中華民國第52屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第一名

030406

藏寶「旋」「跡」

學校名稱：臺南市立建興國民中學

作者：	指導老師：
國二 王敏齊	陳亮君
國二 詹雨安	
國二 鄭丞傑	

關鍵詞：旋轉、軌跡、平均點

得獎感言

一個階段性的完美句點

事情是這樣開始的:話說國一踏入數理資優班後有一門「獨立研究」的課程，這門課到了二年級要交出一份研究報告，然後參加台南市的中小學科展。本組三個同學都喜歡數學，所以參加了數學組。一開始題目換來換去，直到學校聘請左台益教授來演講，提到一個藏寶故事，教授用數學動態幾何軟體 Geogebra 作示範，因而引起我們的興趣，我們把它延伸，才發展成這份科展作品，很謝謝他。

為了完成這份研究，我們用 Geogebra 開始了各種不同的實驗，諸如調整旋轉角度的大小、增加石頭的數目、改變椰子樹的位置、增減旋轉的次數等等，實驗得到的結果相當令人滿意。不過，縱使得到了滿意的實驗結果，接下來各種定理證明、討論、撰寫科展報告書、排練報告等，才是龐大且艱辛的考驗。無止盡的演練修正、無止盡的校稿…，疲累時就將教室椅子排疊成床一起睡，休息過後又繼續奮鬥。所以當最後拿到印好的「科展報告書完整版」時，那種感動是無法用言語形容的，頓時產生一種一輩子追隨數學科展的激昂情緒。

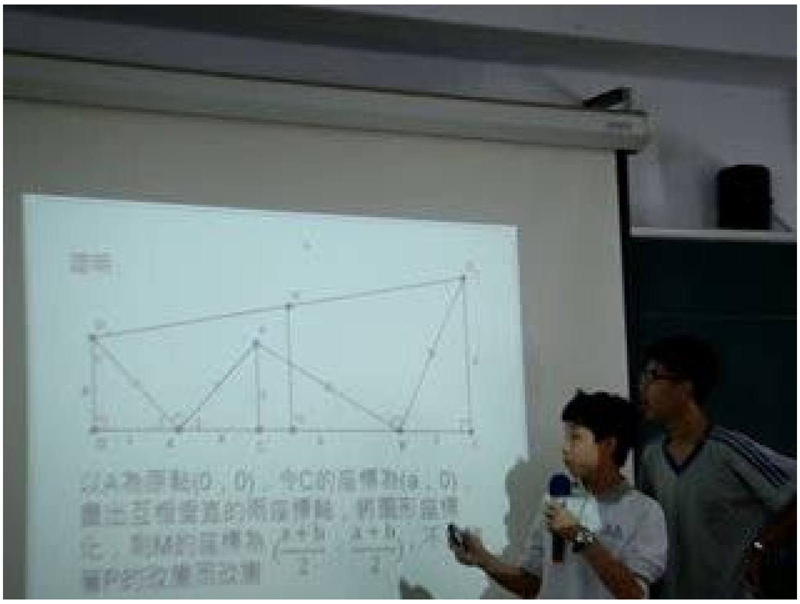
研究過程中遇到最大的困難是：當我們發現內、外次擺線時，完全沒看過這個圖形，但它們很有對稱性、很漂亮，因此費了很大的功夫去查資料，但已快到交件日期，還好經由密集上網、查書，終於在交件前成功證明出這個命題。

這次得獎不但令人感到興奮，而且還學習到許多寶貴的經驗，尤其是遇到挫折，想不到證明方法、找不到下一步該怎麼走的時候，我們要如何面對、如何化解，這些是這次研究帶給我們的珍貴禮物。

不管參加台南市的比賽還是全國賽，能夠觀摩其他人的作品，亦是一件很有意義的事情。除了利用展出時間仔細研讀別人的研究，我們也交了一些其他縣市的朋友，互留聯絡資料，希望以後還有機會討論切磋。

在此謝謝陳亮君老師對我們的辛苦指導和付出，當我們遇到困難時，她總是給我們珍貴的意見，使我們不會誤入歧途，並不時給予鼓勵，讓我們更有動力能夠繼續努力下去。感謝學校為我們舉辦正式的成果發表會，讓我們在比賽之前就開始累積臨場經驗。這份科展做了很久，花費了很多很多時間，感謝爸爸媽媽在這個過程中對我們的支持和包容。

從一年級的獨立研究課程，到二年級的實際操作，科展這件事在即將升上國三的暑假有了一個完美的句點，真的非常幸運。我們會繼續努力的！



校內成果發表會用 ppt 報告研究內容

高彩珠校長（左二）親自到彰化為陳亮君老師（右二）和學生們加油。

藏寶團隊在作品看板前合影（左起：王敏齊、詹雨安、鄭丞傑）

摘要

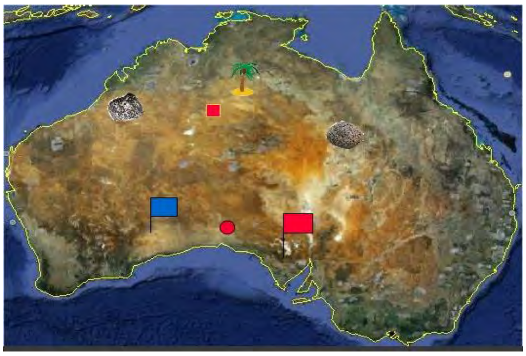
從海盜藏寶的情境出發，主要探討旋轉角度和平均點之間的關係。藉由增加旋轉中心個數，改變旋轉角度或旋轉次數等變項，來探討固定點的存在性與平均點的軌跡變化。於研究過程中發現：操控旋轉角度的正負值及倍率，能讓動點與平均點間的移動軌跡有繞圈、橢圓、內(外)次擺線及相似圖形等豐富有趣的現象變化，並成功證明之。於改變旋轉次數的過程中，發現旋轉後的點連成之向量具有不變性，同時藉由 n 次旋轉可化為一次旋轉的論點，證明出固定點符合數學上不動點的定義。綜合各項研究結果將其推廣應用，提出多種更適用於現代海盜的藏寶秘技。

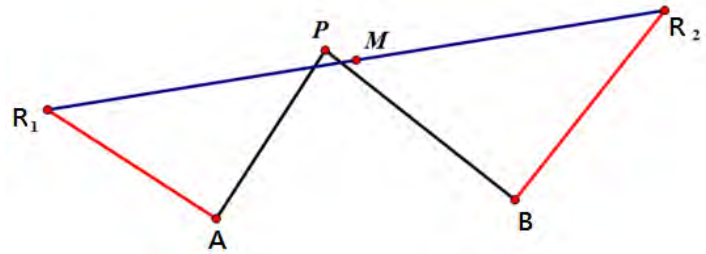
壹、研究動機

在上學習 Geogebra 軟體的數學課時，為了示範軟體應用，我們遇到了這個有趣的問題：

傑克船長曾在阿里巴島上藏寶藏。他先從島上 P 點處的一棵椰子樹，對石頭 A 點逆時針旋轉90°至R_1，並插上一面旗子於R_1點，接著走回椰子樹 P 處，再對石頭B點順時針旋轉90°至R_2，並插上另一面旗子於R_2點，最後在R_1與R_2的中點 M 處藏下寶藏。

一年後，傑克船長想回到阿里巴島挖出寶藏，但島上的椰子樹 P 和兩面旗子R_1、R_2都已被暴風吹走，只留下兩顆石頭A、B未被移動。請問：傑克船長該如何找到寶藏 M 點呢？





這個問題的解答是：以兩顆石頭 A、B 為直徑，作一個圓，再做$\overline{AB}$之中垂線，其中垂線與圓周的交點剛好便是藏寶地點 M。後來，我們用 Geogebra 軟體實際操作，發現這並不是巧合的結果，因為不論椰子樹 P 點的位置在哪裡，藏寶地點 M 的位置其實都不會改變，因此我們將 M 稱為固定點。但是「P 點改變為什麼 M 點會固定呢？」,「M 點不會移動是受了哪些條件影響呢？」,「如果有三個或更多個石頭為旋轉中心時，會不會有相對之固定點存在呢？我們又該如何將它找出來呢？」……這些問題讓我們三個組員熱烈的討論著。在好奇心驅使下，決定以這主題做為科展研究，並期望能利用研究過程中所得的結果找出一套不易讓人破解、不怕天災變遷的終極藏寶方法。

貳、研究目的

一、證明傑克船長故事內的 M 點是固定點，不受動點 P 影響。

二、探討將兩個旋轉中心(石頭)延伸至多個旋轉中心(石頭)時，也會有相對之固定點存在。證明此論點並發展出一個找出此固定點座標的可行方法。

三、在尋找固定點的過程中，發現平均點 M 的移動軌跡會和動點 P 的移動軌跡相似，找出其

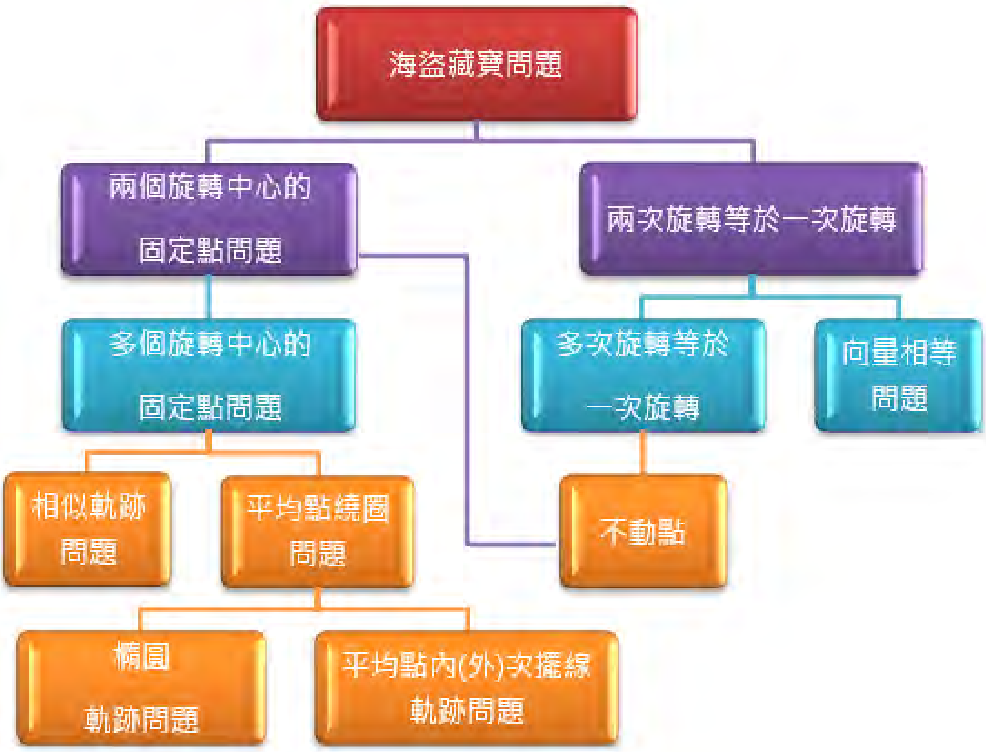
原因並證明，再推廣至 n 個旋轉中心在 P 點改變時也同時變動，此相似軌跡狀況亦成立。

四、對於多個旋轉中心，操控各個旋轉角度的差值、倍率為變項時，探討平均點 M 的移動軌跡變化情形，證明出有繞圓、內(外)次擺線、橢圓等情況。

五、證明在藏寶問題中，若將旋轉角度均定為θ，則動點 P 在經兩次旋轉後的點連成之向量具有不變性，並利用於推廣至平均點繞圈與相似軌跡等現象。

六、證明海盜故事內的 M 點除了是固定點外，也是不動點，並將其推廣至多次旋轉的狀況中。

參、研究架構



肆、名詞解釋

一、**固定點**：以固定規則使定點與動點製造出一反應點，當動點位置任意改變時，其反應點位置不變，則稱其反應點為固定點。

二、**不動點**：函數的不動點是指被這個函數映射到自身的一個點，例如：f：R → R，$f(x) = x^2 - 3x + 4$，則 2 是函數f 的不動點，因為$f(2) = 2$。

三、**平均點**：設R_1，R_2，⋯，R_n為平面上 n 個點，將R_1，R_2，⋯，R_n的座標相加再除以 n，得到 M 點，即$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OR_1} + \overrightarrow{OR_2} + \cdots + \overrightarrow{OR_n})$，(其中 O 為原點)，則 M 稱為$R_1$，$R_2$，⋯，$R_n$的平均點。

