中華民國第52屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030407

層出不窮－利用無窮等比級數推算正多邊形的等分切割面積

學校名稱：南投縣立宏仁國民中學

作者：	指導老師：
國二 張博恩	林志隆
國二 張博淵	李季篤
國一 林家宇	

關鍵詞：正多邊形、無窮等比級數、相似形

摘要

從正多邊形的各種不同的等分切割中，先證明各組切割三角形的全等或相似關係，再研究其切割相似三角形間面積和比例的相關數值。

接著推論同組相似三角形的面積總和，並利用無窮等比級數推算特定區域面積的相關公式。最後再利用各種等分數去推導等分數與特定切割三角形的面積和比例關係。

壹、 研究動機

我們在學習三、四冊的數學過程中，裡面在談有關勾股定理、等差級數與多邊形的相似及全等的相關議題時，發現書中介紹的一些幾何圖形和它們的形成方式，都頗令我們感到有興趣。

所以我們在討論題目的過程中，對於正多邊形等分切割這部份的圖形突然有了些特別的想法，我們接著便嘗試去找這些圖形中的一些運算規則及相關規律。忽然發現在圖形的旋轉線條之間，似乎有著令我們著迷的幾何世界。

我們後來就藉著這個議題，開始我們的科展研究！

貳、研究目的

一、利用**正三角形**依照不同的等分方式作等比切割，並求得特定面積。

二、利用**正方形**依照不同的等分方式作等比切割，並求得特定面積。

三、利用**正六邊形**依照不同的等分方式作等比切割，並求得特定面積。

四、比較正三角形、正方形和正六邊形的切割結果，推得正多邊形其**切割比例**與**切割面積**間的關係。

參、研究設備及器材

一、 工具類：計算紙、電腦、筆

二、 使用軟體類：Microsoft Word、Geogebra、小畫家

肆、研究過程或方法

我們先利用 Geogebra 畫出正三角形、正方形、正六邊形，再依不同的等分方式，分別做等比切割。接著依照所求出之角度、面積，去推得各公比，再運用等比級數求得特定的面積。

我們依圖形做下列分析：

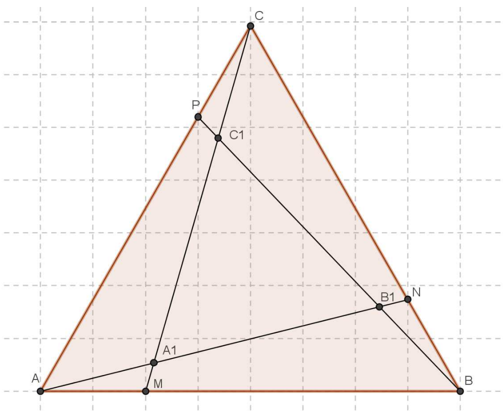
一、 正三角形的等分切割：

(一) 邊長切割兩等分的三角形：

因切割線直接交於重心，$\triangle ABB_1$ 已是唯一一個切割三角形，無其他相似三角形存在，故不證明，只留最後討論。

(二) 邊長切割四等分的三角形：

1. 先作一個 $\triangle ABC$ ，並令各邊爲一單位。
2. 將各邊長四等分，並使得 $\overline{AM} = \dfrac{1}{4}\overline{AB}$、$\overline{BN} = \dfrac{1}{4}\overline{BC}$、$\overline{CP} = \dfrac{1}{4}\overline{AC}$
3. 連接 $\overline{AN}$、$\overline{BP}$、$\overline{CM}$，使得 $\overline{AN}$ 與 $\overline{CM}$ 交於 A_1，並依序得其他兩點爲 B_1、C_1。



(1) 在 $\triangle ABN$ 和 $\triangle CAM$ 中

$\because \overline{AB} = \overline{AC}$

又 $\angle ABN = \angle CAM = 60°$

且 $\overline{AM} = \dfrac{1}{4}\overline{AB} = \dfrac{1}{4}\overline{BC} = \overline{BN}$

$\therefore \triangle ABN \cong \triangle CAM$ (SAS 全等性質)

$\Rightarrow \angle AMA_1 = \angle BNB_1$

(2) 在 $\triangle ABN$ 和 $\triangle AA_1M$ 中

$\because \angle NAB = \angle MAA_1$

又 $\angle AMA_1 = \angle BNB_1$

$\therefore$ ① $\triangle ABN \sim \triangle AA_1M$ （AA 相似性質 ）

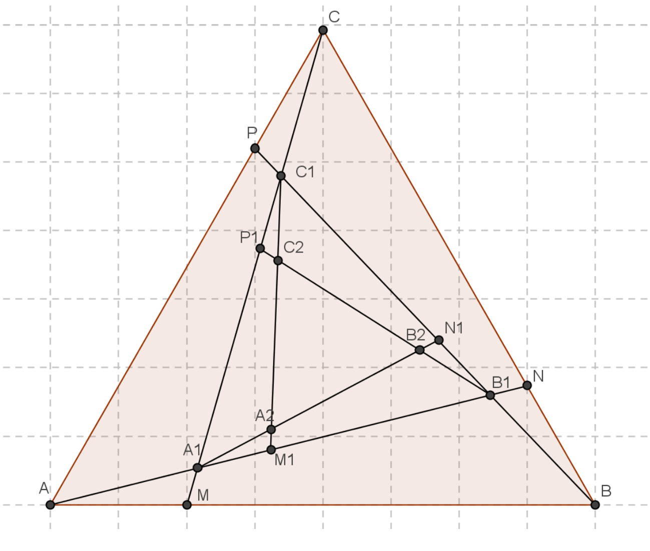
② 而 $\angle AA_1M = \angle ABN = 60°$

且 $\angle C_1A_1B_1 = 60°$ （ 對頂角相等 ）

(3) 同理可證 $\angle A_1B_1C_1 = \angle B_1C_1A_1 = 60°$

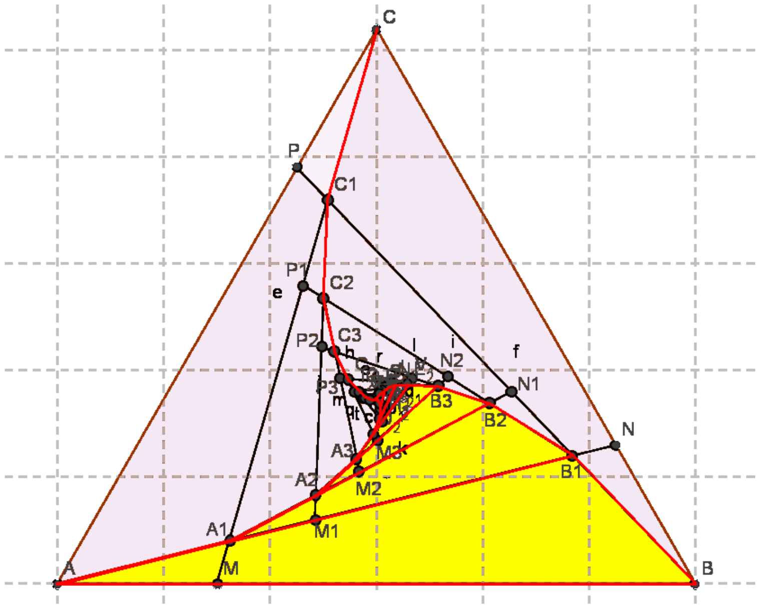
故 $\triangle A_1B_1C_1$ 也是正三角形。

4. 再將 $\triangle A_1B_1C_1$ 各邊四等分，並使得 $\overline{A_1M_1} = \frac{1}{4}\overline{A_1B_1}$、$\overline{B_1N_1} = \frac{1}{4}\overline{B_1C_1}$、$\overline{C_1P_1} = \frac{1}{4}\overline{A_1C_1}$。再連接 $\overline{A_1N_1}$、$\overline{B_1P_1}$、$\overline{C_1M_1}$，使得 $\overline{A_1N_1}$ 和 $\overline{C_1M_1}$ 交於 A_2，並依序得其他兩點 B_2、C_2。同理，$\triangle A_2B_2C_2$ 亦爲正三角形。



5. 按相同的步驟，依序畫出 $\triangle A_3B_3C_3$、$\triangle A_4B_4C_4$，…，一直到 $\triangle A_nB_nC_n$ 。

6. 接著，我們將想推算其相對長度及面積的 $\triangle ABB_1$、$\triangle A_1B_1B_2$、$\triangle A_2B_2B_3$、…、$\triangle A_nB_nB_{n+1}$ 依序塗上黃色以作標示。



7. 我們先推算黃色區域內各三角形的面積：

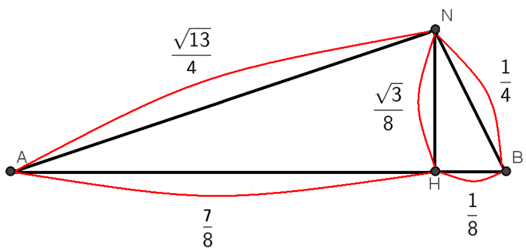
(1) $\triangle ABB_1$ 的面積：

a. 先找 $\triangle ABN$ 的面積和各邊比例：

(a) 做 $\overline{NH} \perp \overline{AB}$ 於 H，

$\because \angle B = 60°$

$\therefore \overline{BN} : \overline{BH} : \overline{NH} = 2:1:\sqrt{3}$



又 $\overline{BN} = \dfrac{1}{4}$

$\therefore \overline{BH} = \dfrac{1}{8}$ 、 $\overline{NH} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$

(b) $\because \overline{NH} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$

又 $\overline{AH} = \overline{AB} - \overline{BH} = 1 - \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$

$\therefore \overline{AN} = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \left(\dfrac{7}{8}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$

(c) 我們可依 (a)、(b) 推得：

$$\triangle ABN = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{16}$$

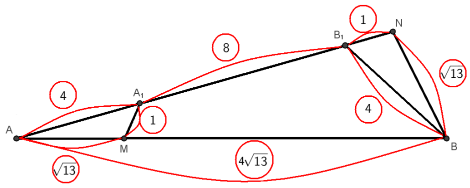
亦可得 $\overline{AB} : \overline{BN} : \overline{AN} = 4 : 1 : \sqrt{13}$

b. $\triangle ABB_1$ 的面積：

(a) $\because \triangle AA_1M \cong \triangle BB_1N \sim \triangle ABN$

$\therefore \overline{AA_1} : \overline{A_1M} : \overline{AM} = \overline{BB_1} : \overline{B_1N} : \overline{BN}$

