).在銳角三角形中,如何利用尺規作圖,作出最大內接或偏接正方形?又如何導出最大正方形的邊長?

(二).在直角三角形中,如何利用尺規作圖,作出最大內接或偏接正方形?又如何導出最大正方形的邊長?

(三).在鈍角三角形中,如何利用尺規作圖,作出最大內接或偏接正方形?又如何導出最大正方形的邊長?

(四).在特殊四邊形中,如何利用尺規作圖,作出最大內接或偏接正方形或對接正方形?又如何導出最大正方形的邊長?

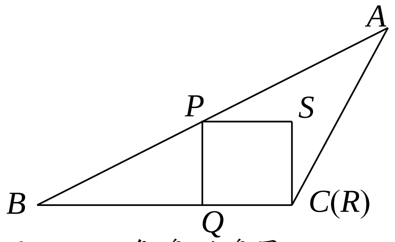
參.研究器材: 直尺、圓規、GSP繪圖軟體

肆.解釋名詞:

(一).內接正方形:指一正方形的四頂點全部位於多邊形邊界上時,我們稱其為『內接正方形』。(如右上圖)

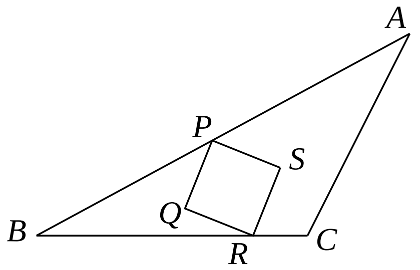
(二).偏接正方形:指一正方形的四頂點中,其中三頂點位於多邊形邊界上,而另一頂點位於多邊形內部之正方形;我們就暫稱其為『偏接正方形』。

例如:右圖中,P點在$\overline{AB}$上,$\overline{QR}$在$\overline{BC}$上(或R與C重合),
而S位於ΔABC的內部;此時所形成的正方形,
我們暫稱為偏接正方形$PQRS$。



(三).對接正方形:指一正方形的四頂點中,其中恰有兩對角頂點位於多邊形邊界上,而另兩對角頂點位於多邊形內部之正方形;我們就暫稱其為『對接正方形』。

例如：右圖中，P點在$\overline{AB}$上，R點在在$\overline{BC}$上，而Q與S位於ΔABC的內部；此時所形成的正方形，我們暫稱為對接正方形$PQRS$。



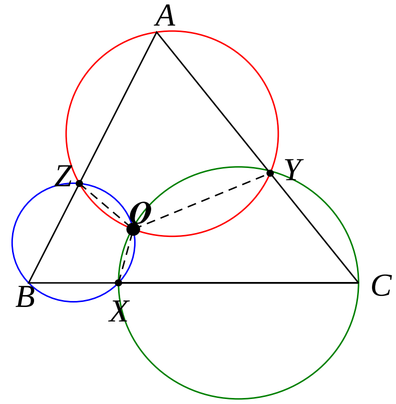
伍. 預備知識：

(一).密克($Miquel$)定理：(如右圖)

[已知]：ΔABC中，X、Y、Z分別是$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$上的點

[求証]：過A、Y、Z三點之圓與過B、X、Z三點之圓及過C、X、Y三點之圓，共同交於一點O

[証明]：



1.過B、X、Z三點之圓與過C、X、Y三點之圓，已有一交點X，故當有第二交點O時，可連$\overline{OX}$，$\overline{OY}$，$\overline{OZ}$；則$\angle AYO = \angle CXO = \angle BZO$

2.$\because \angle AYO = \angle BZO \therefore A$、$Z$、$O$、$Y$四點共圓，故過$A$、$Y$、$Z$三點之圓與過$B$、$X$、$Z$三點之圓及過$C$、$X$、$Y$三點之圓，共同交於一點$O$

(二).半角公式：若 θ 為銳角 (証明見[附件一])

$$(1).Sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-Cos\theta}{2}}\quad(2).Cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+Cos\theta}{2}}\quad(3).Tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-Cos\theta}{1+Cos\theta}}=\frac{Sin\theta}{1+Cos\theta}=\frac{1-Cos\theta}{Sin\theta}$$

(三).海龍公式：

若ΔABC的三邊長$\overline{BC}=a,\overline{CA}=b,\overline{AB}=c$，令$s=\dfrac{a+b+c}{2}$，

則ΔABC面積$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

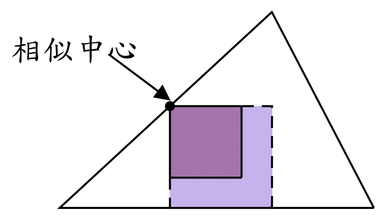
陸. 研究方法與過程：

[第一部份]：三角形

在“在已知三角形內，求作一個最大的正方形”，首先，此題設中所求的正方形，顯然必須允許正方形的某些頂點或全部頂點都在已知三角形的周界上，否則將無最大可言！這是可以想見的。因此，一個正方形在已知三角形內，可分成(一).正方形中，有一頂點在已知三角形周界上。(二).正方形中，有兩頂點在已知三角形周界上。(三).正方形中，有三頂點在已知三角形周界上。(四).正方形中，四頂點皆在已知三角形周界上等四部分。

(一).正方形中，有一頂點在已知三角形周界上：

針對此一問題，我們只需以此正方形頂點做為相似中心，總可以把正方形放大使它至少再有另一頂點在已知三角形的周界上。因此，顯而易見正方形中，只有一頂點在已知三角形周界上時，必不為已知三角形內的最大正方形。(如右上圖)



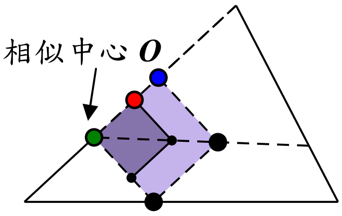
(二).正方形中，有兩頂點在已知三角形周界上：它可能有三種情況：

(1).正方形相鄰兩頂點同在已知三角形的一邊上(含正方形的一頂點與三角形頂點重合) (如圖 2.1)

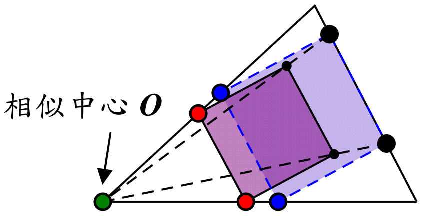
(2).正方形相鄰兩頂點分在已知三角形的兩邊上(如圖 2.2)

(3).正方形有一組相對的兩頂點同在已知三角形的兩邊上(含正方形的一頂點與之三角形頂點重合(除相似中心 O 外)) (如圖 2.3)

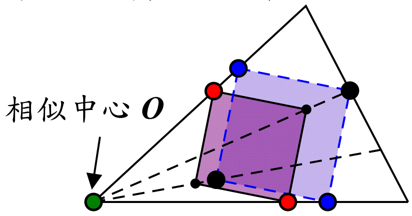
而此三種情形，我們也都可找得一適當點(可能為正方形的已知兩頂點或已知三角形頂點)來作相似中心，而把正方形放大。(如圖 2.1) (如圖 2.2) (如圖 2.3),使它至少再有一頂點在已知三角形的周界上;因此正方形中,只有兩頂點在已知三角形周界上時,也必不為已知三角形內的最大正方形。



(圖 2.1)



(圖 2.2)



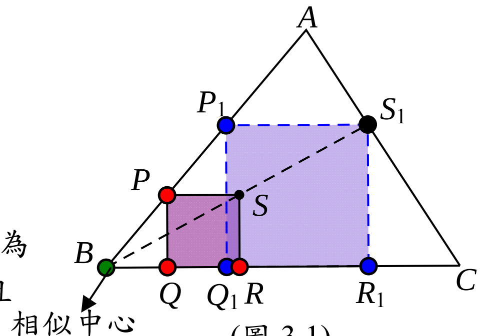
(圖 2.3)

(三).正方形中,有三頂點在已知三角形周界上:它可依三角形類型分

(A).ΔABC為銳角三角形時:依正方形$PQRS$中三頂點位於ΔABC周界上的位置,可分如下兩種情形:

(1).$PQRS$有一邊落在ΔABC的一邊上,另一頂點落在ΔABC的另一邊上:

例如:P點在$\overline{AB}$上,$\overline{QR}$在$\overline{BC}$上,(如圖3.1),我們可以B點為相似中心,作得正方形$P_1Q_1R_1S_1$顯然在ΔABC內且比$PQRS$大,又S_1落於$\overline{AC}$上。

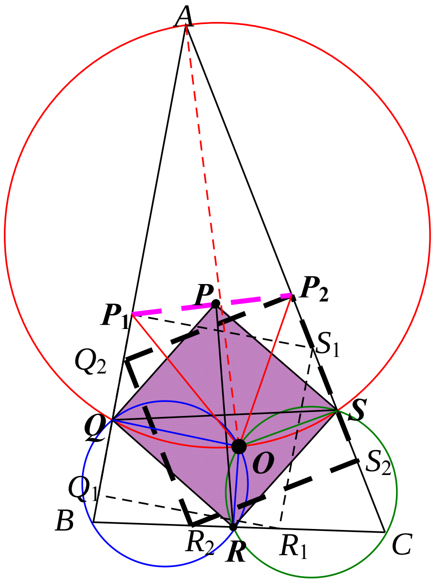


(圖 3.1)

(2).$PQRS$三頂點分別落於ΔABC的三邊上:

例如:Q點在$\overline{AB}$上,R點在$\overline{BC}$上,S點在$\overline{AC}$上,(如圖3.2),我們分別作過ASQ、BQR、CRS的三個圓,依據密克定理:此三個圓必交於一點O;

$$
\begin{aligned}
\text{但因}\ \angle BOC &= \angle OBQ + \angle BAC + \angle SCO \\
&= \angle ORQ + \angle BAC + \angle SRO \\
&= \angle BAC + \angle SRQ \\
\angle COA &= \angle OCR + \angle CBA + \angle QAO \\
&= \angle OSR + \angle CBA + \angle QSO \\
&= \angle ABC + \angle QSR \\
\angle AOB &= \angle OAS + \angle ACB + \angle RBO \\
&= \angle OQS + \angle ACB + \angle RQO = \angle ACB + \angle RQS
\end{aligned}
$$



(圖 3.2)

由於$\angle BAC$、$\angle SRQ$、$\angle ABC$、$\angle QSR$、$\angle ACB$、$\angle RQS$、$\angle BOC$、$\angle COA$、$\angle AOB$等這些角,對於ΔABC而言均為定角,所以O對於ΔABC來說,是一個定點。這也就是說:當我們把$PQRS$看成一個會動的正方形,其正方形的頂點Q,R,S各在$\overline{AB},\overline{BC},\overline{AC}$上移動時,所得的點$O$永遠不改變其位置。其次,也因為$\angle QOS+\angle BAC=180°$,$\angle ROQ+\angle CBA=180°$,$\angle SOR+\angle ABC=180°$,所以$\angle QOS,\angle ROQ,\angle SOR$也均為定角,因此對於$\Delta RSQ$來說,$O$是一個定點,故$O$點對於正方形$PQRS$來說,其位置也是一個定點。也就是說:當$Q$,

R,S三點各在$\overline{AB},\overline{BC},\overline{AC}$上作移動時,正方形$PQRS$會繞著$O$點而運動。又因為$Q,R,S$三點都作直線運動,所以$P$點也跟著作直線運動(軌跡定理)。

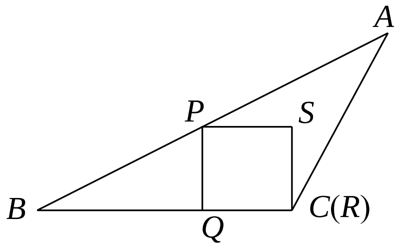
設點P運動至$\overline{AB},\overline{AC}$上的$P_1$與$P_2$點的位置,於是正方形$PQRS$便到達正方形$P_1Q_1R_1S_1$與正方形$P_2Q_2R_2S_2$的位置,而正方形$P_1Q_1R_1S_1$與正方形$P_2Q_2R_2S_2$都是內接於$\Delta ABC$的正方形(亦即正方形$P_1Q_1R_1S_1$,正方形$P_2Q_2R_2S_2$是以$O$為相似中心所作的與正方形$PQRS$的相似圖形)。也由於正方形$PQRS\sim$正方形$P_1Q_1R_1S_1\sim$正方形$P_2Q_2R_2S_2$,所以$\overline{PQ}:\overline{P_1Q_1}:\overline{P_2Q_2}=\overline{OP}:\overline{OP_1}:\overline{OP_2}$;但$\overline{OP}$至少小於$\overline{OP_1}$與$\overline{OP_2}$二者之一,故知正方形$PQRS$至少小於正方形$P_1Q_1R_1S_1$與正方形$P_2Q_2R_2S_2$二者之一。由此便已証明正方形$PQRS$在$\Delta ABC$的內部並不是最大的。

(B).ΔABC為直角三角形時:情況與銳角三角形類似故省略。

(C).ΔABC為鈍角三角形時:正方形$PQRS$在ΔABC內部,且有三頂點在三角形的周界上,也可分為兩種狀況:

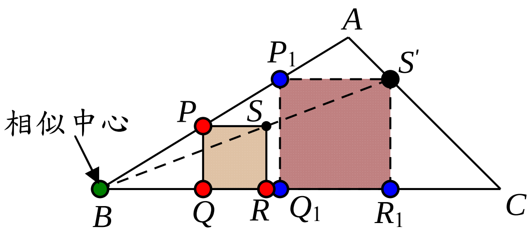
(1).$PQRS$有一邊落在ΔABC的一邊上,另一頂點落在ΔABC的另一邊上:

例如:P點在$\overline{AB}$上,$\overline{QR}$在$\overline{BC}$上,這當中,也許R與C重合(如圖3.3)而形成我們特稱的偏接正方形$PQRS$。

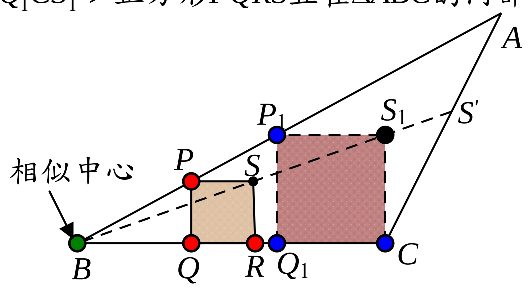


(圖 3.3)