伍、研究工具

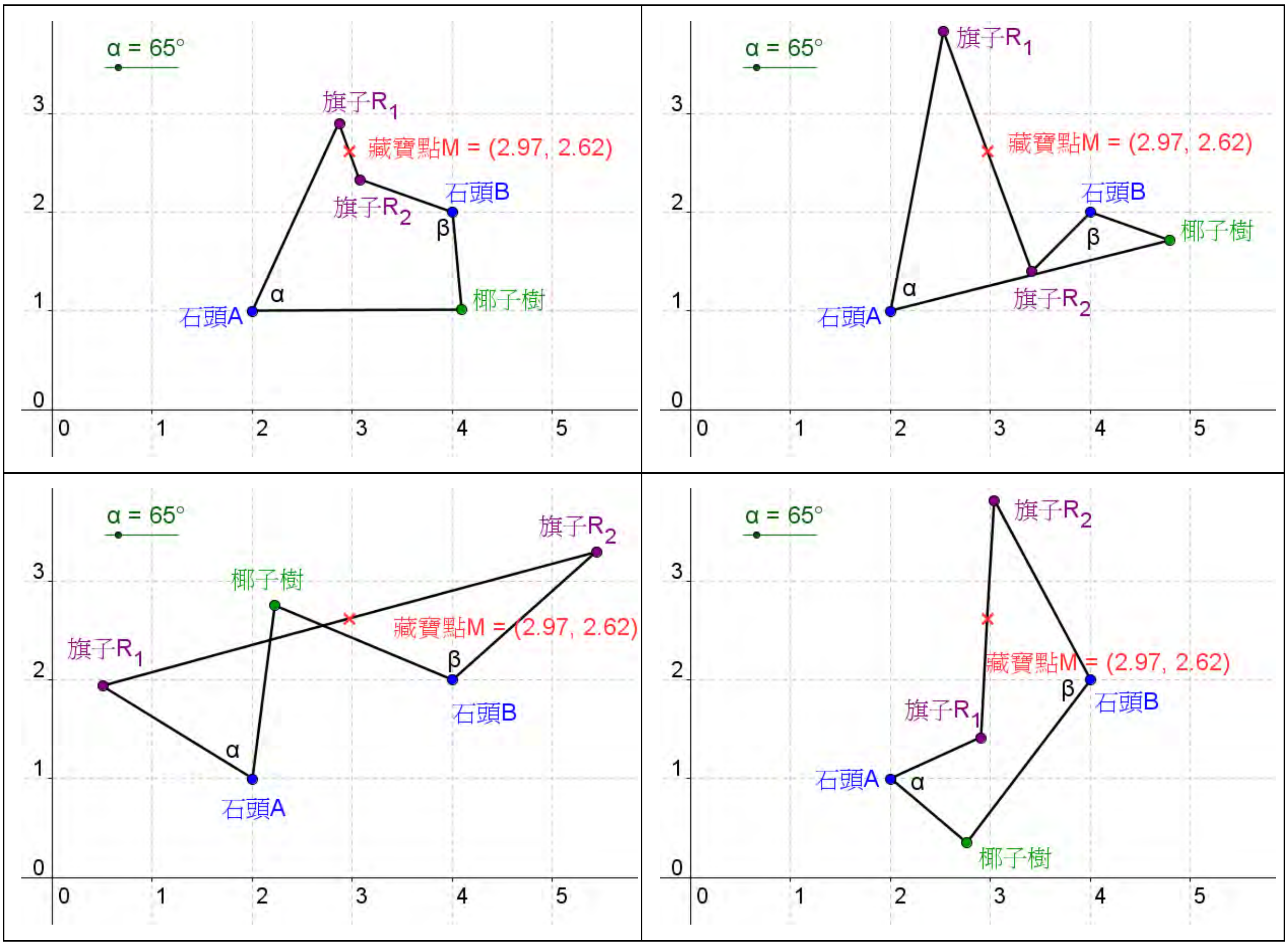
紙、筆、電腦、Geogebra 動態幾何繪圖板。

陸、研究過程

一、兩個旋轉中心的固定點問題

(一)改變旋轉角度

原題中談到傑克船長將 P 點順、逆時針旋轉90°，分別得到R_1，R_2，設$\overline{R_1R_2}$中點為 M，則不論 P 點如何改變，M 恆為固定點。我們把它寫成【定理一】，並思考是否旋轉角度不一定要順、逆時針各旋轉90°，只要逆時針旋轉α，順時針旋轉β，其中$\alpha+\beta=180^{\circ}$即可。使用 Geogebra 測試後，發現下圖的結果－不論椰子樹位置如何改變，藏寶點 M 的座標皆不改變。所以我們將證明 M 為固定點的問題表示成【定理二】，當$\alpha=\beta=90^{\circ}$時即為【定理一】的情況，只要能證明定理二，就能確定定理一成立。



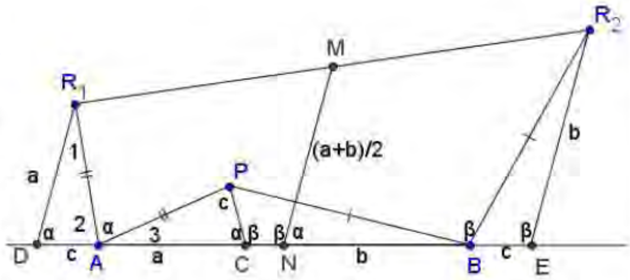
【定理一】兩個旋轉中心問題（一）

平面上有兩定點 A，B，設 P 爲平面上另一點。以 A 爲圓心，$\overline{AP}$長爲半徑，將 P 逆時針旋轉90°至R_1；以 B 爲圓心，$\overline{BP}$長爲半徑，將 P 順時針旋轉90°至R_2，令$\overline{R_1R_2}$的中點爲 M，證明：不論 P 點在平面上如何變動，M 恆爲固定點。

(二)證明定理二

【定理二】兩個旋轉中心問題（二）

平面上有兩定點 A，B，設 P 為平面上另一點。以 A 為圓心，$\overline{AP}$長為半徑，將 P 逆時針旋轉α至R_1；以 B 為圓心，$\overline{BP}$長為半徑，將 P 順時針旋轉β至R_2，其中$\alpha+\beta=180^\circ$，令$\overline{R_1R_2}$的中點為 M，證明：不論 P 點在平面上如何變動，M 恆為固定點。



【證明】

1、如右上圖連接$\overleftrightarrow{AB}$，連接$\overline{AR_1}$，$\overline{BR_2}$，依題意知$\overline{AR_1}=\overline{AP}$，$\overline{BR_2}=\overline{BP}$，

作$\overline{PC}$交$\overleftrightarrow{AB}$於 C 點，使得$\angle PCA=\alpha$，則$\angle PCB=180^\circ-\alpha=\beta$，

設$\overline{PC}=c$，$\overline{AC}=a$，$\overline{BC}=b$

2、作$\overline{R_1D}$交$\overleftrightarrow{AB}$於 D 點，使得$\angle R_1DA=\alpha$，作$\overline{R_2E}$交$\overleftrightarrow{AB}$於 E 點，使得$\angle R_2EB=\beta$，

因為$\alpha+\beta=180^\circ$，同側內角互補，所以$\overline{R_1D}//\overline{R_2E}$

3、ΔADR_1與ΔPCA中，

$\because \angle 1+\angle 2=180^\circ-\alpha=\angle 2+\angle 3 \therefore \angle 1=\angle 3$ 又$\angle PCA=\alpha=\angle R_1DA$，$\overline{AR_1}=\overline{AP}$

$\therefore \Delta ADR_1 \cong \Delta PCA(AAS)$

$\therefore \overline{R_1D}=\overline{AC}=a$，$\overline{DA}=\overline{PC}=c$

同理$\Delta BER_2 \cong \Delta PCB(AAS)$ $\therefore \overline{R_2E}=\overline{CB}=b$，$\overline{BE}=\overline{PC}=c$

4、$\because \overline{R_1D}\ //\ \overline{R_2E}$，作$\overline{MN}$使$\overline{MN}\ //\ \overline{R_1D}$且交$\overleftrightarrow{AB}$於 N 點，

又$\because$M 為$\overline{R_1R_2}$中點$\therefore \overline{MN}$為梯形R_1DER_2的中線，N 為$\overline{DE}$中點

$\because \overline{MN}$為梯形R_1DER_2的中線$\therefore \overline{MN}=\frac{\overline{R_1D}+\overline{R_2E}}{2}=\frac{a+b}{2}$

$\because$N 為$\overline{DE}$中點且$\overline{DA}=\overline{BE} \therefore$N 為$\overline{AB}$中點$\therefore \overline{AN}=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{a+b}{2}$

$\because \overline{MN}\ //\ \overline{R_1D}$，$\therefore \angle MNB=\angle R_1DA=\alpha$

5、以 A 為原點(0，0)，令 C 的座標為(a，0)，畫出互相垂直的兩座標軸，將圖形座標化，

$\because \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NM}=\left(\frac{a+b}{2}，0\right)+\left(\frac{a+b}{2}\cos\alpha，\frac{a+b}{2}\sin\alpha\right)=\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}\cos\alpha，\frac{a+b}{2}\sin\alpha\right)$

又 A 為原點(0，0)$\therefore$M 的座標為$\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}\cos\alpha，\frac{a+b}{2}\sin\alpha\right)$

$\because$A，B 為兩定點$\therefore$a+b= $\overline{AB}$為定值，又α為一固定角度，

$\therefore$不論 P 點如何變動，M 的座標為$\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}\cos\alpha，\frac{a+b}{2}\sin\alpha\right)$是一個固定的點，不會隨著 P 的改變而改變，得證■

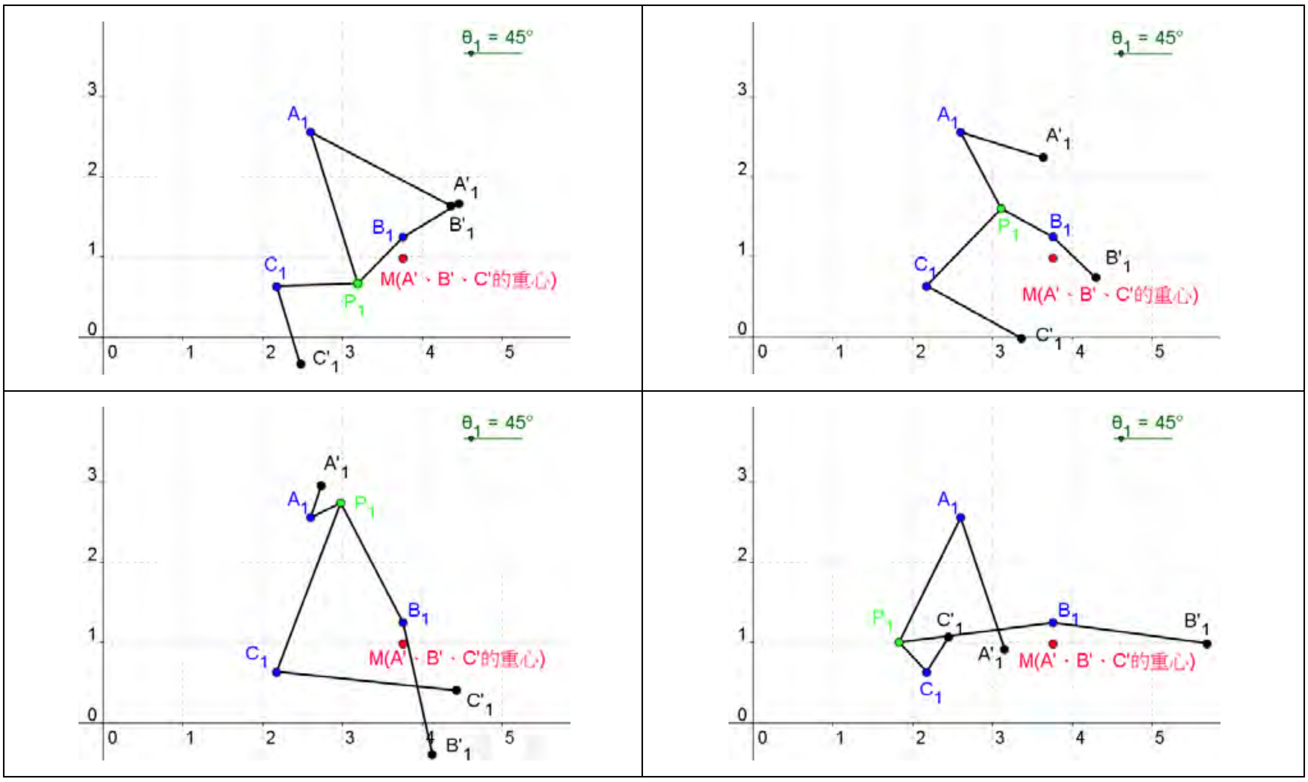
(三) 回應傑克船長的問題

當$\alpha = \beta = 90^{\circ}$時即為定理一，此時藏寶點 M 的座標為$\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2}\cos 90^{\circ}，\frac{a+b}{2}\sin 90^{\circ}\right) = \left(\frac{a+b}{2}，\frac{a+b}{2}\right)$可回答傑克船長寶藏點 M 的問題。由【定理二】可知 M 的座標為$\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2}\cos\alpha，\frac{a+b}{2}\sin\alpha\right)$可看出：M 與 P 點無關，不會隨著 P 的改變而改變，但與旋轉角度α有關。

二、多個旋轉中心的固定點問題

(一)找尋多個旋轉中心的固定點確實存在的思考過程

如果將兩個旋轉中心(兩顆石頭)，改成三個旋轉中心(三顆石頭)，那麼三個旋轉中心分別將椰子樹 P 作旋轉後，是否仍然可以找到固定點 M 呢？又該如何選取旋轉角度呢?我們從【定理二】兩個旋轉中心時，藏寶點 M 為$\overline{R_1R_2}$中點(座標相加除以二)，得到了靈感，覺得最有可能成為固定點的是重心(座標相加除以三)。而兩個旋轉中心的旋轉角度：逆時針旋轉α，順時針旋轉β，$\alpha + \beta = 180^{\circ}$，可改成逆時針旋轉$\alpha$，逆時針旋轉$360^{\circ} - \beta$，而$(360^{\circ} - \beta) - \alpha = 360^{\circ} - (\alpha + \beta) = 180^{\circ}$，旋轉角度差是$180^{\circ} = \frac{360^{\circ}}{2}$，讓我們猜想到對三個旋轉中心的旋轉角度差有可能是$\frac{360^{\circ}}{3} = 120^{\circ}$。也就是均改為逆時針旋轉時，三個角度分別為$\theta_1$，$\theta_1 + 120^{\circ}$，$\theta_1 + 240^{\circ}$，我們用 Geogebra 測試此猜想之後，其結果如下面圖示，發現這猜想是正確的，並著手證明三個旋轉中心的固定點。



(二)證明多個旋轉中心的固定點之思考過程

一開始我們嘗試用國中幾何的方法來證，但發現難度很高，沒有太大進展。後來因為有組員學過三角函數，知道三角函數的極式可以解決旋轉的問題，於是我們往這方面嘗試，並驚喜的發現證明三個旋轉中心的固定點問題的方法，可以用來證明推廣到 n 個旋轉中心的固定點問題。由於 n 個旋轉中心的情形包含三個旋轉中心的情形，因此我們以 n 個旋轉中心的情形來作呈現，【定理四】是我們歸納出的結論和證明。

(三)定理四及其引理證明

1.在證明【定理四】的過程中我們會使用到一個引理三，在此先作說明

【引理三】

以 O 爲圓心，作一半徑爲 1 的圓，在圓上取 n 個點A_1，A_2，A_3，…，A_n將此圓 n 等分$(n \geq 2)$，則 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$