$= \overline{AB} : \overline{BN} : \overline{AN} = 4 : 1 : \sqrt{13}$



$\Rightarrow \overline{A_1B_1} : \overline{AB} = 8 : 4\sqrt{13} = 2 : \sqrt{13}$ 註：圖上數字爲各線段間比例

$\Rightarrow \triangle A_1B_1B_2 : \triangle ABB_1 = \overline{A_1B_1}^2 : \overline{AB}^2 = 4 : 13$

(b) $\because \overline{AB_1} = \frac{12}{13}\overline{AN}$

$\therefore \triangle ABB_1 = \frac{12}{13}\triangle ABN = \frac{12}{13} \times \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{3\sqrt{3}}{52}$

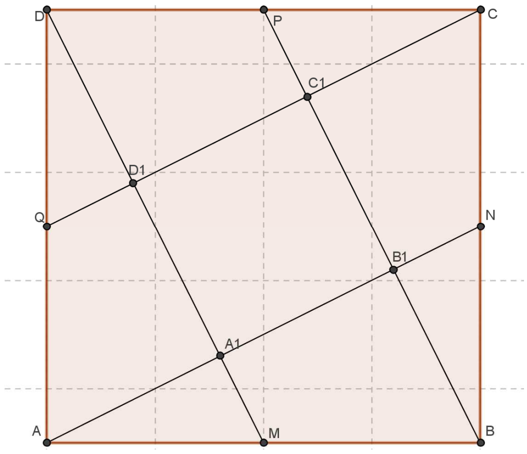
8. 又因爲 $\triangle ABB_1 \sim \triangle A_1B_1B_2 \sim \triangle A_2B_2B_3 \sim \cdots \sim \triangle A_nB_nB_{n+1}$ ，所以我們可推

得黃色面積 $= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3\sqrt{3}}{52}\right)\times\left(\frac{4}{13}\right)^n = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{52}\left[1-\left(\frac{4}{13}\right)^{\infty}\right]}{1-\frac{4}{13}} = \frac{\sqrt{3}}{12}\left[1-\left(\frac{4}{13}\right)^{\infty}\right]$

二、 正方形的等分切割：

(一) 邊長切割兩等分的正方形：

1. 先做一個正方形 $ABCD$ ，並令各邊爲一單位
2. 找出正方形 $ABCD$ 各中點，並令 $\overline{AB}$ 中點爲 M 、$\overline{BC}$ 中點爲 N 、$\overline{CD}$ 中點爲 P 和 $\overline{AD}$ 中點爲 Q 。
3. 連接 $\overline{AN}$、$\overline{BP}$、$\overline{CQ}$、$\overline{DM}$ ，使得 $\overline{AN}$ 與 $\overline{DM}$ 交於 A_1，並依序得其他三點爲 B_1、C_1、D_1 。



(1) $A_1B_1C_1D_1$ 也是正方形，證明如下：

a. 在 $\triangle ABN$ 和 $\triangle BCP$ 中

$\because$ $\overline{AB} = \overline{BC}$，又 $\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{CD} = \overline{CP}$

且 $\angle ABN = \angle BCP = 90°$

$\therefore$ $\triangle ABN \cong \triangle BCP$ （SAS 全等性質)

$\Rightarrow$ $\angle NAB = \angle PBC$

b. $\because$ $\angle ABB_1 + \angle PBC = 90°$

又 $\angle NAB = \angle PBC$

$\therefore$ $\angle NAB + \angle ABB_1 = 90°$

$\Rightarrow$ $\angle AB_1B = 90°$

$\Rightarrow$ $\angle A_1B_1C_1 = 90°$ （ 補角亦爲90° ）

c. 同理可證， $\angle B_1C_1D_1 = \angle C_1D_1A_1 = \angle D_1A_1B_1 = 90°$

(2) 按照 (1) 的方式，我們也可證明：

a. $\triangle ABB_1 \cong \triangle BCC_1 \cong \triangle CDD_1 \cong \triangle DAA_1$ （AAS 全等性質)

$\Rightarrow$ $\overline{AB_1} = \overline{BC_1} = \overline{CD_1} = \overline{DA_1}$

b. 在 $\triangle AA_1M$ 和 $\triangle BB_1N$ 中

$\because \overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \overline{BN}$

又 $\angle NAB = \angle PBC$

且 $\angle AA_1M = \angle BB_1N = 90°$

$\therefore \triangle AA_1M \cong \triangle BB_1N$（$AAS$ 全等性質）

同理可證，$\triangle AA_1M \cong \triangle BB_1N \cong \triangle CC_1P \cong \triangle DD_1Q$

$\Rightarrow \overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1} = \overline{DD_1}$

c. 由 a、b 可得：

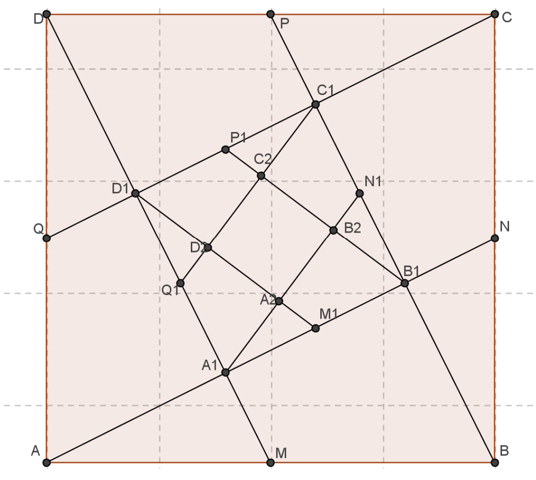
$\because \overline{AB_1} - \overline{AA_1} = \overline{BC_1} - \overline{BB_1} = \overline{CD_1} - \overline{CC_1} = \overline{DA_1} - \overline{DD_1}$

$\therefore \overline{A_1B_1} = \overline{B_1C_1} = \overline{C_1D_1} = \overline{A_1D_1}$

(3) 根據 (1) 和 (2) 的結果，我們可證得 $A_1B_1C_1D_1$ 也是正方形。

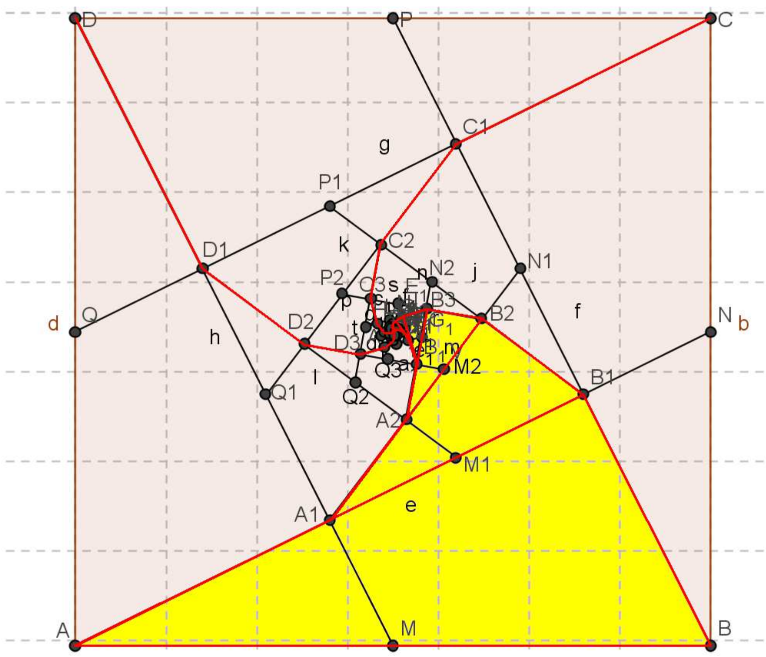
4. 再取 $A_1B_1C_1D_1$ 各邊中點 M_1、N_1、P_1、Q_1，並連接 $\overline{A_1N_1}$、$\overline{B_1P_1}$、$\overline{C_1Q_1}$、$\overline{D_1M_1}$，使得 $\overline{A_1N_1}$ 與 $\overline{D_1M_1}$ 交於 A_2，並依序得其他三點 B_2、C_2、D_2。

同理，$A_2B_2C_2D_2$ 也是正方形。



5. 按照相同的步驟，依序畫出正方形 $A_3B_3C_3D_3$、$A_4B_4C_4D_4$、⋯，一直至 $A_nB_nC_nD_n$。

6. 接著，我們將想推算其相對長度及面積的$\triangle ABB_1$、$\triangle A_1B_1B_2$、$\triangle A_2B_2B_3$，⋯，$\triangle A_nB_nB_{n+1}$ 依序塗上黃色以作標示。



7. 我們先推算黃色區域各三角形的面積：

(1) $\triangle ABB_1$ 的面積：

a. 利用 $\overline{AB} = 1$ ， $\overline{BN} = \frac{1}{2}$ ，我們可得知 $\overline{AN} = \sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ \overline{AB} : \overline{BN} : \overline{AN} = 1 : \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{5}}{2} = 2 : 1 : \sqrt{5}$

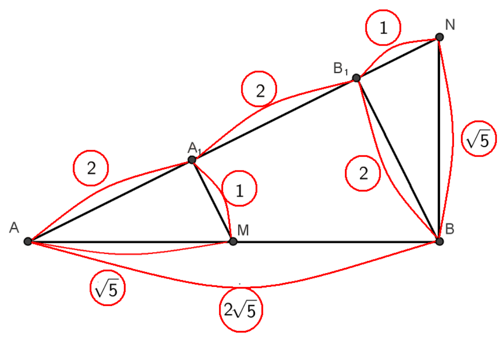
b. 在$\triangle ABB_1$中，

$\because$ M 爲$\overline{AB}$中點

又$\overline{DM} \mathbin{/\!/} \overline{BP}$ （DMBP 是平行四邊形 ）

$\therefore$ ① A_1爲$\overline{AB_1}$中點

② $\overline{A_1M} = \frac{1}{2}\overline{BB_1}$



註：圖上數字爲各線段間比例

c. $\because$ $\triangle AA_1M \cong \triangle BB_1N$

又A_1爲$\overline{AB_1}$中點且$\overline{A_1M} = \frac{1}{2}\overline{BB_1}$

$\therefore\ \overline{AA_1} : \overline{A_1B_1} : \overline{B_1N} = 2 : 2 : 1 \Rightarrow \triangle ABB_1 = \frac{4}{5}\triangle ABN$