現假定R不與C重合,延長$\overline{BS}$交$\overline{AC}$於S',則在$\dfrac{\overline{BS'}}{\overline{BS}}$與$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BR}}$的二比值中,必有一者較小。如在(圖3.4)中,$\dfrac{\overline{BS'}}{\overline{BS}}$的比值較小,則可自$S'$作$\overline{CB}$的平行線交$\overline{AB}$於$P_1$,再作$\overline{P_1Q_1}\perp\overline{BC},\overline{S'R_1}\perp\overline{BC}$,分別交$\overline{BC}$於$Q_1$與$R_1$,則正方形$P_1Q_1R_1S'>$正方形$PQRS$且在$\Delta ABC$的內部;又如在(圖3.5)中,$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BR}}$的比值較小,則可自$C$引$\overline{CB}$的垂線交$\overline{SS'}$於$S_1$,再自$S_1$引$\overline{BC}$的平行線,與$\overline{AB}$交於$P_1$,然後再引$\overline{P_1Q_1}\perp\overline{BC}$並交於$Q_1$,則正方形$P_1Q_1CS_1>$正方形$PQRS$且在$\Delta ABC$的內部。



(圖 3.4)



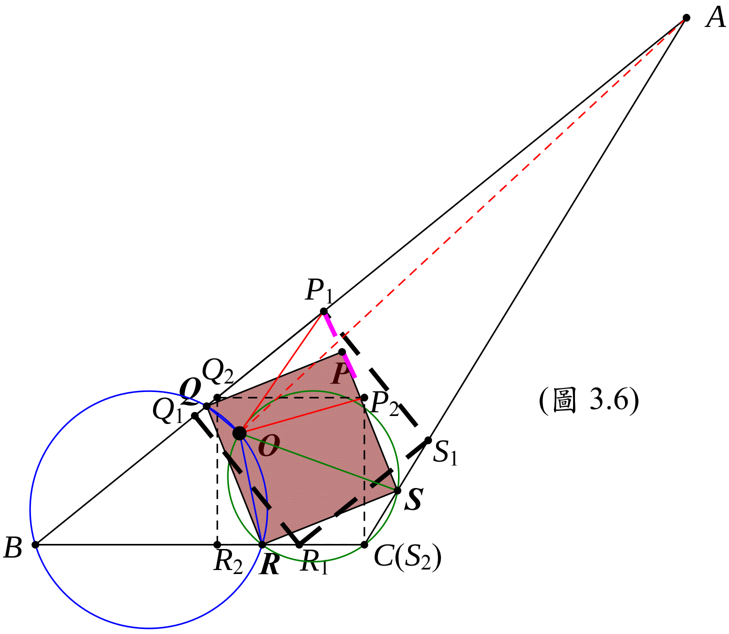
(圖 3.5)

(2).$PQRS$中有三頂點分別落在ΔABC的三邊上:

例如:Q點在$\overline{AB}$上,R點在$\overline{BC}$上,S點在$\overline{CA}$上(如圖3.6),這時$\angle BAC$一定為銳角(因為它必小於$\angle QPS=90°$),故可假定$\angle ACB$為鈍角,我們作正方形$P_1Q_1R_1S_1$,令$\overline{P_1Q_1}$在$\overline{AB}$上,R_1在$\overline{BC}$上,S_1在$\overline{CA}$上;又作正方形$P_2Q_2R_2S_2$,令Q_2在$\overline{AB}$上,R_2在$\overline{BC}$上,S_2與C重合;這樣的兩個正方形一定都在ΔABC的內部。可按(A)情形中之(2)的方法,找出不動點O,使得正方形$PQRS$繞不動點O運動;而正方形$P_1Q_1R_1S_1$與正方形$P_2Q_2R_2S_2$顯然為$PQRS$運動過程

中的兩個位置,故P_1,P,P_2三點是共線的。

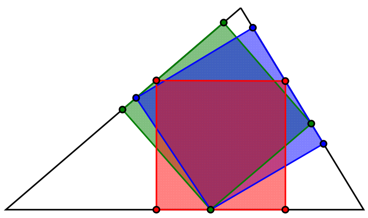
當點P在$\overline{P_1P_2}$上運動時,正方形$PQRS$顯然恆在ΔABC的內部,若點P越出$\overline{P_1P_2}$之外時,則正方形$PQRS$便超出ΔABC的範圍之外了。也因為$\overline{OP}$至少小於$\overline{OP_1}$與$\overline{OP_2}$二者之一,故正方形$PQRS$至少小於正方形$P_1Q_1R_1S_1$與正方形$P_2Q_2R_2S_2$二者之一。這說明了正方形$PQRS$可以繼續擴大,但不能超出正方形$P_1Q_1R_1S_1$與正方形$P_2Q_2R_2S_2$二者之一。



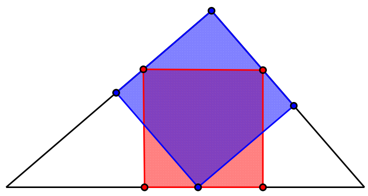
(圖 3.6)

從以上的探討中,我們得知:想要在已知三角形內求一個最大的正方形時,(a)當已知三角形為銳角或直角三角形的時候,只需從銳角或直角三角形中,去尋找它的內接正方形即可;而(b)當已知三角形為鈍角三角形的時候,則須從鈍角三角形中,去尋找它的內接正方形或偏接正方形。

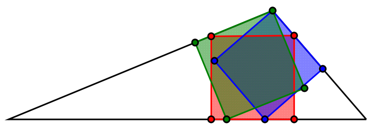
我們都知道:內接正方形在銳角三角形中共有三個,直角三角形中則有兩個,而鈍角三角形中只一個,但鈍角三角形中另有兩個偏接正方形;(如下圖)



(銳角三角形)



(直角三角形)



(鈍角三角形)

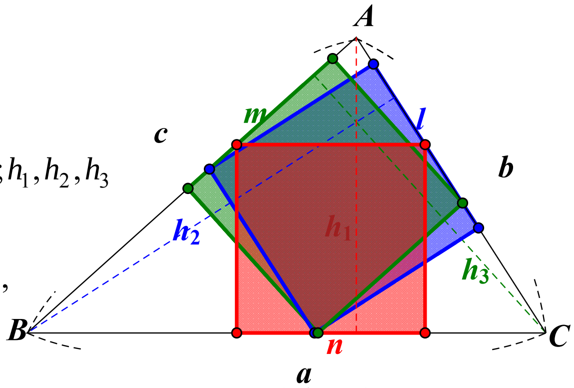
但在已知三角形內各種的內接正方形與偏接正方形中,何者為最大呢?為了簡潔達到目的,我們証明了以下兩個定理:

[定理一]:三角形中,大邊與其上高之和,必大於小邊與其上高之和。([証明][討論]見[附件二])

[定理二]:一正方形有一邊落在三角形的底邊或底邊的延長線上,而另兩頂點分別落在三角形另兩邊之上;設正方形邊長為n,三角形的底邊為a,底邊之高為h_1;則有$n=\dfrac{ah_1}{a+h_1}$。

有了[定理一]與[定理二]後,我們就可討論出「在已知三角形內各種的內接正方形與偏接正方形中,何者面積為最大?」。

(A).銳角三角形時:(如圖 5.1)



(圖 5.1)

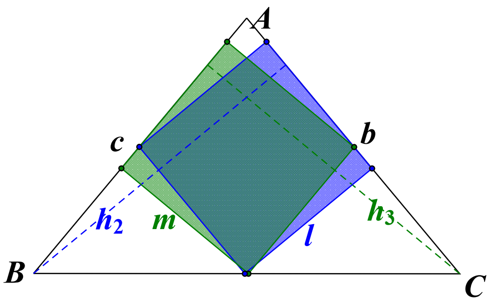
設a,b,c依序代表ΔABC的三邊$\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}(a>b>c)$;$h_1,h_2,h_3$依序代表$\overline{BC},\overline{AC},\overline{AB}$三邊上之高;$l,m,n$依序代表在$\overline{AC},\overline{AB},\overline{BC}$上的內接正方形邊長;那麼根據[定理二],

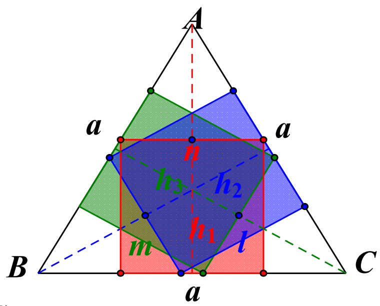
有 $$l=\frac{bh_2}{b+h_2},m=\frac{ch_3}{c+h_3},n=\frac{ah_1}{a+h_1}$$

令$b<c<a$,則由[定理一],知$l>m>n$。如此,就說明了:銳角三角形之內的所有正方形,以立於最短邊上的內接正方形為最大且邊長$l=\dfrac{\text{最短邊與最短邊之高的乘積}}{\text{最短邊與最短邊之高的和}}=\dfrac{bh_2}{b+h_2}$。

但若銳角三角形中,有兩邊相等且小於第三邊時,則立於等邊上的內接正方形同時為最大;亦即銳角等腰三角形中,且$60°<\text{頂角}<90°$時,則以腰邊上之兩內接正方形同時為最大且邊長$l=m=\dfrac{bh_2}{b+h_2}=\dfrac{ch_3}{c+h_3}$。(如下左圖)

而若為三邊相等的正三角形,則以三邊的三個內接正方形同時都為最大且邊長$l=m=n=\dfrac{bh_2}{b+h_2}=\dfrac{ch_3}{c+h_3}=\dfrac{ah_1}{a+h_1}=\dfrac{(4\sqrt{3}-3)}{13}\times$邊長。(如下右圖)





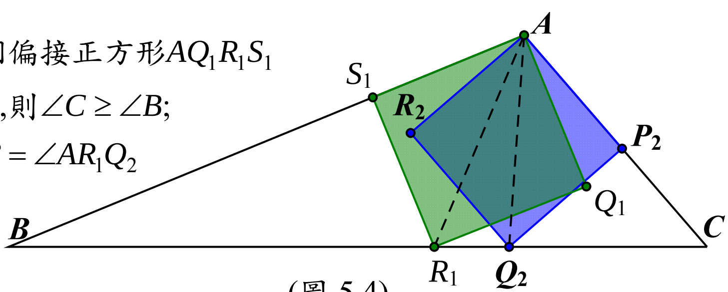
[尺規作圖]:銳角三角形內部的最大正方形(見[附件三])

(B).直角三角形時:

其情形與銳角三角形類似,其結論為在直角三角形之內的所有正方形中,以立於兩股上的內接正方形為最大且邊長$=\dfrac{\text{兩股之積}}{\text{兩股之和}}=\dfrac{bc}{b+c}$。而等腰直角三角形,亦是如此。

[尺規作圖]:直角三角形內部的最大正方形(見[附件四])

(C).鈍角三角形時:(如圖 5.4)



(圖 5.4)

設ΔABC的$\angle A$為鈍角,我們先作出兩個偏接正方形$AQ_1R_1S_1$與$AP_2Q_2R_2$;(如圖5.4);現假定$\overline{AB}\geq\overline{AC}$,則$\angle C\geq\angle B$;

於是 $\angle AQ_2R_1=\angle C+45°\geq\angle B+45°=\angle AR_1Q_2$

即 $\overline{AR_1}\geq\overline{AQ_2}$

故正方形$AQ_1R_1S_1\geq$正方形$AP_2Q_2R_2$。

這就是說:在等腰的鈍角三角形中,兩個偏接正方形是一樣大小;如夾鈍角的兩邊不等,則立於較大邊上的偏接正方形較大。

現在,我們只須要再比較較大的偏接正方形與僅有的內接正方形的大小,就可以找出鈍角三角形內部中的最大正方形了!

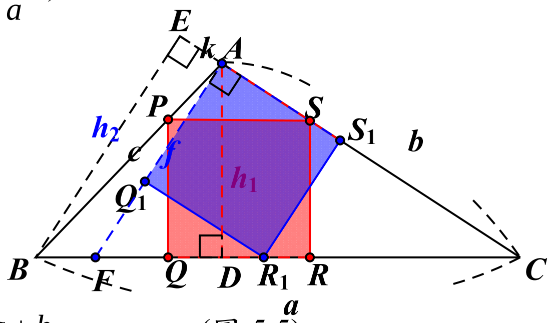
首先,當$\overline{AB}<\overline{AC},\angle A>90^\circ$,(如圖5.5),我們作$\overline{AD}\perp\overline{BC},\overline{BE}\perp\overrightarrow{BA}$並分別相交於$D$與$E$;令$\overline{BC}=a,\overline{AC}=b,\overline{AD}=h_1$,再作鈍角三角形的內接正方形$PQRS$與立於$\overline{AC}$上的偏接正方形$AQ_1R_1S_1$;則由於

$$Tan\frac{1}{2}\angle C=\sqrt{\frac{1-Cos\angle C}{1+Cos\angle C}}=\sqrt{\frac{(1-Cos\angle C)^2}{1-Cos^2\angle C}}=\frac{1-Cos\angle C}{Sin\angle C}\quad(\text{半角公式})$$

$$=\frac{1-\frac{\overline{CE}}{\overline{BC}}}{\frac{\overline{CE}}{\overline{BC}}}=\frac{\frac{\overline{BC}-\overline{CE}}{\overline{BC}}}{\frac{\overline{CE}}{\overline{BC}}}=\frac{\overline{BC}-\overline{CE}}{\overline{CE}}\qquad\text{因為}$$

$$\overline{BC}-\overline{CE}(=a-\overline{CE})<\overline{BC}-\overline{AC}(=a-b),\overline{BE}<\overline{BC}(=a);$$

而$\frac{\overline{BC}-\overline{CE}}{\overline{CE}}(=Tan\frac{1}{2}\angle C)$與$\frac{\overline{BC}-\overline{AC}}{\overline{BC}}(=\frac{a-b}{a})$的比值大小,有如下三種關係:



(圖 5.5)