【證明詳見 P.31 附錄一】

2.證明【定理四】n 個旋轉中心的固定點。

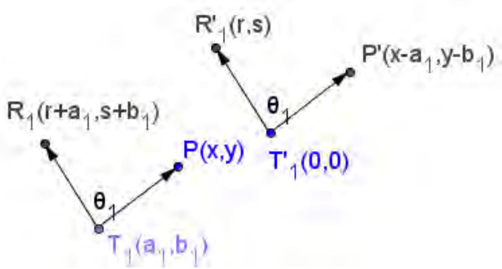
為了方便起見，以下的角度均以有向角表示，角度為正，代表逆時針旋轉；角度為負，代表順時針旋轉。以正負代表方向，不再特別標示是逆時針旋轉或順時針旋轉。

【定理四】n 個旋轉中心的固定點問題

設$T_1(a_1，b_1)$，$T_2(a_2，b_2)$，…，$T_n(a_n，b_n)$爲座標平面上的 n 個定點$(n \geq 2)$，另有一點 P，令$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\frac{360^\circ}{n}$，…，$\theta_n=\theta+\frac{360^\circ}{n}\times(n-1)$， 今以$T_1$爲旋轉中心，將 P 點旋轉$\theta_1$，得到點$R_1$；以$T_2$爲旋轉中心，將 P 點旋轉$\theta_2$，得到點$R_2$； ……；以$T_n$爲旋轉中心，將 P 點旋轉$\theta_n$，得到點$R_n$，其中θ角度固定。設 M 爲$R_1$，$R_2$，…，$R_n$的平均點，即$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{OR_1}+\overrightarrow{OR_2}+\cdots+\overrightarrow{OR_n})$，其中 O 爲原點，則不論 P 點在平面上如何變動，M 恆爲固定點。

【證明】

1、設 $P(x，y)$為動點，已知$T_1(a_1，b_1)$，$T_2(a_2，b_2)$，…，$T_n(a_n，b_n)$為定點，以T_1為旋轉中心，將 P 點旋轉θ_1，得到點R_1，先求R_1座標：將圖形平移，使T_1與原點重合，令為$T_1'(0，0)$，則 P 隨之平移至$P'(x-a_1，y-b_1)$



2、設以T_1'為旋轉中心，將P'點旋轉θ_1，得到$R_1'(r，s)$點，則$r+is=\big((x-a_1)+i(y-b_1)\big)(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$

$= (x-a_1)\cos\theta_1 - (y-b_1)\sin\theta_1 + i((x-a_1)\sin\theta_1 + (y-b_1)\cos\theta_1)$

所以 r= $(x-a_1)\cos\theta_1 - (y-b_1)\sin\theta_1$，s= $(x-a_1)\sin\theta_1 + (y-b_1)\cos\theta_1$

$\therefore R_1'$座標爲$((x-a_1)\cos\theta_1 - (y-b_1)\sin\theta_1$，$(x-a_1)\sin\theta_1 + (y-b_1)\cos\theta_1)$

再將圖形平移回去，使T_1'與$T_1(a_1$，$b_1)$重合，則R_1'會與R_1重合$\therefore R_1$座標爲$(r+a_1$，$s+b_1)$

即R_1座標爲$((x-a_1)\cos\theta_1-(y-b_1)\sin\theta_1+a_1$ ，$(x-a_1)\sin\theta_1+(y-b_1)\cos\theta_1+b_1$)

同理R_2座標爲$((x-a_2)\cos\theta_2-(y-b_2)\sin\theta_2+a_2$ ，$(x-a_2)\sin\theta_2+(y-b_2)\cos\theta_2+b_2$)

$\cdots\cdots R_n$座標爲$((x-a_n)\cos\theta_n-(y-b_n)\sin\theta_n+a_n$ ，$(x-a_n)\sin\theta_n+(y-b_n)\cos\theta_n+b_n$)

3、令 $M(x'$，$y')$，因爲$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OR_1} + \overrightarrow{OR_2} + \cdots + \overrightarrow{OR_n})$

所以$(nx'$， $ny') = n\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OR_1} + \overrightarrow{OR_2} + \cdots + \overrightarrow{OR_n}$爲$R_1$，$R_2$，…，$R_n$的座標相加

$\therefore nx'$爲R_1，R_2，…，R_n的 x 座標相加

$$nx' = (x-a_1)\cos\theta_1-(y-b_1)\sin\theta_1+a_1+(x-a_2)\cos\theta_2-(y-b_2)\sin\theta_2+a_2+\cdots\cdots+$$
$$(x-a_n)\cos\theta_n-(y-b_n)\sin\theta_n+a_n$$
$$= x(\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n)-y(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n)$$
$$-a_1\cos\theta_1+b_1\sin\theta_1+a_1-a_2\cos\theta_2+b_2\sin\theta_2+a_2-\cdots\cdots-a_n\cos\theta_n+b_n\sin\theta_n+a_n \text{ ----------(1)}$$

ny'爲R_1，R_2，…，R_n的 y 座標相加$\therefore$

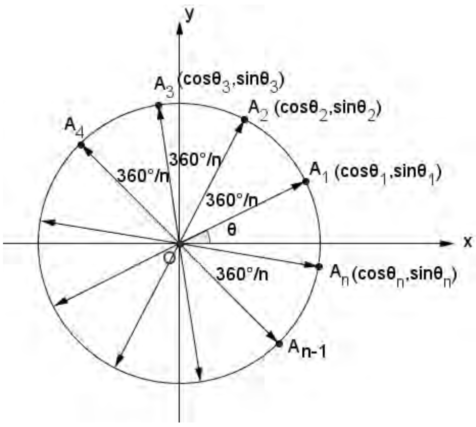
$$ny' = (x-a_1)\sin\theta_1+(y-b_1)\cos\theta_1+b_1+(x-a_2)\sin\theta_2+(y-b_2)\cos\theta_2+b_2+\cdots+$$
$$(x-a_n)\sin\theta_n+(y-b_n)\cos\theta_n+b_n$$
$$= x(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n)+y(\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n)$$
$$-a_1\sin\theta_1-b_1\cos\theta_1+b_1-a_2\sin\theta_2-b_2\cos\theta_2+b_2-\cdots\cdots-a_n\sin\theta_n-b_n\cos\theta_n+b_n \text{ -----------(2)}$$

因爲 $P(x$，$y)$爲動點，而$T_1(a_1$，$b_1)$，$T_2(a_2$，$b_2)$，…，$T_n(a_n$，$b_n)$爲定點，所以只要 θ_1，θ_2，…，θ_n滿足$\begin{cases}\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n=0\\ \sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n=0\end{cases}$----(3)，代入式子(1)(2)，則不論$x$，$y$爲何值，$P(x$，$y)$爲何點，$nx'$，$ny'$均爲定值，即$x'$，$y'$爲定值，$M(x'$，$y')$會是固定點。

4、接著我們想辦法證明上面框框內式子(3)，則即可得證 $M(x'$，$y')$是固定點：

$\because \theta_1 = \theta$，$\theta_2 = \theta + \frac{360^\circ}{n}$，…，$\theta_n = \theta + \frac{360^\circ}{n} \times (n-1)$

令A_1座標為$(\cos\theta_1$，$\sin\theta_1)$，A_2座標為$(\cos\theta_2$，$\sin\theta_2)$，…，A_n座標為$(\cos\theta_n$，$\sin\theta_n)$，則A_1，A_2，…，A_n將以 $O(0$，$0)$為圓心，半徑為 1 的圓 n 等分(如右圖)，由【引理三】知$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$ ，即



$(\cos\theta_1，\sin\theta_1)+(\cos\theta_2，\sin\theta_2)+\cdots+(\cos\theta_n，\sin\theta_n)=(0，0)$

$\therefore(\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n，\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n)=(0，0)$

所以$\begin{cases}\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n=0\\ \sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n=0\end{cases}$-----(*)，式子(3)得證

由 P.7 上的框框討論知：不論 P(x，y)如何變動，nx'，ny'均為定值， 即x'，y'為定值，M(x'，y')會是固定點，得證■

(四)探討定理四中$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\frac{360^\circ}{n}$，$\theta_3=\theta+\frac{360^\circ}{n}\times2$，…，$\theta_n=\theta+\frac{360^\circ}{n}\times(n-1)$是否是讓平均點 M 成為固定點的唯一一種旋轉角度

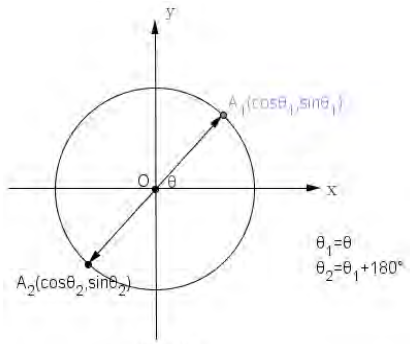
設$\theta_1<\theta_2<\theta_3<\cdots<\theta_n$，令$A_1$座標為$(\cos\theta_1，\sin\theta_1)$，$A_2$座標為$(\cos\theta_2，\sin\theta_2)$，…，$A_n$座標為$(\cos\theta_n，\sin\theta_n)$均為單位圓上的點，只要滿足$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$，那麼$\theta_1$，$\theta_2$，$\theta_3$，…，$\theta_n$就會滿足$\begin{cases}\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n=0\\ \sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n=0\end{cases}$，由 P.7 的框框討論知平均點 M 就會是固定點。當$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\frac{360^\circ}{n}$，$\theta_3=\theta+\frac{360^\circ}{n}\times2$，…，$\theta_n=\theta+\frac{360^\circ}{n}\times(n-1)$時，$A_1$，$A_2$，$A_3$，……，$A_n$將圓 n 等分，可以滿足$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$，除此之外是否還有其他情形可以使$\theta_1$，$\theta_2$，$\theta_3$，…，$\theta_n$滿足$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$而使平均點 M 是固定點呢？就不同的 n 值討論如下：

1.n=2 時

$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA_1}=-\overrightarrow{OA_2}\Leftrightarrow$ O 為$\overline{A_1A_2}$的中點，

此時A_1，A_2將圓二等分如圖(一)，

$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+180^\circ$為使平均點 M 成為固定點的唯一一種角度形式。



圖(一)

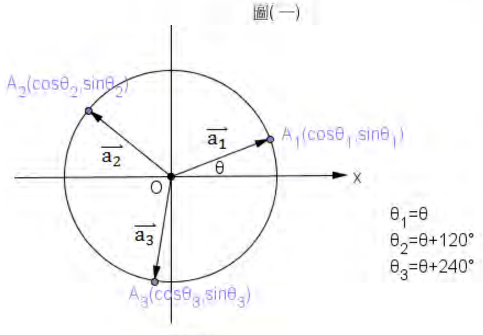
2.n=3 時

$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}=\vec{0}$

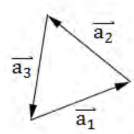
則三向量始點接終點會構成一個封閉圖形(三角形)如圖(二)，邊長均為 1 的三角形必為正三角形，

$\therefore A_1$，A_2，A_3必將一個圓三等分如圖(三)，則可得知：$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+120^\circ=\theta+\frac{360^\circ}{3}$，

$\theta_3=\theta+240^\circ=\theta+\frac{360^\circ}{3}\times\ 2$為使平均點 M 成為固定點的唯一一種角度形式。



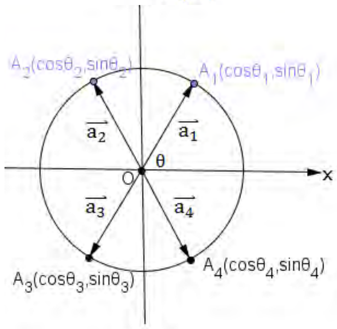
圖(三)



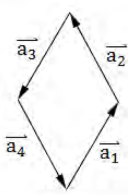
圖(二)

3.n=4 時

$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}=\vec{0}$，則



圖(五)



圖(四)

四向量始點接終點會構成一個封閉圖形(四邊形)，如圖(四)，邊長均為 1 的四邊形必為菱形，但夾角並不唯一，如圖(五)θ_1、θ_2、θ_3、θ_4的表示形式為θ_1，θ_2，θ_1+180°，θ_2+180°。

當四邊形為正方形時，$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+90^\circ=\theta+\frac{360^\circ}{4}$，$\theta_3=\theta+180^\circ=\theta+\frac{360^\circ}{4}\times 2$，$\theta_4=\theta+270^\circ=\theta+\frac{360^\circ}{4}\times 3$，此時可使平均點 M 是固定點，但不是使平均點 M 成為固定點的唯一一種角度形式。

4.n≧4 時

$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$，令$\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{OA_2}=\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{a_3}$，…，$\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{a_n}$，

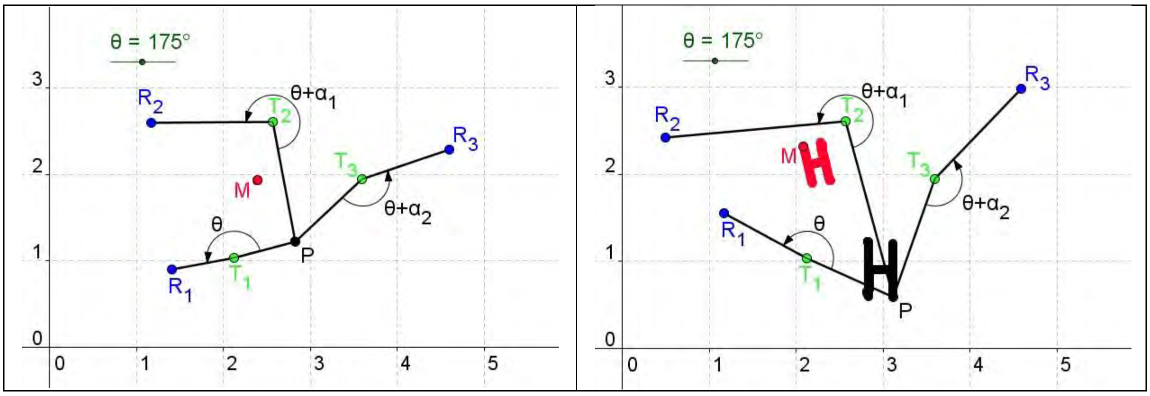
則$\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+\cdots+\overrightarrow{a_n}=\vec{0}$，$\overrightarrow{a_1}$、$\overrightarrow{a_2}$、$\overrightarrow{a_3}$、…、$\overrightarrow{a_n}$，n 個向量始點接終點會構成一個封閉圖形(n 邊形)，邊長均為 1 的 n 邊形有各種可能圖形(想像我們在桌上放一個正 n 邊形，我們可以將它擠壓而形成各種不同的 n 邊形)，夾角更是不唯一，所以θ_1，θ_2，θ_3，…，θ_n的表示形式有各種可能情形，所以推論 n(n≥4)個旋轉中心時，讓平均點 M 成為固定點的旋轉角度θ_1，θ_2，θ_3，…，θ_n並不唯一。

