中華民國第 52 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030408

驚爆摩天輪

學校名稱：桃園縣立建國國民中學

作者：	指導老師：
國二 陳怡婷 國二 陳重諺 國二 劉小綺	莊健暉

關鍵詞：時鐘接龍、撲克牌、排列組合

驚爆摩天輪

摘要

本文藉由動手操作撲克牌遊戲--時鐘接龍的無數經驗中，發現到遊戲中獲勝與失敗的充分必要條件在於四張 K 的翻出（與開始牌堆的牌數變化量有關）。接著簡化遊戲的牌堆數，發現到計算遊戲牌組所有情形的方法。並將原先時鐘面式的翻牌流程轉換為直線型位置流程圖，進而推算出遊戲結束剩餘 n 張牌的機率與期望值。最終推廣至不固定張數之牌堆討論。我們也驗證了在時鐘接龍中，我們所猜測的控制固定 13 張牌與 12 張牌便能獲勝的方法，並論證出要獲勝遊戲的特殊固定張數至少要 12 張牌。最後我們並說明了 Kunth 所發現的獲勝的充分必要條件為外圈 12 張底牌構成 13 點樹的情形。

壹、研究動機

在遊戲王的漫畫中有一集，敘述著一名挾持遊樂場摩天輪的歹徒，在每個車廂上裝置著炸彈，並脅迫警方拿出一副撲克牌，將 52 張牌平分成 13 堆牌，並將其排列成鐘面 12 點的格式，第 13 堆放置於圓心。從中間牌堆開始翻牌，並依次翻到的點數到所對應的牌堆，只要該牌堆被翻完，車廂便會爆破，直到將 4 張 K 翻完才停止爆炸。我們請教了老師，老師提到他曾在數理資優教育活動中，討論到這遊戲，稱為時鐘接龍，但當時仍有許多問題尚未解決。因而我們將遊戲的勝利條件改為 52 張牌都翻完。藉此再去做深層思考，發現到此遊戲可探討的問題不少。

貳、研究目的

一、尋找遊戲的過程中成功與失敗的判斷方法。

二、計算時鐘接龍的獲勝機率。

三、計算時鐘接龍剩餘牌數的期望值。

四、推論開始牌堆與其號碼張數對於獲勝機率的影響。

五、尋求控制部分的張數的條件下，贏得遊戲的方法，並說明之。

其次，藉由研究討論的過程，培養出面對數學問題時，能具有邏輯規律，並了解小組的團隊分工合作精神，珍惜一起做研究的時間，一起體驗再次發現數學奧妙時，那種特別而又歡欣的感覺。

參、研究設備及器材

紙、筆、撲克牌、計算機、Excel。

肆、研究過程或方法

一、時鐘接龍遊戲規則：

1、佈牌規則：每四張牌分成一堆，一副撲克牌共分成 13 堆，牌面朝下並排列如時鐘的面版，第⑬堆擺在正中央。(如圖 1 所示)

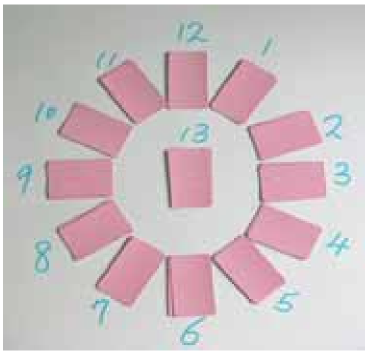


圖 1

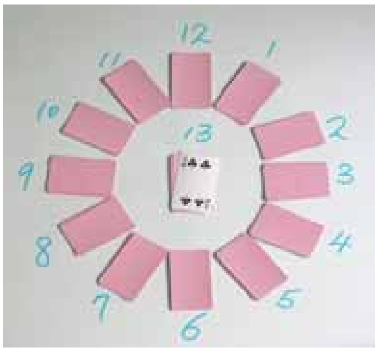


圖 2

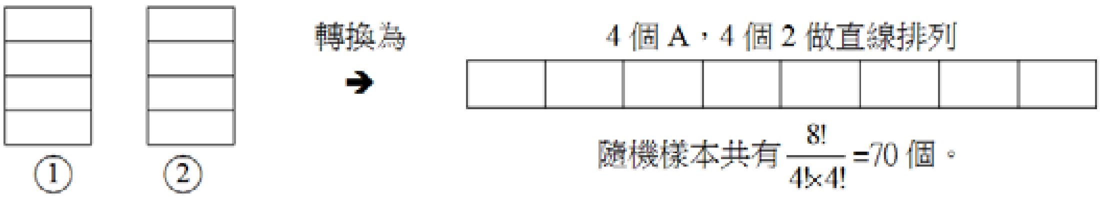

圖 3

2、翻開正中央（第⑬堆）的第一張牌，將該張放到時鐘面版上與牌面點數相同的那一堆牌的最下面，然後翻開該堆牌的第一張，依此類推。例如，翻開正中央的第一張牌是「梅花 4」，則把「梅花 4」放到時鐘面版上第④堆牌的最下面，接著翻開第④堆的第一張，若翻開第④堆最上一張是方塊 3，則把方塊 3 放到時鐘面版的第③堆牌最下面、…、依此類推。(如圖 2、圖 3 所示)

3、若最後可將 52 張牌全部翻開，則你就是優勝者。

二、二堆牌堆的發現

1. 選出 A 和 2 各 4 張隨機平分成 2 堆，並從第①堆開始翻牌測試。所有的隨機樣本數：



2. **在什麼樣的狀況下遊戲無法進行而失敗？**

（1）**若是四張 A 都已被翻開了，而仍有其他牌尚未翻開，遊戲就失敗。**

① 從牌堆的牌數變化量說明

開始由第①堆牌堆開始，則第①堆牌堆的牌數變化為 4 張牌→3 張牌，而第②堆牌堆的牌數變化為 5 張牌→4 張牌。如果第①堆牌在 4 張 A 都翻開時，便無法讓第①堆牌堆的牌數變化呈現 4 張牌→3 張牌，所以若是第①堆牌堆的四張 A 都已被翻開了，仍有其他牌尚未翻開，遊戲就失敗。由此可知，**要獲勝的充分必要條件便是翻開的第 8 張牌是 A**。

② 從牌堆各層翻開的條件說明

從圖 3 可看出當第 4 張 A 翻出時，第①堆牌堆已經沒有蓋牌可翻出在繼續進行遊戲，因此遊戲便結束。

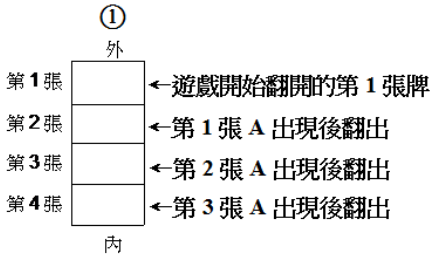


圖 4

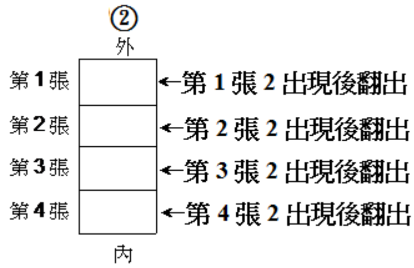


圖 5

（2）**2 堆牌的獲勝機率：(窮舉法，如附件 1)**

$$\frac{35}{70}=\frac{1}{2}$$

（**3**）第①、②堆牌的最底層發現：

遊戲結果	Win				Lose			
底層牌點	第①堆	第②堆	第①堆	第②堆	第①堆	第②堆	第①堆	第②堆
	A	A	2	A	A	2	2	2
隨機數量	$\frac{6!}{2!\times 4!}=15$個		$\frac{6!}{3!\times 3!}=20$個		$\frac{6!}{3!\times 3!}=20$個		$\frac{6!}{2!\times 4!}=15$個	

3. 若是第②堆牌堆的最下面一張牌是自己的號碼 2，則該張牌翻不到。

要翻到第②堆牌堆的最下面一張牌必須要先翻出 4 張 2（圖 4）。又一副牌中只有 4 張 2，所以若是第②堆牌堆的最下面一張牌是自己的號碼 2，則該張牌翻不到。**由此可以推論如果第②堆牌堆最下面二張牌、三張牌或是四張牌是自己的號碼，則該幾張牌翻不到。**

三、時鐘接龍的問題、假設與解決：

（一）在什麼樣的狀況下遊戲無法進行而失敗？

1. **若是正中央的四張 K 都已被翻開了，而仍有其他牌尚未翻開，遊戲就失敗。**

由第⑬堆牌堆開始，則第⑬堆牌堆的牌數變化為 4 張牌→3 張牌， 而第①堆~第⑫堆牌堆的牌數變化均為 5 張牌→4 張牌，如果排在第①堆~第⑫堆牌堆交替翻開，由牌堆的牌數變化量上是能夠一直維持 5 張牌→4 張牌，直到該堆牌都翻光為止；但是第⑬堆牌在 4 張 K 都翻開時，便無法讓第⑬堆牌堆的牌數變化呈現 4 張牌→3 張牌，所以若是第⑬堆牌堆的四張 K 都已被翻開了，仍有其他牌尚未翻開，遊戲就失敗。由此可知，**勝利的充分必要條件便是翻開的第 52 張牌是 K**。

2. **如果要獲勝，在十三堆牌堆中，K 至少要有一張在第①堆~第⑫堆牌堆的最底層。**

假設十三堆牌堆的最底層都沒有 K，由（1）得知遊戲必定會失敗。

如果只有 1 張 K 在第⑬堆牌堆的最底層，則要翻開這張 K 必須要先翻開前 3 張 K（圖 6），也就是說要勝利該張 K 是第 52 張被翻開的牌，而第 51 張牌也必須是 K，因此勝利條件 K 至少有一張會在第①堆~第⑫堆牌堆的最底層。

如果只有 2 張 K 在第⑬堆牌堆的最下層，遊戲獲勝之下，表示第⑬堆牌堆的第 3 張牌是被翻開的第 51 張牌。同理地，翻開的第 50 張牌必須是 K，因此勝利條件 K 至少有一張會在第①堆~第⑫堆牌堆的最底層。

如果只有 3 張 K 在第⑬堆牌堆的最下層，遊戲獲勝之下，表示第⑬堆牌堆的第 2 張牌是被翻開的第 50 張牌。同理地，翻開的第 49 張牌必須是 K，因此勝利條件 K 至少有一張會在第①堆~第⑫堆牌堆的最底層。