$= \frac{4}{5} \times (1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) = \frac{1}{5}$

(2) $\because\ \overline{A_1B_1} = \dfrac{2}{5}\overline{AN} = \dfrac{2}{5}\times\dfrac{\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore\ \overline{AB} : \overline{A_1B_1} = 1 : \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

又 $\because\ \triangle ABB_1 \sim \triangle A_1B_1B_2$（由兩內外正方形切割條件皆同得知）

$\therefore\ \triangle ABB_1 : \triangle A_1B_1B_2 = \overline{AB}^2 : \overline{A_1B_1}^2 = 1^2 : \left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 1 : \dfrac{1}{5} = 5 : 1$

$\Rightarrow\ \triangle A_1B_1B_2 = \dfrac{1}{5}\triangle ABB_1 = \dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{25}$

8. 又因爲 $\triangle ABB_1 \sim \triangle A_1B_1B_2 \sim \triangle A_2B_2C_3 \sim\cdots\sim \triangle A_nB_nB_{n+1}$，所以我們可推得黃色面積

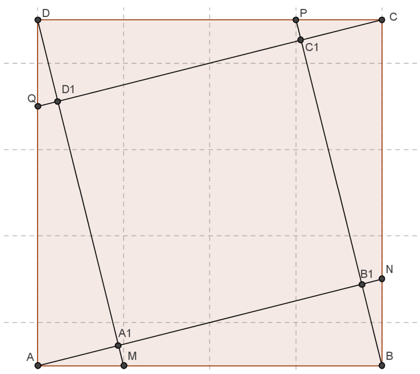
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{\frac{1}{5}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^{\infty}\right]}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^{\infty}\right]$$

(二) 邊長切割四等分的正方形：

1. 先做一個正方形 $ABCD$ ，並令各邊爲一單位。

2. 將各邊長四等分，並使得 $\overline{AM} = \dfrac{1}{4}\overline{AB}$ 、$\overline{BN} = \dfrac{1}{4}\overline{BC}$ 、$\overline{CP} = \dfrac{1}{4}\overline{CD}$ 、$\overline{DQ} = \dfrac{1}{4}\overline{AD}$ 。

3. 連接 $\overline{AN}$ 、$\overline{BP}$ 、$\overline{CQ}$ 、$\overline{DM}$ ，使得 $\overline{AN}$ 與 $\overline{DM}$ 交於 A_1，並依序得其他三點爲 B_1、C_1 、D_1 。

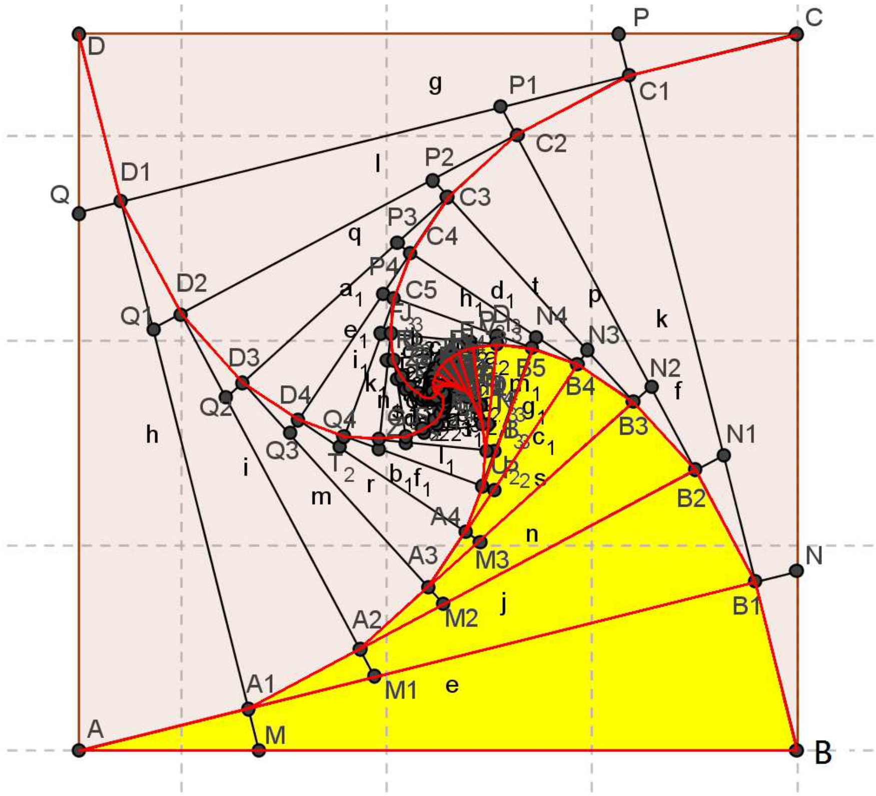


4. 接著再將 $A_1B_1C_1D_1$ 各邊長四等分，使得 $\overline{A_1M_1} = \dfrac{1}{4}\overline{A_1B_1}$ 、$\overline{B_1N_1} = \dfrac{1}{4}\overline{B_1C_1}$ 、$\overline{C_1P_1} = \dfrac{1}{4}\overline{C_1D_1}$ 、$\overline{D_1Q_1} = \dfrac{1}{4}\overline{A_1D_1}$ 。再連接 $\overline{A_1N_1}$ 、$\overline{B_1P_1}$ 、$\overline{C_1Q_1}$ 、$\overline{D_1M_1}$ ， 使得 $\overline{A_1N_1}$ 與 $\overline{D_1M_1}$ 交於 A_2 ，並依序得其他三點 B_2 、C_2 、D_2 。

同理，$A_2B_2C_2D_2$ 也是正方形。

5. 按照相同的步驟，依序畫出正方形 $A_3B_3C_3D_3$ 、 $A_4B_4C_4D_4$、…，一直至 $A_nB_nC_nD_n$ 。

6. 接著，我們將想推算其相對長度及面積的△ABB_1、△$A_1B_1B_2$、△$A_2B_2B_3$，…，△$A_nB_nB_{n+1}$ 依序塗上黃色以作標示。



7. 然後我們先推算黃色區域各三角形的面積：

(1) △ABB_1 的面積：

a. 利用 $\overline{AB} = 1$ ， $\overline{BN} = \dfrac{1}{4}$ ，

我們可得知 $\overline{AN} = \sqrt{1^2+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{17}}{4}$

$\therefore\ \overline{AB} : \overline{BN} : \overline{AN} = 1 : \dfrac{1}{4} : \dfrac{\sqrt{17}}{4} = 4 : 1 : \sqrt{17}$

b. 在△ABB_1 中，

$\because\ \overline{AM} = \dfrac{1}{4}\overline{AB}$

又 $\overline{DM}$ // $\overline{BP}$ （DMBP 是平行四邊形 ）

$\therefore$ ① $\overline{AA_1} = \frac{1}{4}\overline{AB_1}$

② $\overline{A_1M} = \frac{1}{4}\overline{BB_1}$

c. $\because \triangle AA_1M \cong \triangle BB_1N$

又 $\overline{AA_1} = \frac{1}{4}\overline{AB_1}$

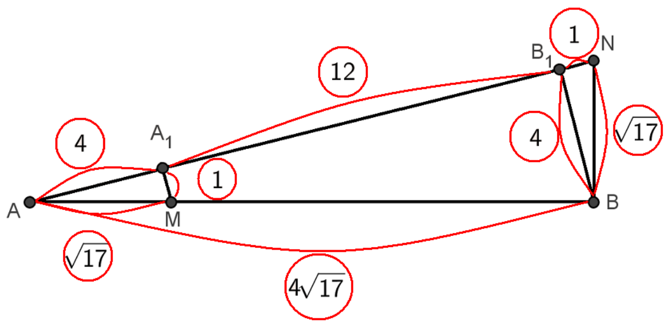
且 $\overline{A_1M} = \frac{1}{4}\overline{BB_1}$

$\therefore \overline{AA_1} : \overline{A_1B_1} : \overline{B_1N}$

$= 4 : 12 : 1$

$\Rightarrow \triangle ABB_1 = \frac{16}{17}\triangle ABN$

$= \frac{16}{17} \times (1 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}) = \frac{2}{17}$



註：圖上數字爲各線段間比例

(2) $\triangle A_1B_1B_2$ 的面積：

$\because \overline{A_1B_1} = \frac{12}{17}\overline{AN} = \frac{12}{17}\times\frac{\sqrt{17}}{4} = \frac{3\sqrt{17}}{17}$

又 $\triangle ABB_1 \sim \triangle A_1B_1B_2$（由兩內外正方形切割條件皆同得知）

$\therefore \triangle ABB_1 : \triangle A_1B_1B_2 = \overline{AB}^2 : \overline{A_1B_1}^2 = 1^2 : \left(\frac{3\sqrt{17}}{17}\right)^2 = 1 : \frac{9}{17} = 17 : 9$

$\Rightarrow \triangle A_1B_1B_2 = \frac{9}{17}\triangle ABB_1 = \frac{9}{17} \times \frac{2}{17}$

8. 又因爲 $\triangle ABB_1 \sim \triangle A_1B_1B_2 \sim \triangle A_2B_2B_3 \sim \cdots \sim \triangle A_nB_nB_{n+1}$，所以我們可以推

得黃色區域面積$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{17}\times\left(\frac{9}{17}\right)^n = \dfrac{\frac{2}{17}\left[1-\left(\frac{9}{17}\right)^{\infty}\right]}{1-\frac{9}{17}} = \frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{9}{17}\right)^{\infty}\right]$。

三、 六邊形的等分切割：

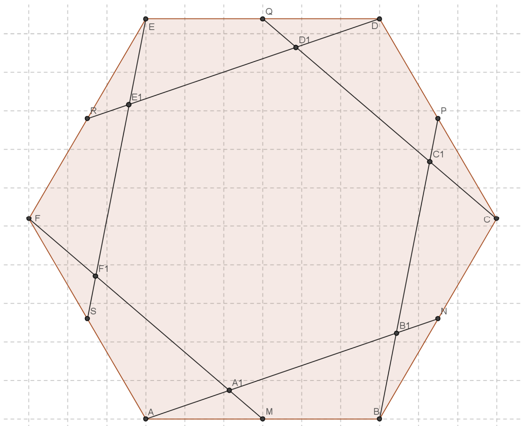
(一) 邊長切割兩等分的正六角形：

1. 先作一個正六邊形 $ABCDEF$，並令各邊爲一單位。

2. 將各邊兩等分，並令$\overline{AB}$中點爲M 、$\overline{BC}$ 中點爲N 、$\overline{CD}$中點爲P、$\overline{DE}$中點爲Q，