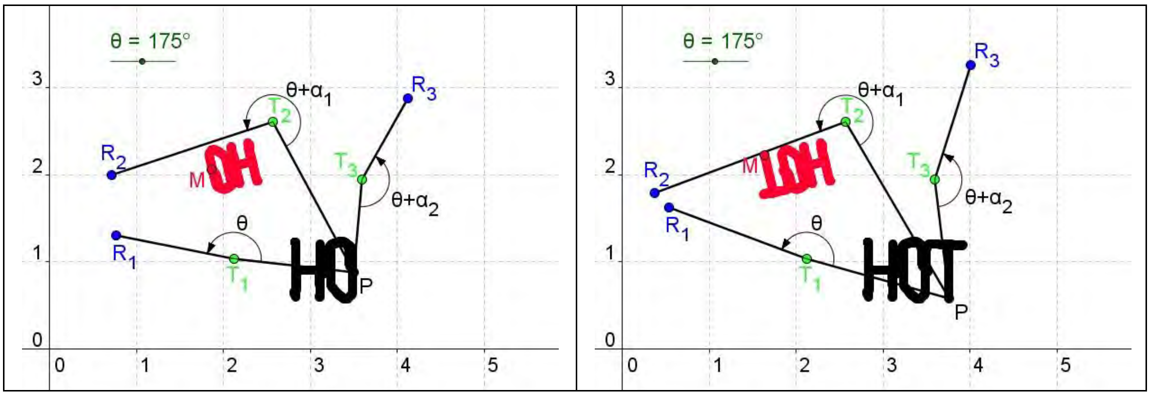
備註: n≥ 4時還有其他旋轉角度，也可以讓平均點 M 是固定點的詳細說明，請見 P.34 附錄二。

三、相似軌跡問題

(一)對旋轉中心旋轉任意角時，平均點 M 的軌跡特色

我們之前證明旋轉角度θ_1，θ_2，…，θ_n 滿足"$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n=0$且$\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n=0$"時，平均點 M 是固定點。但我們很好奇，如果$\theta_1$，$\theta_2$，…，$\theta_n$不滿足此條件時，結果會怎樣？因此我們將旋轉角度改成$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\alpha_1$，…，$\theta_n=\theta+\alpha_{n-1}$，(其中$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_{n-1}$角度固定，但沒有給予特別的限制)，此時 P 點改變，平均點 M 可能不再是固定點，我們用 Geogebra 測試如下圖所示，當 P 點移動軌跡是 HOT 時，M 點也呈現 HOT 的字樣。我們發現： P 點改變，M 不再是固定點，會隨著 P 的改變而改變，但令人驚奇的是，P 點的軌跡與 M 點的軌跡是相似圖形，我們將其寫成【定理十二】相似軌跡問題，放在 P.14，並證明之。





因為在證明相似軌跡問題過程中會用到一些定義和引理，所以先列出如下:

首先，我們介紹兩個定義：

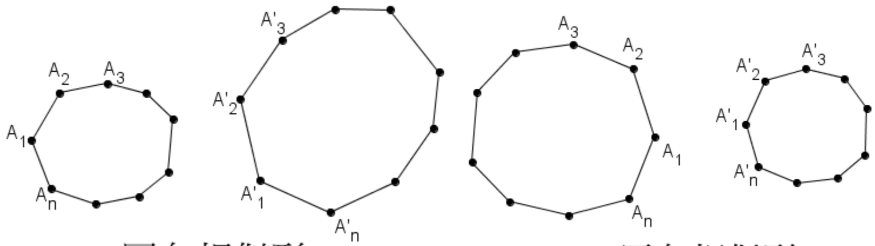
(二) 同向相似形和反向相似形：

兩多邊形$A_1A_2\cdots A_n$及$A_1'A_2'\cdots A_n'$($n\geq 3$)，若$\angle A_1=\angle A_1'$，$\angle A_2=\angle A_2'$，⋯，$\angle A_n=\angle A_n'$(對應角相等)，且$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1'A_2'}}=\frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_2'A_3'}}=\cdots=\frac{\overline{A_nA_1}}{\overline{A_n'A_1'}}$ (對應邊成比例)，

則多邊形$A_1A_2\cdots A_n$及$A_1'A_2'\cdots A_n'$為兩相似多邊形，分為兩類:

1、當$A_1\to A_2\to\cdots\to A_n$與$A_1'\to A_2'\to\cdots\to A_n'$均為順時針或均為逆時針時，稱多邊形$A_1A_2\cdots A_n$及$A_1'A_2'\cdots A_n'$為兩同向相似形

2、當$A_1\to A_2\to\cdots\to A_n$與$A_1'\to A_2'\to\cdots\to A_n'$一個為順時針，一個為逆時針時，稱多邊形$A_1A_2\cdots A_n$及$A_1'A_2'\cdots A_n'$為兩反向相似形



同向相似形　　反向相似形

3、規定：點是任意圖形的同相相似圖形

(三)對應點

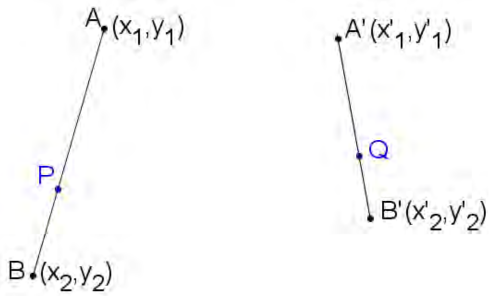
1、設有$\overline{AB}$，$\overline{A'B'}$兩線段，其座標為 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$A'(x_1'，y_1')$，$B'(x_2'，y_2')$，

設 $P(x_1+(x_2-x_1)t，y_1+(y_2-y_1)t)$為$\overline{AB}$上的點

$Q(x_1'+(x_2'-x_1')s，y_1'+(y_2'-y_1')s)$為$\overline{A'B'}$上的點

若 t=s，則稱在$\overline{AB}$，$\overline{A'B'}$中，P，Q 互為對應點

(註：t=s=0 時，得到 A，A′為對應點；t=s=1 時，得到 B，B′為對應點)



2、設有兩相似多邊形$A_1A_2\cdots A_n$及$A'_1A'_2\cdots A'_n(n\geq 3)$，

滿足$\angle A_1=\angle A'_1$，$\angle A_2=\angle A'_2$，⋯，$\angle A_n=\angle A'_n$ (對應角相等)，

且$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A'_1A'_2}}=\frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A'_2A'_3}}=\cdots=\frac{\overline{A_nA_1}}{\overline{A'_nA'_1}}$ (對應邊成比例)，

若 P 為多邊形$A_1A_2\cdots A_n$上一點，Q 為多邊形$A'_1A'_2\cdots A'_n$上一點，而且 P，Q 恰在多邊形$A_1A_2\cdots A_n$及$A'_1A'_2\cdots A'_n$兩對應邊上，且互為對應邊上的對應點，

則稱多邊形$A_1A_2\cdots A_n$及$A'_1A'_2\cdots A'_n$中，P，Q 互為對應點。

(四)證明中需要的引理

【引理五】

設有$\overline{AB}$，$\overline{A'B'}$兩線段，其座標爲 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$A'(x'_1，y'_1)$，$B'(x'_2，y'_2)$，

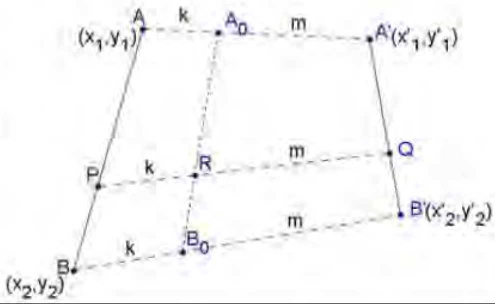
A_0在$\overline{AA'}$上，滿足$\overline{AA_0}：\overline{A_0A'}=k：m$

B_0在$\overline{BB'}$上，滿足$\overline{BB_0}：\overline{B_0B'}=k：m$

設 $P(x_1+(x_2-x_1)t，y_1+(y_2-y_1)t)$爲$\overline{AB}$上的動點

$Q(x'_1+(x'_2-x'_1)t，y'_1+(y'_2-y'_1)t)$在$\overline{A'B'}$上，且爲 P 的對應點，R 在$\overline{PQ}$上，滿足$\overline{PR}：\overline{RQ}=k：m$ ，

證明：隨著 P 在$\overline{AB}$上變動，所有 R 點所成圖形爲$\overline{A_0B_0}$



【引理六】

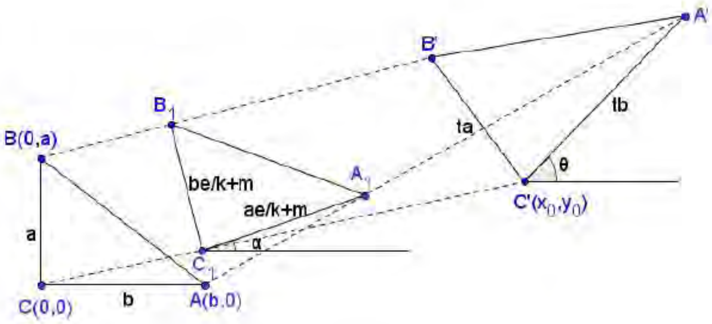
設直角ΔABC 與直角ΔA′B′C′爲同向相似三角形，$\angle C=\angle C'=90^\circ$，

A_1在$\overline{AA'}$上，滿足$\overline{AA_1}：\overline{A_1A'}=k：m$

B_1在$\overline{BB'}$上，滿足$\overline{BB_1}：\overline{B_1B'}=k：m$

C_1在$\overline{CC'}$上，滿足$\overline{CC_1}：\overline{C_1C'}=k：m$

證明：$\Delta A_1B_1C_1$與ΔABC亦爲同向的相似三角形



由於任意三角形均可分成兩個直角三角形，所以由引理七可推得引理八

【引理七】

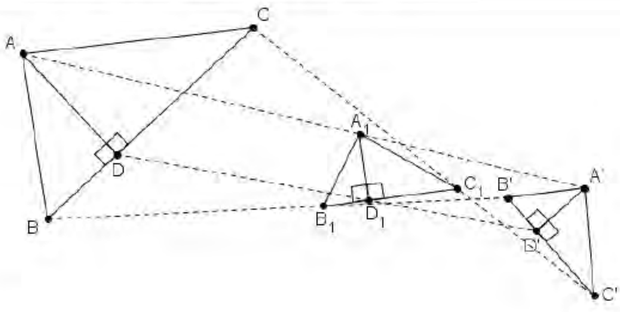
設ΔABC 與ΔA′B′C′爲同向的相似三角形，

A_1在$\overline{AA'}$上，滿足$\overline{AA_1}：\overline{A_1A'}=k：m$

B_1在$\overline{BB'}$上，滿足$\overline{BB_1}：\overline{B_1B'}=k：m$

C_1在$\overline{CC'}$上，滿足$\overline{CC_1}：\overline{C_1C'}=k：m$

證明：$\Delta A_1B_1C_1$與ΔABC亦爲同向的相似三角形



由於 n 邊形可以分成(n-2)個三角形，所以由引理八可推得引理九

【引理八】(請參考定理九的圖)

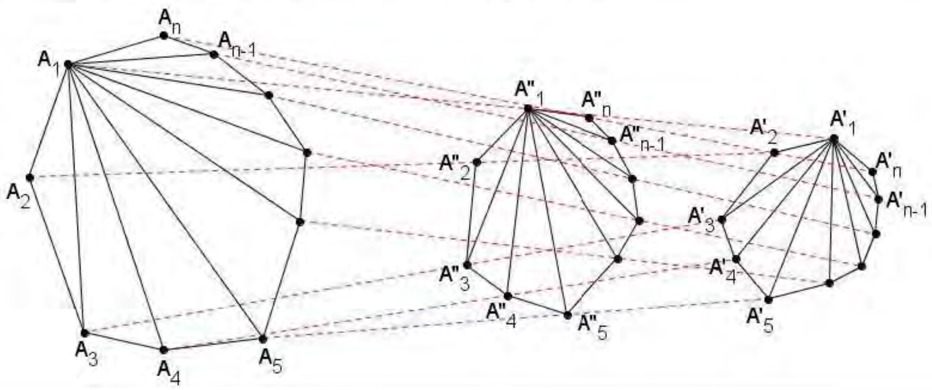
設兩多邊形$A_1A_2\cdots A_n$及$A'_1A'_2\cdots A'_n(n\geq 3)$為同向的相似多邊形，$A'_1$，$A'_2$，…，$A'_n$分別為$A_1$，$A_2$，…，$A_n$的對應點，$A''_1$在$\overline{A_1A'_1}$上，滿足$\overline{A_1A''_1}:\overline{A''_1A'_1}=k:m$，$A''_2$在$\overline{A_2A'_2}$上，滿足$\overline{A_2A''_2}:\overline{A''_2A'_2}=k:m$，……，$A''_n$在$\overline{A_nA'_n}$上，滿足$\overline{A_nA''_n}:\overline{A''_nA'_n}=k:m$，

則多邊形$A''_1A''_2\cdots A''_n$與$A_1A_2\cdots A_n$為同向的相似多邊形

由引理八我們可以得到定理九

【定理九】

設兩多邊形$A_1A_2\cdots A_n$及$A'_1A'_2\cdots A'_n(n\geq 3)$為同向的相似多邊形，$A'_1$，$A'_2$，…，$A'_n$分別為$A_1$，$A_2$，…，$A_n$的對應點，設 P 為多邊形$A_1A_2\cdots A_n$上的動點，Q 在多邊形$A'_1A'_2\cdots A'_n$上，且為 P 的對應點，R 在$\overline{PQ}$上，滿足$\overline{PR}:\overline{RQ}=k:m$，證明：隨著 P 在多邊形$A_1A_2\cdots A_n$上變動，所有 R 點所成圖形為多邊形 $A_1A_2\cdots A_n$的同向相似圖形。