(1).$\frac{a-b}{a}<Tan\frac{1}{2}\angle C=\frac{1-Cos\angle C}{Sin\angle C}$

$\Rightarrow aSin\angle C-bSin\angle C<a-aCos\angle B$

$\Rightarrow \overline{BE}-h_1<a-\overline{CE}\Rightarrow \overline{BE}+\overline{CE}<a+h_1$

延長$\overline{AQ_1}$交$\overline{BC}$於F,令$\overline{AF}=f$,於是有

$$\frac{ah_1}{bf}=\frac{ah_1}{h_1\cdot\overline{FC}}=\frac{a}{\overline{FC}}=\frac{\overline{CE}}{b}=\frac{\overline{BE}}{f}=\frac{\overline{CE}+\overline{BE}}{b+f}<\frac{a+h_1}{b+f}$$

或由 $\frac{ah_1}{bf}<\frac{a+h_1}{b+f}\Rightarrow\frac{ah_1}{a+h_1}<\frac{bf}{b+f}$,又由前述[定理二],知:$\overline{PQ}=\frac{ah_1}{a+h_1},\overline{AQ_1}=\frac{bf}{b+f}$

故內接正方形$PQRS<$偏接正方形$AQ_1R_1S_1$且$\overline{AQ_1}=\frac{\overline{AF}\cdot\overline{AC}}{\overline{AF}+\overline{AC}}=\frac{bf}{b+f}$

即偏接正方形邊長$l=\frac{\text{最短邊所對銳角所成直角三角形鄰邊與對邊之積}}{\text{最短邊所對銳角所成直角三角形鄰邊與對邊之和}}=\frac{bf}{b+f}$。同理當

(2).$\frac{a-b}{a}=Tan\frac{1}{2}\angle C\Rightarrow$內接正方形$PQRS$面積$=$偏接正方形$AQ_1R_1S_1$面積

(3).$\frac{a-b}{a}>Tan\frac{1}{2}\angle C\Rightarrow$內接正方形$PQRS>$偏接正方形$AQ_1R_1S_1$且$\overline{PQ}=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AD}}{\overline{BC}+\overline{AD}}$

即內接正方形邊長$n=\frac{\text{鈍角對邊與其高之積}}{\text{鈍角對邊與其高之和}}=\frac{ah_1}{a+h_1}$。

至此,我們得到以下的結論:若ΔABC為鈍角三角形且$\angle A$為鈍角,則:

(1). 若$\overline{AB}>\overline{AC}$:(指定銳角對邊<另一銳角對邊)

(a).當$\frac{a-b}{a}(=\frac{\overline{BC}-\overline{AC}}{\overline{BC}})<Tan\frac{1}{2}\angle C$時,以立於$\overline{AC}$上的偏接正方形的面積為最大

且邊長$l=\frac{\text{指定銳角所成直角三角形鄰邊與對邊之積}}{\text{指定銳角所成直角三角形鄰邊與對邊之和}}=\frac{bf}{b+f}$。

[尺規作圖]:鈍角$\Delta ABC,\angle A>90^\circ,\overline{AB}<\overline{AC},\frac{\overline{BC}-\overline{AC}}{\overline{BC}}<Tan\frac{1}{2}\angle C$時

作鈍角ΔABC內部的最大偏接正方形$AQ_1R_1S_1$(見[附件五])

(b).當$\dfrac{a-b}{a}(=\dfrac{\overline{BC}-\overline{AC}}{\overline{BC}})=Tan\dfrac{1}{2}\angle C$時,以$\overline{BC}$上的內接正方形和立於$\overline{AC}$上的偏接正方形的面積同時為最大且邊長$=\dfrac{\text{鈍角對邊與其高之積}}{\text{鈍角對邊與其高之和}}$。

[尺規作圖]:偏接正方形的作法,仿照(如圖5.5.1),故省略。

而內接正方形的作法如下:(見[附件六])

(c).當$\dfrac{a-b}{a}(=\dfrac{\overline{BC}-\overline{AC}}{\overline{BC}})>Tan\dfrac{1}{2}\angle C$時,以$\overline{BC}$上的內接正方形的面積為最大且邊長$n=\dfrac{\text{鈍角對邊與其高之積}}{\text{鈍角對邊與其高之和}}$。

[尺規作圖]:仿照(如圖5.6),故省略。

綜合以上所述,我們作了如下的討論:

[已知]:鈍角$\angle BAC$中,$\angle A>90°$,A為$\overrightarrow{CA}$上之動點$\overline{AC}>\overline{AB}$(如圖5.7)

[求作]:上述(a)、(b)、(c)結論的範圍

[作法]:1.作$\angle ACB$平分線$\overrightarrow{CO}$

2.過B,作$\overrightarrow{BO}\perp\overline{BC}$並交$\overrightarrow{CO}$於$O$;作$\overrightarrow{OB'}$交$\overrightarrow{CA}$於$B'$

3.以$\overline{BO}$為半徑,B為圓心,畫弧,交$\overline{BC}$於Q_2';以$\overline{CQ_2'}$為半徑,C為圓心,畫弧,交$\overline{AC}$於A_2;連$\overline{A_2B}$,則$\overline{B'A_2}=\overline{BO}=\overline{BQ_2'}$

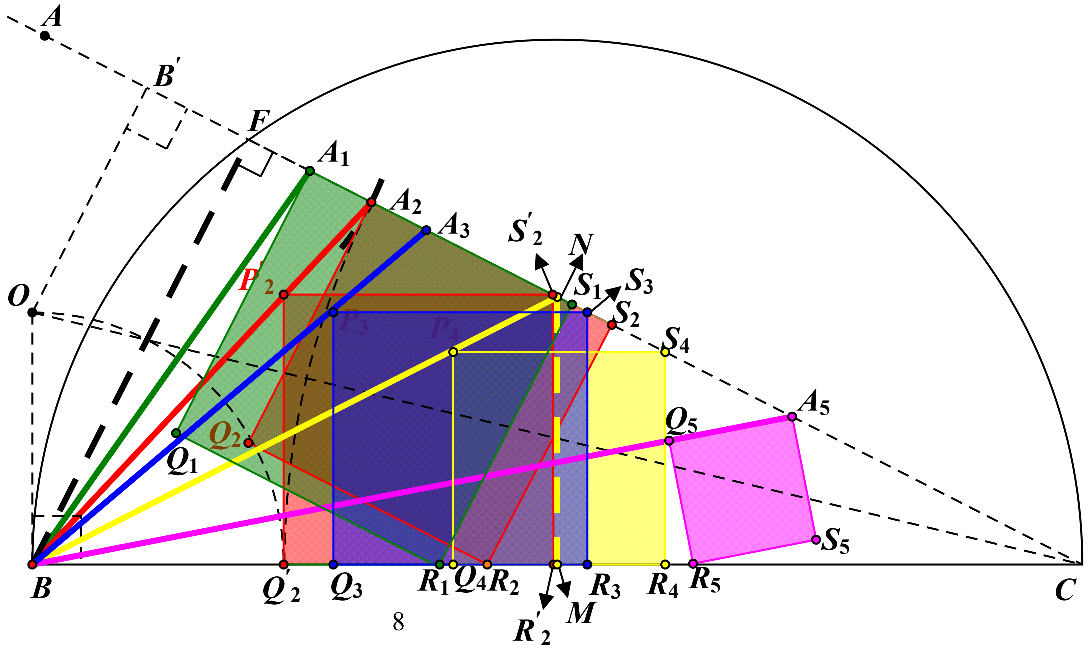
4.取$\overline{BC}$中點M,作$\overrightarrow{NM}\perp\overline{BC}$交$\overrightarrow{CA}$於$N$,連$\overline{MN}$

[証明]:設$\overline{BC}=a$,$\overline{BC}$上之高$\overline{AD}=h_1$,正方形$PQRS$邊長$=l$

1.$\because\angle OCB=\dfrac{1}{2}\angle ACB\therefore Tan\angle OCB=Tan\dfrac{1}{2}\angle ACB=\dfrac{\overline{BO}}{\overline{BC}}$

2.$\because\overline{CB'}=\overline{CB},\overline{CQ_2'}=\overline{CA_2},\therefore\overline{B'A_2}=\overline{BO}=\overline{BQ_2'}$,故$\dfrac{\overline{BO}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{B'A_2}}{\overline{BC}}=Tan\dfrac{1}{2}\angle ACB$

3.$\because\overleftrightarrow{MN}$為$\overline{BC}$中垂線,$\therefore\overline{BN}=\overline{NC}$



(圖 5.7)

[討論]:

1.若A點落於$\overrightarrow{FB'}$上(含F),$\because \angle BFC = 90^\circ \therefore \angle BAC \le 90^\circ$,而與$\angle BAC$為鈍角條件,產生矛盾;所以$A$點落於$\overrightarrow{FB'}$上(含$F$)不成立。

2.若A點落於$\overline{A_2F}$上(不含A_2與F),則$\angle BAC > 90^\circ$,且

$Tan\frac{1}{2}\angle ACB = \frac{\overline{B'F}}{\overline{BF}} > \frac{\overline{B'A}}{\overline{BC}}$,故可作得一個最大的偏接正方形。

如A點移至A_1點,可作得一個最大的偏接正方形$A_1Q_1R_1S_1$。

3.若A點恰落於A_2點重合,則$\angle BAC > 90^\circ$,且$Tan\frac{1}{2}\angle ACB = \frac{\overline{B'F}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{BC}}$,

而各可作得一個面積相等的最大偏接正方形$A_2Q_2R_2S_2$與內接正方形$P_2'Q_2'R_2'S_2'$。

4.若A點落於$\overline{A_2N}$上(不含A_2與N),則$\angle BAC > 90^\circ$,且

$Tan\frac{1}{2}\angle ACB = \frac{\overline{B'F}}{\overline{BF}} < \frac{\overline{B'A}}{\overline{BC}}$,而可作得一個最大的內接正方形。

如A點移至A_3點,可作得一個最大的內接正方形$P_3Q_3R_3S_3$。

5.若A點落於N上(即A與N重合),則$\overline{CN(A)} = \overline{(A)NB}, \angle BN(A)C > 90^\circ$;

且$Tan\frac{1}{2}\angle ACB = \frac{\overline{B'F}}{\overline{BF}} < \frac{\overline{B'A}}{\overline{BC}}$,而可作得一個最大的內接正方形。

如A點移至N點,可作得一個最大的內接正方形$P_4Q_4R_4S_4$。

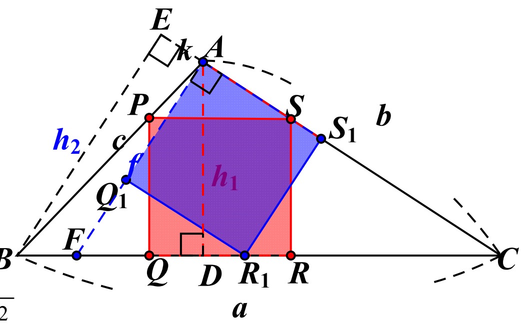
6.若A點落於$\overline{NC}$上(不含N,C),$\because \overline{CN} = \overline{NB} \therefore \overline{AC} < \overline{AB}, \angle BAC > 90^\circ$;

且$Tan\frac{1}{2}\angle ACB = \frac{\overline{B'F}}{\overline{BF}} > \frac{\overline{B'A}}{\overline{BC}}$,而可作得一個最大的偏接正方形。

如A點移至A_5點,可作得一個最大的偏接正方形$A_5Q_5R_5S_5$。

透過以上的討論與證明，我們亦可利用[定理一]及[定理二]與《海龍(Heron's Formula)公式》推導出鈍角三角形的內接正方形邊長公式及偏接正方形邊長公式如下：

$\because \frac{f}{b} = \frac{h_2}{b+k} = \frac{h_2}{\sqrt{a^2-h_2^2}}$ (令$\overline{AF} = f, \overline{AE} = k, \overline{AD} = h_1, \overline{BE} = h_2$)



$\therefore f = \frac{bh_2}{\sqrt{a^2-h_2^2}}$

又$\because s = \frac{a+b+c}{2}$

$\therefore Tan\frac{1}{2}\angle C = \frac{\overline{BC}-\overline{CE}}{\overline{BE}} = \frac{a-(b+k)}{h_2} = \frac{a-\sqrt{a^2-h_2^2}}{h_2}$

因此可得到鈍角三角形內接正方形邊長為:

$$\frac{ah_1}{a+h_1}=\frac{a\cdot(a\cdot\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a})}{a\cdot(a+\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a})}=\frac{2a\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a^2+2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}\quad(\text{或}=\frac{abh_2}{a^2+bh_2})$$

鈍角三角形偏接正方形邊長為

$$\frac{bf}{b+f}=\frac{b\times\frac{bh_2}{\sqrt{a^2-h_2^2}}}{b+\frac{bh_2}{\sqrt{a^2-h_2^2}}}=\frac{\frac{bh_2}{\sqrt{a^2-h_2^2}}}{1+\frac{h_2}{\sqrt{a^2-h_2^2}}}=\frac{bh_2}{\sqrt{a^2-h_2^2}+h_2}$$

$$=\frac{2b^2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{b^2+\sqrt{b^2c^2-4[s(s-a)(s-b)(s-c)]}+2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}\qquad(\text{或}=\frac{bh_2}{b+k+h_2})$$

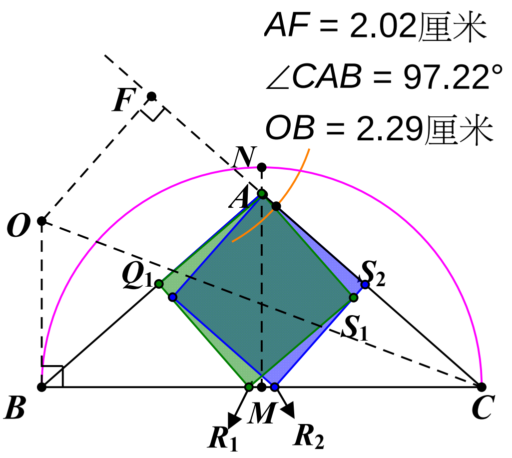
如此,在鈍角三角形已知三邊長時,就可直接推算比較出內接或偏接正方形面積的大小而決定出該繪製內接或偏接正方形。