$\overline{EF}$中點爲R，$\overline{AF}$中點爲S。

3. 連接$\overline{AN}$、$\overline{BP}$、$\overline{CQ}$、$\overline{DR}$、$\overline{ES}$、$\overline{FM}$，使得$\overline{AN}$與$\overline{FM}$交於A_1，並依序得其他點爲B_1、C_1、D_1、E_1、F_1。



則$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$亦爲一正六邊形，證明如下:

(1) 在 $\triangle ABN$ 和 $\triangle FAM$ 中

$\because\ \overline{AB} = \overline{AF}$

$\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{AM}$，

又 $\angle ABN = \angle FAM = 120°$

$\therefore\ \triangle ABN \cong \triangle FAM$ （SAS 全等性質 ）

$\Rightarrow\ \angle AFM = \angle BAN$

且 $\angle AMA_1 = \angle BNB_1$

(2) 在 $\triangle AA_1M$ 和 $\triangle ABN$ 中

$\because\ \angle AMA_1 = \angle BNB_1$（ 由$\triangle ABN \cong \triangle FAM$ 得知 ）

又 $\angle A_1AM = \angle A_1AM$

$\therefore$ ① $\angle AA_1M = \angle ABN = 120°$

② $\triangle AA_1M \sim \triangle ABN$（AA 相似性質 ）

(3) $\because \angle AA_1M = 120°$

$\therefore \angle F_1A_1B_1 = 120°$ （對頂角相等）

同理，$\angle A_1B_1C_1 = \angle B_1C_1D_1 = \angle C_1D_1E_1 = \angle D_1E_1F_1 = \angle E_1F_1A_1 = 120°$

(4) 在 $\triangle AA_1M$ 和 $\triangle BB_1N$ 中

$\because \angle AMA_1 = \angle BNB_1$ （由(1)得知）

又 $\angle AA_1M = \angle BB_1N = 120°$

且 $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \overline{BN}$

$\therefore \triangle AA_1M \cong \triangle BB_1N$ （AAS 全等性質）

同理，$\triangle AA_1M \cong \triangle BB_1N \cong \triangle CC_1P \cong \triangle DD_1Q \cong \triangle EE_1R \cong \triangle FF_1S$

$\Rightarrow \overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1} = \overline{DD_1} = \overline{EE_1} = \overline{FF_1}$

且 $\overline{A_1M} = \overline{B_1N} = \overline{C_1P} = \overline{D_1Q} = \overline{E_1R} = \overline{F_1S}$

(5) $\because \overline{A_1B_1} = \overline{AN} - \overline{AA_1} - \overline{B_1N}$

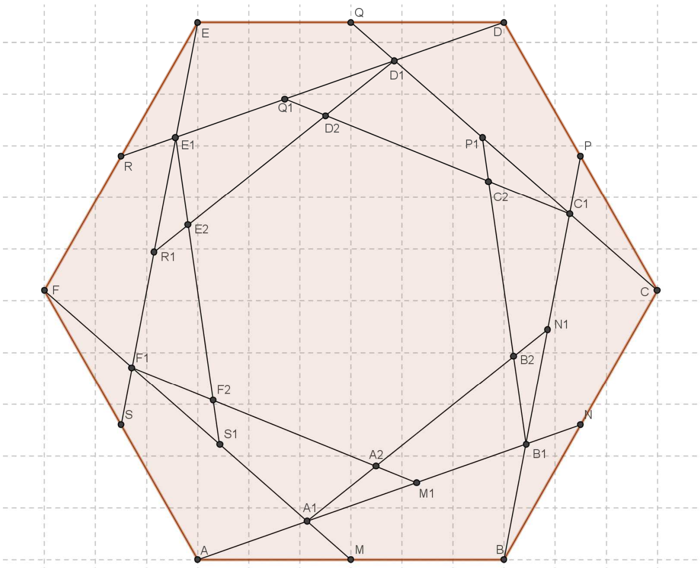
$\therefore \overline{A_1B_1} = \overline{B_1C_1} = \overline{C_1D_1} = \overline{D_1E_1} = \overline{E_1F_1} = \overline{A_1F_1}$ （由(4)條件推知）

(6) $\because \angle A_1B_1C_1 = \angle B_1C_1D_1 = \angle C_1D_1E_1 = \angle D_1E_1F_1 = \angle E_1F_1A_1$
$= \angle F_1A_1B_1 = 120°$

又 $\overline{A_1B_1} = \overline{B_1C_1} = \overline{C_1D_1} = \overline{D_1E_1} = \overline{E_1F_1} = \overline{A_1F_1}$

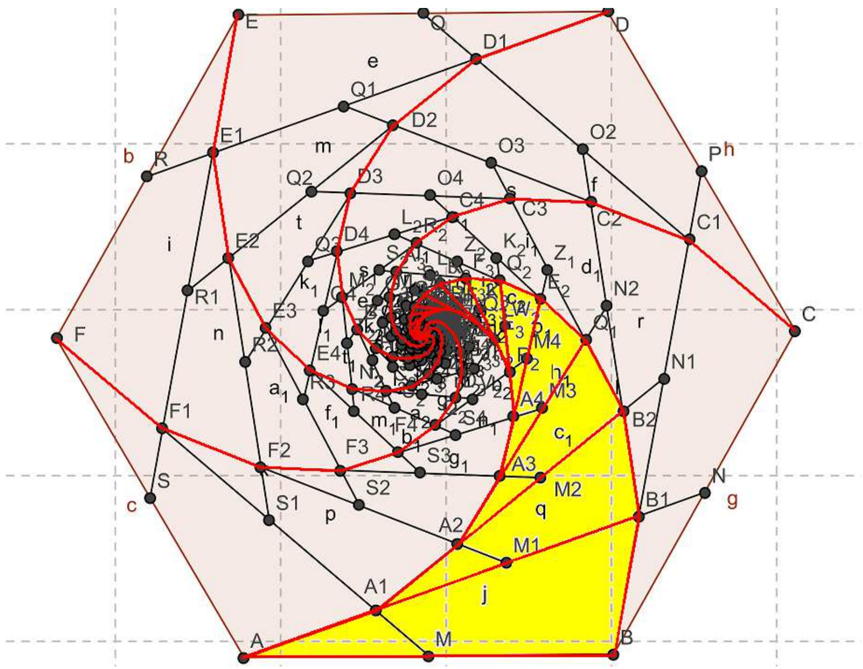
$\therefore A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 也是正六邊形

4. 接著將正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 各邊兩等分，取 $\overline{A_1B_1}$ 中點為 M_1、$\overline{B_1C_1}$ 中點為 N_1、$\overline{C_1D_1}$ 中點 P_1、$\overline{D_1E_1}$ 中點 Q_1、$\overline{E_1F_1}$ 中點 R_1、$\overline{A_1F_1}$ 中點 S_1。再連接 $\overline{A_1N_1}$、$\overline{B_1P_1}$、$\overline{C_1Q_1}$、$\overline{D_1R_1}$、$\overline{E_1S_1}$、$\overline{F_1M_1}$，使得 $\overline{A_1N_1}$ 與 $\overline{F_1M_1}$ 交於 A_2，並依序得 B_2、C_2、D_2、E_2、F_2。



5. 按相同步驟，依序畫出正六邊形 $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$ 、 $A_4B_4C_4D_4E_4F_4$ 、…、 $A_nB_nC_nD_nE_nF_n$ 。

6. 接著，我們將想推算其相對長度及面積的 $\triangle ABB_1$ 、 $\triangle A_1B_1B_2$ 、 $\triangle A_2B_2B_3$ ，…， $\triangle A_nB_nB_{n+1}$ 依序塗上黃色以作標示。



7. 我們先推算黃色區域各三角形的面積：

(1) $\triangle ABB_1$ 的面積：

a. 先找 $\triangle ABN$ 的面積和各邊比例：

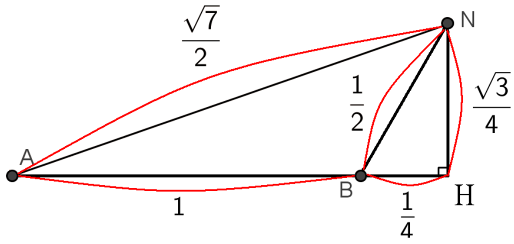
(a) 作 $\overline{NH} \perp \overrightarrow{AB}$ 於 H

$\because \angle ABN = 120° \Rightarrow \angle NBH = 60°$

$\therefore \overline{BN} : \overline{BH} : \overline{NH} = 2:1:\sqrt{3}$

又 $\overline{BN} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \overline{BH} = \dfrac{1}{4}$、$\overline{NH} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$



(b) $\because \overline{NH} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

又 $\overline{AH} = \overline{AB} + \overline{BH} = 1+\dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4}$

$\therefore \overline{AN} = \sqrt{\left(\dfrac{5}{4}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

(c) 我們可依 (a)、(b) 推得$\triangle ABN = \dfrac{1}{2} \times 1 \times \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$

亦可得 $\overline{AB} : \overline{BN} : \overline{AN} = 2:1:\sqrt{7}$

b. $\triangle ABB_1$ 的面積：

(a) $\because \triangle AA_1M \cong \triangle BB_1N \sim \triangle ABN$

$\therefore \overline{AA_1} : \overline{A_1M} : \overline{AM}$

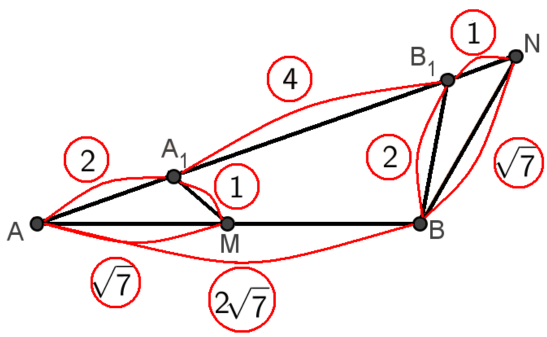
$= \overline{BB_1} : \overline{B_1N} : \overline{BN}$