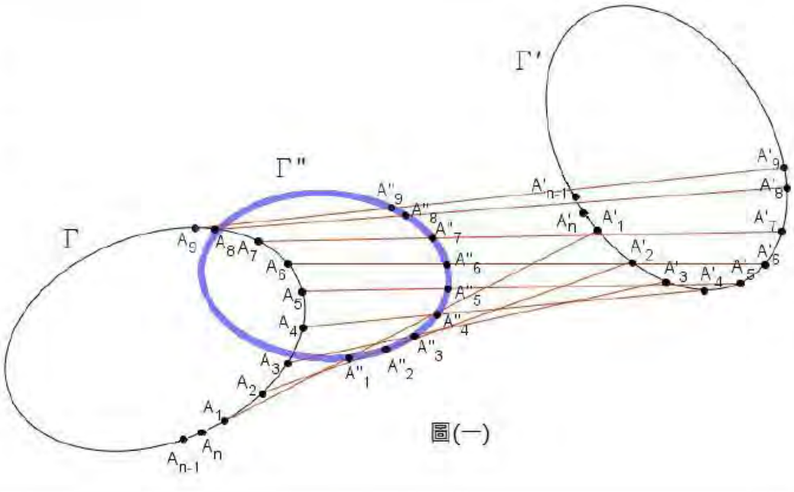
由定理九我們可以得到定理十

【定理十】

設Γ，Γ′為同向的相似圖形(可以有弧線)，設 P 為Γ上的動點，Q 在Γ′上，且為 P 的對應點，R 在$\overline{PQ}$上，滿足$\overline{PR}:\overline{RQ}=k:m$

設隨著 P 在Γ上變動，所有 R 點所成圖形為Γ"

證明：Γ"為Γ的同向相似圖形



圖(一)

以上引理五、六、七、八 及定理九、十的詳細證明請參閱 P.37 附錄三。

(五)平均點的幾何意義

【定理十一】平均點的幾何意義

設R_1，R_2，…，R_n爲平面上 n 個點(n≥ 2)，設M_1在$\overline{R_1R_2}$上，滿足$\overline{R_1M_1}$：$\overline{M_1R_2}$ =1：1

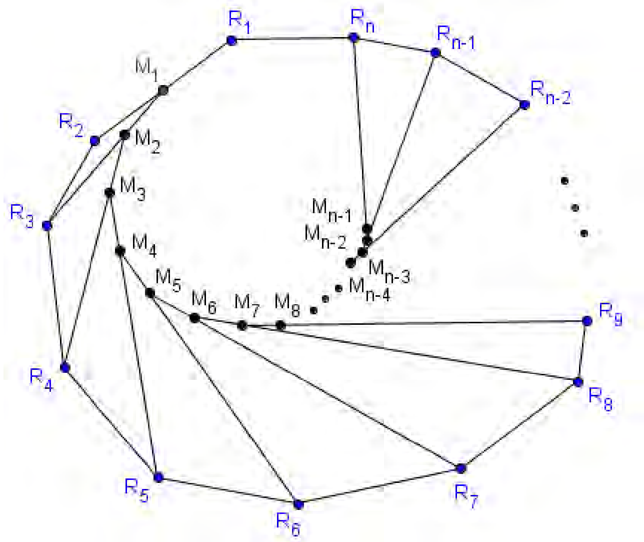
M_2在$\overline{M_1R_3}$上，滿足$\overline{M_1M_2}$：$\overline{M_2R_3}$ =1：2，M_3在$\overline{M_2R_4}$上，滿足$\overline{M_2M_3}$：$\overline{M_3R_4}$ =1：3

，……，M_{n-1}在$\overline{M_{n-2}R_n}$上，滿足$\overline{M_{n-2}M_{n-1}}$：$\overline{M_{n-1}R_n}$ =1：(n-1)

若 O 爲原點，令$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{OR_1}+\overrightarrow{OR_2}+\cdots+\overrightarrow{OR_n})$

則M_{n-1}即爲 M 點

【證明】



使用數學歸納法證明：當 n≥ 2時，

$\overrightarrow{OM_{n-1}}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{OR_1}+\overrightarrow{OR_2}+\cdots+\overrightarrow{OR_n})$均成立

證明：

(1)n=2 時

∵M_1在$\overline{R_1R_2}$上，滿足$\overline{R_1M_1}$：$\overline{M_1R_2}$=1：1

$\therefore\overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OR_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OR_2}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OR_1}+\overrightarrow{OR_2})$

∴n=2 時原式成立

(2)設 n=k 時原式成立，即$\overrightarrow{OM_{k-1}}=\frac{1}{k}(\overrightarrow{OR_1}+\overrightarrow{OR_2}+\cdots+\overrightarrow{OR_k})$成立

則 n=k+1 時

∵M_k在$\overline{M_{k-1}R_{k+1}}$上，滿足$\overline{M_{k-1}M_k}$：$\overline{M_kR_{k+1}}$=1：k

$\therefore\overrightarrow{OM_k}=\frac{k}{1+k}\overrightarrow{OM_{k-1}}+\frac{1}{1+k}\overrightarrow{OR_{k+1}}=\frac{k}{1+k}\left(\frac{1}{k}(\overrightarrow{OR_1}+\overrightarrow{OR_2}+\cdots+\overrightarrow{OR_k})\right)+\frac{1}{1+k}\overrightarrow{OR_{k+1}}$

$=\frac{1}{1+k}(\overrightarrow{OR_1}+\overrightarrow{OR_2}+\cdots+\overrightarrow{OR_k})+\frac{1}{1+k}\overrightarrow{OR_{k+1}}$

$=\frac{1}{1+k}(\overrightarrow{OR_1}+\overrightarrow{OR_2}+\cdots+\overrightarrow{OR_k}+\overrightarrow{OR_{k+1}})$

∴n=k+1 時原式也成立

由數學歸納法得證：當 n≥ 2時，$\overrightarrow{OM_{n-1}}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{OR_1}+\overrightarrow{OR_2}+\cdots+\overrightarrow{OR_n})$均成立

又已知$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{OR_1}+\overrightarrow{OR_2}+\cdots+\overrightarrow{OR_n})\therefore\overrightarrow{OM_{n-1}}=\overrightarrow{OM}\therefore M_{n-1}$即為 M 點■

(六) 證明 P.9 所提到的 P 點軌跡與 M 點軌跡是相似圖形，寫成【定理十二】相似軌跡問題，之前的一些引理就是為了證明此定理。

【定理十二】相似軌跡問題

設$T_1(a_1，b_1)$，$T_2(a_2，b_2)$，⋯，$T_n(a_n，b_n)$爲座標平面上的 n 個定點($n \geq 2$)，另有一點 P，今以T_1爲旋轉中心，將 P 點旋轉θ_1，得到點R_1；以T_2爲旋轉中心，將 P 點旋轉θ_2，得到點R_2； ⋯⋯；以T_n爲旋轉中心，將 P 點旋轉θ_n，得到點R_n。設 M 爲R_1，R_2，⋯，R_n的平均點，即$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OR_1} + \overrightarrow{OR_2} + \cdots + \overrightarrow{OR_n})$，其中 O 爲原點。今 P 點任意變動，設變動的軌跡爲Γ，M 隨之變動，設變動軌跡爲Γ'，證明Γ'與Γ爲同向的相似圖形

【證明】

1、隨著 P 點在軌跡Γ上變動，設R_1的變動軌跡爲Γ_1，R_2的變動軌跡爲Γ_2，⋯，R_n的變動軌跡爲Γ_n，

$\because$以T_1爲旋轉中心，將 P 點旋轉θ_1，得到點R_1，

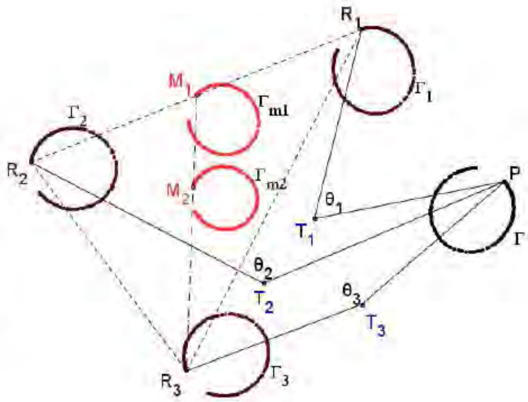
又隨著 P 點在軌跡Γ上變動，R_1的變動軌跡爲Γ_1

$\therefore$以T_1爲旋轉中心，將圖形Γ旋轉θ_1，可得到圖形Γ_1

$\therefore \Gamma_1$與Γ爲同向的相似圖形

2、同理Γ_2，Γ_3，⋯，Γ_n與Γ也爲同向的相似圖形

所以Γ_1，Γ_2，Γ_3，⋯，Γ_n與Γ均爲同向的相似圖形



3、設M_1在$\overline{R_1R_2}$上，滿足$\overline{R_1M_1}：\overline{M_1R_2}=1：1$

M_2在$\overline{M_1R_3}$上，滿足$\overline{M_1M_2}：\overline{M_2R_3}=1：2$

M_3在$\overline{M_2R_4}$上，滿足$\overline{M_2M_3}：\overline{M_3R_4}=1：3$

⋯⋯

M_{n-1}在$\overline{M_{n-2}R_n}$上，滿足$\overline{M_{n-2}M_{n-1}}：\overline{M_{n-1}R_n}=1：(n-1)$

由定理十一知M_{n-1}即爲 M 點

隨著 P 點在軌跡Γ上變動，設M_1的變動軌跡爲Γ_{m1}，

M_2的變動軌跡爲Γ_{m2}，⋯，M_{n-1}的變動軌跡爲$\Gamma_{m(n-1)}$

4、$\because M_1$在$\overline{R_1R_2}$上，滿足$\overline{R_1M_1}：\overline{M_1R_2}=1：1$，且$R_1$軌跡$\Gamma_1$，$R_2$軌跡$\Gamma_2$爲同向的相似圖形

由定理十知M_1軌跡Γ_{m1}與R_2軌跡Γ_2爲同向的相似圖形

$\therefore \Gamma_{m1}$與Γ_1，Γ_2，Γ_3，⋯，Γ_n，Γ爲同向的相似圖形

5、$\because M_2$在$\overline{M_1R_3}$上，滿足$\overline{M_1M_2}：\overline{M_2R_3}=1：2$，且$M_1$軌跡$\Gamma_{m1}$與$R_3$軌跡$\Gamma_3$爲同向的相似圖形

由定理十知M_2軌跡Γ_{m2}與R_3軌跡Γ_3爲同向的相似圖形

$\therefore \Gamma_{m2}$與Γ_1，Γ_2，Γ_3，⋯，Γ_n，Γ爲同向的相似圖形

⋯⋯依此類推，同理可證：

M_{n-1}的變動軌跡$\Gamma_{m(n-1)}$與Γ_1，Γ_2，Γ_3，⋯，Γ_n，Γ爲同向的相似圖形

因爲M_{n-1}即爲 M 點，

所以 M 的變動軌跡Γ'與Γ_1，Γ_2，Γ_3，⋯，Γ_n，Γ爲同向的相似圖形

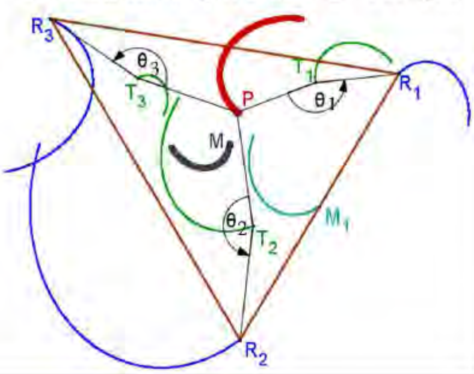
即 M 的變動軌跡Γ'與Γ爲同向的相似圖形，得證■

(七) 改變旋轉中心T_1，T_2，…，T_n為動點探討軌跡

定理十二討論的相似軌跡問題我們假設旋轉中心T_1，T_2，…，T_n為定點，但有一次，我們將旋轉中心改為許多圓周上的動點，每個旋轉中心移動的角速度都相同，並令 P 點也以相同角速度繞圓，我們發現旋轉後所得的平均點 M 軌跡仍然會和 P 點相似(繞一個圓)。最後，我們發現，只要每個旋轉中心移動的軌跡和 P 點的移動軌跡為同向相似圖形，則我們得到的平均點 M 軌跡也會和 P 點相似。寫成【定理十三】

【定理十三】

設Γ，Γ_1，Γ_2，…，Γ_n均爲同向的相似圖形，P 爲Γ上的動點，T_1，T_2，…，T_n分別在Γ_1，Γ_2，…，Γ_n上，且均爲 P 的對應點。以T_1爲旋轉中心，將 P 點旋轉θ_1得到點R_1；以T_2爲旋轉中心，將 P 點旋轉θ_2得到點R_2；……；以T_n爲旋轉中心，將 P 點旋轉θ_n得到點R_n。設 M 爲R_1，R_2，…，R_n的平均點，即$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{OR_1}+\overrightarrow{OR_2}+\cdots+\overrightarrow{OR_n})$，其中 O 爲原點。今 P 點在$\Gamma$上任意變動(即變動的軌跡爲$\Gamma$)，M 隨之變動，設變動軌跡爲$\Gamma'$，證明$\Gamma'$與$\Gamma$爲同向的相似圖形