(2). 若$\overline{AC}=\overline{AB}$(兩銳角的對邊相等)

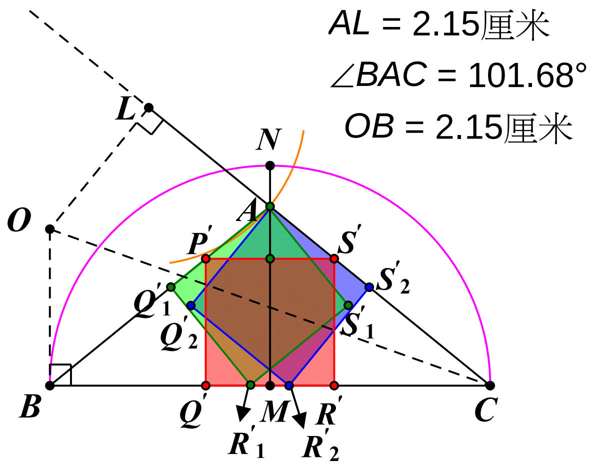
(a).當$\frac{a-b}{a}(=\frac{\overline{BC}-\overline{AC}}{\overline{BC}})<Tan\frac{1}{2}C$時,以立於$\overline{AC}$上及立於$\overline{AB}$上的兩個偏接正方形的面積為最大;

且邊長$=\dfrac{\text{任一銳角所成直角三角形鄰邊與對邊之積}}{\text{任一銳角所成直角三角形鄰邊與對邊之和}}$。(如圖5.8)

[尺規作圖]∵無法確定$\angle BCA$確實的大小,因而非尺規所能作圖。但仍存在上述的結論,可得相等兩邊的兩個最大偏接正方形$AQ_1R_1S_1$與$AQ_2R_2S_2$



(圖 5.8)



(圖 5.9)

(b).當$\frac{a-b}{a}(=\frac{\overline{BC}-\overline{AC}}{\overline{BC}})=Tan\frac{1}{2}C$時,以$\overline{BC}$上的內接正方形和立於$\overline{AC}$上的偏接正方形及立於$\overline{AB}$上的偏接正方形三者面積同時為最大 且邊長

$=\dfrac{\text{鈍角對邊與其高之積}}{\text{鈍角對邊與其高之和}}$。(如圖5.9)

[尺規作圖]∵無法確定$\angle BCA$確實的大小,因而非尺規所能作圖。但仍存在上述的結論,可得相等面積的內接最大正方形$P'Q'R'S'$與兩等邊的兩個最大偏接正方形$AQ_1'R_1'S_1'$與$AQ_2'R_2'S_2'$

(c).當$\dfrac{a-b}{a}(=\dfrac{\overline{BC}-\overline{AC}}{\overline{BC}})>Tan\dfrac{1}{2}C$時,仍以$\overline{BC}$上的內接正方形的面積為最大

且邊長$=\dfrac{鈍角對邊與其高之積}{鈍角對邊與其高之和}$。

[尺規作圖]:因為ΔABC就是(圖5.7)中的ΔNBC,故作法省略。而可得一個最大內接正方形。

(3). 至於,若$\overline{AC}<\overline{AB}$時,因與$\overline{AC}>\overline{AB}$的[作法][証明][討論]同,故不再贅述。

[第二部份]：特殊四邊形

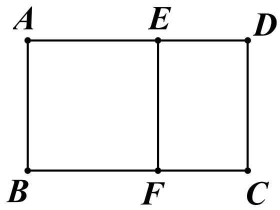
在“在已知特殊四邊形內, 求作一個最大的正方形”。首先，此題設中所求的正方形，顯然必須允許正方形的某些頂點或全部頂點都在已知四邊形的周界上, 否則將無最大可言！這是可以想見的。因此，一個正方形在特殊四邊形內，可分成(一).在正方形內部中，作出最大的正方形。(二). 在長方形內部中，作出最大的正方形。(三).在菱形內部中，作出最大的正方形。(四).在平行四邊形內部中，作出最大的正方形。(五).在梯形內部中，作出最大的正方形等五部分。

(一).在正方形中，作出最大的正方形：

針對此一問題，顯而易見的在內接正方形中，已知的最大正方形就是自己本身。

(二).在長方形中，做出最大的正方形：

在長方形中，已知的內接最大正方形就是利用短邊為正方形邊長，所作成的正方形為最大。如右圖：在長方形 $ABCD$ 中，最大的正方形就是以 $\overline{AB}$ 為正方形邊長，所作出的正方形 $ABFE$ 為最大。



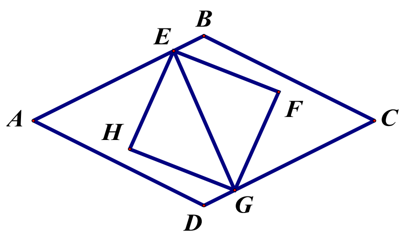
(三).在菱形中，作出最大的正方形：

在菱形內部中，求作最大正方形,其圖狀有如下的三種情形:

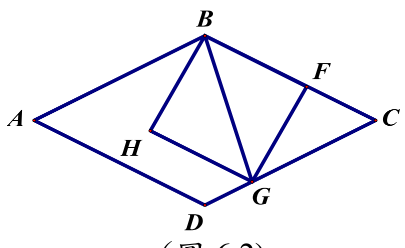
(1).對接正方形：正方形有一組相對的兩頂點同在菱形的邊界上(如圖 6.1)

(2).偏接正方形：正方形有三頂點在菱形的邊界上(如圖 6.2)

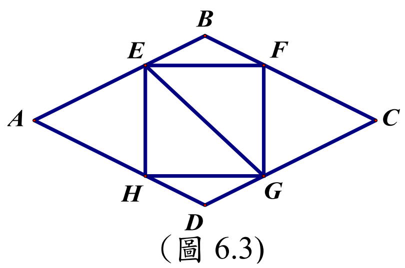
(3).內接正方形：正方形有四頂點在菱形的邊界上(如圖 6.3)



(圖 6.1)

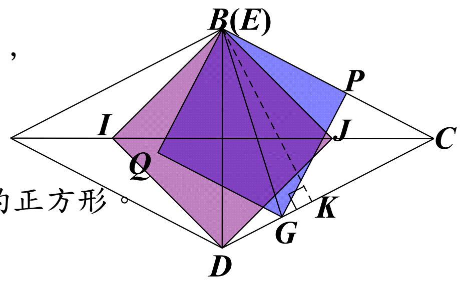


(圖 6.2)

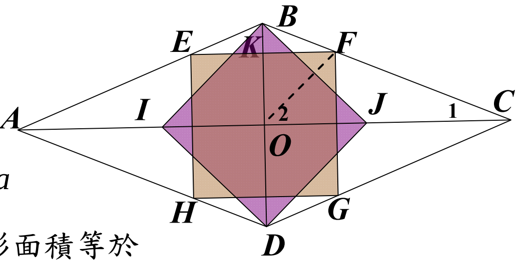


(圖 6.3)

在此三種情形中，第(2).種情形當動點 E 落在 B 點時(如右圖)，則 $\overline{BG}<\overline{BD}$，故此時所做出的偏接正方形 $EPGQ$ 必定小於對接正方形 $BJDI$,因此，菱形中的偏接正方形必定不是最大的正方形。



然而,正方形中最大者到底是對接正方形還是內接正方形呢？

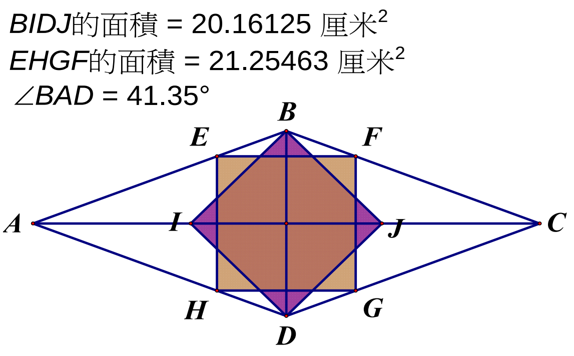


依據[定理一]與[定理二]可知，當菱形較小的內角 $\angle BAD=45°$ 時，則 $\angle OBC=67.5°,\angle 1=22.5°,\angle 2=45°,$ $\angle OFC=112.5°,\therefore \angle BFO=67.5°,\overline{BO}=\overline{OF}$;設 $\overline{BO}=\overline{JO}$ $=\overline{OF}=a$,則 $\overline{BJ}=\sqrt{2}a$;又 $\overline{FK}=\overline{EK}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\therefore \overline{BJ}=\overline{EF}=\sqrt{2}a$

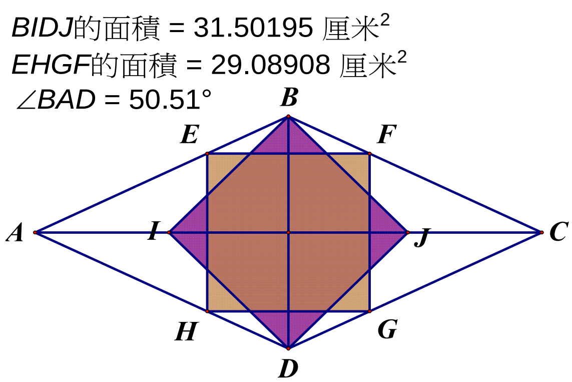
因此可得:在菱形中,若較小內角為 $45°$ 時,此時對接正方形面積等於內接正方形面積且最大正方形邊長=$\sqrt{2}\times Sin22.5°\times Cos22.5°\times$菱形邊長^2

$$=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\times\text{菱形邊長}^2=\frac{1}{2}\text{菱形邊長}^2=\frac{\text{菱形對角線之積}}{\text{菱形對角線之和}}\text{。}$$

同理:當菱形較小內角 $\angle BAD>45°$ 時，則 $\overline{BO}>\overline{OF}$,此時對接正方形面積大於內接正方形面積，且對接正方形邊長=$\sqrt{2}\times Sin\frac{1}{2}\angle BAD\times Cos\frac{1}{2}\angle BAD\times$菱形邊長^2(如圖 7.2);又當菱形較小的內角 $\angle BAD<45°$ 時，則 $\overline{BO}<\overline{OF}$,此時對接正方形面積小於內接正方形面積;且內接正方形邊長=$\dfrac{\text{菱形對角線之積}}{\text{菱形對角線之和}}$。(如圖 7.1)



(圖 7.1)



(圖 7.2)

而至於尺規作圖,我們可比照前述作法,故省略。

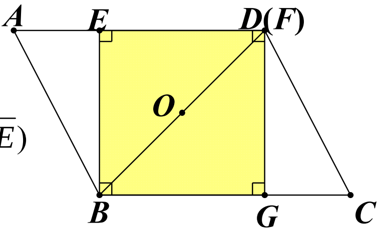
(四).在平行四邊形中，作出最大的正方形：

在平行四邊形內部中，要作出最大正方形的情形與菱形相似(亦即平行四邊形內部中,所有存在的偏接正方形,都不可能為平行四邊形內部中的最大正方形);然而，又因為平行四邊形又受限制於鄰邊不一定等長，因此，欲作出的正方形亦會受到鄰邊長與對角線長的限制。故在平行四邊形 $ABCD$ 內部中，欲作出最大正方形與下列線段的長度有關：

1.長邊 $\overline{AD}$(或 $\overline{BC}$)　　2.短邊 $\overline{AB}$(或 $\overline{CD}$)

3.長邊高 $h_{長}$(即$\overline{BE}$)與短邊高 $h_{短}$(即$\overline{DH}$)

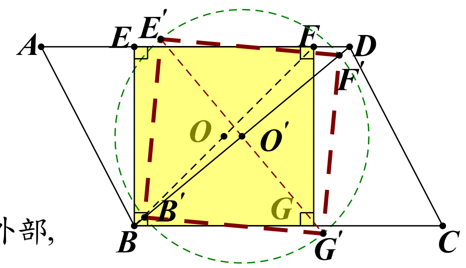
4.短對角線 $\overline{BD}$ 或長對角線 $\overline{AC}$



(1).若長邊 $\overline{BC}$ 大於短邊 $\overline{AB}$，且短對角線 $\overline{BD}$ 與長邊高 $h_{長}$(即$\overline{BE}$)

恰形成一等腰直角 $\Delta BED(F)$ 時, 則只可作得一個最大的內接正方形 $BEDG$, 且其邊長 $EFGB$

又 $\overline{BE}:\overline{ED(F)}:\overline{BD}=1:1:\sqrt{2}$



(2).若長邊 $\overline{BC}$ 大於短邊 $\overline{AB}$，且短對角線 $\overline{BD}$ 與長邊高 $h_{長}$ (即 $\overline{BE}$) 所形成的直角 ΔBED 中, $\overline{DE}>\overline{BE}$, 則

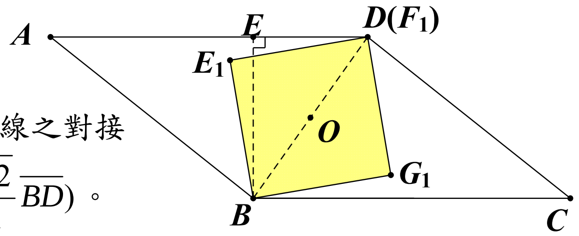
又 $\because$ 作 $\overline{O'F'}=\overline{OF}$, F' 介於 D,O' 之間, 且 $\overline{E'O'}\perp\overline{O'D}$,

$\therefore$ 當 F 移動至 F' 時, 則 E 移動至 E', 而落於四邊形 $EFGB$ 的外部,

故對接正方形必小於內接正方形 $EFGB$

因此, 在此情形下可作得無窮個最大的內接正方形且其邊長=平行四邊形的長邊上之高。

(3). 若長邊 $\overline{BC}$ 大於短邊 $\overline{AB}$，且短對角線 $\overline{BD}$ 與長邊高 $h_{長}$ (即 $\overline{BE}$) 所形成的直角 ΔBED 中, $\overline{DE}<\overline{BE}$, 則可以作出以短對角線 $\overline{BD}$ 為對角線之對接正方形為最大且其邊長 $=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 短對角線長 $(=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{BD})$。