$= \overline{AB} : \overline{BN} : \overline{AN}$

$= 2:1:\sqrt{7}$

$\Rightarrow \overline{AB_1} = \dfrac{6}{7}\overline{AN}$

且 $\overline{A_1B_1} : \overline{AB} = 4:2\sqrt{7} = 2:\sqrt{7}$



註：圖上數字爲各線段間比例

(b) $\because\ \overline{AB_1} = \frac{6}{7}\overline{AN}$

$\therefore\ \triangle ABB_1 = \frac{6}{7}\triangle ABN = \frac{6}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{28}$

(2) $\triangle A_1B_1B_2$ 的面積：

$\because\ \triangle A_1B_1B_2 \sim \triangle ABB_1$

又 $\overline{A_1B_1} : \overline{AB} = 2 : \sqrt{7}$

$\therefore\ \triangle A_1B_1B_2 : \triangle ABB_1 = \overline{A_1B_1}^2 : \overline{AB}^2 = 2^2 : \sqrt{7}^2 = 4 : 7$

$\Rightarrow\ \triangle A_1B_1B_2 = \frac{4}{7}\triangle ABB_1 = \frac{4}{7} \times \frac{3\sqrt{3}}{28}$

8. 又因為 $\triangle ABB_1 \sim \triangle A_1B_1B_2 \sim \triangle A_2B_2B_3 \sim \cdots \sim \triangle A_nB_nB_{n+1}$，所以我們可以

推得黃色區域面積 $= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\sqrt{3}}{28}\times\left(\frac{4}{7}\right)^n = \dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{28}\left[1-\left(\frac{4}{7}\right)^{\infty}\right]}{1-\frac{4}{7}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1-\left(\frac{4}{7}\right)^{\infty}\right]$。

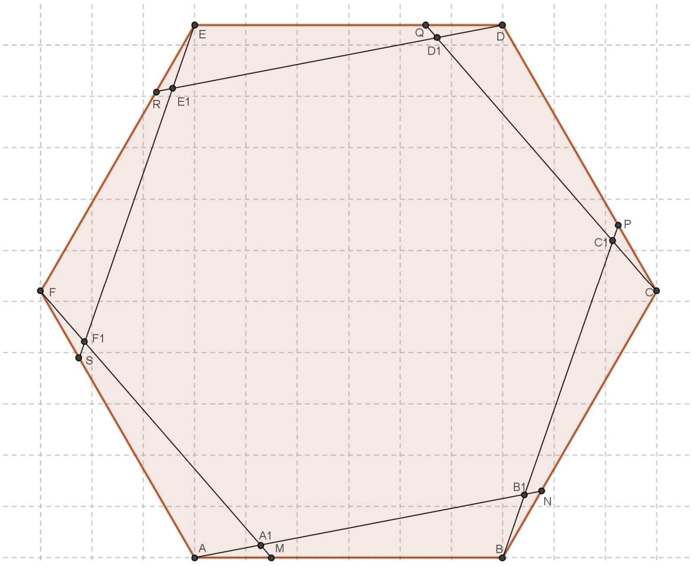
(二) 邊長切割四等分的正六角形：

1. 先作一個正六邊形 $ABCDEF$，並令各邊為一單位。

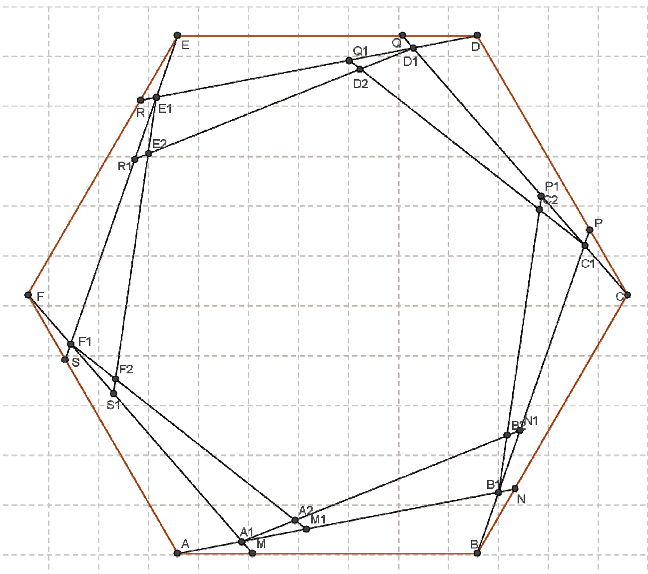
2. 將各邊皆四等分，並使得 $\overline{AM} = \frac{1}{4}\overline{AB}$、$\overline{BN} = \frac{1}{4}\overline{BC}$、$\overline{CP} = \frac{1}{4}\overline{CD}$、$\overline{DQ} = \frac{1}{4}\overline{DE}$、$\overline{ER} = \frac{1}{4}\overline{EF}$、$\overline{FS} = \frac{1}{4}\overline{AF}$。

3. 連接 $\overline{AN}$、$\overline{BP}$、$\overline{CQ}$、$\overline{DR}$、$\overline{ES}$、$\overline{FM}$，使得 $\overline{AN}$ 與 $\overline{FM}$ 交於 A_1，並依序得其他點為 B_1、C_1、D_1、E_1、F_1，則 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 也是正六邊形。

(同理於切割兩等分正六邊形方式)

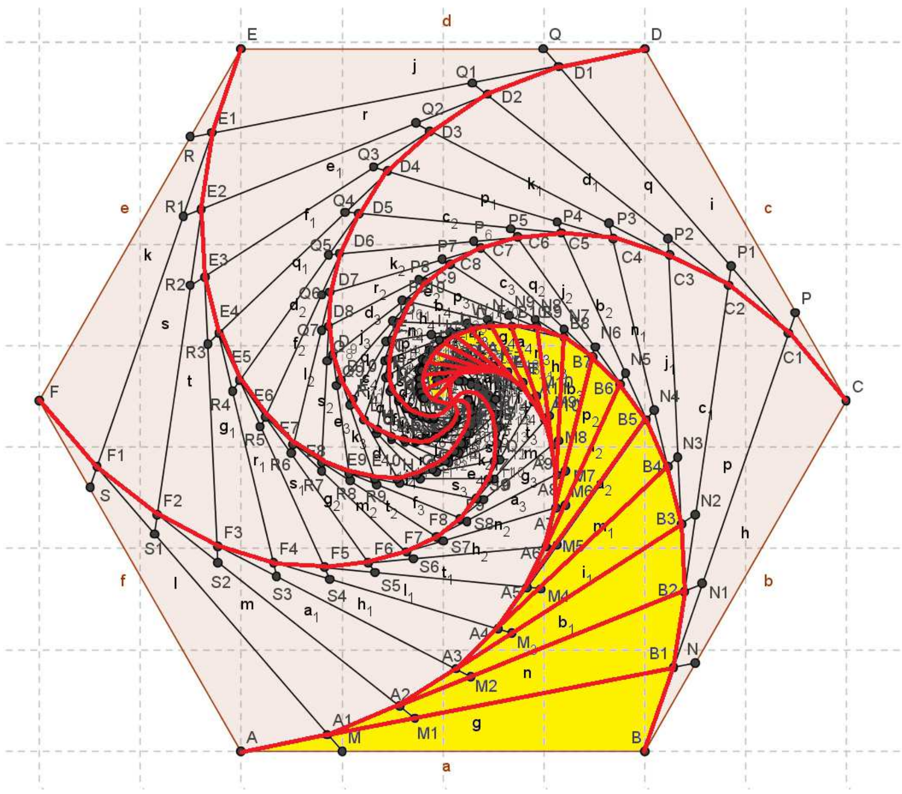


4. 接著將正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 各邊四等分，使得 $\overline{A_1M_1} = \frac{1}{4}\overline{A_1B_1}$、$\overline{B_1N_1} = \frac{1}{4}\overline{B_1C_1}$、$\overline{C_1P_1} = \frac{1}{4}\overline{C_1D_1}$、$\overline{D_1Q_1} = \frac{1}{4}\overline{D_1E_1}$、$\overline{E_1R_1} = \frac{1}{4}\overline{E_1F_1}$、$\overline{F_1S_1} = \frac{1}{4}\overline{A_1F_1}$。再連接 $\overline{A_1N_1}$、$\overline{B_1P_1}$、$\overline{C_1Q_1}$、$\overline{D_1R_1}$、$\overline{E_1S_1}$、$\overline{F_1M_1}$，使得 $\overline{A_1N_1}$ 與 $\overline{F_1M_1}$ 交於 A_2，並依序得 B_2、C_2、D_2、E_2、F_2。



5. 按相同步驟，依序畫出正六邊形 $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$、$A_4B_4C_4D_4E_4F_4$、…、$A_nB_nC_nD_nE_nF_n$。

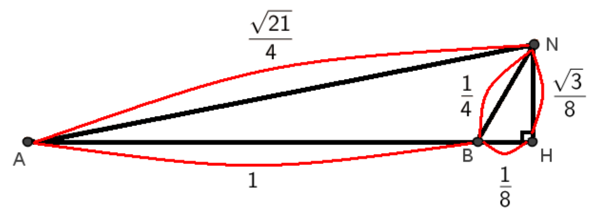
6. 接著，我們將想推算其相對長度及面積的 $\triangle ABB_1$、$\triangle A_1B_1B_2$、$\triangle A_2B_2B_3$、…、$\triangle A_nB_nB_{n+1}$ 依序塗上黃色以作標示。



7. 我們先推算黃色區域各三角形的面積：

(1) $\triangle ABB_1$ 的面積：

a. 先找 $\triangle ABN$ 的面積和各邊比例:



(a) 作 $\overline{NH} \perp \overrightarrow{AB}$ 於 H

$\because \angle ABN = 120°$

$\Rightarrow \angle NBH = 60°$

$\therefore \overline{BN} : \overline{BH} : \overline{NH} = 2 : 1 : \sqrt{3}$

又 $\overline{BN} = \dfrac{1}{4}$

$\therefore \overline{BH} = \dfrac{1}{8}$、$\overline{NH} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$

(b) $\because \overline{NH} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$

又 $\overline{AH} = \overline{AB} + \overline{BH} = 1 + \dfrac{1}{8} = \dfrac{9}{8}$

$$\therefore \overline{AN} = \sqrt{\left(\frac{9}{8}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{4}$$