如果第⑬堆牌堆 4 張都是 K，遊戲一開始便是從第⑬堆牌開始，依照規則翻完第⑬堆牌的 4 張 K，遊戲便結束，外圍的 12 堆牌均未被翻開，

由上面討論得知，如果要獲勝，在十三堆牌堆中，K 至少要有一張在第①堆~第⑫堆牌堆的最底層。

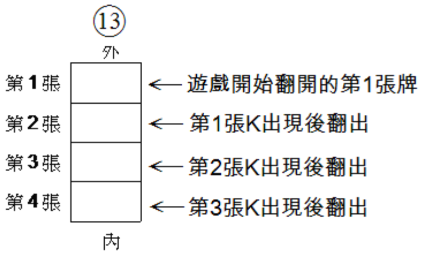


圖 6

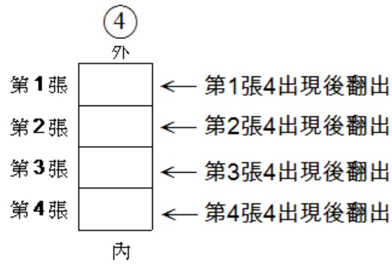


圖 7

3. **若是第①堆~第⑫堆牌堆的最下面一張牌是自己的號碼，則該張牌翻不到。**

若 N 為第Ⓝ堆牌堆的最下面一張牌，$N \in 1,2,\cdots,12$，則要翻到第Ⓝ堆牌堆的最下面一張牌必須要先翻出第 4 張 N（圖 7）。又一副牌中只有 4 張 N，所以若是第①堆~第⑫堆牌堆的最下面一張牌是自己的號碼，則該張牌翻不到。**由此可知若第①堆~第⑫堆牌堆最下面二張牌、三張牌或是四張牌是自己的號碼，則該幾張牌翻不到。**

（二）猜想控制一些牌數便能獲勝的方法：

1. 固定 13 張牌便能獲勝的方法：

先取出從 A~K 十三張牌預備放入每一堆的最底下一張，若此 13 張牌滿足第①堆~第⑬堆牌堆的最下面一張牌不是自己的號碼，則遊戲便會獲勝。

（ $N_1, N_2, \cdots, N_{11}, N_{12}, N_{13} \in \{A,2,3,\ldots,J,Q,K\}$ ， $N_1 \neq N_2 \neq \cdots \neq N_{13}$ ）

說明： 已知 A~K 十三張牌放在第①堆~第⑬堆牌堆的最底層，滿足第①堆~第⑬堆牌堆的最下面一張牌不是自己的號碼。表示也滿足 K 一定會在第①堆~第⑫堆牌堆的最底層且第①堆~第⑫堆牌堆的最下面一張牌不是自己的號碼，這兩個前面推得的獲勝必要條件。再來先考慮每一堆牌堆裡最底層以上的牌可能翻開的可能性有：3 張 A、3 張 2、3 張 3、…、3 張 J 、3 張 Q、3 張 K。發現 3 張 N，$N \in \{A,2,3,\ldots,J,Q\}$，並不足以翻開第Ⓝ堆牌的最底層的牌，只有翻開第 3 張 K 時，便能翻開第⑬堆牌堆的最後一張牌，由此可知<u>最底層的開始便是第⑬堆牌堆</u>。倘若第⑬堆牌堆的最後一張牌是 N_1，則構成了將會有 4 張 N_1 翻開的條件，所以接著翻開的底牌是第N_1堆的最底層的牌；倘若第N_1堆牌堆的最後一張牌是 N_2，則構成了將會有 4 張 N_2 翻開的條件，所以接著翻開的底牌是第N_2堆的最底層的牌；同理地依序下去，當第 N_{11} 堆牌堆的最後一張牌是 N_{12}，則構成了將會有 4 張 N_{12} 翻開的條件，4 張 N_1、N_2、…、N_{11}、N_{12} 及 3 張 K 都在第 N_{12} 堆最底層的牌之前就先翻開了，所以最後一張牌便是第 N_{12} 堆最底層的牌，由(一)2.得知，此張牌必定是 K，且 K 是翻開的第 52 張牌。

我們將 13 張底牌的牌堆與號碼關係以 $\sigma=\begin{pmatrix}\text{牌堆}\\ \text{號碼}\end{pmatrix}$ 表示。

例如： $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13\\ Q & 4 & 7 & 8 & 3 & J & 9 & K & A & 6 & 2 & 10 & 5\end{pmatrix}$

上排數字表示第幾堆牌堆；下排數字則表示對應的撲克牌點數，亦即：第①堆牌堆最底下一張放 Q；第②堆牌堆最底下一張放 3；第③堆牌堆最底下一張放 7………..以此類推。

從第⑬堆出發：

$\sigma(13)=5$，$\sigma(5)=3$，$\sigma(3)=7$，$\sigma(7)=9$，$\sigma(9)=A$，$\sigma(1)=Q$，$\sigma(12)=10$，$\sigma(10)=6$，$\sigma(6)=J$，$\sigma(11)=2$，$\sigma(2)=4$，$\sigma(4)=8$，$\sigma(8)=K$。

按照這樣的佈牌方式，這 13 張牌中，第一張被翻開牌的是第⑬堆牌堆的 5，第二張被翻開的牌是第⑤堆牌堆的 3，接著是第③堆牌堆的 7………最後一張翻出來的牌是放在第⑧堆牌堆最底下的一張 K。

2. 固定 12 張牌便能獲勝的方法：

將 4 張 K 與另兩對一樣的牌（假設是 N_1、N_2，$N_1, N_2\in 1,2,\cdots,12$，$N_1\neq N_2$），將一張 K 放在第 N_1 堆牌堆的最下面，一張 K 放在第 N_2 堆牌堆的最下面，另兩張 K 隨意放在第①堆~第⑫堆的空格。將其餘 8 張 N_1 與 N_2 放在第①堆~第⑫堆 8 個空格中，剩下的牌隨機放入各牌堆裡，遊戲便能獲勝。

說明：（1）假設不在第 N_1、N_2 堆牌堆的 2 張 K 先翻開

表示有 2 個牌堆的 4 張數字牌都已被翻開，接著如果要翻開第 N_1 堆牌堆的 最下面一張 K，則必須先翻開 4 個牌堆的最下面一張 N_1，也就是說必須有 4 個牌堆的 4 張數字牌再加上第 4 張 N_1 都被翻開，才能翻到第 N_1 堆牌堆的最下面一張 K；同理要翻開第 N_2 堆牌堆的最下面一張 K，必須有 4 個牌堆的 4 張數字牌再加上第 4 張 N_2 都被翻開。如果第三張 K 是在第 N_1 堆牌堆翻開，要翻到第 N_2 堆牌堆的第四張 K 之前，已經翻開了 51 張，且第 51 張牌為 N_2，所以 K 是最後一張；同理，如果第三張 K 是在第 N_2 堆牌堆翻開，第四張 K 必定是最張一張被翻開的。

（2）假設第 N_1、N_2 堆牌堆的 2 張 K 先翻開 （$N_3, N_4\in 1,2,\cdots,13$，且 $N_1\neq N_2\neq N_3\neq N_4$）

表示有 10 個牌堆的 4 張數字牌都已被翻開，接著假設第三張 K 在第 N_3 堆牌堆的最後一張，要翻開第三張 K 必須先將 4 張 N_3 都翻開，緊接著假設第四張 K 在第 N_4 堆牌堆的最後一張，要翻開第四張 K 必須先將 4 張 N_4 都翻開，在此發現第 51 張牌為 N_4，所以 K 是最後一張牌。

（3）假設第 N_1、N_3 堆牌堆的 2 張 K 先翻開

表示有 5 個牌堆的 4 張數字牌都已被翻開，如果先翻開第 N_2 堆牌堆的 K，則必須有 4 個牌堆的 4 張數字牌再加上第 4 張 N_2 都被翻開，而要翻開第 N_4 堆牌堆的第 4 張 K，必須將 4 張 N_4 都翻開，在此發現第 51 張牌為 N_4，所以 K 是最後一張牌；如果先翻開第 N_4 堆牌堆的 K，則必須將 4 張 N_4 都翻開，而要翻開第 N_2 堆牌堆的第 4 張 K，則必須有 4 個牌堆的 4 張數字牌再加上第 4 張 N_2 都被翻開，在此發現第 51 張牌為 N_2，所以 K 是最後一張牌。

四、時鐘接龍的獲勝機率：

目前已經知道如果遊戲要獲勝必須要將 52 張牌全部都翻出才行，換個想法來看，藉由經過每個牌堆的位置來記錄獲勝的牌組，會發現一開始的起點是第 13 堆牌堆，翻開的最後一張會是 K，也就是位置會回到第⑬堆牌堆。我們將從在遊戲中經過的位置順序記錄來觀察獲勝的牌組會有什麼樣的規律！

（一）用實例說明原牌組跟位置流程的關係

我們現在舉一個 4 堆牌的例子來說明之，從撲克牌裡抽出牌點數為 1~4 各 2 張牌，隨機分成 4 堆牌，每堆牌堆各有 2 張牌。將第④堆牌堆設為遊戲的開始端，遊戲規則如同時鐘接龍，則以下是一個成功的例子。

	第①堆牌堆	第②堆牌堆	第③堆牌堆	第④堆牌堆
第一張	2	3	4	1
最底層	4	1	2	3

上述遊戲進行中經過的牌堆位置記錄如下：（開始是第④堆牌堆）

④ → ① → ② → ③ → ④ → ③ → ② → ① → ④

接著我們將觀察位置流程記錄與原牌堆情形的關係：

1. 一開始的④ → ①，說明的是位置從第④堆牌堆移動到第①堆牌堆，那麼要發生這樣的情形必須在第④堆牌堆翻開點數 1 的牌，也就是說一開始在第④堆牌翻開的是 1。
2. 接著，① → ②，說明的是位置從第①堆牌堆移動到第②堆牌堆，那麼要發生這樣的情形必須在第①堆牌堆翻開點數 2 的牌，也就是說一開始在第①堆牌翻開的是 2。
3. 由 1.、2.，我們將從 m → n 標記為（m，n），m 表示牌堆位置，n 表示牌的點數，也就是在第ⓜ堆牌堆翻開點數為 n 的牌。
4. 位置記錄是有順序關係的，如果我們要得知第④堆牌堆原先的面貌，就得依序去搜尋記錄流程中，序對為（4，n）的部分，$n \in \mathbf{1,2,3,4}$。

（1）一開始④ → ①為（4，1），所以第④堆牌堆的第一張牌是 1。

（2）接下來會出現④的是④ → ③，表示為（4，3），所以第④堆牌堆的第二張牌是 3。

5. 因而我們能將位置流程記錄還原回到原牌組。

現在我們知道如果要觀察遊戲獲勝的情形，可以藉由觀察位置記錄流程即可。

以上述 4 堆牌堆為例，獲勝的情形位置流程是由④開始，後面必須經過 2 個①、2 個②、2 個③、2 個④，又已知最後必須停留在④，所以獲勝位置流程如下：

④ →（2 個①、2 個②、2 個③、1 個④的排列）→ ④

也就是說獲勝情形總數等同於 2 個①、2 個②、2 個③、1 個④的排列數，

所以獲勝情形有 $\dfrac{7!}{2!\times2!\times2!\times1!}$ 種。

而 4 堆牌堆的隨機可能情形，我們現在將 2 個①、2 個②、2 個③、2 個④放入下列字串的 8 個空格裡排列，在依序將每兩個空格設定成某牌堆的第 1 張牌跟第 2 張牌。