同理，若平行四邊形的長短邊互換，仍可依上述規則找出內部的最大正方形。而至於尺規作圖,我們可比照前述作法,故省略。

(五).在梯形中，作出最大的正方形：

在梯形內部中，欲作得最大正方形時, 我們可延長梯形的兩腰以形成一個三角形而加以分類討論;其可分成下列幾種情況：

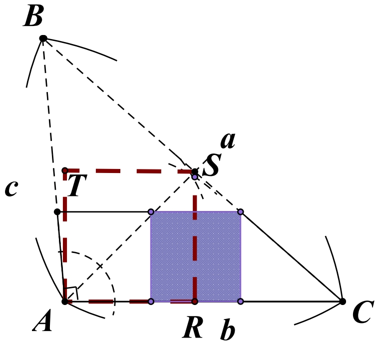
(A).當梯形兩底角為一銳角一鈍角(即圖中的 $\angle BAC$)且延長兩腰形成一個鈍角三角形又 $\dfrac{a-b}{a}<Tan\dfrac{1}{2}\angle C$ 時:

(1).若 $b>c$ 時,可分:

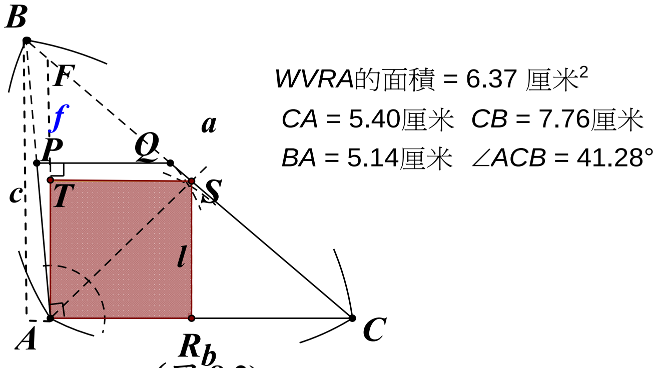
(i).顯而易見,當梯形之高 $\leq$ 立於 b 邊上(即 $\overline{AC}$) 所作之偏接正方形邊長時,則以梯形之高為邊長所作之內接正方形為最大(如圖 8.1)且可作得無限多個內接正方形。

(ii).當梯形之高 $>$ 立於 b 邊上(即 $\overline{AC}$) 所作之偏接正方形邊長時,則以立於 b 邊上(即 $\overline{AC}$) 所作之的偏接正方形 $ARST$ 為最大。

且邊長 $l=\dfrac{\angle C\text{所成直角三角形鄰邊與對邊之積}}{\angle C\text{所成直角三角形鄰邊與對邊之和}}=\dfrac{bf}{b+f}=\dfrac{bh_2}{b+k+h_2}$。(如圖 8.2)



(圖 8.1)

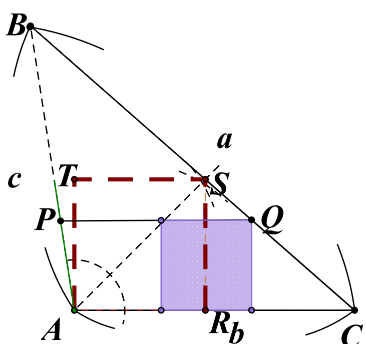


(圖 8.2)

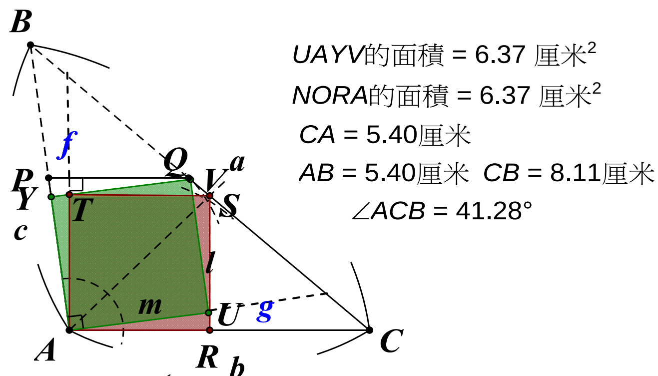
(2).若 $b=c$ 時,可分:

(i).當梯形之高 $\le$ 立於 b 邊上(即 $\overline{AC}$) 所作之偏接正方形邊長時,則以梯形之高為邊長所作之內接正方形為最大(如圖 8.3)且可作得無限多個內接正方形。

(ii).當梯形之高 $>$ 立於 b 邊上(即 $\overline{AC}$) 所作之偏接正方形邊長時,則以立於 b 邊上(即 $\overline{AC}$) 所作之的偏接正方形 $ARST$ 及立於 c 邊上的偏接正方形 $AUVY$ 同時為最大。為最大。且邊長 $l(\text{或}m)=\dfrac{\angle C(\text{或}\angle B)\text{所成直角三角形鄰邊與對邊之積}}{\angle C(\text{或}\angle B)\text{所成直角三角形鄰邊與對邊之和}}=\dfrac{bf}{b+f}=\dfrac{bh_2}{b+k+h_2}$。(如圖 8.4)



(圖 8.3)



(圖 8.4)

(3).若 $b<c$ 時,可分:

(i).當梯形之高 $\le$ 立於 b 邊上(即 $\overline{AC}$) 所作之偏接正方形邊長時,則以梯形之高為邊長所作之內接正方形為最大且可作得無限多個內接正方形。

(ii).為了找到梯形上底的範圍,必須求出立於 c 邊上(即 $\overline{BC}$) 之偏接正方形的臨界點(最高點)(即各內接(或偏接)正方形與梯形下底的最長距離)。

如右圖中的 $\overline{DE}$:

1.$\because \overline{PQ}//\overline{AC}$;延長$\overrightarrow{AP},\overrightarrow{CQ}$交於$B$,作立於$\overline{AB}$邊上之偏接正方形$AUDV$

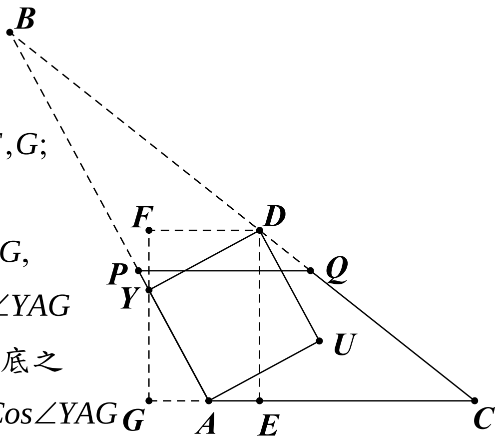
2.作$\overline{DE}\perp\overline{AC}$,過$Y$作$\overleftrightarrow{YF}\perp\overline{PQ}$,分別交$\overline{PQ},\overrightarrow{CA}$於$F,G$;

則$\overline{FD}=\overline{YG},\overline{FY}=\overline{GA},\therefore\overline{DE}=\overline{FG}=\overline{YG}+\overline{GA}$

又$\because\overline{YG}=\overline{AY}\times Sin\angle YAG,\overline{AG}=\overline{AY}\times Cos\angle YAG,$

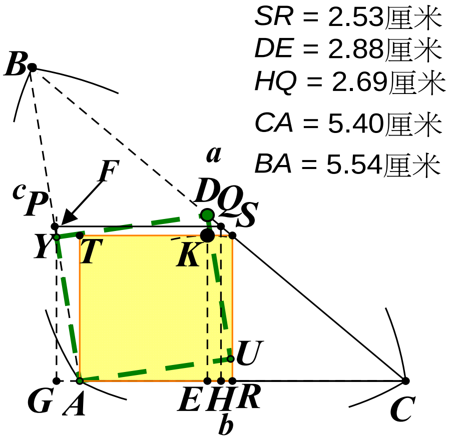
$\therefore\overline{DE}=\overline{YG}+\overline{GA}=\overline{AY}\times Sin\angle YAG,+\overline{AY}\times Cos\angle YAG$

故以$\overline{AB}$所作得的偏接正方形$AUDY$與梯形下底之最高點D的距離$\overline{DE}=\overline{AY}\times Sin\angle YAG,+\overline{AY}\times Cos\angle YAG$

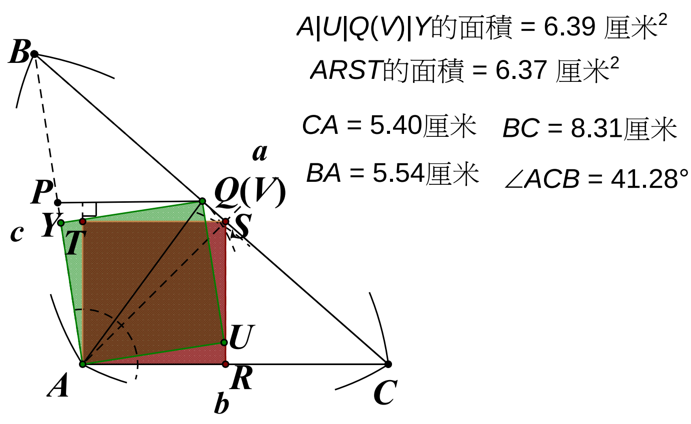


(註:在以下推論中,我們常會使用此法,找出各內接(或偏接)正方形與梯形下底的最長距離(臨界距離);因而我們暫稱此法為“臨界值”法)

(iii).當 $\overline{DE}\le$ 梯形之高,則以立於 c 邊上的偏接正方形 $AUVY$ 為最大,且僅有一個。(如圖 8.5) (如圖 8.6)



(圖 8.5)



(圖 8.6)

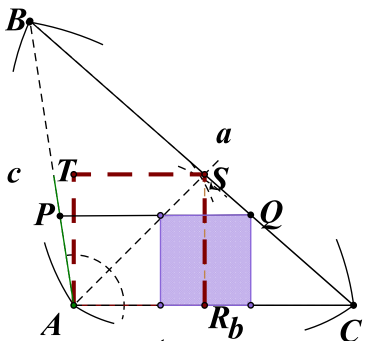
(B).當梯形兩底角為一銳角一鈍角(即圖中的$\angle BAC$)且延長兩腰形成一個鈍角三角形又 $\dfrac{a-b}{a}=Tan\dfrac{1}{2}\angle C$ 時:

(1).若$b>c$時,可分:

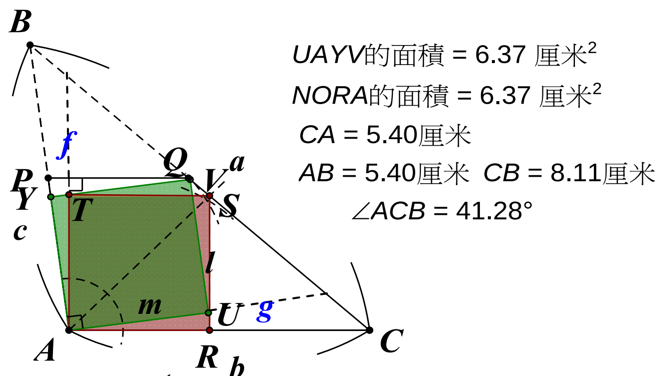
(i).顯而易見,當梯形之高$\le$立於b邊上(即$\overline{AC}$)所作之偏接正方形邊長時,則以梯形之高為邊長所作之內接正方形為最大(如圖 9.1)且可作得無限多個內接正方形。

(ii).當梯形之高$>$立於b邊上(即$\overline{AC}$)所作之偏接正方形邊長時,則以立於b邊上(即$\overline{AC}$)所作之的偏接正方形$ARST$為最大。

且邊長$l=\dfrac{\angle C\text{所成直角三角形鄰邊與對邊之積}}{\angle C\text{所成直角三角形鄰邊與對邊之和}}=\dfrac{bf}{b+f}=\dfrac{bh_2}{b+k+h_2}$。(如圖 9.2)



(圖 9.1)



(圖 9.2)

(2).若$b=c$時:

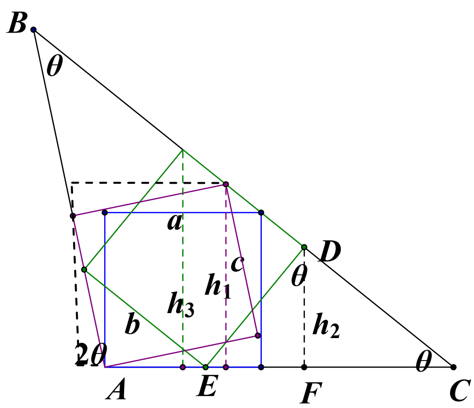
首先,我們仍然使用“臨界值”法分別計算出各內接(或偏接)正方形“臨界距離”(即h_1,h_2與h_3)

其中,因為$\Delta DCF\sim\Delta EDF$

$\therefore h_1=a\times Sin2\theta+a\times Cos2\theta$

$h_2=b\times Cos\theta$

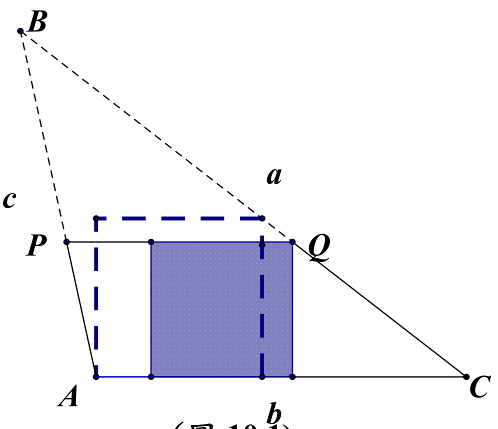
$h_3=b\times(Cos\theta+Sin\theta)$



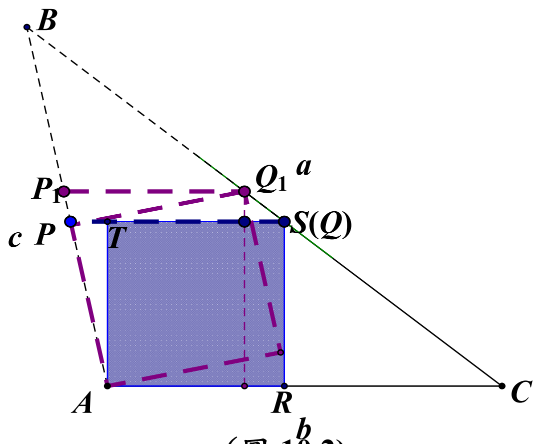
(*i*).顯而易見,當梯形之高≤ 立於 b 邊上(即 $\overline{AC}$) 所作之偏接正方形邊長時,則以梯形之高為邊長所作之內接正方形為最大(如圖 10.1)且可作得無限多個內接正方形。