(c) 我們可依 (a)、(b) 推得：

$$\triangle ABN = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{16}$$

亦可得 $\overline{AB} : \overline{BN} : \overline{AN} = 4:1:\sqrt{21}$

b. $\triangle ABB_1$ 的面積：

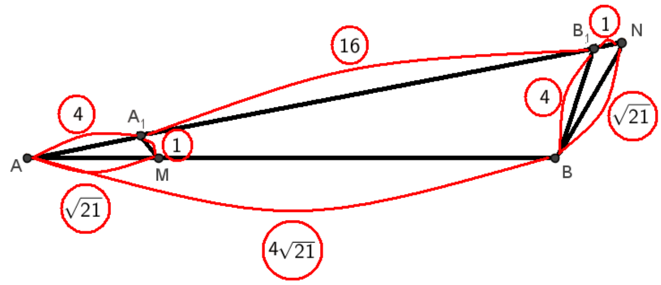
(a) $\because \triangle AA_1M \cong \triangle BB_1N \sim \triangle ABN$

$\therefore \overline{AA_1} : \overline{A_1M} : \overline{AM}$

$= \overline{BB_1} : \overline{B_1N} : \overline{BN}$

$= \overline{AB} : \overline{BN} : \overline{AN}$

$= 4:1:\sqrt{21}$



$\Rightarrow \overline{AB_1} = \frac{20}{21}\overline{AN}$

註：圖上數字爲各線段間比例

且 $\overline{A_1B_1} : \overline{AB} = 16 : 4\sqrt{21} = 4 : \sqrt{21}$

(b) $\because \overline{AB_1} = \frac{20}{21}\overline{AN}$

$$\therefore \triangle ABB_1 = \frac{20}{21}\triangle ABN = \frac{20}{21} \times \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{5\sqrt{3}}{84}$$

(2) $\triangle A_1B_1B_2$ 的面積：

a. $\because \triangle A_1B_1B_2 \sim \triangle ABB_1$

又 $\overline{A_1B_1} : \overline{AB} = 4 : \sqrt{21}$

$$\therefore \triangle A_1B_1B_2 : \triangle ABB_1 = \overline{A_1B_1}^2 : \overline{AB}^2 = 4^2 : \sqrt{21}^2 = 16:21$$

$$\Rightarrow \triangle A_1B_1B_2 = \frac{16}{21}\triangle ABB_1 = \frac{16}{21} \times \frac{5\sqrt{3}}{84}$$

8. 又因為 $\triangle ABB_1 \sim \triangle A_1B_1B_2 \sim \triangle A_2B_2B_3 \sim \cdots \sim \triangle A_nB_nB_{n+1}$，所以我們可以

推得黃色區域面積 $= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5\sqrt{3}}{84}\times\left(\frac{16}{21}\right)^n = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{84}\left[1-\left(\frac{16}{21}\right)^{\infty}\right]}{1-\frac{16}{21}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1-\left(\frac{16}{21}\right)^{\infty}\right]$

伍、研究結果

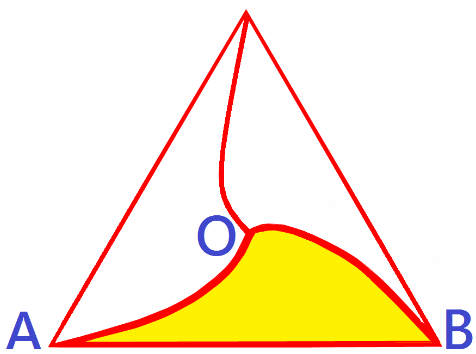
一、等比級數推論塗色部分面積和圖示法推論塗色部分面積的比較：

(一) 邊長切割四等分的三角形之塗色部分面積：

黃色區域 OAB 面積 $= \frac{1}{3}\triangle ABC$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3\sqrt{3}}{52}\right)\times\left(\frac{4}{13}\right)^n = \frac{1}{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{12}\left[1-\left(\frac{4}{13}\right)^{\infty}\right] = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

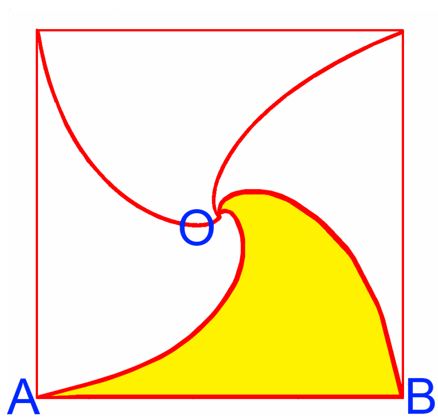


(二) 邊長切割兩等分的正方形之塗色部分面積：

黃色區域 OAB 面積 $= \frac{1}{4}$ 正方形 $ABCD$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{4}\times 1^2$$

$$\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^{\infty}\right] = \frac{1}{4}$$

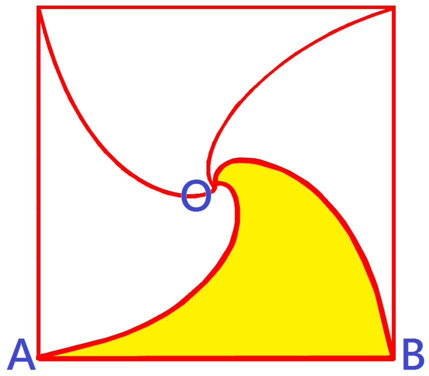


(三) 邊長切割四等分的正方形之塗色部分面積：

$$\text{黃色區域}\,OAB\,\text{面積} = \frac{1}{4}\,\text{正方形}\,ABCD$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{17}\times\left(\frac{9}{17}\right)^{n} = \frac{1}{4}\times 1^{2}$$

$$\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{9}{17}\right)^{\infty}\right] = \frac{1}{4}$$

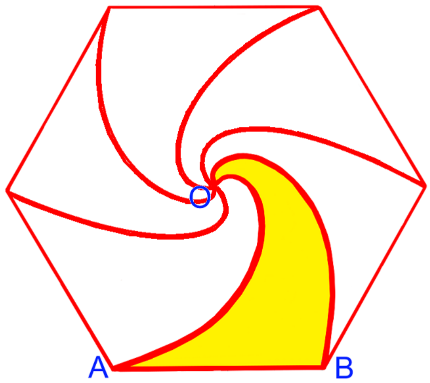


(四) 邊長切割兩等分的正六邊形之塗色部分面積：

$$\text{黃色區域}\,OAB\,\text{面積} = \frac{1}{6}\,\text{正六邊形}\,ABCDEF$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\sqrt{3}}{28}\times\left(\frac{4}{7}\right)^{n} = \frac{1}{6}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^{2}\times 6\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left[1-\left(\frac{4}{7}\right)^{\infty}\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

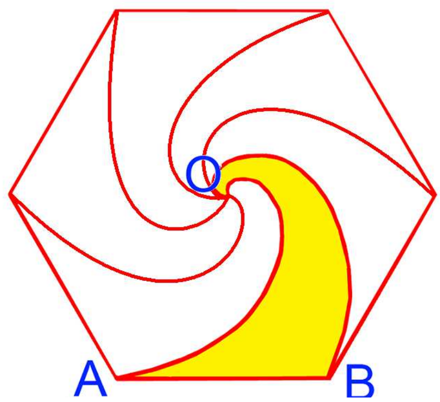


(五) 邊長切割四等分的正六邊形之塗色部分面積：

$$\text{黃色區域}\,OAB\,\text{面積} = \frac{1}{6}\,\text{正六邊形}\,ABCDEF$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5\sqrt{3}}{84}\times\left(\frac{16}{21}\right)^{n} = \frac{1}{6}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^{2}\times 6\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left[1-\left(\frac{16}{21}\right)^{\infty}\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



二、各等分狀況和相似三角形的規律性：

(一) 正三角形：

1. 兩等分邊長：

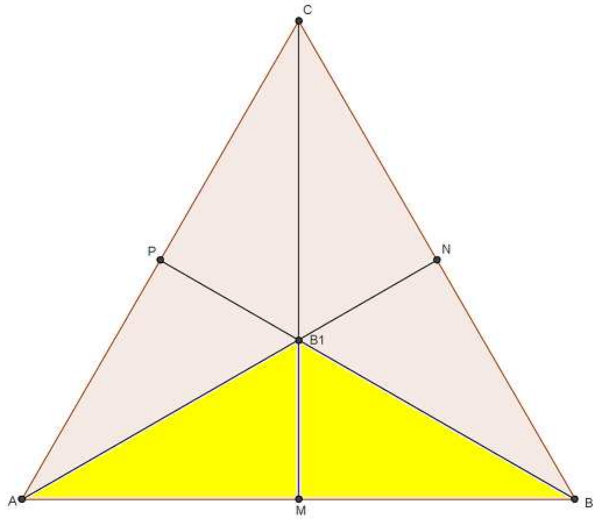
(1) $\triangle ABN = \frac{1}{2}\triangle ABC$

$= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}$

(2) $\triangle ABB_1 = \frac{2}{3}\triangle ABN$

$= \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}$ (∵註 1)

(3) $\frac{\triangle A_1B_1B_2}{\triangle ABB_1} = 0$



註 1：B_1 爲正三角形 ABC 的重心

2. 三等分邊長：

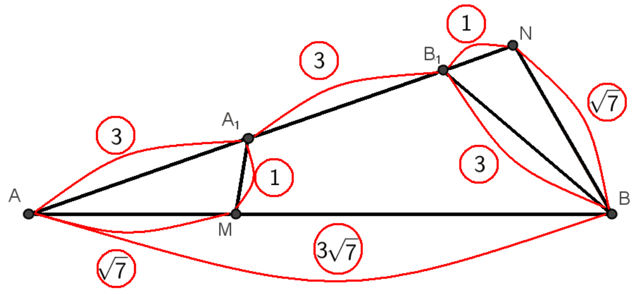
(1) $\triangle ABN = \frac{1}{3}\triangle ABC$