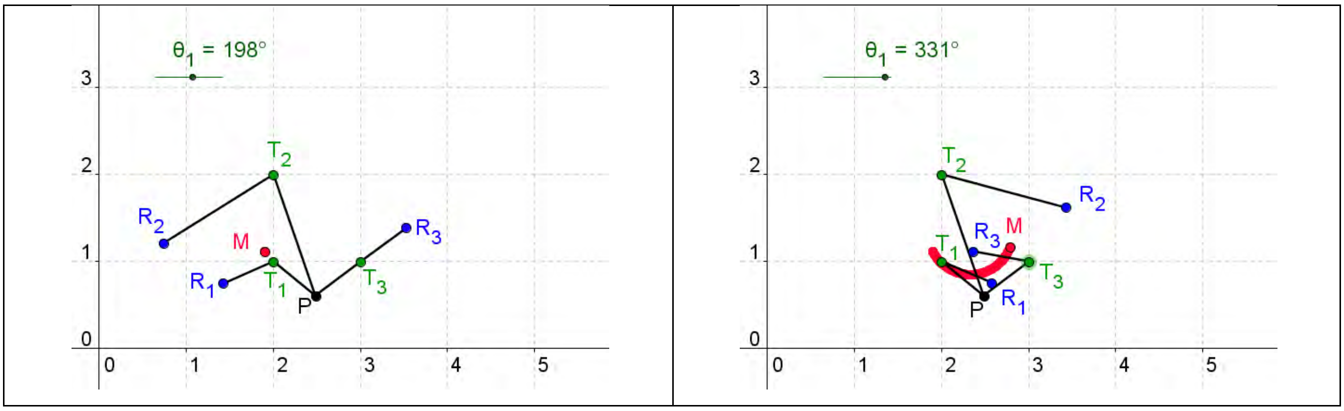


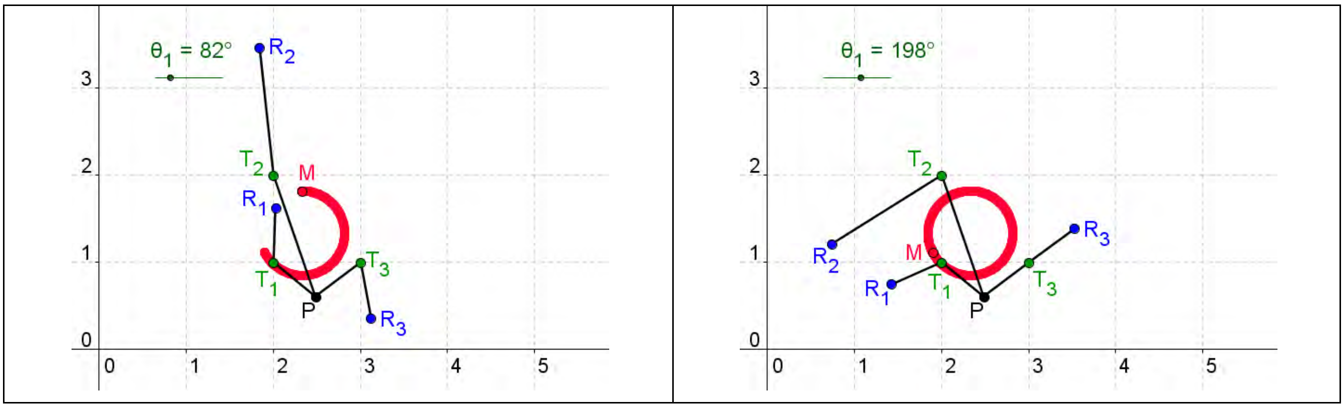
【證明】思考架構和定理十二有些類似，請參閱 P.44 附錄四

四、平均點繞圈問題

(一) 旋轉角θ變動時，平均點 M 的移動軌跡

在用 Geogebra 軟體作 n 個旋轉中心問題的圖時，由於我們知道：當$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\frac{360^\circ}{n}$，…，$\theta_n=\theta+\frac{360^\circ}{n}\times(n-1)$時，只要θ角度固定，不論θ角取值為何，固定點 M 點都不會因為 P 點的改變而移動。但在一次偶然的情況下，我們移動了θ角的數值滑桿，發現θ變動時，M 點會移動，於是我們將 M 點的移動軌跡顯示出來，發現是一個圓，如下列四圖所示。我們將此發現寫成【定理十四】，找出 M 點的幾何意義，重新命名此情況中的 M 點為平均點，並利用三角函數把它證明出來。





(二) 證明定理十四

【定理十四】平均點繞圈問題(一)
設$T_1(a_1，b_1)$，$T_2(a_2，b_2)$，⋯，$T_n(a_n，b_n)$爲座標平面上的 n 個定點($(n \geq 2)$，另有一點 P，令$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\frac{360^\circ}{n}$，⋯，$\theta_n=\theta+\frac{360^\circ}{n}\times(n-1)$，今以$T_1$爲旋轉中心，將 P 點旋轉$\theta_1$，得到$R_1$；以$T_2$爲旋轉中心，將 P 點旋轉$\theta_2$，得到$R_2$； ⋯⋯；以$T_n$爲旋轉中心，將 P 點旋轉$\theta_n$，得到$R_n$。設 M 爲$R_1$，$R_2$，⋯，$R_n$的平均點，即$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{OR_1}+\overrightarrow{OR_2}+\cdots+\overrightarrow{OR_n})$，其中 O 爲原點，證明：當θ角在$0^\circ$到$360^\circ$之間逐漸變動時，M 點會跟著改變，所有 M 點所成圖形爲一圓，圓心爲$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}，\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\right)$，此時 P 點可任意改變，不影響 M 的軌跡。

【證明】

1.∵$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\frac{360^\circ}{n}$，⋯，$\theta_n=\theta+\frac{360^\circ}{n}\times(n-1)$，

令$\alpha_1=\frac{360^\circ}{n}$，$\alpha_2=\frac{360^\circ}{n}\times 2$，⋯，$\alpha_{n-1}=\frac{360^\circ}{n}\times(n-1)$，則

$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\alpha_1$，⋯，$\theta_n=\theta+\alpha_{n-1}$，且$\begin{cases}\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n=0\\ \sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n=0\end{cases}$(由 P.8 上面式子(*)已證)

由【定理四】的證明過程，P.7 式子(1)知：令$M(x'，y')$，則

$$nx'=x(\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n)-y(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n)$$
$$-a_1\cos\theta_1+b_1\sin\theta_1+a_1-a_2\cos\theta_2+b_2\sin\theta_2+a_2-\cdots\cdots-a_n\cos\theta_n+b_n\sin\theta_n+a_n$$

(以$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n=0$，$\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n=0$代入)

$$=-a_1\cos\theta_1+b_1\sin\theta_1+a_1-a_2\cos\theta_2+b_2\sin\theta_2+a_2-\cdots-a_n\cos\theta_n+b_n\sin\theta_n+a_n$$

(以$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\alpha_1$，⋯，$\theta_n=\theta+\alpha_{n-1}$代入)

$$=-a_1\cos\theta+b_1\sin\theta+a_1-a_2\cos(\theta+\alpha_1)+b_2\sin(\theta+\alpha_1)+a_2-\cdots\cdots$$
$$-a_n\cos(\theta+\alpha_{n-1})+b_n\sin(\theta+\alpha_{n-1})+a_n$$
$$=-a_1\cos\theta+b_1\sin\theta+a_1-a_2(\cos\theta\cos\alpha_1-\sin\theta\sin\alpha_1)+b_2(\sin\theta\cos\alpha_1+\cos\theta\sin\alpha_1)+$$
$$a_2-\cdots\cdots-a_n(\cos\theta\cos\alpha_{n-1}-\sin\theta\sin\alpha_{n-1})+b_n(\sin\theta\cos\alpha_{n-1}+\cos\theta\sin\alpha_{n-1})+a_n$$

$= a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n + \cos\theta(-a_1 - a_2\cos\alpha_1 + b_2\sin\alpha_1 - \cdots\cdots - a_n\cos\alpha_{n-1} + b_n\sin\alpha_{n-1}) +$

$\sin\theta(b_1 + a_2\sin\alpha_1 + b_2\cos\alpha_1 + \cdots\cdots + a_n\sin\alpha_{n-1} + b_n\cos\alpha_{n-1})$ ------------------(3)

由【定理四】的證明過程，P.7 式子(2)知

$ny' = x(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots + \sin\theta_n) + y(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_n)$

$-a_1\sin\theta_1 - b_1\cos\theta_1 + b_1 - a_2\sin\theta_2 - b_2\cos\theta_2 + b_2 - \cdots\cdots - a_n\sin\theta_n - b_n\cos\theta_n + b_n$

(以$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_n = 0$，$\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots + \sin\theta_n = 0$代入)

$= -a_1\sin\theta_1 - b_1\cos\theta_1 + b_1 - a_2\sin\theta_2 - b_2\cos\theta_2 + b_2 - \cdots\cdots - a_n\sin\theta_n - b_n\cos\theta_n + b_n$

(以$\theta_1 = \theta$，$\theta_2 = \theta + \alpha_1$，$\cdots$，$\theta_n = \theta + \alpha_{n-1}$代入)

$= -a_1\sin\theta - b_1\cos\theta + b_1 - a_2\sin(\theta + \alpha_1) - b_2\cos(\theta + \alpha_1) + b_2 - \cdots\cdots$

$-a_n\sin(\theta + \alpha_{n-1}) - b_n\cos(\theta + \alpha_{n-1}) + b_n$

$= -a_1\sin\theta - b_1\cos\theta + b_1 - a_2(\sin\theta\cos\alpha_1 + \cos\theta\sin\alpha_1) - b_2(\cos\theta\cos\alpha_1 - \sin\theta\sin\alpha_1) +$

$b_2 - \cdots\cdots - a_n(\sin\theta\cos\alpha_{n-1} + \cos\theta\sin\alpha_{n-1}) - b_n(\cos\theta\cos\alpha_{n-1} - \sin\theta\sin\alpha_{n-1}) + b_n$

$= b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_n - \cos\theta(b_1 + a_2\sin\alpha_1 + b_2\cos\alpha_1 + \cdots\cdots + a_n\sin\alpha_{n-1} + b_n\cos\alpha_{n-1}) +$

$\sin\theta(-a_1 - a_2\cos\alpha_1 + b_2\sin\alpha_1 - \cdots\cdots - a_n\cos\alpha_{n-1} + b_n\sin\alpha_{n-1})$------------(4)

2. 令$k = -a_1 - a_2\cos\alpha_1 + b_2\sin\alpha_1 - \cdots\cdots - a_n\cos\alpha_{n-1} + b_n\sin\alpha_{n-1}$

$h = b_1 + a_2\sin\alpha_1 + b_2\cos\alpha_1 + \cdots\cdots + a_n\sin\alpha_{n-1} + b_n\cos\alpha_{n-1}$

因為$\alpha_1 = \frac{360^\circ}{n}$，$\alpha_2 = \frac{360^\circ}{n} \times 2$，$\cdots\cdots$，$\alpha_{n-1} = \frac{360^\circ}{n} \times (n-1)$為固定的角度

所以 h，k 均為定值，而且 h，k 與x，y無關，不受$P(x，y)$影響，

由式子(3)與式子(4)知

$nx' = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n + k\cos\theta + h\sin\theta$------------------(5)

$ny' = b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_n - h\cos\theta + k\sin\theta$------------------(6)

將$h + ik$改成極式$r(\cos\beta + i\sin\beta)$，可得$h = r\cos\beta$，$k = r\sin\beta$代入(5)(6)可得

$$\begin{cases} nx' = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + r\sin\beta\cos\theta + r\cos\beta\sin\theta = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + r\sin(\theta + \beta) \\ ny' = b_1 + b_2 + \cdots + b_n - r\cos\beta\cos\theta + r\sin\beta\sin\theta = b_1 + b_2 + \cdots + b_n - r\cos(\theta + \beta) \end{cases}$$

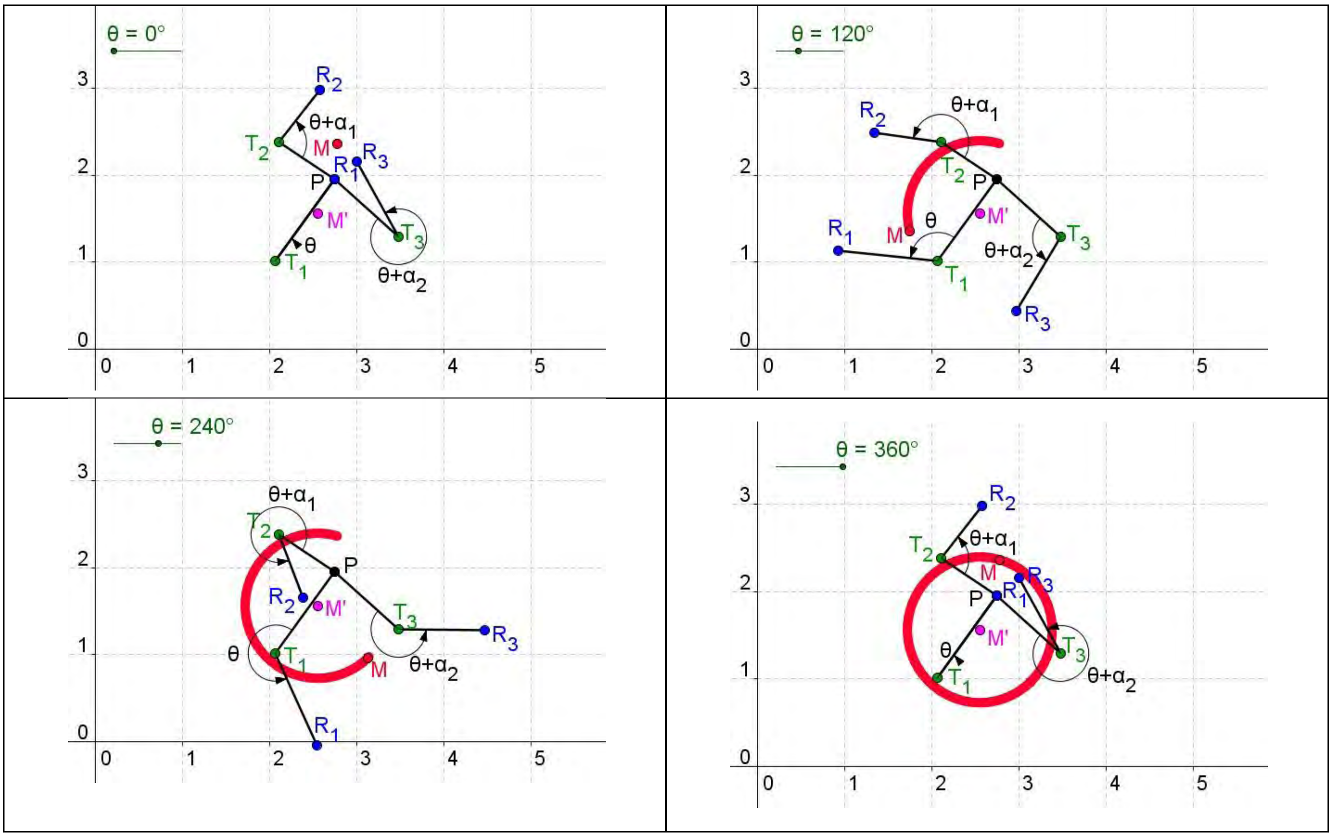
$$\therefore \begin{cases} x' = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} + \frac{r}{n} \times \sin(\theta + \beta) \\ y' = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} - \frac{r}{n} \times \cos(\theta + \beta) \end{cases} \qquad \therefore \left(x' - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 + \left(y' - \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right)^2 = \left(\frac{r}{n}\right)^2$$