(*ii*).當立於 b 邊上(即 $\overline{AC}$) 所作之偏接正方形邊長≤梯形之高$<h_1$時,則以立於 b 邊上(即 $\overline{AC}$) 所作之的偏接正方形 $ARST$ 為最大,且僅有一個。

且邊長$l=\dfrac{\angle C\text{所成直角三角形鄰邊與對邊之積}}{\angle C\text{所成直角三角形鄰邊與對邊之和}}=\dfrac{bf}{b+f}=\dfrac{bh_2}{b+k+h_2}$。(如圖 10.2)



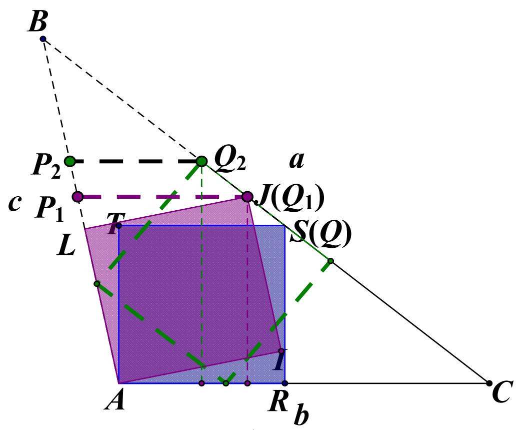
(圖 10.1)



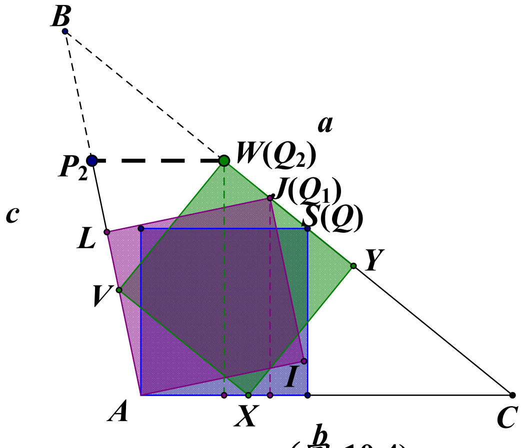
(圖 10.2)

(*iii*).當 h_1≤梯形之高$<h_2$時,則以立於 b 邊上(即 $\overline{AC}$) 所作之的偏接正方形 $ARST$ 與立於 c 邊上(即 $\overline{AB}$) 所作之的偏接正方形 $AIJL$ 同時為最大,計有兩個。(如圖 10.3)

(*iv*).當 h_2≤梯形之高時,則以立於 b 邊上(即 $\overline{AC}$) 所作之的偏接正方形 $ARST$ 與立於 c 邊上(即 $\overline{AB}$) 所作之的偏接正方形 $AIJL$ 及立於 a 邊上(即 $\overline{BC}$) 所作之的內接正方形 $VWXY$ 同時為最大,計有三個。(如圖 10.4)



(圖 10.3)



(圖 10.4)

(C).當梯形兩底角為一銳角一鈍角(即圖中的 $\angle BAC$)且延長兩腰形成一個鈍角三角形又 $\dfrac{a-b}{a}>Tan\dfrac{1}{2}\angle C$ 時與(A).當梯形兩底角為一銳角一鈍角(即圖中的 $\angle BAC$)且延長

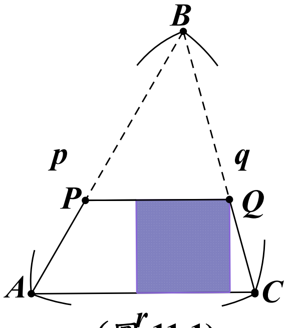
兩腰形成一個鈍角三角形時雷同;故省略。

(D).當梯形兩底角為銳角且延長兩邊形成之三角形為銳角三角形時: (令 $p>q>r$)

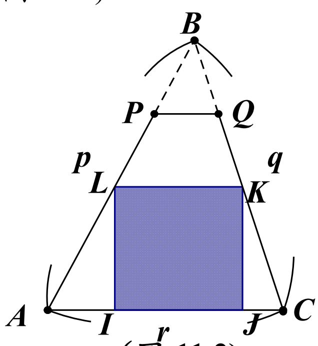
(1).以 r邊(即$\overline{AC}$) 為梯形下底時

(i)若 梯形高≤立於r邊(即$\overline{AC}$)上之內接正方形邊長時，則以梯形高為正方形邊長所作立於r邊(即$\overline{AC}$)上的內接正方形為最大,且有無限多個。(如圖 11.1)

(ii)若 梯形高≥立於r邊(即$\overline{AC}$)上之內接正方形邊長時，則以立於r邊(即$\overline{AC}$)上所作的內接正方形 $IJKL$ 為最大,且僅有一個。(如圖 11.2)



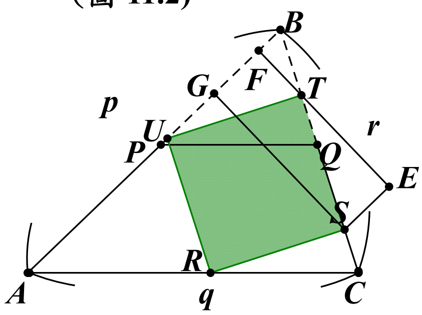
(圖 11.1)



(圖 11.2)

(2).以 q邊(即$\overline{AC}$) 為梯形下底時: (如右圖)

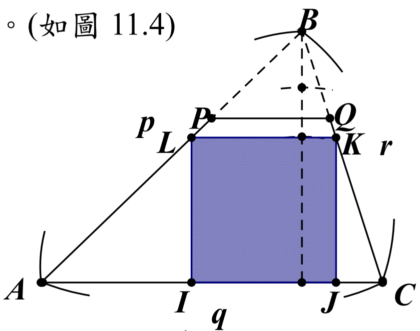
我們使用“臨界值”法,計算出內接正方形 $RSTU$ 的“臨界距離$\overline{SG}$”:



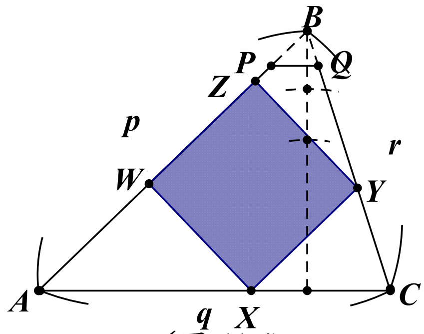
(i)若 梯形高≤立於q邊(即$\overline{AC}$)上之內接正方形邊長時，則以梯形高為正方形邊長所作立於q邊(即$\overline{AC}$)上的內接正方形為最大,且有無限多個。

(ii)若 立於r邊(即$\overline{BC}$)上之內接正方形邊長 < 梯形之高 < $\overline{AG}$ 時,則以立於q邊(即$\overline{AC}$)上的內接正方形 $IJKL$ 為最大,且僅有一個。(如圖 11.3)

(iii)若 $\overline{AG}$ < 梯形之高時,則以立於 p邊(即$\overline{AB}$) 上的內接正方形 $WXTZ$ 為最大,且僅有一個。(如圖 11.4)

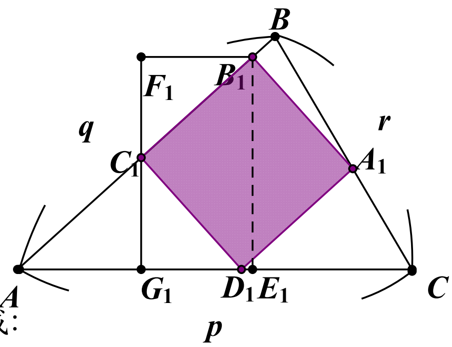


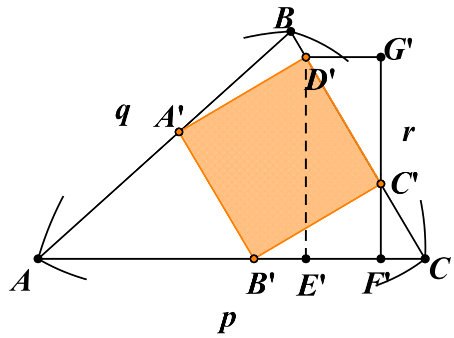
(圖 11.3)



(圖 11.4)

(3).以 p邊(即$\overline{AC}$) 為梯形下底時: 則須先求出內接正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 與內接正方形 $A'B'C'D'$的 “臨界距離” $\overline{B_1E_1}$與$\overline{D'E'}$:(如下圖)





可分成:

(i)若 梯形高$\le$立於p邊(即$\overline{AC}$) 上之內接正方形邊長時，則以梯形高為正方形邊長所作立於 p邊(即$\overline{AC}$) 上的內接正方形為最大,且有無限多個。

(ii)當$\overline{B_1E_1} > \overline{D'E'}$時 :

(a).若 立於p邊(即$\overline{AC}$)上之內接正方形邊長$\le$梯形之高$<\overline{D'E'}$,則以立於 p邊(即$\overline{AC}$) 上的所作的內接正方形為最大,且僅有一個。

(b).若 $\overline{D'E'}\le$梯形之高,則以立於 r邊(即$\overline{BC}$) 上的所作的內接正方形為最大,且僅有一個。

(iii)當$\overline{B_1E_1} < \overline{D'E'}$時 :

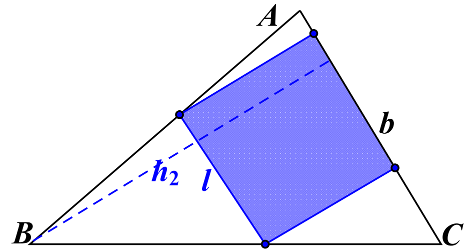
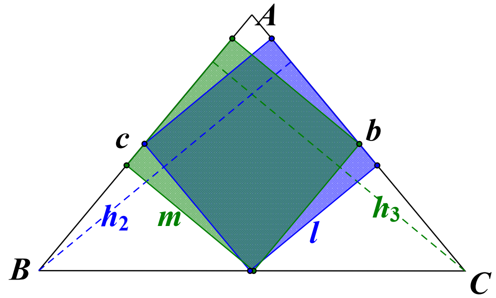
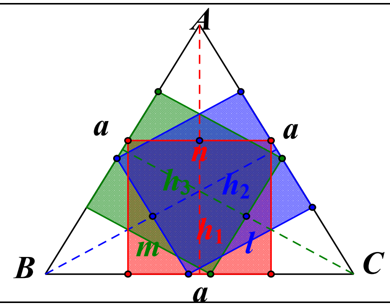
(a).若 立於p邊(即$\overline{AC}$)上之內接正方形邊長$\le$梯形之高$<\overline{B_1E_1}$,則以立於 p邊(即$\overline{AC}$) 上的所作的內接正方形為最大,且僅有一個。

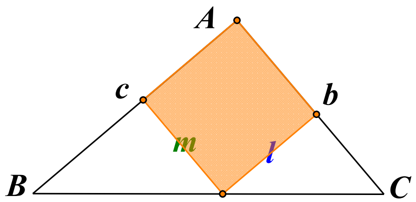
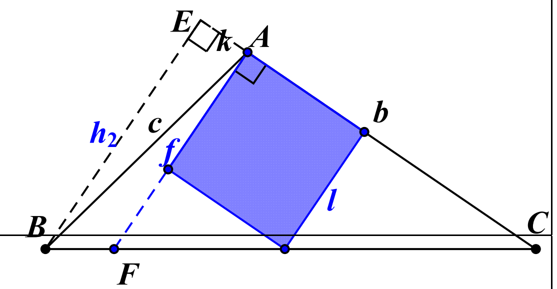
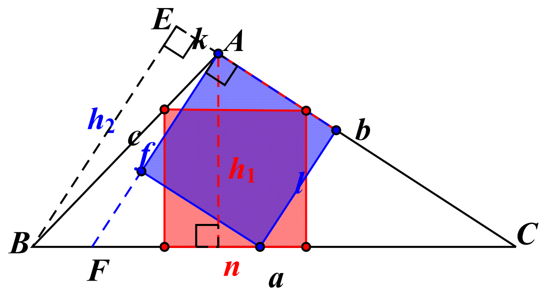
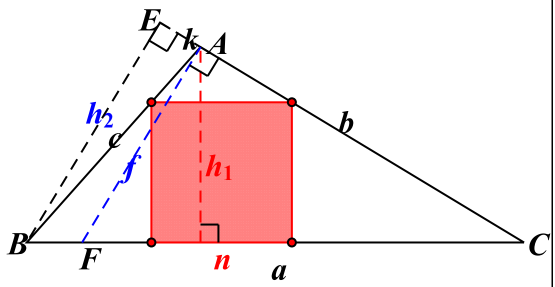
(b).若 $\overline{B_1E_1}\le$梯形之高$<\overline{D'E'}$,則以立於 q邊(即$\overline{AB}$) 上的所作的內接正方形為最大,且僅有一個。

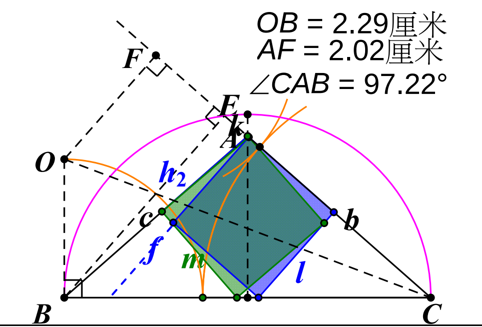
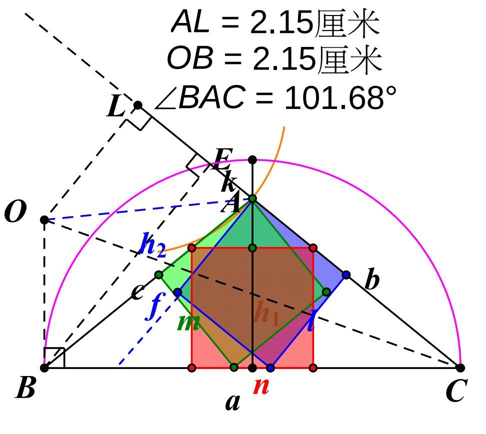
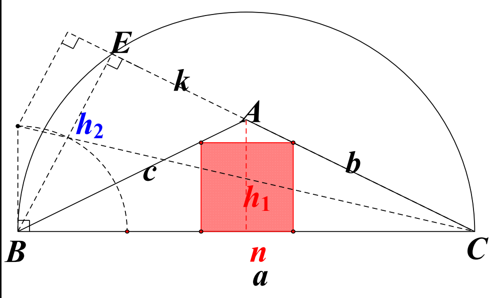
(c).若 $\overline{D'E'}\le$梯形之高,則以立於 r邊(即$\overline{BC}$) 上的所作的內接正方形為最大,且僅有一個。