第①堆牌堆		第②堆牌堆		第③堆牌堆		第④堆牌堆	
第 1 張	第 2 張	第 1 張	第 2 張	第 1 張	第 2 張	第 1 張	第 2 張

這便能將 4 堆牌的所有情形均能列出，所以 4 堆牌堆的情形總數有 $\frac{8!}{2!\times 2!\times 2!\times 2!}$ 種

那麼隨機玩 4 堆牌的獲勝機率 $= \frac{\text{4堆牌的獲勝情形}}{\text{4堆牌的所有情形}} = \frac{\frac{7!}{2!\times 2!\times 2!\times 1!}}{\frac{8!}{2!\times 2!\times 2!\times 2!}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

（二）計算時鐘接龍獲勝機率

現在回到原始的遊戲本身，我們是將點數為 1~13 的各 4 張牌，隨機放入第①~⑬堆牌堆，每堆牌堆有 4 張牌，遊戲由第⑬堆牌堆開始進行。

我們先考慮隨機的分法下，牌組的總數會有多少種情形？類似於上述 4 堆牌堆的情形，我們將點數為 1~13 的各 4 張牌，放入一個有 52 格空格的字串之中去排列，由前至後，每 4 格設定為某個牌堆，而這 4 格的順序也代表著該牌堆的第 1~4 張牌。

$$\text{牌組的所有情形有} \frac{52!}{(4!)^{13}} \text{種}$$

接著我們要知道獲勝機率就必須要得知獲勝的情形總數，類似於上述 4 堆牌堆的情形，我們利用遊戲的位置記錄流程來討論：

獲勝的情形位置流程是由⑬開始，後面必須經過①~⑬各 4 次，又已知最後必須停留在⑬，所以獲勝的位置記錄會是

⑬ → (①~⑫各 4 個 及 3 個⑬ 的排列) → ⑬

$$\text{牌組獲勝的情形有} \frac{51!}{(4!)^{12}\times 3!} \text{種}$$

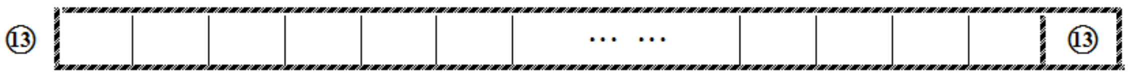
$$\textbf{時鐘接龍獲勝機率} = \frac{\textbf{牌組獲勝情形的總數}}{\textbf{牌組所有情形的總數}} = \frac{\frac{51!}{(4!)^{12}\times 3!}}{\frac{52!}{(4!)^{13}}} = \frac{4!}{52\times 3!} = \frac{1}{13}$$

因此我們得知遊戲「時鐘接龍」的獲勝機率是 $\mathbf{\frac{1}{13}}$。

五、時鐘接龍剩餘張數的機率與期望值

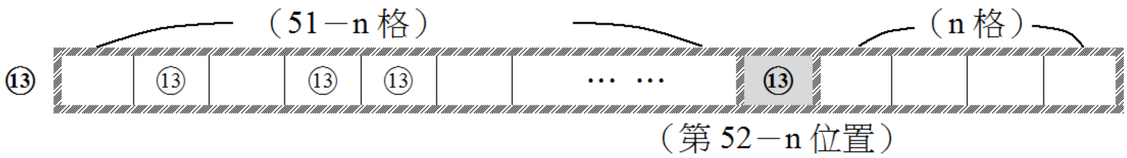
（一）時鐘接龍遊戲最後剩 n 張牌的情形總數

藉由經過每個牌堆的位置來記錄獲勝的牌組，會發現一開始的起點是第⑬堆牌堆，翻開的最後一張會是 K，也就是位置會回到第⑬堆牌堆。



（①~⑫數字各 4 個 及 3 個⑬的排列）

現在利用位置流程圖來觀察遊戲中最後會剩下 n 張牌的情形，如下圖：



由先前的推論已知遊戲結束於第 4 張 K 翻開的時候，那麼在位置流程圖中如果要剩下 n 張牌，則必須在第 52－n 位置使得遊戲結束，也就是說第 52－n 位置翻開的牌會是第 4 張 K。那麼在前面的 51－n 格位置還有 3 個⑬在排列，所以

時鐘接龍遊戲最後剩 n 張牌的情形總數

$$=(51-n\text{格放入3個⑬的情形})\times(\text{剩下48格放入其他位置號碼的情形})$$

$$=C_{3}^{51-n}\times\frac{48!}{(4!)^{12}}$$

（二）時鐘接龍遊戲最後剩 n 張牌的機率

牌組的所有情形有 $\frac{52!}{(4!)^{13}}$ 種

最後剩 n 張牌的情形總數有 $C_{3}^{51-n}\times\frac{48!}{(4!)^{12}}$ 種

$$\text{時鐘接龍剩下 n 張牌的機率} = \frac{\text{剩下 n 張牌情形的總數}}{\text{牌組所有情形的總數}}$$

$$= \frac{C_3^{51-n} \times \frac{48!}{(4!)^{12}}}{\frac{52!}{(4!)^{13}}} = \frac{(51-n)(50-n)(49-n)}{13 \times 51 \times 50 \times 49}$$

（三）時鐘接龍遊戲最後剩餘張數期望值

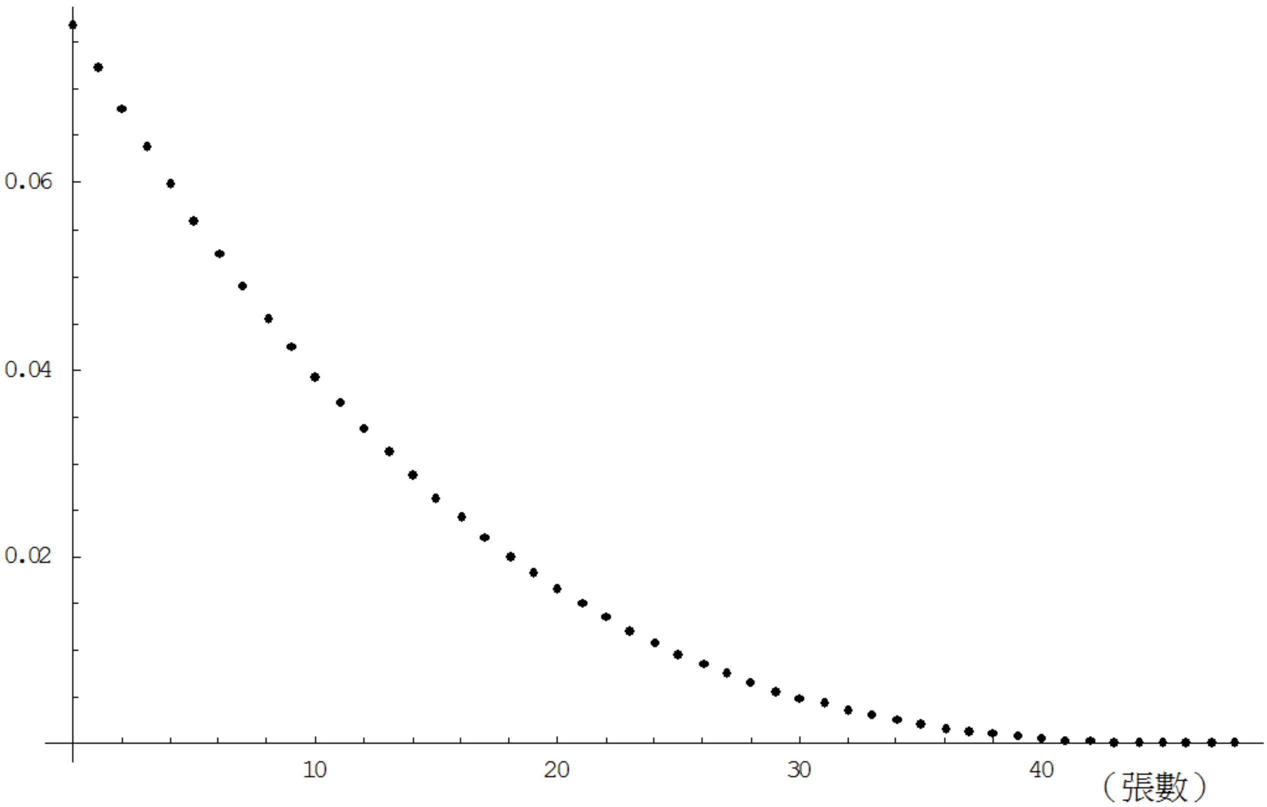
$$\text{時鐘接龍剩餘張數期望值} = \sum_{n=0}^{48} n \times P(\text{剩 n 張牌})$$

$$= \sum_{n=0}^{48} n \times \frac{(51-n)(50-n)(49-n)}{13 \times 51 \times 50 \times 49}$$

$$= \frac{48}{5} = 9.6\text{張}$$

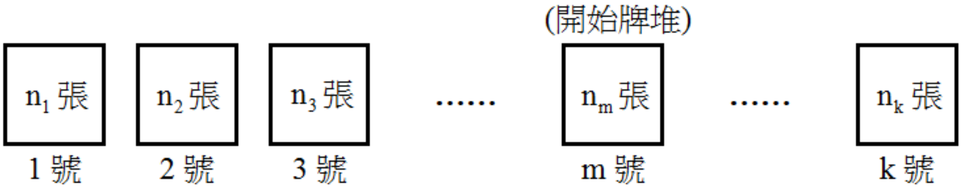
由以上得知，隨機玩一盤時鐘接龍遊戲到最後剩餘的牌數期望值為 **9.6** 張

時鐘接龍遊戲剩餘 **n** 張牌的機率分佈圖



六、牌堆數、號碼張數對獲勝機率的影響

假設有第①~ⓚ個牌堆，1 號有 n_1 張、2 號有 n_2 張、3 號有 n_3 張、…、k 號有 n_k 張（$k\in\boldsymbol{N}$，$n_1, n_2, \ldots, n_k \in\boldsymbol{N}$），隨機將牌發給第 1~k 個牌堆，第ⓘ牌堆要有 n_i 張隨機牌($i\in 1,2,\ldots,k$)。以第ⓜ堆牌為開始牌堆($m\in 1,2,\ldots,k$)，遊戲規則如同時鐘接龍，將所有的牌都翻光即為獲勝。



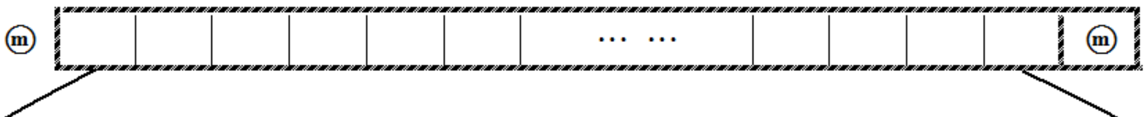
1. 所有的牌組情形

我們將所有的號碼牌放入一個（$n_1+n_2+\cdots+n_k$）格的字串裡作排列，在由前至後的選取第①~ⓚ個牌堆上會放的張數，即會是所有牌組的情形。

牌組的所有情形總數有$\left(\dfrac{(n_1+n_2+\ldots+n_k)!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}\right)$種