$= \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}$

(2) $\triangle ABB_1 = \frac{6}{7}\triangle ABN$

$= \frac{6}{7}\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}$

(3) $\frac{\triangle A_1B_1B_2}{\triangle ABB_1} = \frac{1}{7}$



註：圖上數字爲各線段間比例

3. 四等分邊長：

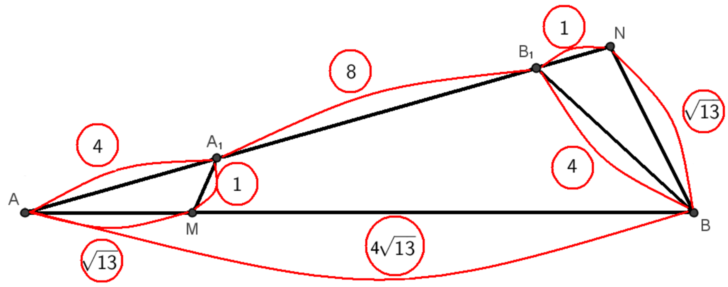
(1) $\triangle ABN = \frac{1}{4}\triangle ABC$

$= \frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{4}$

(2) $\triangle ABB_1 = \frac{12}{13}\triangle ABN$

$= \frac{12}{13}\times\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{4}$

(3) $\frac{\triangle A_1B_1B_2}{\triangle ABB_1} = \frac{4}{13}$



註：圖上數字爲各線段間比例

4. 五等分邊長：

(1) $\triangle ABN = \dfrac{1}{5}\triangle ABC$

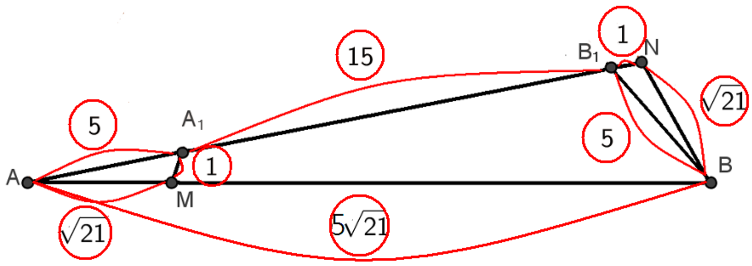
$= \dfrac{1}{5} \times \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(2) $\triangle ABB_1 = \dfrac{20}{21}\triangle ABN$

$= \dfrac{20}{21} \times \dfrac{1}{5}\triangle ABC$

$= \dfrac{20}{21} \times \dfrac{1}{5} \times \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(3) $\dfrac{\triangle A_1B_1B_2}{\triangle ABB_1} = \dfrac{9}{21}$



註：圖上數字爲各線段間比例

(二) 正方形：

1. 兩等分邊長：

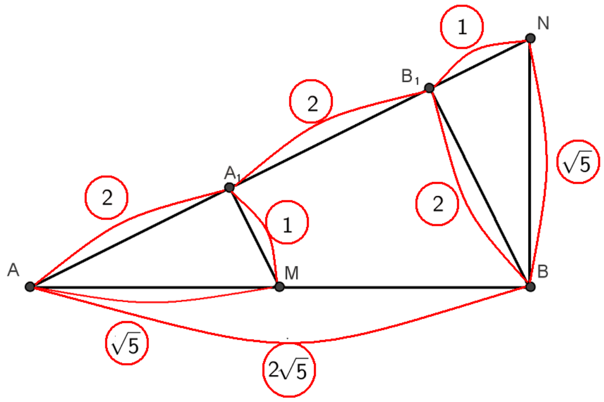
(1) $\triangle ABN = \dfrac{1}{4}$正方形 $ABCD$

$= \dfrac{1}{4} \times 1$

(2) $\triangle ABB_1 = \dfrac{4}{5}\triangle ABN$

$= \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{4} \times 1$

(3) $\dfrac{\triangle A_1B_1B_2}{\triangle ABB_1} = \dfrac{1}{5}$



註：圖上數字爲各線段間比例

2. 三等分邊長：

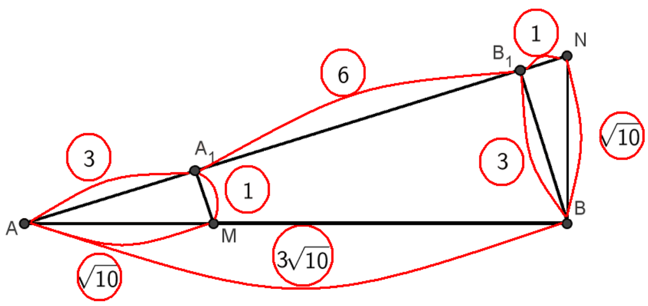
(1) $\triangle ABN = \dfrac{1}{6}$正方形 $ABCD$

$= \dfrac{1}{6} \times 1$

(2) $\triangle ABB_1 = \dfrac{9}{10}\triangle ABN$

$= \dfrac{9}{10} \times \dfrac{1}{6} \times 1$

(3) $\dfrac{\triangle A_1B_1B_2}{\triangle ABB_1} = \dfrac{4}{10}$



註：圖上數字爲各線段間比例

3. 四等分邊長：

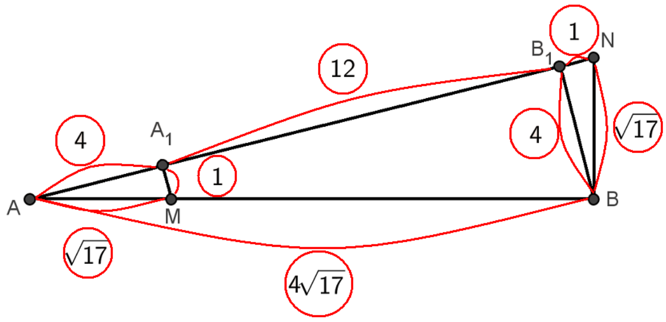
(1) $\triangle ABN = \dfrac{1}{8}$ 正方形 $ABCD$

$= \dfrac{1}{8} \times 1$

(2) $\triangle ABB_1 = \dfrac{16}{17} \triangle ABN$

$= \dfrac{16}{17} \times \dfrac{1}{8} \times 1$

(3) $\dfrac{\triangle A_1B_1B_2}{\triangle ABB_1} = \dfrac{9}{17}$



註：圖上數字爲各線段間比例

4. 五等分邊長：

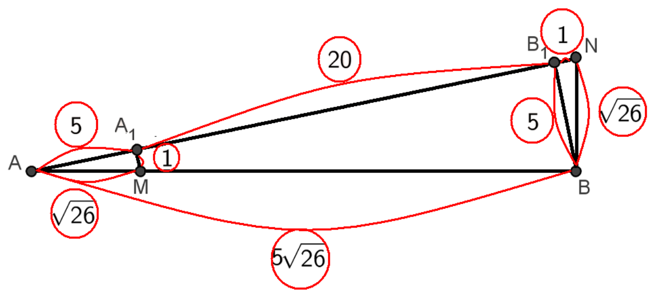
(1) $\triangle ABN = \dfrac{1}{10}$ 正方形 $ABCD$

$= \dfrac{1}{10} \times 1$

(2) $\triangle ABB_1 = \dfrac{25}{26} \triangle ABN$

$= \dfrac{25}{26} \times \dfrac{1}{10} \times 1$

(3) $\dfrac{\triangle A_1B_1B_2}{\triangle ABB_1} = \dfrac{16}{26}$



註：圖上數字爲各線段間比例

(三) 正六邊形：

1. 兩等分邊長：

(1) $\triangle ABN = \dfrac{1}{12}$ 正六邊形 $ABCDEF$

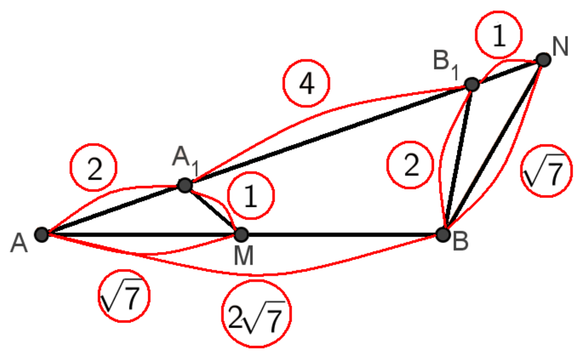
$= \dfrac{1}{12} \times (6 \times \dfrac{\sqrt{3}}{4})$

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(2) $\triangle ABB_1 = \dfrac{6}{7} \triangle ABN$

$= \dfrac{6}{7} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(3) $\dfrac{\triangle A_1B_1B_2}{\triangle ABB_1} = \dfrac{4}{7}$



註：圖上數字爲各線段間比例

2. 三等分邊長：

(1) $\triangle ABN = \frac{1}{18}$ 正六邊形 $ABCDEF$

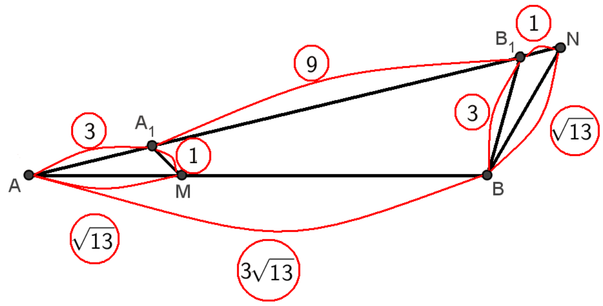
$= \frac{1}{18} \times (6 \times \frac{\sqrt{3}}{4})$

$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}$

(2) $\triangle ABB_1 = \frac{12}{13} \triangle ABN$

$= \frac{12}{13} \times \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}$

(3) $\frac{\triangle A_1B_1B_2}{\triangle ABB_1} = \frac{9}{13}$



註：圖上數字爲各線段間比例

3. 四等分邊長：

(1) $\triangle ABN = \frac{1}{24}$ 正六邊形 $ABCDEF$

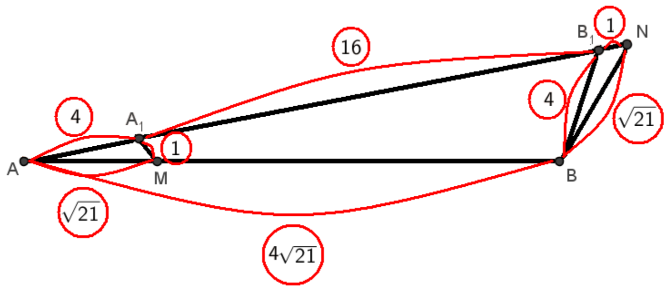
$= \frac{1}{24} \times (6 \times \frac{\sqrt{3}}{4})$

$= \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{4}$

(2) $\triangle ABB_1 = \frac{20}{21} \triangle ABN$

$= \frac{20}{21} \times \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{4}$