柒. 最後心得與結論: 我們將其研究結果, 整理成表格如下:

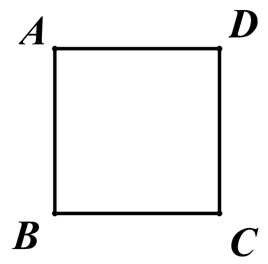
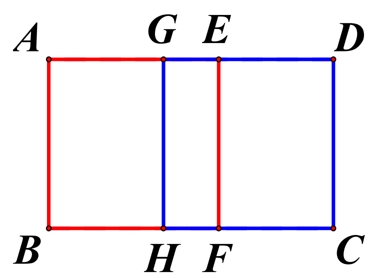
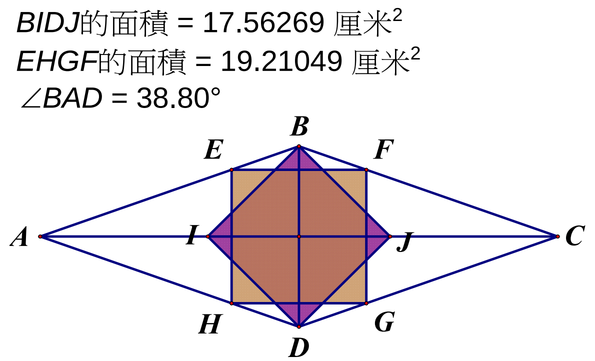
[第一部份]:三角形

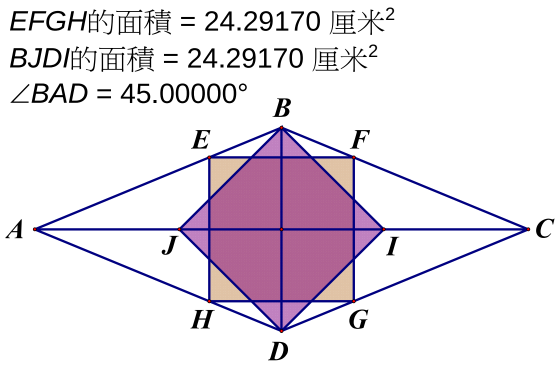
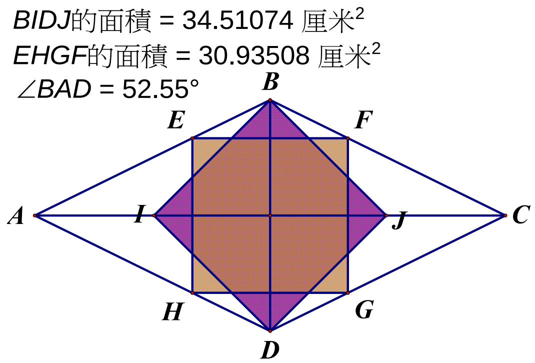
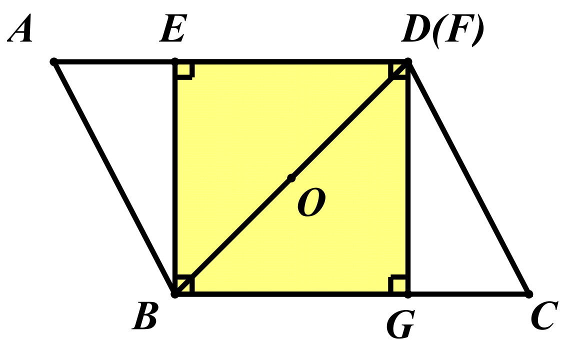
三角形 類型	條 件	最大正方形 種類	個 數	邊 長	圖 狀
銳角三角形	(*a*) 三邊不等的 銳角三角形	立於最短邊上的 內接正方形	**1**	邊長l $=\dfrac{\text{最短邊與最短邊之高的乘積}}{\text{最短邊與最短邊之高的和}}$ $=\dfrac{bh_2}{b+h_2}$。	
	(*b*) 銳角等腰三角形 且 $60°<\text{頂角}<90°$	立於腰邊上的 內接正方形	**2**	邊長l(或m) $=\dfrac{\text{腰邊與腰邊之高的乘積}}{\text{腰邊與腰邊之高的和}}$ $=\dfrac{bh_2}{b+h_2}$(或$\dfrac{ch_3}{c+h_3}$)。	
	(*c*) 正三角形	立於各邊上的 內接正方形	**3**	邊長l(或m與n) $=\dfrac{\text{各邊與其各邊之高的乘積}}{\text{各邊與其各邊之高的和}}$ $=\dfrac{(4\sqrt{3}-3)a}{13}$。	

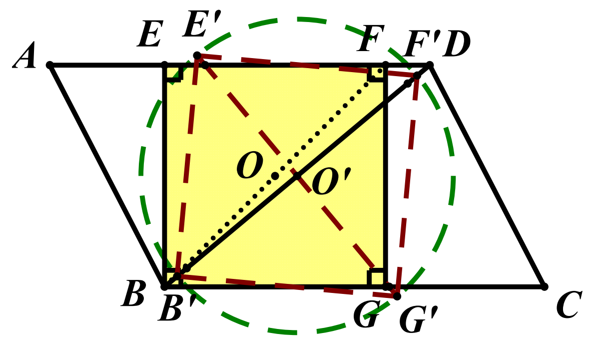
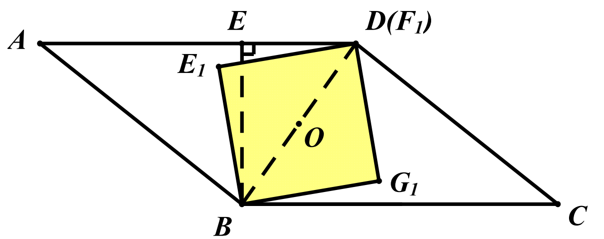
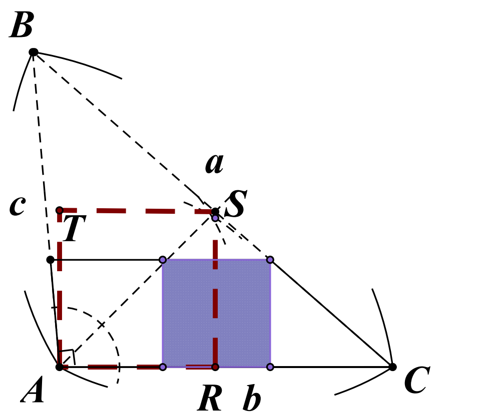
直角三角形		立於兩股上的內接正方形	1	邊長l(或m) $=\dfrac{\text{兩股之積}}{\text{兩股之和}}=\dfrac{bc}{b+c}$。	
鈍角三角形 ($\angle A$為鈍角) A部份	(a). 若$\overline{AC}>\overline{AB}$: $(b>c)(\angle C<\angle B)$ 且$\dfrac{\overline{BC}-\overline{AC}}{\overline{BC}}<Tan\dfrac{1}{2}C$	立於$\overline{AC}$邊上的偏接正方形	1	邊長l $=\dfrac{\angle C\text{所成直角三角形鄰邊與對邊之積}}{\angle C\text{所成直角三角形鄰邊與對邊之和}}$ $=\dfrac{bf}{b+f}=\dfrac{bh_2}{b+k+h_2}$。	
	(b). 若$\overline{AC}>\overline{AB}$: $(b>c)(\angle C<\angle B)$ 且$\dfrac{\overline{BC}-\overline{AC}}{\overline{BC}}=Tan\dfrac{1}{2}C$	立於$\overline{AC}$邊上的偏接正方形與立於$\overline{BC}$邊上的內接正方形	2	邊長l $=\dfrac{\angle C\text{所成直角三角形鄰邊與對邊之積}}{\angle C\text{所成直角三角形鄰邊與對邊之和}}$ $=\dfrac{bf}{b+f}=\dfrac{bh_2}{b+k+h_2}$。 或 邊長$n$ $=\dfrac{\angle A\text{對邊與此邊之高之積}}{\angle A\text{對邊與此邊之高的和}}$ $=\dfrac{ah_1}{a+h_1}=\dfrac{abh_2}{a^2+bh_2}$。	
	(c). 若$\overline{AC}>\overline{AB}$: $(b>c)(\angle C<\angle B)$ 且$\dfrac{\overline{BC}-\overline{AC}}{\overline{BC}}>Tan\dfrac{1}{2}C$	立於$\overline{BC}$邊上的內接正方形	1	邊長n $=\dfrac{\angle A\text{對邊與此邊之高之積}}{\angle A\text{對邊與此邊之高的和}}$ $=\dfrac{ah_1}{a+h_1}=\dfrac{abh_2}{a^2+bh_2}$。	

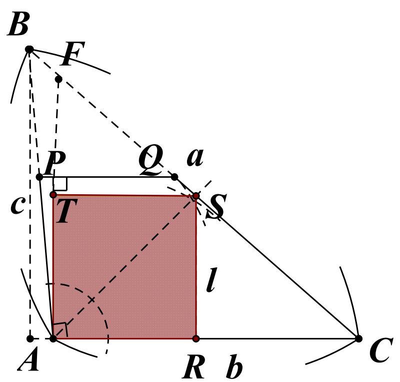
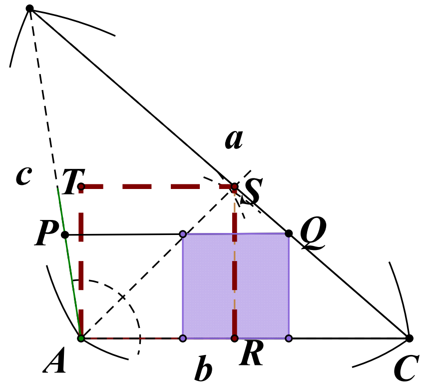
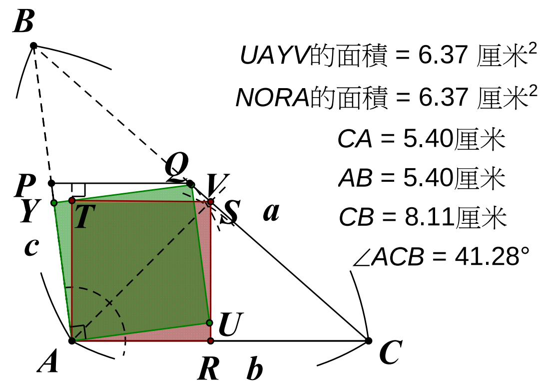
(∠A 為鈍角) **鈍角三角形**	**B部份**	(a). 若$\overline{AC}=\overline{AB}$: $(b=c)(\angle C=\angle B)$ 且$\frac{\overline{BC}-\overline{AC}}{\overline{BC}}<Tan\frac{1}{2}C$	**立於$\overline{AC}$與$\overline{AB}$邊上的偏接正方形**	**2**	邊長l(或m) $=\frac{\angle C(或\angle B)所成直角三角形鄰邊與對邊之積}{\angle C(或\angle B)所成直角三角形鄰邊與對邊之和}$ $=\frac{bf}{b+f}=\frac{bh_2}{b+k+h_2}$。	
		(b). 若$\overline{AC}=\overline{AB}$: $(b=c)(\angle C=\angle B)$ 且$\frac{\overline{BC}-\overline{AC}}{\overline{BC}}=Tan\frac{1}{2}C$	**立於$\overline{AC}$與$\overline{AB}$邊上的偏接正方形與立於$\overline{BC}$邊上的內接正方形**	**3**	邊長l(或m) $=\frac{\angle C(或\angle B)所成直角三角形鄰邊與對邊之積}{\angle C(或\angle B)所成直角三角形鄰邊與對邊之和}$ $=\frac{bf}{b+f}=\frac{bh_2}{b+k+h_2}$。 或 邊長$n$ $=\frac{\angle A對邊與此邊之高之積}{\angle A對邊與此邊之高的和}$ $=\frac{ah_1}{a+h_1}=\frac{abh_2}{a+bh^2}$。	
		(c). 若$\overline{AC}>\overline{AB}$: $(b>c)(\angle C<\angle B)$ 且$\frac{\overline{BC}-\overline{AC}}{\overline{BC}}>Tan\frac{1}{2}C$	**立於$\overline{BC}$邊上的內接正方形**	**1**	邊長n $=\frac{\angle A對邊與此邊之高之積}{\angle A對邊與此邊之高的和}$ $=\frac{ah_1}{a+h_1}=\frac{abh_2}{a+bh^2}$。	