2. 獲勝的牌組情形

藉由經過每個牌堆的位置來記錄獲勝的牌組，會發現一開始的起點是第ⓜ堆牌堆，翻開的最後一張會是 m，也就是位置會回到第ⓜ堆牌堆。



（①有 n_1 個、②有 n_2 個、…、ⓜ有(n_m-1)個、…、ⓚ有 n_k 個的直線排列）

牌組的獲勝情形總數有$\left(\dfrac{(n_1+n_2+\ldots+n_{m-1}+(n_m-1)+n_{m+1}+n_{m+2}\ldots+n_k)!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_{m-1}!\cdot(n_m-1)!\cdot n_{m+1}!\cdot n_{m+2}!\cdot\ldots\cdot n_k!}\right)$種

3. 牌組的獲勝機率

$$\textbf{獲勝機率}=\frac{\text{牌組獲勝情形的總數}}{\text{牌組所有情形的總數}}$$

$$=\frac{\dfrac{(n_1+n_2+\ldots+n_{m-1}+(n_m-1)+n_{m+1}+n_{m+2}+\ldots+n_k)!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_{m-1}!\cdot(n_m-1)!\cdot n_{m+1}!\cdot n_{m+2}!\cdot\ldots\cdot n_k!}}{\dfrac{(n_1+n_2+\ldots+n_k)!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}}$$

$$=\frac{n_m}{n_1+n_2+\ldots+n_m+\ldots+n_k}$$

因此我們會發現外圍的每個號碼張數還是會影響獲勝機率的，但開始牌堆的號碼張數影響機率是最大的，開始牌堆號碼張數越多，勝利的機會越高。

一般情形，如果有第①~ⓚ個牌堆，則 1~k 的號碼都會有相同的張數，這也就是說 $n_1=n_2=\cdots=n_k$，並且我們隨機且平均地分發到第①~ⓚ堆牌堆上，此時**獲勝機率**$=\dfrac{1}{k}$。

七、牌堆數、號碼張數對剩餘張數機率與期望值的影響

1. 牌堆數、號碼張數對剩餘張數機率與期望值 (期望值用 Excel 計算出來)

遊戲牌堆	每堆 1 張牌			每堆 2 張牌			每堆 3 張牌		
	剩 n 張牌機率	最大 n 值	期望值	剩 n 張牌機率	最大 n 值	期望值	剩 n 張牌機率	最大 n 值	期望值
2 堆	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3-n}{2\times3}$	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{(5-n)(4-n)}{2\times5\times4}$	3	$\frac{3}{4}$
3 堆	$\frac{1}{3}$	2	1	$\frac{5-n}{3\times5}$	4	$\frac{4}{3}$	$\frac{(8-n)(7-n)}{3\times8\times7}$	6	$\frac{3}{2}$
4 堆	$\frac{1}{4}$	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{7-n}{4\times7}$	6	2	$\frac{(11-n)(10-n)}{4\times11\times10}$	9	$\frac{9}{4}$
5 堆	$\frac{1}{5}$	4	2	$\frac{9-n}{5\times9}$	8	$\frac{8}{3}$	$\frac{(14-n)(13-n)}{5\times14\times13}$	12	3
6 堆	$\frac{1}{6}$	5	$\frac{5}{2}$	$\frac{11-n}{6\times11}$	10	$\frac{10}{3}$	$\frac{(17-n)(16-n)}{6\times17\times16}$	15	$\frac{15}{4}$
7 堆	$\frac{1}{7}$	6	3	$\frac{13-n}{7\times13}$	12	4	$\frac{(20-n)(19-n)}{7\times20\times19}$	18	$\frac{9}{2}$
8 堆	$\frac{1}{8}$	7	$\frac{7}{2}$	$\frac{15-n}{8\times15}$	14	$\frac{14}{3}$	$\frac{(23-n)(22-n)}{8\times23\times22}$	21	$\frac{21}{4}$
9 堆	$\frac{1}{9}$	8	4	$\frac{17-n}{9\times17}$	16	$\frac{16}{3}$	$\frac{(26-n)(25-n)}{9\times26\times25}$	24	6
10 堆	$\frac{1}{10}$	9	$\frac{9}{2}$	$\frac{19-n}{10\times19}$	18	6	$\frac{(29-n)(28-n)}{10\times29\times28}$	27	$\frac{27}{4}$
11 堆	$\frac{1}{11}$	10	5	$\frac{21-n}{11\times21}$	20	$\frac{20}{3}$	$\frac{(32-n)(31-n)}{11\times32\times31}$	30	$\frac{15}{2}$
12 堆	$\frac{1}{12}$	11	$\frac{11}{2}$	$\frac{23-n}{12\times23}$	22	$\frac{22}{3}$	$\frac{(35-n)(34-n)}{12\times35\times34}$	33	$\frac{33}{4}$
13 堆	$\frac{1}{13}$	12	6	$\frac{25-n}{13\times25}$	24	8	$\frac{(38-n)(37-n)}{13\times38\times37}$	36	9

我們透過表格觀察到有下列的規律：直列期望值數值呈現等差數列

遊戲牌堆	每堆 1 張牌		每堆 2 張牌		每堆 3 張牌	
	剩 n 張牌機率	期望值	剩 n 張牌機率	期望值	剩 n 張牌機率	期望值
a 堆	$\frac{1}{a}$	$(a-1)\times\frac{1}{2}$	$\frac{(2a-1)-n}{a\times(2a-1)}$	$(a-1)\times\frac{2}{3}$	$\frac{[(3a-1)-n][(3a-2)-n]}{a\times(3a-1)\times(3a-2)}$	$(a-1)\times\frac{3}{4}$

遊戲牌堆	每堆 4 張牌			每堆 5 張牌		
	剩 n 張牌機率	最大 n 值	期望值	剩 n 張牌機率	最大 n 值	期望值
2 堆	$\frac{(7-n)(6-n)(5-n)}{2\times7\times6\times5}$	4	$\frac{4}{5}$	$\frac{(9-n)(8-n)(7-n)(6-n)}{2\times9\times8\times7\times6}$	5	$\frac{5}{6}$
3 堆	$\frac{(11-n)(10-n)(9-n)}{3\times11\times10\times9}$	8	$\frac{8}{5}$	$\frac{(14-n)(13-n)(12-n)(11-n)}{3\times14\times13\times12\times11}$	10	$\frac{5}{3}$
4 堆	$\frac{(15-n)(14-n)(13-n)}{4\times15\times14\times13}$	12	$\frac{12}{5}$	$\frac{(19-n)(18-n)(17-n)(16-n)}{4\times19\times18\times17\times16}$	15	$\frac{5}{2}$
5 堆	$\frac{(19-n)(18-n)(17-n)}{5\times19\times18\times17}$	16	$\frac{16}{5}$	$\frac{(24-n)(23-n)(22-n)(21-n)}{5\times24\times23\times22\times21}$	20	$\frac{10}{3}$
6 堆	$\frac{(23-n)(22-n)(21-n)}{6\times23\times22\times21}$	20	4	$\frac{(29-n)(28-n)(27-n)(26-n)}{6\times29\times28\times27\times26}$	25	$\frac{25}{6}$
7 堆	$\frac{(27-n)(26-n)(25-n)}{7\times27\times26\times25}$	24	$\frac{24}{5}$	$\frac{(34-n)(33-n)(32-n)(31-n)}{7\times34\times33\times32\times31}$	30	5
8 堆	$\frac{(31-n)(30-n)(29-n)}{8\times31\times30\times29}$	28	$\frac{28}{5}$	$\frac{(39-n)(38-n)(37-n)(36-n)}{8\times39\times38\times37\times36}$	35	$\frac{35}{6}$
9 堆	$\frac{(35-n)(34-n)(33-n)}{9\times35\times34\times33}$	32	$\frac{32}{5}$	$\frac{(44-n)(43-n)(42-n)(41-n)}{9\times44\times43\times42\times41}$	40	$\frac{20}{3}$
10 堆	$\frac{(39-n)(38-n)(37-n)}{10\times39\times38\times37}$	36	$\frac{36}{5}$	$\frac{(49-n)(48-n)(47-n)(46-n)}{10\times49\times48\times47\times46}$	45	$\frac{15}{2}$
11 堆	$\frac{(43-n)(42-n)(41-n)}{11\times43\times42\times41}$	40	8	$\frac{(54-n)(53-n)(52-n)(51-n)}{11\times54\times53\times52\times51}$	50	$\frac{25}{3}$
12 堆	$\frac{(47-n)(46-n)(45-n)}{12\times47\times46\times45}$	44	$\frac{44}{5}$	$\frac{(59-n)(58-n)(57-n)(56-n)}{12\times59\times58\times57\times56}$	55	$\frac{55}{6}$
13 堆	$\frac{(51-n)(50-n)(49-n)}{13\times51\times50\times49}$	48	$\frac{48}{5}$	$\frac{(64-n)(63-n)(62-n)(61-n)}{13\times64\times63\times62\times61}$	60	10

我們大膽的猜測a堆牌每堆 b 張牌的剩 n 張牌機率和期望值如下：

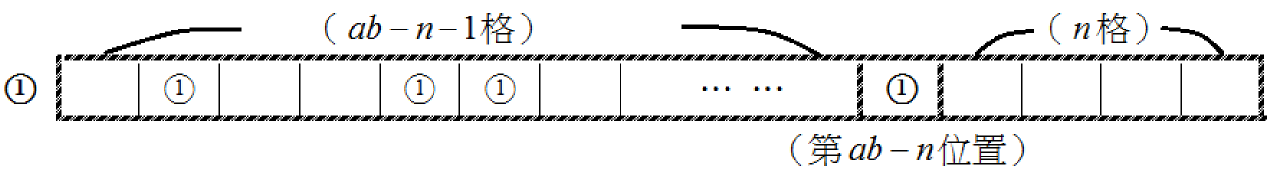
遊戲牌堆	每堆 b 張牌	
	剩 n 張牌機率	期望值
a堆	$\frac{[(ab-1)-n]\times[(ab-2)-n]\times\ldots\times[(ab-(b-1))-n]}{a\times(ab-1)\times(ab-2)\times\ldots\times(ab-(b-1))}$	$(a-1)\times\frac{b}{b+1}$

2. a **堆牌每堆 b 張牌的剩 n 張牌機率**

證明：a 堆牌每堆 b 張牌的剩 n 張牌機率＝$\dfrac{[(ab-1)-n]\times[(ab-2)-n]\times\ldots\times[(ab-(b-1))-n]}{a\times(ab-1)\times(ab-2)\times\ldots\times(ab-(b-1))}$

說明：設定開始牌堆為第①堆牌堆，所以在位置流程圖中開始與結束都是第①堆牌堆。

現在利用位置流程圖來觀察遊戲中最後會剩下 n 張牌的情形，如下圖：



由先前的推論已知遊戲結束於第 4 張 1 翻開的時候，那麼在位置流程圖中如果要剩下 n 張牌，則必須在第 ab －n 位置使得遊戲結束，也就是說第 ab －n 位置翻開的牌會是第 b 張 1。那麼在前面的 ab －n－1 格位置還有 b－1 個①在排列，所以