(3) $\frac{\triangle A_1B_1B_2}{\triangle ABB_1} = \frac{16}{21}$



註：圖上數字爲各線段間比例

4. 五等分邊長：

(1) $\triangle ABN = \frac{1}{30}$ 正六邊形 $ABCDEF$

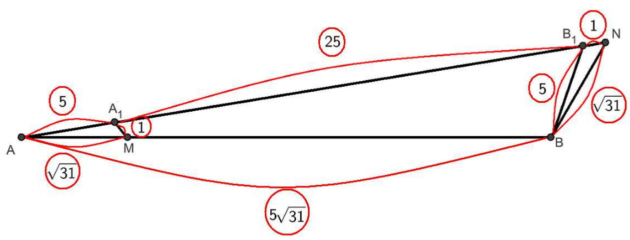
$= \frac{1}{30} \times (\ 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4})$

$= \frac{1}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{4}$

(2) $\triangle ABB_1 = \frac{30}{31} \triangle ABN$

$= \frac{30}{31} \times \frac{1}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{4}$

(3) $\frac{\triangle A_1B_1B_2}{\triangle ABB_1} = \frac{25}{31}$



註：圖上數字爲各線段間比例

陸、討論

一、無窮等比級數的收斂：

(一) 無論是正三角形、正方形或正六邊形的各種等分切割，我們都可以找到第一個最大的 $\triangle ABB_1$（令面積 ＝ a ），亦能找公比 r ：

$$r=\frac{\triangle A_{n+1}B_{n+1}B_{n+2}}{\triangle A_nB_nB_{n+1}} \quad ，\ 0<r<1$$

並利用無窮等比級數和的公式可得黃色區域面積為：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\times r^n = \frac{a\left(1-r^{\infty}\right)}{1-r}$$

(二) 由前面推論和證明，得知無論正多邊形是以何種切割方式呈現，我們都可以獲得相同的結論，就是當 $n\to\infty$ 時，加上公比 r 又符合 $0<r<1$，所以 r^n 的極值必然為 0，也就是 $r^{\infty}=0$

二、討論正三角形、正方形、正六邊形邊長等分數與△ABN 和△ABB_1 的面積關係，及內外層兩相似三角形間的比例關係 ：

(一) 正三角形：

等分數 / 面積及比例	2	3	4	5	…	N
$\triangle ABN$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{5}$	…	$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{N}$
$\triangle ABB_1$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{6}{7}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{12}{13}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{20}{21}$	…	$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{N}\times\frac{N^2-N}{N^2-N+1}$
$\frac{\triangle A_{n+1}B_{n+1}B_{n+2}}{\triangle A_nB_nB_{n+1}}$	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{9}{21}$	…	$\frac{(N-2)^2}{N^2-N+1}$

(二) 正方形：

等分數 / 面積及比例	2	3	4	5	…	N
△ ABN	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}$	…	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{N}$
△ ABB_1	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{9}{10}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{16}{17}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{25}{26}$	…	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{N}\times\frac{N^2}{N^2+1}$
$\frac{\triangle A_{n+1}B_{n+1}B_{n+2}}{\triangle A_nB_nB_{n+1}}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{9}{17}$	$\frac{16}{26}$	…	$\frac{(N-1)^2}{N^2+1}$

(三) 正六邊形：

等分數 / 面積及比例	2	3	4	5	…	N
△ ABN	$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{5}$	…	$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{N}$
△ ABB_1	$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{6}{7}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{12}{13}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{20}{21}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{30}{31}$	…	$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{N}\times\frac{N^2+N}{N^2+N+1}$
$\frac{\triangle A_{n+1}B_{n+1}B_{n+2}}{\triangle A_nB_nB_{n+1}}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{16}{21}$	$\frac{25}{31}$	…	$\frac{N^2}{N^2+N+1}$

柒、結論

總合以上的研究，我們可以得知：

一、正多邊形的各種等分切割，其特定相似三角形的面積總和（指黃色區域）必依循無窮等比級數和的規律及運算方式，也就是

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{1}{m} \times (\text{正 m 邊形的面積})$$，m≧3 。

（其中 $a = \triangle ABB_1$ 面積， $r = \dfrac{\triangle A_{n+1}B_{n+1}B_{n+2}}{\triangle A_nB_nB_{n+1}}$ ）

且我們亦從中了解當 $n \to \infty$， $r^n = r^\infty = 0$ 的定律。

（ 這裡的 r 皆符合 0 ＜ r ＜ 1 ）

二、正三角形、正方形、正六邊形的各切割三角形間面積和比例的關係如下（**A** 代表原正多邊形面積，**N** 代表等分數，$a = \triangle ABB_1$ 面積， $r = \dfrac{\triangle A_{n+1}B_{n+1}B_{n+2}}{\triangle A_nB_nB_{n+1}}$)：

(一) 正三角形：

$$a = A \times \frac{1}{N} \times \frac{N^2\text{-}N}{N^2\text{-}N+1} \qquad r = \frac{(N\text{-}2)^2}{N^2\text{-}N+1}$$

(二) 正方形：

$$a = A \times \frac{1}{2N} \times \frac{N^2}{N^2+1} \qquad r = \frac{(N\text{-}1)^2}{N^2+1}$$

(三) 正六邊形：

$$a = A \times \frac{1}{6N} \times \frac{N^2+N}{N^2+N+1} \qquad r = \frac{N^2}{N^2+N+1}$$

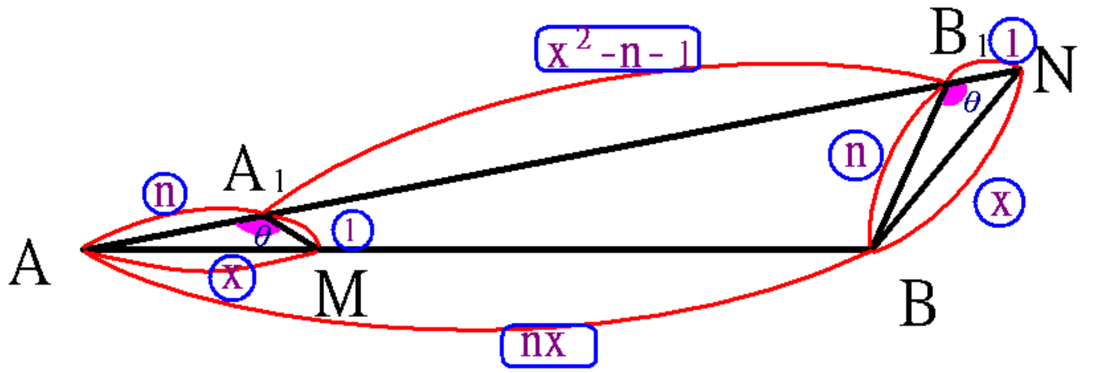
捌、未來發展

我們以上所研究和尋找的都局限在正三角形、正四邊形和正六邊形。會跳過正五邊形和正七邊形的原因是在於前面三者的各切割三角形的長度和面積，我們都能運用國中所學的勾股定理來推算，但是正五邊形與正七邊形卻沒辦法如此順利的進行。

我們從老師那了解到，正五邊形和正七邊形的內角不是特殊角度，若想要求出各切割三角形的面積和比例關係，必須進一步用到三角函數的相關運算才可以，則要推算的公式也會更加的繁雜。礙於我們對三角函數的了解有限，所以我們便沒有針對這兩個圖形做研究！

但我們還是有針對各種正多邊形所切割出的$\triangle ABN$、$\triangle ABB_1$和$\triangle A_1B_1B_2$做一個總體的分析，其分析如下：

我們發現，當**正 m 邊形**作 **n 等分切割**時，都可以得到下列的比例關係（**藍色圈圈內的數值爲相對比例**）：



（**n** ＝ 切割等分數，$x=\sqrt{1^2+n^2-2\times1\times n\times\cos\theta}$ ，$\theta=\dfrac{180^\circ(m-2)}{m}$ ）

而我們若令 $\triangle ABN=k$ 時，

則 $\triangle ABB_1 = k\times\dfrac{x^2-1}{x^2}$，

且 $\dfrac{\triangle A_1B_1B_2}{\triangle ABB_1}=\left(\dfrac{x^2-n-1}{nx}\right)^2$。

我們對於這部分還是極感興趣，往後可運用三角函數朝其他正多邊形的等分切割作更深入的研究。說不定也能進一步應用在其他的圖形上，如：梯形、箏形、菱形…等。

玖、參考資料及其他

一、國中數學課本三至五冊，康軒出版社

二、陳建蒼，《數學史融入無窮等比級數教學之探究》
http://140.127.36.251/e-journal/94%E5%B9%B4E-Journal%E7%AC%AC%E4%B8%89%E6%9C%9F/pdf/004%E6%95%B8%E5%AD%B8%E5%8F%B2%E8%9E%8D%E5%85%A5%E7%84%A1%E7%AA%AE%E7%AD%89%E6%AF%94%E7%B4%9A%E6%95%B8%E6%95%99%E5%AD%B8%E4%B9%8B%E6%8E%A2%E7%A9%B6_%E9%99%B3%E5%BB%BA%E8%92%BC%E8%80%81%E5%B8%AB_.pdf

三、RogerB，《圖解收斂無窮等比級數》
http://yll.loxa.edu.tw/0_gsp/series.htm

四、《無窮等比級數》
http://math1.ck.tp.edu.tw/%E6%9E%97%E4%BF%A1%E5%AE%89/%E5%AD%B8%E8%A1%93%E7%A0%94%E7%A9%B6/%E4%B8%8A%E8%AA%B2%E8%AC%9B%E7%BE%A9/%E7%AC%AC%E4%B8%80%E5%86%8A/3-2%E7%84%A1%E7%AA%AE%E7%AD%89%E6%AF%94%E7%B4%9A%E6%95%B8.pdf

五、陳記住，《無窮等比級數》
http://www.powercam.cc/slide/1097

六、昌爸工作坊，《圖示收斂無窮等比級數和》
http://www.mathland.idv.tw/fun/infiseries.htm

【評語】030407

1. 沒有使用太多的數學工具，得到許多結果，難能可貴。
2. 文中有許多美麗的圖形，由於偏重面積的計算，幾何分析較少。
3. 只做正三角形，正四方形和正六方邊形，應研究更一般性的圖形。