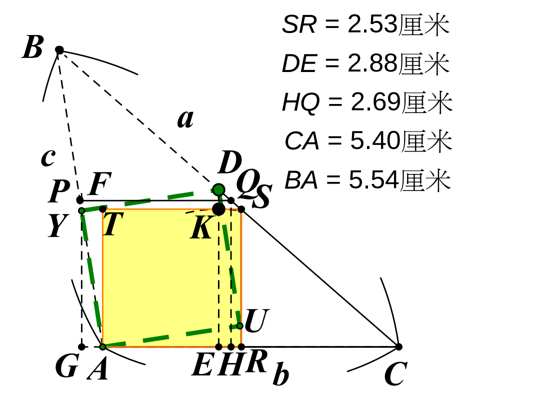
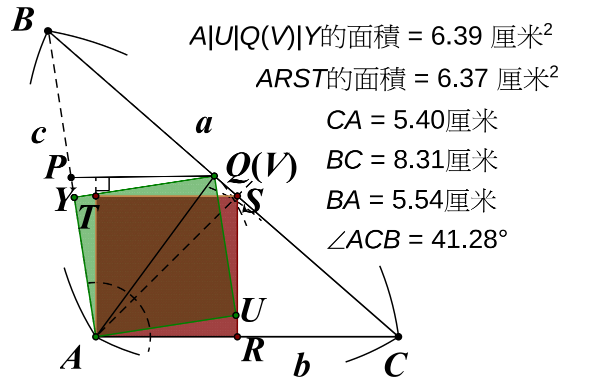
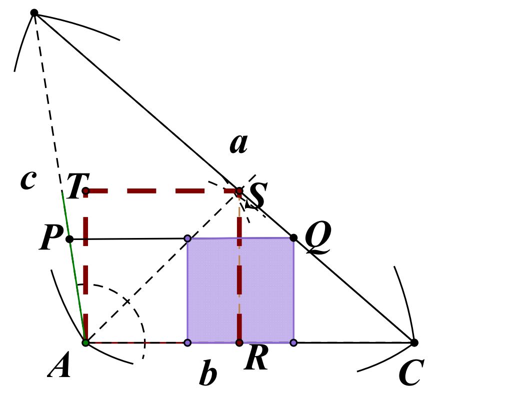
[第二部份]：特殊四邊形

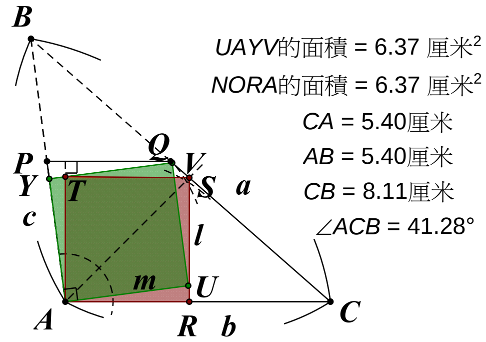
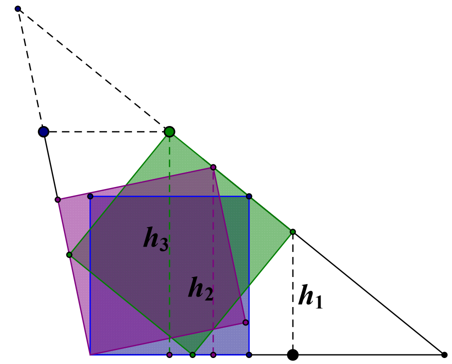
四邊形 類型	條 件	最大正方形 種類	個 數	邊 長	圖 狀
正方形	四邊等長	**正方形本身**	1	邊長l = 正方形邊長	
長方形	長邊與寬邊	**以短邊作出之 內接正方形**	∞	邊長l = 長方形短邊長	
菱	(a)較小內角 $\angle BAD < 45°$	內接正方形	1	邊長$l = \dfrac{\text{菱形對角線之積}}{\text{菱形對角線之和}}$	

形	(b) 較小內角 $\angle BAD = 45^\circ$	內接正方形或對接正方形	2	邊長 $l =$ $\sqrt{2}\times Sin\dfrac{45^\circ}{2}\times Cos\dfrac{45^\circ}{2}\times$菱形邊長^2 $= \dfrac{\text{菱形對角線之積}}{\text{菱形對角線之和}}$	
	(c) 較小內角 $\angle BAD > 45^\circ$	對接正方形	1	邊長 $l =$ $\sqrt{2}\times Sin\dfrac{45^\circ}{2}\times Cos\dfrac{45^\circ}{2}\times$菱形邊長^2	
平 行	(a) 若長邊 $\overline{BC}$ 大於短邊 $\overline{AB}$，且短對角線 $\overline{BD}$ 與長邊高 $\overline{BE}$ 恰形成一等腰直角 $\Delta BED(F)$	內接正方形	1	邊長 l=平行四邊形長邊上之高	

四邊形	(b) 若長邊 $\overline{BC}$ 大於短邊 $\overline{AB}$，且短對角線 $\overline{BD}$ 與長邊高 $\overline{BE}$ 所形成的直角 ΔBED 中，$\overline{DE} > \overline{BE}$	內接正方形	∞	邊長 l =平行四邊形長邊上之高	
	(c) 若長邊 $\overline{BC}$ 大於短邊 $\overline{AB}$，且短對角線 $\overline{BD}$ 與長邊高 $\overline{BE}$ 所形成的直角 ΔBED 中，$\overline{DE} < \overline{BE}$	對接正方形	1	邊長 $l=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 短對角線長($\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{BD}$)	
梯形 A部分：兩底角為一銳角一鈍角，延長腰邊形成鈍角三角	(1)若 $b > c$ (i)梯形高≤立於 b 邊上之偏接正方形邊長($\overline{AC}$)	梯形高所作之內接正方形	∞	邊長 l =梯形 b 邊上之高	

形	形且 $\frac{a-b}{a}<Tan\frac{1}{2}\angle C$	(1)若 $b>c$ (ii)梯形高＞立於 b 邊上之偏接正方形邊長($\overline{AC}$)	立於 b 邊上之偏接正方形	1	邊長 $l=\frac{\angle C\text{所成直角}\Delta\text{鄰邊與對邊之積}}{\angle C\text{所成直角}\Delta\text{鄰邊與對邊之和}}=\frac{bf}{b+f}=\frac{bh_2}{b+k+h_2}$	
		(2)若 $b=c$ (i)梯形高≤立於 b 邊上之偏接正方形邊長($\overline{AC}$)	梯形高所作之內接正方形	∞	邊長 l =梯形 b 邊上之高	
		(2)若 $b=c$ (ii)梯形高＞立於 b 邊上之偏接正方形邊長($\overline{AC}$)	立於 b 邊上之偏接正方形與立於 c 邊上之偏接正方形	2	邊長 l(或 m) $=\frac{\angle C(\angle B)\text{所成直角}\Delta\text{鄰邊與對邊之積}}{\angle C(\angle B)\text{所成直角}\Delta\text{鄰邊與對邊之和}}=\frac{bf}{b+f}=\frac{bh_2}{b+k+h_2}$	

		(3)若 $b<c$ (i)梯形高≤立於 b 邊上之偏接正方形邊長($\overline{AC}$)	梯形高所作之內接正方形	∞	邊長 l =梯形 b 邊上之高	
		(3)若 $b<c$ (ii) c 邊偏接正方形之臨界距離 $\overline{DE}\le$ 梯形高	立於 c 邊上之偏接正方形	1	邊長 l =梯形 c 邊上之臨界距離 $\overline{DE}=\overline{AY}\times Sin\angle YAG+\overline{AY}\times Cos\angle YAG$	
	B 部 分 ： 兩底角為一銳角一鈍角，延長腰邊	(1)若 $b>c$ (i)梯形高≤立於 b 邊上之偏接正方形邊長($\overline{AC}$)	梯形高所作之內接正方形	∞	邊長 l =梯形 b 邊上之高	

	形成鈍角三角形且 $\frac{a-b}{a}=Tan\frac{1}{2}\angle C$	(1)若 $b>c$ (ii)梯形高 $>$ 立於 b 邊上之偏接正方形邊長($\overline{AC}$)	立於 b 邊上之偏接正方形	1	邊長 $l=$ $\frac{\angle C\text{所成直角}\Delta\text{鄰邊與對邊之積}}{\angle C\text{所成直角}\Delta\text{鄰邊與對邊之和}}$ $=\frac{bf}{b+f}=\frac{bh_2}{b+k+h_2}$	
		(2)若 $b=c$，利用臨界值法 (i)梯形高 $\leq$ 立於 b 邊上之偏接正方形邊長($\overline{AC}$)	梯形高所作之內接正方形	∞	邊長 l =梯形 b 邊上之高	
		(2)若 $b=c$，利用臨界值法 (ii)立於 b 上之偏接正方形邊長 $\leq$ 梯形高 $<h_1$	立於 b 邊上之偏接正方形	1	邊長 $l=$ $\frac{\angle C\text{所成直角}\Delta\text{鄰邊與對邊之積}}{\angle C\text{所成直角}\Delta\text{鄰邊與對邊之和}}$ $=\frac{bf}{b+f}=\frac{bh_2}{b+k+h_2}$	
		(2)若 $b=c$，利用臨界值法 (iii) $h_1\leq$ 梯形高 $<h_2$	立於 b 邊上之偏接正方形與立於 c 邊上之偏接正方形	2	邊長 l ＝梯形 b 邊上之臨界距離 ＝梯形 c 邊上之臨界距離	
		(2)若 $b=c$，利用臨界值法 (iv) $h_2\leq$ 梯形高	立於 b 上之偏接正方形與立於 c 上之偏接正方形與立於	3	邊長 l ＝梯形 a 邊上之臨界距離 ＝梯形 b 邊上之臨界距離 ＝梯形 c 邊上之臨界距離	

			a 上之偏接正方形			
C部分：兩底角為一銳角一鈍角，延長腰邊形成鈍角三角形且 $\frac{a-b}{a} > Tan\frac{1}{2}\angle C$	(1)若 $b>c$ (i)梯形高 $\leq$ 立於 b 邊上之偏接正方形邊長($\overline{AC}$)	梯形高所作之內接正方形	∞	邊長 $l=$ 梯形 b 邊上之高	同A部分，故省略
	(1)若 $b>c$ (ii)梯形高 $>$ 立於 b 邊上之偏接正方形邊長($\overline{AC}$)	立於 b 邊上之偏接正方形	1	邊長 $l=$ $\frac{\angle C\text{所成直角}\Delta\text{鄰邊與對邊之積}}{\angle C\text{所成直角}\Delta\text{鄰邊與對邊之和}}$ $=\frac{bf}{b+f}=\frac{bh_2}{b+k+h_2}$	同A部分，故省略
	(2)若 $b=c$ (i)梯形高 $\leq$ 立於 b 邊上之偏接正方形邊長($\overline{AC}$)	梯形高所作之內接正方形	∞	邊長 $l=$ 梯形 b 邊上之高	同A部分，故省略
	(2)若 $b=c$ (ii)梯形高 $>$ 立於 b 邊上之偏接正方形邊長($\overline{AC}$)	立於 b 邊上之偏接正方形與立於 c 邊上之偏接正方形	2	邊長 l(或 m) $=$ $\frac{\angle C(\angle B)\text{所成直角}\Delta\text{鄰邊與對邊之積}}{\angle C(\angle B)\text{所成直角}\Delta\text{鄰邊與對邊之和}}$ $=\frac{bf}{b+f}=\frac{bh_2}{b+k+h_2}$	同A部分，故省略
	(3)若 $b<c$ (i)梯形高 $\leq$ 立於 b 邊上之偏接正方形邊長($\overline{AC}$)	梯形高所作之內接正方形	∞	邊長 $l=$ 梯形 b 邊上之高	同A部分，故省略
	(3)若 $b<c$ (ii) c 邊偏接正方形之臨界距離 $\overline{DE}\leq$ 梯形高	立於 c 邊上之偏接正方形	1	邊長 $l=$ 梯形 c 邊上之臨界距離 $\overline{DE}=\overline{AY}\times Sin\angle YAG+\overline{AY}\times Cos\angle YAG$	同A部分，故省略
	D部	(1)以 r 為梯形下底 (i)梯形高 $\leq$ 立於	梯形高所作之內接正方形	∞		

	分：	r 邊上之內接正方形邊長($\overline{AC}$)				
	兩底角為兩銳角，延長腰邊形成銳角三角形且	(1)以 r 為梯形下底 (ii)梯形高≥立於 r 邊上之內接正方形邊長($\overline{AC}$)	立於 r 邊上之內接正方形	1		
	$p>q>r$	(2)以 q 為梯形下底，使用臨界值法 (i)梯形高≤立於 q 邊上之內接正方形邊長($\overline{AC}$)	立於 q 邊梯形高之內接正方形	∞		
		(2)以 q 為梯形下底，使用臨界值法 (ii)立於 r 上之內接正方形邊長＜梯形高＜ $\overline{AG}$	立於 q 邊之內接正方形	1		
		(2)以 q 為梯形下底，使用臨界值法 (iii) $\overline{AG}$ ＜梯形高	立於 p 邊之內接正方形	1		
		(3)以 p 為梯形下底，使用臨界值法 (i)梯形高≤立於 p 邊上之內接正方形邊長($\overline{AC}$)	梯形高所作之內接正方形	∞		
		(3)以 p 為梯形下底，使用臨界值法 (ii) $\overline{B_1E_1} > \overline{D'E'}$ (a)立於 p 上之內	立於 p 邊之內接正方形	1		

		接正方形邊長 $\leq$ 梯形高 $< \overline{D'E'}$				
		(3)以 p 為梯形下底，使用臨界值法 $(ii)\ \overline{B_1E_1} > \overline{D'E'}$ $(b)\ \overline{D'E'} \leq$ 梯形高	立於 r 邊之內接正方形	1		
		(3)以 p 為梯形下底，使用臨界值法 $(iii)\ \overline{B_1E_1} < \overline{D'E'}$ (a) 立於 p 邊上之內接正方形邊長 $(\overline{AC}) \leq$ 梯形高 $< \overline{D'E'}$	立於 p 邊之內接正方形	1		
		(3)以 p 為梯形下底，使用臨界值法 $(iii)\ \overline{B_1E_1} < \overline{D'E'}$ $(b)\ \overline{B_1E_1} \leq$ 梯形高 $< \overline{D'E'}$	立於 q 邊之內接正方形	1		
		(3)以 p 為梯形下底，使用臨界值法 $(iii)\ \overline{B_1E_1} < \overline{D'E'}$ $(b)\ \overline{D'E'} \leq$ 梯形高	立於 r 邊之內接正方形	1		

捌. 參考資料:

1. 國民中學數學第五冊備課用書，南一書局
2. 陸思明著，高中數學教室單元系列-角與三角函數，建宏出版社
3. 維基百科，http://zh.wikipedia.org/zh-tw/密克定理

【評語】030409

1. 態度積極認真，三位同學顯然花很多心力在此研究，值得嘉獎。
2. 以基礎方法獲得許多不錯的結果，但在報告時未能突顯最精彩的部份，使作品顯平淡，創意稍不足。