最後剩 n 張牌的情形總數

$=(ab-n-1$格放入$b-1$個① 的情形$)\times($剩下$ab-b$格放入其他位置號碼的情形$)$

$$= C_{b-1}^{ab-n-1}\times\frac{[ab-b]!}{(b!)^{(a-1)}}$$

又 牌組的所有情形有 $\dfrac{ab!}{(b!)^a}$ 種

剩下 n 張牌的機率

$$=\frac{\text{剩下n張牌情形的總數}}{\text{牌組所有情形的總數}}$$

$$=C_{b-1}^{ab-n-1}\times\frac{[ab-b]!}{(b!)^{(a-1)}}\div\frac{ab!}{(b!)^a}$$

$$=\frac{[(ab-1)-n]\times[(ab-2)-n]\times\ldots\times[(ab-(b-1))-n]}{(b-1)!}\times\frac{[ab-b]!}{(b!)^{(a-1)}}\times\frac{(b!)^a}{ab!}$$

$$=\frac{[(ab-1)-n]\times[(ab-2)-n]\times\ldots\times[(ab-(b-1))-n]}{a\times(ab-1)\times(ab-2)\times(ab-(b-1))}$$

3. a 堆牌每堆 1 張牌的剩餘張數期望值

牌堆	期望值		
2 堆	$0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}$	$=\frac{1}{2}\times(0+1)$	$=\frac{1}{2}$
3 堆	$0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}$	$=\frac{1}{3}\times(0+1+2)$	$=1$
4 堆	$0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}$	$=\frac{1}{4}\times(0+1+2+3)$	$=\frac{3}{2}$
5 堆	$0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{5}$	$=\frac{1}{5}\times(0+1+2+3+4)$	$=2$
…	…	…	
n 堆	$0\times\frac{1}{n}+1\times\frac{1}{n}+2\times\frac{1}{n}+\ldots+(n-1)\times\frac{1}{n}$	$=\frac{1}{n}\times(0+1+2+\ldots.+(n-1))$	$=\frac{n-1}{2}$
n+1 堆	$0\times\frac{1}{n+1}+1\times\frac{1}{n+1}+2\times\frac{1}{n+1}+\ldots+n\times\frac{1}{n+1}$	$=\frac{1}{n+1}\times(0+1+2+\ldots.+n)$	$=\frac{n}{2}$

n+1 堆的期望值－n 堆的期望值

$$=\frac{1}{n+1}\times(0+1+2+\ldots.+n)-\frac{1}{n}\times(0+1+2+\ldots.+(n-1))$$

$$=\frac{1}{n+1}\times\frac{(0+n)\times(n+1)}{2}-\frac{1}{n}\times\frac{(0+n-1)\times n}{2}$$

$$=\frac{n}{2}-\frac{n-1}{2}=\frac{1}{2}$$

由上面驗證出 a 堆牌每堆 1 張牌的剩餘張數期望值呈現公差為 $\frac{1}{2}$ 的等差數列。

所以 a 堆牌每堆 1 張牌的剩餘張數期望值 $=(a-1)\times\frac{1}{2}$ $(a>2)$

4. a 堆牌每堆 b 張牌的剩餘張數期望值

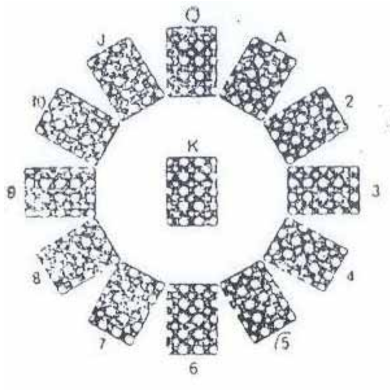
我們嘗試用相同的方法去解決 a 堆牌每堆 2 張牌、3 張牌的剩餘張數期望值會呈現等差數列的問題。但把式子展開時，會有目前以我們能力無法化簡的部分。但所猜想的 a 堆牌每堆 b 張牌的剩餘張數期望值 $=(a-1)\times\frac{b}{b+1}$，使用代入法和電腦軟體的輔助，都是正確的。而如何使用數學算式證明，仍是我們要努力的地方。

八、**Kunth 發現，只要知道每堆最底下的那張牌是什麼，就能預測輸贏。**

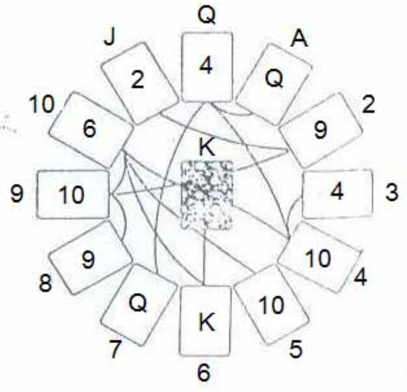
(參考欧阳锋(1991 年)。**数学方法溯源)**

遊戲者得勝，若且唯若當這十二張底牌的聯絡形成位置樹狀圖，而與另外四十張的排列無關。

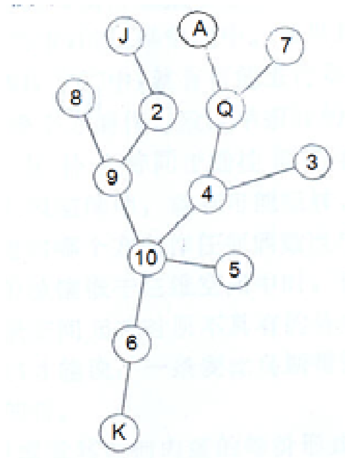
例如：



(a)時鐘接龍開始位置



(b)底牌及其樹狀聯絡



(c)底牌聯絡的位置樹狀圖

說明：

<=) 驗證的想法：

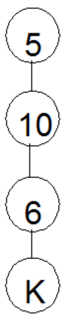
一副遊戲盤的外圈 12 堆底牌能構成樹狀圖 ⊆ 是此底牌樹狀圖的所有牌組

→ 將底牌樹狀圖畫出　→滿足位置獲勝流程圖

以上面的例子來說明，畫出了底牌聯絡的樹狀圖(c)，接著我們將探討位置流程圖與樹狀圖彼此的關係。

（1）直線型

取出(c)圖的一部分(d)來觀察：



根

（d）

從樹狀圖中可以得知原牌堆的訊息有：

（1）第 6 堆牌堆的最底牌是 K；

（2）第 10 堆牌堆的最底牌是 6；

（3）第 5 堆牌堆的最底牌是 10。

（位置，號碼）
序對表示法

則由此表示在位置流程中，會出現（6，K）與（10，6）這兩個序對，這邊要注意的是（6，K）中的 6 是在位置流程圖中由前至後的第 4 個 6，相對地來說，若是由後至前來看（6，K）的 6 是第 1 個出現的 6；同樣地，（10，6）的 10 表示由後至前來看第 1 個出現的 10；（5，10）的 5 表示由後至前來看第 1 個出現的 5。

由於最底層裡會出現 K 只有在第 6 堆牌堆的最底層或是第 13 堆牌堆裡，所以在位置流程圖中最後出現的 K 可能落在第 6 堆或是在第 13 堆牌堆裡，且由後至前會再看到不同於 K 號碼的是 6，因此我們可以畫出可能的位置流程圖如下：

K	…	…	…	**6**	…	…	**6**	…	**6**	…	**6**	**K**	①	**K**

（6，K）的 K 與最後的 K 可能是同一格，若是不同則①的位置可以消除或是放數張 K；（6，K）的 6 之前還有 3 個 6 在排列。

接著我們要觀察第 4 張 6 出現的位置會在哪個牌堆裡，從圖（b）與原牌堆的訊息裡會發現第 4 張 6 出現的位置可能會在第 10 堆、第 6 堆與第 13 堆牌堆裡，且由後至前會再看到不同於 6、K 號碼的是 10，因此我們可以畫出可能的位置流程如下：

K	…	**10**	…	**6**	…	…	…	**10**	**6**	②	**6**	**K**	①	**K**

（10，6）與（6，K）的 6 可能是同一格，若是不同則②的位置可以消除或是放數張 K、6；（10，6）的 10 前面還有 3 個 10 與剩餘的 K、6 放入字串排列。

同樣地，（5，10）的 5 是在位置流程圖中由後至前僅次於 K、6、10 接著可能會出現的數字【在 10 此節點上有 3 條分支】。

K				…	**5**	**10**	③	**10**	**6**	②	**6**	**K**	①	**K**

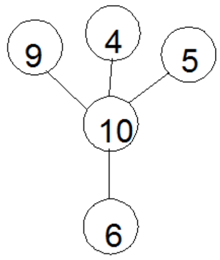
（5，10）與（10，6）的 10 可能是同一格，若是不同則③的位置可能是空的或是放數張 K、6、10；（5，10）的 5 前面還有 3 個 5 與剩餘的 K、6、10 放入字串排列。

由此可發現底牌位置樹狀圖的直線型具有的性質：

1. 序對在位置流程中由後至前的出現順序與樹狀圖由根出發的順序相同。
   例如：樹狀圖 5—10—6—K（根）
   在位置流程中由後至前所出現的順序為（6，K）、（10，6）、（5、10）
2. 在位置流程圖中（m，n）序對的 m 是由後至前看到的第 1 個 m，在此 m 之前還有 3 個 m 插入字串中。

（2）分歧型

取出(c)圖的一部分(e)來觀察：



（e）

從樹狀圖中可以得知原牌堆的訊息有：

（1）第 10 堆牌堆的最底牌是 6

（2）第 9 堆牌堆的最底牌是 10；

（3）第 4 堆牌堆的最底牌是 10；

（4）第 5 堆牌堆的最底牌是 10。

這些條件告訴我們在位置流程圖裡，（10，6）的 10 是由後至前看到的第 1 個 10；（9，10）的 9 是由後至前看到的第 1 個 9；（4，10）的 4 是由後至前看到的第 1 個 4；（5，10）的 5 是有後至前看到的第 1 個 5。

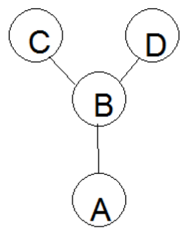
由直線型的探討中知道我們從位置流程圖由後至前觀察會先看到 6 接著是 10，那麼在接著是會先看到 4、5，還是 9 呢？

K							**…**	**…**	**…**	**10**	**6**	**…**	6	**K**

我們發現（9，10）、（4，10）、（5，10）在位置流程圖由後至前的出現順序並不會違背（m，n）的 m 是由後至前看到的第 1 個 m 的規定，因此（9，10）、（4，10）、（5，10）在位置流程圖由後至前接在（10，6）出現的順序可以隨意排定。這裡要注意的是因為順序可以隨意排定，所以 10 將會用到 3 次，由此可推得在 13 點樹裡由一個節點分歧的分支最多只有 4 支。

由此可發現底牌樹狀圖的分歧型具有的性質：

1. 由一個節點分歧的分支最多只有 4 支。
2. （C，B）、（D，B）在位置流程圖由後至前接在（B，A）出現的順序可以隨意排定。
3. 在位置流程圖中（m，n）序對的 m 是由後至前看到的第 1 個 m；除了 m 是分歧點之外，其餘的 m 之前還會有 3 個 m 插入在字串中。



（3）13 點樹

在 13 點樹中，都是由直線型與分歧型的樹狀圖構成，我們會發現利用它們的性質必定可以構成某個獲勝位置流程圖。因此當這十二張底牌的聯絡形成 13 點樹位置樹狀圖，便能獲勝。