∴隨著θ的改變，所有$M(x'，y')$所形成的圖形為以$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}，\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right)$為圓心，半徑為$\frac{r}{n}$的圓。又 h，k 不受$P(x，y)$影響，所以 r 不受$P(x，y)$影響，所以 P 點任意變動無妨，P 點改變不影響$M(x'，y')$的軌跡，得證■

(三)改變旋轉角度間的差值

我們在定理十四證明當旋轉角度$\theta_1 = \theta$，$\theta_2 = \theta + \frac{360^\circ}{n}$，$\cdots$，$\theta_n = \theta + \frac{360^\circ}{n} \times (n-1)$時，$\theta$角在$0^\circ$到$360^\circ$之間逐漸變動，平均點 M 會繞圈。但我們很好奇，如果θ_1，θ_2，$\cdots$，θ_n不滿

足此條件時，結果會怎樣？因此我們將旋轉角度改成$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\alpha_1$，⋯，$\theta_n=\theta+\alpha_{n-1}$，(其中$\alpha_1$，$\alpha_2$，⋯，$\alpha_{n-1}$角度固定，但沒有給予特別的限制)，我們用 Geogebra 測試如下圖所示，發現：θ改變，平均點 M 仍然會繞圈，我們將其寫成【定理十五】。



【定理十五】平均點繞圈問題(二)

設$T_1(a_1，b_1)$，$T_2(a_2，b_2)$，⋯，$T_n(a_n，b_n)$爲座標平面上的 n 個定點($n\geq 2$)，另有一點 P，令$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\alpha_1$，⋯，$\theta_n=\theta+\alpha_{n-1}$，(其中$\alpha_1$，$\alpha_2$，⋯，$\alpha_{n-1}$爲固定角度)，今以$T_1$爲旋轉中心，將 P 點旋轉$\theta_1$，得到$R_1$；以$T_2$爲旋轉中心，將 P 點旋轉$\theta_2$，得到$R_2$；⋯⋯；以$T_n$爲旋轉中心，將 P 點旋轉$\theta_n$，得到$R_n$。設 M 爲$R_1$，$R_2$，⋯，$R_n$的平均點，即$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{OR_1}+\overrightarrow{OR_2}+\cdots+\overrightarrow{OR_n})$，其中 O 爲原點，證明：若 P 點固定，則當$\theta$角在$0^\circ$到$360^\circ$之間逐漸變動時，M 點會跟著改變，所有 M 點所成圖形爲一圓

【證明】證明方法與定理十四的方法有些類似，請詳見 P.50 附錄五

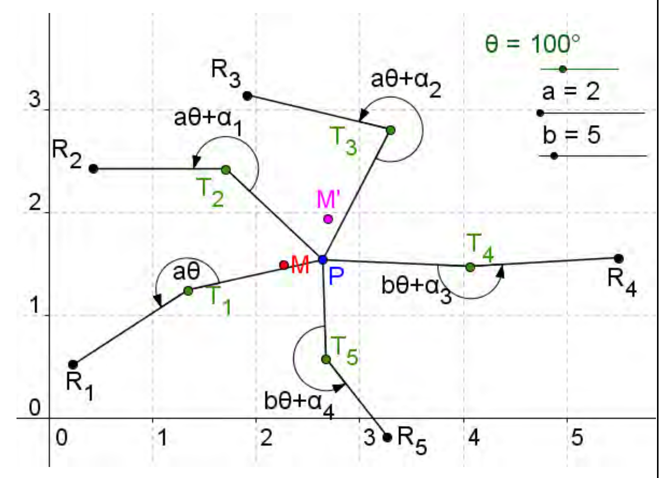
註：定理十四與定理十五的差別在於，定理十四的 P 點可任意改變，不影響 M 的軌跡；而定理十五的 P 點必須固定。

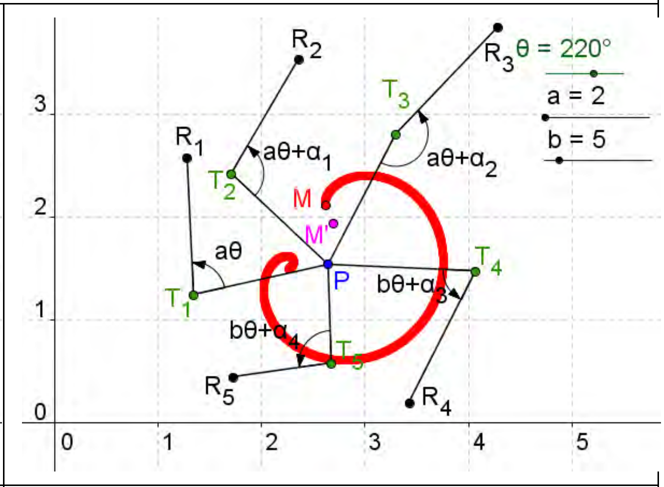
(四)操控旋轉角度內θ值的倍率

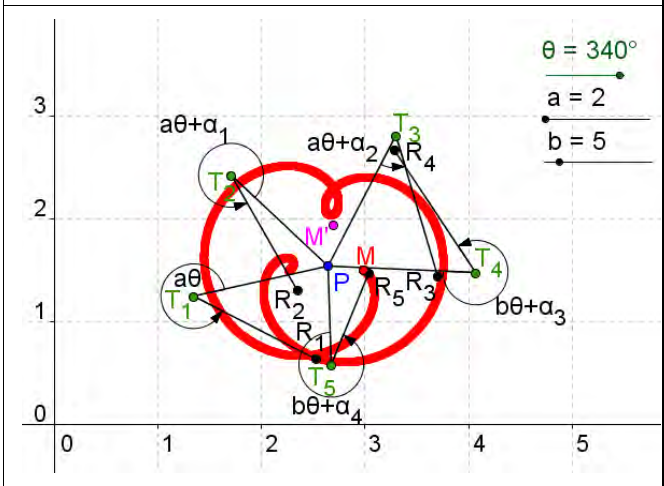
我們對改變旋轉角度越來越感興趣，想作更深入的探討，將原本旋轉角由$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\alpha_1$，⋯，$\theta_n=\theta+\alpha_{n-1}$，操控$\theta$值的倍率，改為$\theta_1=a\theta$，$\theta_2=a\theta+\alpha_1$，⋯，$\theta_m=a\theta+$

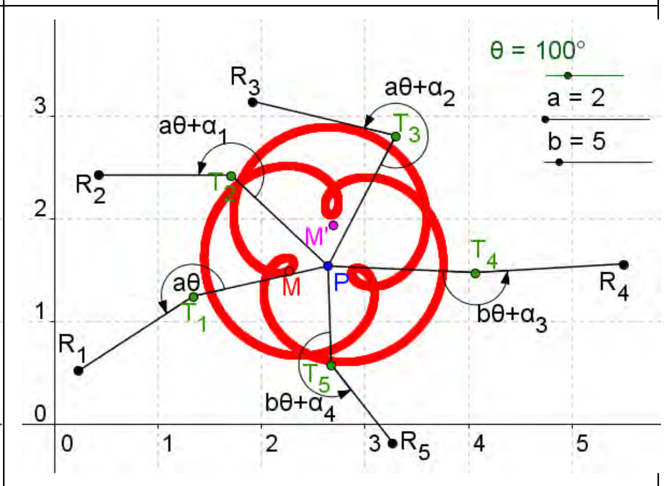
α_{m-1}，$\theta_{m+1} = b\theta + \alpha_m$，$\theta_{m+2} = b\theta + \alpha_{m+1}$，⋯，$\theta_n = b\theta + \alpha_{n-1}$，那對平均點M的移動軌跡會有甚麼影響呢？用 Geogebra 測試之後發現，平均點 M 的軌跡隨著a，b代入不同的實數，得到各種不同的圖形（如下面八個圖及 P.53 附錄六），圖形很漂亮，有的像花朵，有的像星星、甜甜圈⋯，但不知它們的名稱及方程式。

外次擺線圖

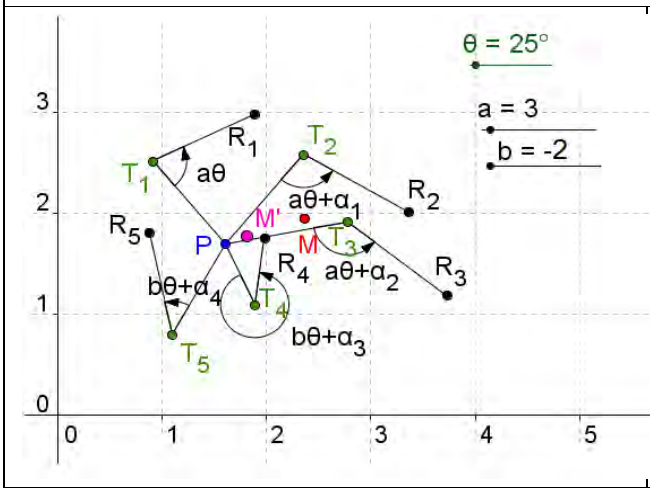


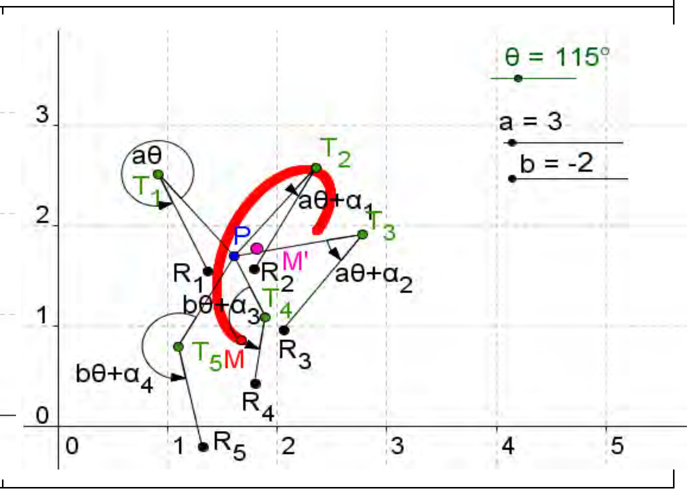


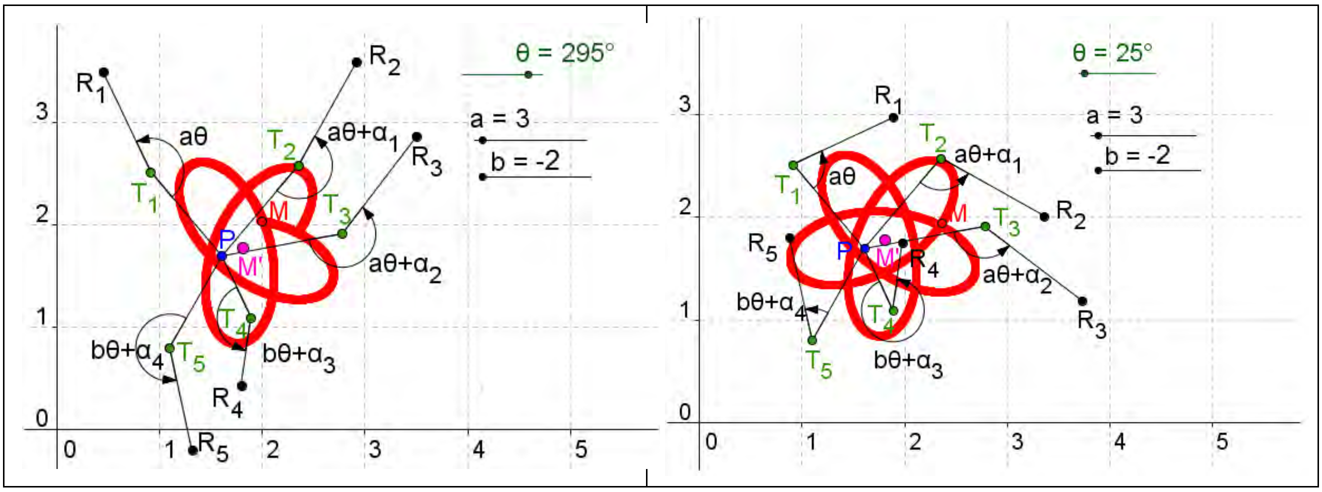




內次擺線圖







我們上網找資料，也到圖書館翻閱書籍，覺得它們和內、外擺線及內、外次擺線的圖形很像，看完資料才知道內、外擺線是內、外次擺線的一種特殊情形。將參考資料結果彙整成表格(詳見 P.57 附錄七)。接著我們應用三角函數著手證明我們的內(外)次擺線猜想是成立的，終於證明出來。我們將這結果表示下面【定理十六】:

> 【定理十六】
>
> 設$T_1(a_1，b_1)$，$T_2(a_2，b_2)$，⋯，$T_n(a_n，b_n)$為座標平面上的 n 個定點($n \ge 2$)，另有一點 P，令$\theta_1 = a\theta$，$\theta_2 = a\theta + \alpha_1$，⋯，$\theta_m = a\theta + \alpha_{m-1}$，$\theta_{m+1} = b\theta + \alpha_m$，⋯，$\theta_n = b\theta + \alpha_{n-1}$，(其中$1 \le m < n$且$\alpha_1$，$\alpha_2$，⋯，$\alpha_{m-1}$，$\alpha_m$，⋯，$\alpha_{n-1}$為固定角度，$\alpha_0 = 0$，$a$，$b$為實數)，今以$T_1$為旋轉中心，將 P 點旋轉$\theta_1$，得到$R_1$；以$T_2$為旋轉中心，將 P 點旋轉$\theta_2$，得到$R_2$；⋯⋯；以$T_n$為旋轉中心，將 P 點旋轉$\theta_n$，得到$R_n$。
>
> 設 M 為R_1，R_2，⋯，R_n的平均點，即$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OR_1} + \overrightarrow{OR_2} + \cdots + \overrightarrow{OR_n})$，其中 O 為原點，
>
> 證明：若 P 點固定，則當θ角在0°到360°之間逐漸變動時，M 點會跟著改變，而且
>
> 1、$ab < 0$時，所有 M 點所成圖形為內次擺線，中心為$(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}，\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n})$
>
> 2、$ab > 0$時，所有 M 點所成圖形為外次擺線，中心為$(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}，\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n})$