=＞) 已知獲勝牌組必定滿足獲勝位置流程圖

現在我們從獲勝位置流程圖由後至前將看到的第 1 個 1~12 抓出來，假設看到的順序為 N_1、N_2、N_3、…、N_{12}（$N_1,N_2,N_3,\cdots,N_{12} \in \{1,2,\ \cdots,12\}$，$N_1 \neq N_2 \neq \cdots \neq N_{12}$），它們緊跟著的後面號碼依序為 B_1、B_2、…、B_{12}（$B_1,B_2,B_3,\cdots,B_{12} \in \{1,2,\ \cdots,12\}$）

K	**…**	**N_{12}**	**B_{12}**	**…**	**…**	**…**	**…**	**N_2**	**B_2**	**…**	**N_1**	**B_1**	**…**	**K**

接著觀察（N_1，B_1）、（N_2，B_2）、…、（N_{12}，B_{12}）序對的限制，我們先來討論（N_1，B_1），由於 N_1 是 1~12 裡第一個在位置流程圖中由後至前看到的第 1 個號碼 N_1，所以 $B_1 \notin \{1,2,\ \cdots,12\}$，$B_1$ 只能等於 K，且在位置流程圖中 B_1 與第 4 個 K 之間只能放 K 亦或不放，也有可能 B_1 就是第 4 個 K；接著討論（N_2，B_2），由於 N_2 是 1~12 裡第二個在位置流程圖中由後至前看到的第 1 個號碼 N_2，所以 $B_2 \in \{K, N_1\}$；同理地，討論（N_i，B_i）（$i \in \{1,2,\ \cdots,12\}$），由於 N_i 是 1~12 裡第 i 個在位置流程圖中由後至前看到的第 1 個號碼 N_i，所以 $B_i \in \{K, N_1, N_2,\cdots, N_{i-1}\}$。

我們將序對一一列出如下：

（N_1，B_1），$B_1 \in \{K\}$

（N_2，B_2），$B_2 \in \{K, N_1\}$

（N_3，B_3），$B_3 \in \{K, N_1, N_2\}$

（N_4，B_4），$B_4 \in \{K, N_1, N_2, N_3\}$

（N_5，B_5），$B_5 \in \{K, N_1, N_2, N_3, N_4\}$

（N_6，B_6），$B_6 \in \{K, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5\}$

（N_7，B_7），$B_7 \in \{K, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6\}$

（N_8，B_8），$B_8 \in \{K, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7\}$

（N_9，B_9），$B_9 \in \{K, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8\}$

（N_{10}，B_{10}），$B_{10} \in \{K, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9\}$

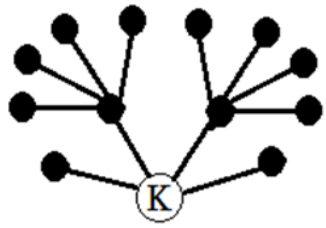
（N_{11}，B_{11}），$B_{11} \in \{K, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9, N_{10}\}$

（N_{12}，B_{12}），$B_{12} \in \{K, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}\}$

N_1、N_2、N_3、…、N_{12} 是我們從獲勝位置流程圖由後至前將看到的第 1 個 1~12 所抓出來地，換句話說在位置流程圖裡它們是由前至後看到的第 4 個 1~12，順序為 N_{12}、N_{11}、…、N_2、N_1，也就是說（N_i，B_i）代表著第 N_i 堆牌堆的最底層是 B_i 號碼。B_1、B_2、…、B_{12} 必須滿足撲克牌的限制，那就是 1~K 只能出現 4 次，由上面所列出的序對條件，我們將 K 設定為 13 點樹的根，N_1 為連結 K 的第 2 點，接著將連結 N_1 的 N_i 們將 N_1 當節點 N_i 們當分支，如此依序畫下去，便會發現 N_1、N_2、N_3、…、N_{12} 與 K 構成一個連通的 13 點樹。

藉由上述論證，可推廣至 n 堆牌： 遊戲者得勝，若且唯若當外圍底牌與開始牌堆(根)的聯絡形成位置樹狀圖，而與剩下牌的排列無關。

九、特殊固定 12 張、13 張底牌的位置樹狀圖

固定 13 張牌	固定 12 張牌
先取出從 A~K 十三張牌預備放入每一堆的最底下一張，若此 13 張牌滿足第①堆~第⑬堆牌堆的最下面一張牌不是自己的號碼，則遊戲便會獲勝。	將 4 張 K 與另兩對一樣的牌（假設是 N_1、N_2，$N_1,N_2 \in 1,2,\cdots,12$，$N_1 \neq N_2$），將一張 K 放在第 N_1 堆牌堆的最下面，一張 K 放在第 N_2 堆牌堆的最下面，另兩張 K 隨意放在第①堆~第⑫堆的空格。將其餘 8 張 N_1 與 N_2 放在第①堆~第⑫堆 8 個空格中，剩下的牌隨機放入各牌堆裡，遊戲便能獲勝。
	

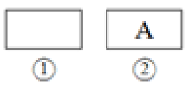
十、將開始牌堆號碼放置於外圍最底層的獲勝機率

在剛開始接觸時鐘接龍的隨機遊戲時，邊翻牌心中都會默念著不要翻到 K(當時已經發現 4 張 K 全翻出就會結束遊戲)。所以當老師交給我們去設計一組可以獲勝牌組的功課時，曾設想把 4 張 K 全放置於最底層，但又礙於外圍牌堆底層不能是自己的號碼牌，因而討論出前面固定 12 張牌的方法。

但對於 4 張 K 放置於外圍底層的條件獲勝機率仍是我們很想探索的。目前我們所擁有的工具有(1)原始牌堆(2)位置流程圖(3)樹狀圖。從原始牌堆的圖示中，可以推得 4 張 K 在外圍底層的所有情形數，接著我們想從**位置流程圖**與**樹狀圖**來計算獲勝情形的總數。(以下的討論，都是把第①堆牌視為開始牌堆，而 A 配對著第①堆牌)

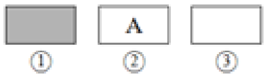
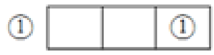
(一) n 堆牌每堆牌各 1 張，開始牌堆號碼放置於外圍最底層的獲勝機率

1. 2 堆牌每堆牌各 1 張

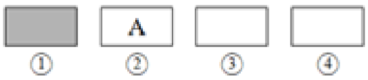
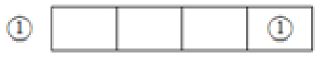
原始牌堆		樹狀圖
	外圍底牌是 A 的全部情形＝1 $P(\text{在外圍底牌是A的情形下的獲勝機率})$ $=\dfrac{\text{外圍底牌是A的獲勝情形}}{\text{外圍底牌是A的全部情形}}=1$	底層構成②－①的兩點樹，表示一定都會獲勝，不論是在 2 堆牌每堆各幾張的情形下。

※ 藉由 Kunth 發現的推廣，n 堆牌每堆牌各 n-1 張的情形下，開始牌堆的號碼牌恰好可以放滿外圍牌堆的每個底層，並與開始牌堆聯絡成樹狀圖，表示一定會獲勝。因此接下來我們不去討論 3 堆牌每堆牌各 2 張、4 堆牌每堆牌各 3 張、5 堆牌每堆牌各 4 張等開始號碼在外圍底層的獲勝機率。

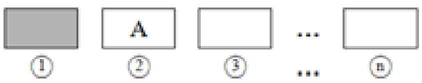
2. 3 堆牌每堆牌各 1 張

原始牌堆	獲勝位置流程圖
 外圍底牌是 A 的全部情形 ＝(A 放入外圍底牌的組合數)×(剩下牌的排列數) $=C_1^2\times 1$	 (1 個②，1 個③) 外圍底牌是 A 的獲勝情形＝2！
$P(\text{在外圍底牌是A的情形下的獲勝機率})=\dfrac{2!}{C_1^2\times 2!}=\dfrac{1}{2}$	

3. 4 堆牌每堆牌各 1 張

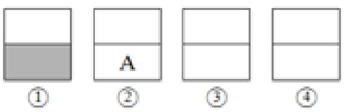
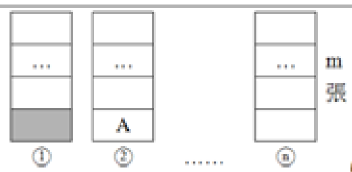
原始牌堆	獲勝位置流程圖
 外圍底牌是 A 的全部情形＝$C_1^3\times 3!$	 (1 個②，1 個③，1 個④) 外圍底牌是 A 的獲勝情形＝3！
$P(\text{在外圍底牌是A的情形下的獲勝機率})=\dfrac{3!}{C_1^3\times 3!}=\dfrac{1}{3}$	

4. n 堆牌每堆牌各 1 張

原始牌堆	獲勝位置流程圖
 外圍底牌是 A 的全部情形＝$C_1^{n-1}\times(n-1)!$	 (1 個②，1 個③，…，1 個ⓝ) 外圍底牌是 A 的獲勝情形＝$(n-1)$！
$P(\text{在外圍底牌是A的情形下的獲勝機率})=\dfrac{(n-1)!}{C_1^{n-1}\times(n-1)!}=\dfrac{1}{n-1}$	

(二) n 堆牌每堆牌各 2 張，開始牌堆號碼放置於外圍最底層的獲勝機率

1. 4 堆牌每堆牌各 2 張

原始牌堆	n 堆牌每堆牌各 m 張原始牌堆
 外圍底牌是 A 的全部情形＝$C_2^3\times\dfrac{(8-2)!}{(2!)^3}$	 (有 m 張 A) 外圍底牌是 A 的獲勝情形＝$C_m^{n-1}\times\dfrac{(mn-m)!}{(m!)^{n-1}}$

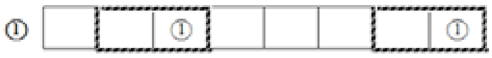
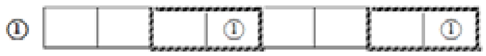
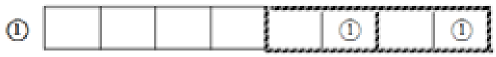
外圍底牌是 A 的獲勝位置流程圖：

在前面的討論知道，如果 A 放在第②堆最底層，則會翻開時的位置流程圖為(2,1)，在此①之後不會再有②的出現。因此在計算外圍底牌是 A 的獲勝情形時，我們採取下列步驟：

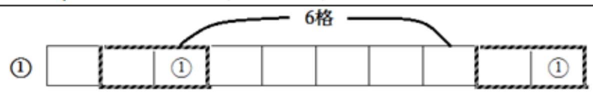
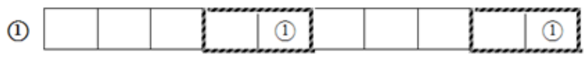
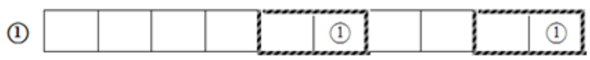
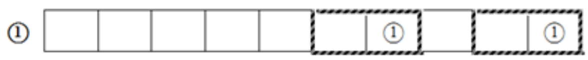
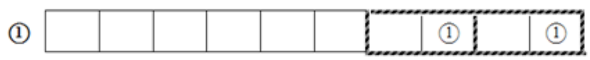
(1) 將 □① 視為 1 組共 2 組，先選取每 1 組①前面空格內的號碼

(2) 在第一組 □① *空格前面* 將剛**選取號碼的剩下個數**排列進去

(3) 將剩餘號碼排列進剩下空格內

(1)		$3\times2\times C_1^1\times\dfrac{3!}{2!\times1!}=3\times2\times1\times\dfrac{3!}{2!\times1!}$
(2)		$3\times2\times C_1^2\times\dfrac{3!}{2!\times1!}=3\times2\times2\times\dfrac{3!}{2!\times1!}$
(3)		$3\times2\times C_1^3\times\dfrac{3!}{2!\times1!}=3\times2\times3\times\dfrac{3!}{2!\times1!}$
(4)		$3\times2\times C_1^4\times\dfrac{3!}{2!\times1!}=3\times2\times4\times\dfrac{3!}{2!\times1!}$
外圍底牌是 A 的獲勝情形$=3\times2\times\dfrac{3!}{2!\times1!}\times(1+2+3+4)=3\times2\times\dfrac{3!}{2!\times1!}\times\dfrac{5\times4}{2}$		
P(在外圍底牌是A的情形下的獲勝機率)$=\dfrac{3\times2\times\dfrac{3!}{2!\times1!}\times\dfrac{5\times4}{2}}{C_2^3\times\dfrac{(8-2)!}{(2!)^3}}$ $=3\times2\times\dfrac{3!}{2!\times1!}\times\dfrac{5\times4}{2}\times\dfrac{2!}{3\times2}\times\dfrac{(2!)^3}{6!}=\dfrac{2}{3}$		

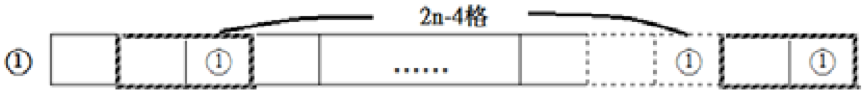
2. 5 堆牌每堆牌各 2 張

外圍底牌是 A 的獲勝位置流程圖：		
(1)		$4\times3\times C_1^1\times\dfrac{5!}{2!\times2!\times1!}=4\times3\times1\times\dfrac{5!}{2!\times2!\times1!}$
(2)		$4\times3\times C_1^2\times\dfrac{5!}{2!\times2!\times1!}=4\times3\times2\times\dfrac{5!}{2!\times2!\times1!}$
(3)		$4\times3\times C_1^3\times\dfrac{5!}{2!\times2!\times1!}=4\times3\times3\times\dfrac{5!}{2!\times2!\times1!}$
(4)		$4\times3\times C_1^4\times\dfrac{5!}{2!\times2!\times1!}=4\times3\times4\times\dfrac{5!}{2!\times2!\times1!}$
(5)		$4\times3\times C_1^5\times\dfrac{5!}{2!\times2!\times1!}=4\times3\times5\times\dfrac{5!}{2!\times2!\times1!}$
(6)		$4\times3\times C_1^6\times\dfrac{5!}{2!\times2!\times1!}=4\times3\times6\times\dfrac{5!}{2!\times2!\times1!}$
外圍底牌是 A 的獲勝情形$=4\times3\times\dfrac{5!}{2!\times2!\times1!}\times(1+2+\ldots+6)=4\times3\times\dfrac{5!}{2!\times2!\times1!}\times\dfrac{7\times6}{2}$		
P(在外圍底牌是A的情形下的獲勝機率)$=\dfrac{4\times3\times\dfrac{5!}{2!\times2!\times1!}\times\dfrac{7\times6}{2}}{C_2^4\times\dfrac{8!}{(2!)^4}}$ $=4\times3\times\dfrac{5!}{2!\times2!\times1!}\times\dfrac{7\times6}{2}\times\dfrac{2!}{4\times3}\times\dfrac{(2!)^4}{8!}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ 140		

3. n 堆牌每堆牌各 2 張

外圍底牌是 A 的獲勝位置流程圖：

2 個①，2 個②，2 個③，⋯，2 個ⓝ　　共 2n 個



(第一組 每向右一格到 停止)

外圍底牌是 A 的獲勝情形 $=(n-1)\times(n-2)\times[1+2+...+(2n-4)]\times\frac{(2n-5)!}{(2!)^{n-3}\times 1!}$

$$=(n-1)\times(n-2)\times\frac{(2n-5)!}{(2!)^{n-3}}\times\frac{(2n-3)(2n-4)}{2}$$

P(在外圍底牌是A的情形下的獲勝機率)

$$=\frac{(n-1)\times(n-2)\times\frac{(2n-5)!}{(2!)^{n-3}}\times\frac{(2n-3)(2n-4)}{2}}{C_2^{n-1}\times\frac{(2n-2)!}{(2!)^{n-1}}}$$

$$=(n-1)\times(n-2)\times\frac{(2n-5)!}{(2!)^{n-3}}\times\frac{(2n-3)(2n-4)}{2}\times\frac{2!}{(n-1)(n-2)}\times\frac{(2!)^{n-1}}{(2n-2)!}=\frac{(2!)^2}{2n-2}=\frac{2}{n-1}$$

(二) n 堆牌每堆牌各 3 張，開始牌堆號碼放置於外圍最底層的獲勝機率

外圍底牌是 A 的獲勝位置流程圖：

在計算外圍底牌是 A 的獲勝情形時，我們採取下列步驟：

(1) 將 視為 1 組共 3 組，先選取每 1 組①前面空格內的號碼

(2) 在第一組 *空格前面* 將剛選取號碼的剩下個數排列進去

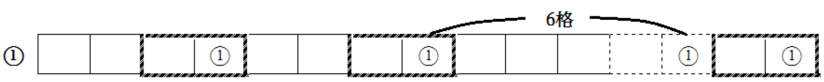
(3) 在第二組 *空格前面* 將剛選取號碼的剩下個數排列進去

(4) 將剩餘號碼排列進剩下空格內

1. 5 堆牌每堆牌各 3 張

外圍底牌是 A 的獲勝位置流程圖：

(1)



(第二組 每向右一格到 停止)

$$4\times3\times2\times C_2^2\times C_2^2\times\frac{5!}{3!\times2!}$$

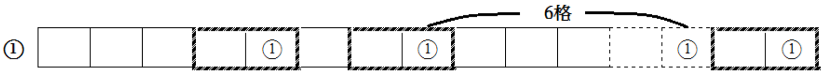
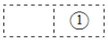
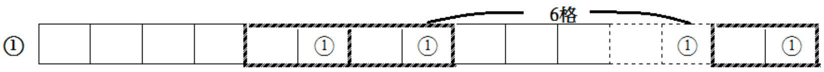
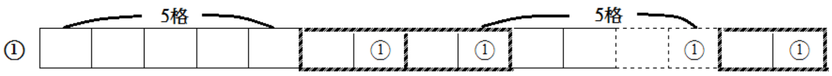
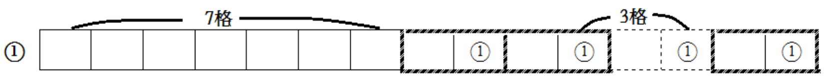
$$4\times3\times2\times C_2^2\times C_2^3\times\frac{5!}{3!\times2!}$$

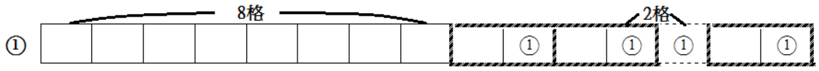
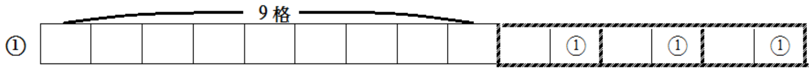
$$4\times3\times2\times C_2^2\times C_2^4\times\frac{5!}{3!\times2!}$$

$$4\times3\times2\times C_2^2\times C_2^5\times\frac{5!}{3!\times2!}$$

$$4\times3\times2\times C_2^2\times C_2^6\times\frac{5!}{3!\times2!}$$

$$4\times3\times2\times C_2^2\times C_2^7\times\frac{5!}{3!\times2!}$$

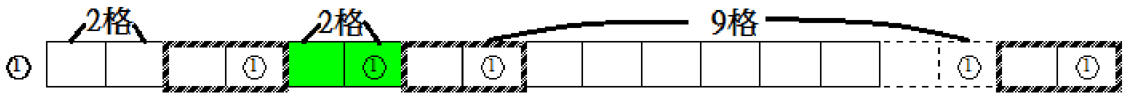
(2)	 (第二組每向右一格到停止) $4\times3\times2\times C_2^3\times C_2^2\times\frac{5!}{3!\times2!}$ $4\times3\times2\times C_2^3\times C_2^3\times\frac{5!}{3!\times2!}$ $4\times3\times2\times C_2^3\times C_2^4\times\frac{5!}{3!\times2!}$ $4\times3\times2\times C_2^3\times C_2^5\times\frac{5!}{3!\times2!}$ $4\times3\times2\times C_2^3\times C_2^6\times\frac{5!}{3!\times2!}$ $4\times3\times2\times C_2^3\times C_2^7\times\frac{5!}{3!\times2!}$
(3)	 $4\times3\times2\times C_2^4\times C_2^2\times\frac{5!}{3!\times2!}$ $4\times3\times2\times C_2^4\times C_2^3\times\frac{5!}{3!\times2!}$ $4\times3\times2\times C_2^4\times C_2^4\times\frac{5!}{3!\times2!}$ $4\times3\times2\times C_2^4\times C_2^5\times\frac{5!}{3!\times2!}$ $4\times3\times2\times C_2^4\times C_2^6\times\frac{5!}{3!\times2!}$ $4\times3\times2\times C_2^4\times C_2^7\times\frac{5!}{3!\times2!}$
(4)	 $4\times3\times2\times C_2^5\times C_2^3\times\frac{5!}{3!\times2!}$ $4\times3\times2\times C_2^5\times C_2^4\times\frac{5!}{3!\times2!}$ $4\times3\times2\times C_2^5\times C_2^5\times\frac{5!}{3!\times2!}$ $4\times3\times2\times C_2^5\times C_2^6\times\frac{5!}{3!\times2!}$ $4\times3\times2\times C_2^5\times C_2^7\times\frac{5!}{3!\times2!}$
(5)	 $4\times3\times2\times C_2^6\times C_2^4\times\frac{5!}{3!\times2!}$ $4\times3\times2\times C_2^6\times C_2^5\times\frac{5!}{3!\times2!}$ $4\times3\times2\times C_2^6\times C_2^6\times\frac{5!}{3!\times2!}$ $4\times3\times2\times C_2^6\times C_2^7\times\frac{5!}{3!\times2!}$
(6)	 $4\times3\times2\times C_2^7\times C_2^5\times\frac{5!}{3!\times2!}$ $4\times3\times2\times C_2^7\times C_2^6\times\frac{5!}{3!\times2!}$

		$4\times3\times2\times C_2^7\times C_2^7\times\frac{5!}{3!\times2!}$
(7)		$4\times3\times2\times C_2^8\times C_2^6\times\frac{5!}{3!\times2!}$ $4\times3\times2\times C_2^8\times C_2^7\times\frac{5!}{3!\times2!}$
(8)		$4\times3\times2\times C_2^9\times C_2^7\times\frac{5!}{3!\times2!}$
P(在外圍底牌是A的情形下的獲勝機率) $=\frac{3}{4}$		

2. **6 堆牌每堆牌各 3 張**

外圍底牌是 A 的獲勝位置流程圖：

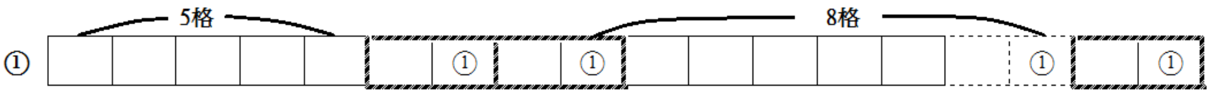
(1)



(第一組 每向右一格到 停止，第二組 每向右一格到 停止)

$$5\times4\times3\times2\times\left(C_2^2+C_2^3+C_2^4\right)\times\left(C_2^2+C_2^3+C_2^4+\ldots+C_2^{10}\right)\times\frac{8!}{3!\times3!\times2!}$$

(2)



(第二組 每向右一格到 停止)

$$5\times4\times3\times2\times C_2^5\times\left(C_2^3+C_2^4+\ldots+C_2^{10}\right)\times\frac{8!}{3!\times3!\times2!}$$

(3)

$$5\times4\times3\times2\times C_2^6\times\left(C_2^4+C_2^5+\ldots+C_2^{10}\right)\times\frac{8!}{3!\times3!\times2!}$$

同(2)(3)的方法可推得接下來的狀況：

(4) $5\times4\times3\times2\times C_2^7\times\left(C_2^5+C_2^6+\ldots+C_2^{10}\right)\times\frac{8!}{3!\times3!\times2!}$

(5) $5\times4\times3\times2\times C_2^8\times\left(C_2^6+C_2^7+\ldots+C_2^{10}\right)\times\frac{8!}{3!\times3!\times2!}$

(6) $5\times4\times3\times2\times C_2^9\times\left(C_2^7+C_2^8+C_2^9+C_2^{10}\right)\times\frac{8!}{3!\times3!\times2!}$

(7) $5\times4\times3\times2\times C_2^{10}\times\left(C_2^8+C_2^9+C_2^{10}\right)\times\frac{8!}{3!\times3!\times2!}$

(8) $5\times4\times3\times2\times C_2^{11}\times\left(C_2^{9}+C_2^{10}\right)\times\dfrac{8!}{3!\times3!\times2!}$ (9) $5\times4\times3\times2\times C_2^{11}\times\left(C_2^{10}\right)\times\dfrac{8!}{3!\times3!\times2!}$	
P(在外圍底牌是A的情形下的獲勝機率) $=\dfrac{3}{5}$	

我們觀察到外圍底牌是 A 的獲勝位置流程圖中，可以分成兩個部分的區塊來探討。以 5 堆牌每堆各 3 張為例，(1)~(3)為第一個部分：為前兩組 $\boxed{\textcircled{1}}$ 選取號碼放入最少格數(A 以外 2 種號碼放完)的組合方法；(4)~(8)為第二個部分：為第一組 $\boxed{\textcircled{1}}$ 往右擠壓到第二組 $\boxed{\textcircled{1}}$ 的方法數。因此，只要是 **n 堆牌每堆牌各 3 張，開始牌堆號碼放置於外圍最底層的獲勝方法數**都能分成兩部分去探討計算。

(三) n 堆牌中將開始牌堆號碼放置於外圍最底層的獲勝機率

下列獲勝機率的表格內數值都是藉由計算機、Excel 或一般式證明取得

每堆牌的張數	2 堆	3 堆	4 堆	5 堆	6 堆	n 堆
1 張	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{n-1}$
2 張	1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{n-1}$
3 張	1	1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	
4 張	1	1	1	1	$\frac{4}{5}$	

從表格內可以發現到開始牌堆的號碼張數越多，並放置於外圍牌堆的最底層的條件下，獲勝機率確實都比隨機獲勝機率 $\frac{1}{n}$ 高。雖然目前還無法推論出 n 堆牌各 3、4 張的條件機率一般式，但我們大膽的假設 n 堆牌各 3 張的條件機率為 $\frac{3}{n-1}$ ，n 堆牌各 4 張的條件機率為 $\frac{4}{n-1}$ 。並且在 6 堆牌各 4 張的機率值算出時，讓我們更加確定我們的猜想。如果猜想正確，則 13 堆時鐘接龍 4 張 K 放置於外圍底層的條件獲勝機率可能為 $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ ，這機率值大大令人著迷，表示控制 4 張 K 到外圍底層便能有平均 3 盤會獲勝 1 盤的情形。以賭徒心態來說，這是個很大的收穫。

伍、結論

在這次的科展研究中，我們在尋求勝利情形總數方法時，曾一直困惑於從混亂的勝利牌組中去觀察是否有其規律性，而停滯不前，直到有組員提議畫出遊戲牌堆的位置流程圖，才將錯綜的牌堆號碼轉譯為一直線的排列方式，這便是我們最大突破也是最重要的研究方法。藉此我們才能順利推論到剩餘 n 張牌的機率與期望值，並推廣探討牌堆數、號碼張數對獲勝機率的影響。到後面才驗證的底層聯絡樹狀圖，便成為在使用位置流程圖討論問題時，最佳的檢驗工具。

我們將這次研究結論歸納如下：

1. 「時鐘接龍」的遊戲基本定理：
   (1) 遊戲在正中央的四張 K 都已被翻開時結束。
   (2) 若是第①堆~第⑫堆牌堆的最下面數張牌都是自己的號碼，則該數張牌便翻不到。
   (3) 如果要獲勝，在十三堆牌堆中，K 至少要有一張在第①堆~第⑫堆牌堆的最底層。
2. 論證了我們所猜測控制固定 13 張與 12 張牌獲勝的方法。
3. 「時鐘接龍」的獲勝機率＝$\frac{1}{13}$，期望值＝9.6 張。
4. 牌堆的號碼張數會影響獲勝機率情形，而開始牌堆的號碼張數越多，勝利機會越高。
5. 論證　a 堆牌每堆 b 張牌的剩 n 張牌機率

$$=\frac{[(ab-1)-n]\times[(ab-2)-n]\times\ldots\times[(ab-(b-1))-n]}{a\times(ab-1)\times(ab-2)\times\ldots\times(ab-(b-1))}\text{。}$$

6. 說明 Kunth 所提出的時鐘接龍遊戲獲勝方法，並間接說明獲勝至少要控制 12 張底牌。
7. n 堆牌中將開始牌堆號碼放置於外圍最底層的獲勝機率 比 隨機獲勝機率$\frac{1}{n}$ 高。

待需探討的問題如下：

1. 說明a堆牌每堆 b 張牌的剩餘張數期望值＝$(a-1)\times\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{b}+1}$。
2. 計算四張 K 都在第①堆~第⑫堆牌堆底層的條件獲勝機率，並推廣之。
3. 尋覓判斷第幾號牌堆會是最先翻完的方法。

我們也希望能將研究的結果可以運用在生活當中，例如：軟體密碼鎖：密碼 1，開始牌堆的選擇。密碼 2，設定剩餘牌數。密碼 3，挖空底層 13 點樹的某幾個數字。但如何在設定時能讓密碼唯一，也是我們想繼續探討的問題。

陸、參考資料

1. 余文卿（民 99 年 12 月）。**普通高級中學數學課本 第二冊（1 下）**（初版），臺南市：翰林出版事業股份有限公司。
2. 高橋和希(民 92 年 6 月)。遊☆戲☆王 Vo. 6，東立出版社，頁 45~65。
3. 欧阳锋(1991 年)。**数学方法溯源**，江苏教育出版社，頁 57~60。
4. 時鐘接龍遊戲 flash (http://www.7k7k.com/swf/64676.htm)。

附件一：

二堆牌獲勝情形 35 種

1	2	1	2	2	2	1	1	2	1
1	2	2	2	1	2	2	2	1	2
2	2	1	2	1	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
①	②	①	②	①	②	①	②	①	②
2	1	1	2	2	2	2	2	1	2
2	2	2	1	1	1	2	1	2	2
1	2	2	2	2	2	1	2	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
①	②	①	②	①	②	①	②	①	②
2	2	2	2	2	1	2	1	2	2
1	2	2	2	2	1	2	2	2	1
2	1	1	1	2	2	2	1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
①	②	①	②	①	②	①	②	①	②
1	2	1	1	1	2	1	2	1	1
1	2	1	2	1	1	1	2	2	2
1	2	2	2	2	2	2	1	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
①	②	①	②	①	②	①	②	①	②
1	2	1	2	2	1	2	2	2	2
2	1	2	2	1	2	1	1	1	2
1	2	1	1	1	2	1	2	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
①	②	①	②	①	②	①	②	①	②
2	1	2	1	2	2	2	1	2	1
2	1	2	2	2	1	1	1	1	2
1	2	1	1	1	1	2	2	2	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
①	②	①	②	①	②	①	②	①	②
2	2	1	1	1	1	1	2	2	1
1	1	2	1	2	2	2	1	2	1
2	1	2	2	2	1	2	1	2	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
①	②	①	②	①	②	①	②	①	②

二堆牌失敗情形 35 種

1	2	1	2	1	1	1	1	1	1
1	2	1	1	1	2	1	1	1	2
1	1	1	2	1	2	2	2	2	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
①	②	①	②	①	②	①	②	①	②
1	2	1	1	1	1	1	2	2	1
1	1	2	1	2	2	2	1	1	1
2	1	1	2	1	1	1	1	1	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
①	②	①	②	①	②	①	②	①	②
2	1	2	2	1	1	2	1	2	1
1	2	1	1	2	1	1	1	2	1
1	1	1	1	2	1	2	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
①	②	①	②	①	②	①	②	①	②
1	2	1	2	1	2	1	1	1	2
1	2	1	2	1	1	1	2	2	2
1	2	2	1	2	2	2	2	1	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
①	②	①	②	①	②	①	②	①	②
1	2	1	1	2	2	2	2	2	1
2	1	2	2	1	2	1	1	1	2
1	2	1	2	1	1	1	2	1	2
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
①	②	①	②	①	②	①	②	①	②
2	1	2	1	2	2	2	1	2	1
2	1	2	2	2	1	1	1	1	2
1	2	1	1	1	1	2	2	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
①	②	①	②	①	②	①	②	①	②
2	2	1	1	1	1	1	2	1	2
1	1	2	1	2	2	2	1	1	2
2	1	2	2	2	1	2	1	1	2
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
①	②	①	②	①	②	①	②	①	②

【評語】030408

1. 作者在沒有太多機率知識的條件下能夠計算各種事件的機率與期望值，難能可貴。

2. 大量或者困難的計算，未必能夠讓作品增色太多，重要的是提出有趣或者是有意義的問題。

3. 作者的團隊合作精神可嘉，而且具好奇心、潛力強，值得嘉勉。

4. 條件機率的想法非常好，可惜未能完整。