【證明】礙於篇幅的關係，在此僅節錄證明過程，詳細的證明請參閱附錄七 P.58

回到正文 P.7【定理四】的證明過程，式子(1)(2)，令$M(x'，y')$則

$$nx' = x(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_n) - y(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots + \sin\theta_n)$$
$$-a_1\cos\theta_1 + b_1\sin\theta_1 + a_1 - a_2\cos\theta_2 + b_2\sin\theta_2 + a_2 - \cdots - a_n\cos\theta_n + b_n\sin\theta_n + a_n \text{ ----(1)}$$
$$ny' = x(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots + \sin\theta_n) + y(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_n)$$
$$-a_1\sin\theta_1 - b_1\cos\theta_1 + b_1 - a_2\sin\theta_2 - b_2\cos\theta_2 + b_2 - \cdots - a_n\sin\theta_n - b_n\cos\theta_n + b_n \text{ ----(2)}$$

以$\theta_1 = a\theta$，$\theta_2 = a\theta + \alpha_1$，⋯，$\theta_m = a\theta + \alpha_{m-1}$，$\theta_{m+1} = b\theta + \alpha_m$，⋯，$\theta_n = b\theta + \alpha_{n-1}$代入，再使用和角公式化簡，可得

$$nx' = \cos a\theta(x + x\cos\alpha_1 + \cdots + x\cos\alpha_{m-1} - y\sin\alpha_1 - \cdots - y\sin\alpha_{m-1} - a_1 - a_2\cos\alpha_1 +$$
$$b_2\sin\alpha_1 - \cdots - a_m\cos\alpha_{m-1} + b_m\sin\alpha_{m-1}) + \sin a\theta(-x\sin\alpha_1 - \cdots - x\sin\alpha_{m-1} - y$$
$$-y\cos\alpha_1 - \cdots - y\cos\alpha_{m-1} + b_1 + a_2\sin\alpha_1 + b_2\cos\alpha_1 + \cdots + a_m\sin\alpha_{m-1} + b_m\cos\alpha_{m-1})$$
$$+\cos b\theta(x\cos\alpha_m + \cdots + x\cos\alpha_{n-1} - y\sin\alpha_m - \cdots - y\sin\alpha_{n-1} - a_{m+1}\cos\alpha_m + b_{m+1}\sin\alpha_m$$

$-\cdots-a_n\cos\alpha_{n-1}+b_n\sin\alpha_{n-1})+\sin b\theta(-x\sin\alpha_m-\cdots-x\sin\alpha_{n-1}-y\cos\alpha_m-\cdots$
$-y\cos\alpha_{n-1}+a_{m+1}\sin\alpha_m+b_{m+1}\cos\alpha_m+\cdots+a_n\sin\alpha_{n-1}+b_n\cos\alpha_{n-1})+a_1+a_2+\cdots$
$+a_m+a_{m+1}+\cdots+a_n$-------------(4)

$ny'=\cos a\theta(x\sin\alpha_1+\cdots+x\sin\alpha_{m-1}+y+y\cos\alpha_1+\cdots+y\cos\alpha_{m-1}-b_1-a_2\sin\alpha_1$
$-b_2\cos\alpha_1-\cdots-a_m\sin\alpha_{m-1}-b_m\cos\alpha_{m-1})+\sin a\theta(x+x\cos\alpha_1+\cdots+x\cos\alpha_{m-1}$
$-y\sin\alpha_1-\cdots-y\sin\alpha_{m-1}-a_1-a_2\cos\alpha_1+b_2\sin\alpha_1-\cdots-a_m\cos\alpha_{m-1}+b_m\sin\alpha_{m-1})$
$+\cos b\theta(x\sin\alpha_m+\cdots+x\sin\alpha_{n-1}+y\cos\alpha_m+\cdots+y\cos\alpha_{n-1}-a_{m+1}\sin\alpha_m-b_{m+1}\cos\alpha_m$
$-\cdots-a_n\sin\alpha_{n-1}-b_n\cos\alpha_{n-1})+\sin b\theta(x\cos\alpha_m+\cdots+x\cos\alpha_{n-1}-y\sin\alpha_m-\cdots$
$-y\sin\alpha_{n-1}-a_{m+1}\cos\alpha_m+b_{m+1}\sin\alpha_m-\cdots-a_n\cos\alpha_{n-1}+b_n\sin\alpha_{n-1})+b_1+b_2+\cdots$
$+b_m+b_{m+1}+\cdots+b_n$-------------(6)

設$x\sin\alpha_1+\cdots+x\sin\alpha_{m-1}+y+y\cos\alpha_1+\cdots+y\cos\alpha_{m-1}-b_1-a_2\sin\alpha_1-b_2\cos\alpha_1$
$-\cdots-a_m\sin\alpha_{m-1}-b_m\cos\alpha_{m-1}=\mathrm{c}$
$x+x\cos\alpha_1+\cdots+x\cos\alpha_{m-1}-y\sin\alpha_1-\cdots-y\sin\alpha_{m-1}-a_1-a_2\cos\alpha_1+b_2\sin\alpha_1-\cdots$
$-a_m\cos\alpha_{m-1}+b_m\sin\alpha_{m-1}=\mathrm{d}$
$x\sin\alpha_m+\cdots+x\sin\alpha_{n-1}+y\cos\alpha_m+\cdots+y\cos\alpha_{n-1}-a_{m+1}\sin\alpha_m-b_{m+1}\cos\alpha_m$
$-\cdots-a_n\sin\alpha_{n-1}-b_n\cos\alpha_{n-1}=\mathrm{e}$
$x\cos\alpha_m+\cdots+x\cos\alpha_{n-1}-y\sin\alpha_m-\cdots-y\sin\alpha_{n-1}-a_{m+1}\cos\alpha_m+b_{m+1}\sin\alpha_m$
$-\cdots-a_n\cos\alpha_{n-1}+b_n\sin\alpha_{n-1}=\mathrm{f}$

代入式子(4)(6)得

$nx'=\mathrm{d}\times\cos a\theta-\mathrm{c}\times\sin a\theta+\mathrm{f}\times\cos b\theta-\mathrm{e}\times\sin b\theta+a_1+a_2+\cdots+a_m+a_{m+1}+\cdots+a_n$

$ny'=\mathrm{c}\times\cos a\theta+\mathrm{d}\times\sin a\theta+\mathrm{e}\times\cos b\theta+\mathrm{f}\times\sin b\theta+b_1+b_2+\cdots+b_m+b_{m+1}+\cdots+b_n$

所以$\begin{cases}x'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{n}}\times\cos a\theta-\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{n}}\times\sin a\theta+\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{n}}\times\cos b\theta-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{n}}\times\sin b\theta+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{\mathrm{n}}\\ y'=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{n}}\times\cos a\theta+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{n}}\times\sin a\theta+\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{n}}\times\cos b\theta+\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{n}}\times\sin b\theta+\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{\mathrm{n}}\end{cases}$

將$\mathrm{M}(x',y')$平移至$\mathrm{M}_1(x_1,y_1)$，

使得$\begin{cases}x_1=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{n}}\times\cos a\theta-\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{n}}\times\sin a\theta+\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{n}}\times\cos b\theta-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{n}}\times\sin b\theta\\ y_1=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{n}}\times\cos a\theta+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{n}}\times\sin a\theta+\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{n}}\times\cos b\theta+\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{n}}\times\sin b\theta\end{cases}$

設隨著θ改變，所有點$\mathrm{M}_1(x_1,y_1)$所成圖形為Γ_1，所有點$\mathrm{M}(x',y')$所成圖形為 Γ

則將Γ_1平移向量$\vec{v}=(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{\mathrm{n}},\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{\mathrm{n}})$可得 Γ$\therefore\Gamma_1$與 Γ 兩圖形全等----------(*)

我們先探討所有點$\mathrm{M}_1(x_1,y_1)$所成的圖形Γ_1：

令$\mathrm{p}=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{n}}$，$\mathrm{q}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{n}}$，$\mathrm{s}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{n}}$，$\mathrm{t}=\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{n}}$，則

$\begin{cases}x_1=\mathrm{q}\times\cos a\theta-\mathrm{p}\times\sin a\theta+\mathrm{t}\times\cos b\theta-\mathrm{s}\times\sin b\theta\\ y_1=\mathrm{p}\times\cos a\theta+\mathrm{q}\times\sin a\theta+\mathrm{s}\times\cos b\theta+\mathrm{t}\times\sin b\theta\end{cases}$ -----------(7)

將$\mathrm{q}+\mathrm{p}i$與$\mathrm{s}+\mathrm{t}i$以極式表示，

設$\mathrm{q}+\mathrm{p}i=\mathrm{r}_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$，$\mathrm{t}+\mathrm{s}i=\mathrm{r}_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$

其中$\mathrm{r}_1=\sqrt{\mathrm{q}^2+\mathrm{p}^2}$，$\mathrm{r}_2=\sqrt{\mathrm{t}^2+\mathrm{s}^2}$

則$q=r_1\cos\varphi_1$，$p=r_1\sin\varphi_1$，$t=r_2\cos\varphi_2$，$s=r_2\sin\varphi_2$，代入(7)式得到

$$x_1=q\times\cos a\theta-p\times\sin a\theta+t\times\cos b\theta-s\times\sin b\theta$$
$$=r_1\cos\varphi_1\cos a\theta-r_1\sin\varphi_1\sin a\theta+r_2\cos\varphi_2\cos b\theta-r_2\sin\varphi_2\sin b\theta$$
$$=r_1\cos(a\theta+\varphi_1)+r_2\cos(b\theta+\varphi_2)\text{--------------(8)}$$
$$y_1=p\times\cos a\theta+q\times\sin a\theta+s\times\cos b\theta+t\times\sin b\theta$$
$$=r_1\sin\varphi_1\cos a\theta+r_1\cos\varphi_1\sin a\theta+r_2\sin\varphi_2\cos b\theta+r_2\cos\varphi_2\sin b\theta$$
$$=r_1\sin(a\theta+\varphi_1)+r_2\sin(b\theta+\varphi_2)\text{----------------(9)}$$

1、$ab<0$時

$$b(b-a)=b^2-ab>-ab>0\ \therefore\frac{b-a}{b}>0$$

令$R=\frac{b-a}{b}\times r_1$，則$R>0$，令$r=-\frac{a}{b}\times r_1\because ab<0\therefore r=-\frac{a}{b}\times r_1>0$，

令 $\lambda=-\frac{br_2}{ar_1}\because ab<0\therefore\lambda=-\frac{br_2}{ar_1}>0$，令 $s=-\frac{b}{r_1}$，$\beta=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{a-b}$，$\alpha=\frac{a\varphi_2-b\varphi_1}{a-b}$

(R，r，$\lambda>0$已證)

$$\text{則}\begin{cases}R-r=\frac{b-a}{b}\times r_1-(-\frac{a}{b}\times r_1)=r_1\\ \lambda r=-\frac{br_2}{ar_1}\times(-\frac{a}{b}\times r_1)=r_2\\ rs=-\frac{a}{b}\times r_1\times(-\frac{b}{r_1})=a\\ -(R-r)s=-r_1s=b\\ rs\beta+\alpha=a\beta+\alpha=a\times\frac{\varphi_1-\varphi_2}{a-b}+\frac{a\varphi_2-b\varphi_1}{a-b}=\frac{a\varphi_1-b\varphi_1}{a-b}=\varphi_1\\ -(R-r)s\beta+\alpha=-r_1s\beta+\alpha=b\beta+\alpha=b\times\frac{\varphi_1-\varphi_2}{a-b}+\frac{a\varphi_2-b\varphi_1}{a-b}=\frac{a\varphi_2-b\varphi_2}{a-b}=\varphi_2\end{cases}$$

所以$r_1=R-r$，$r_2=\lambda r$，$a=rs$，$b=-(R-r)s$，$\varphi_1=rs\beta+\alpha$，$\varphi_2=-(R-r)s\beta+\alpha$

$\therefore a\theta+\varphi_1=rs\theta+rs\beta+\alpha=rs(\theta+\beta)+\alpha$

$b\theta+\varphi_2=-(R-r)s\theta-(R-r)s\beta+\alpha=-(R-r)s(\theta+\beta)+\alpha$

代入式子(8)(9)，得到

$$x_1=r_1\cos(a\theta+\varphi_1)+r_2\cos(b\theta+\varphi_2)$$
$$=(R-r)\cos(rs(\theta+\beta)+\alpha)+\lambda r\cos(-(R-r)s(\theta+\beta)+\alpha)$$
$$y_1=r_1\sin(a\theta+\varphi_1)+r_2\sin(b\theta+\varphi_2)$$
$$=(R-r)\sin(rs(\theta+\beta)+\alpha)+\lambda r\sin(-(R-r)s(\theta+\beta)+\alpha)$$

令$\theta+\beta=\theta_1$，則

$$\begin{cases}x_1=(R-r)\cos(rs\theta_1+\alpha)+\lambda r\cos(-(R-r)s\theta_1+\alpha)\\ y_1=(R-r)\sin(rs\theta_1+\alpha)+\lambda r\sin(-(R-r)s\theta_1+\alpha)\end{cases}\text{----------(10)}$$

令$rs\theta_1=\theta_2$，則$s\theta_1=\frac{\theta_2}{r}$

$$rs\theta_1+\alpha=\theta_2+\alpha,\quad -(R-r)s\theta_1+\alpha=-(R-r)\times\frac{\theta_2}{r}+\alpha=-\frac{R-r}{r}\theta_2+\alpha$$

代入(10)式，得到

$$\begin{cases} x_1 = (\mathrm{R}-\mathrm{r})\cos(\theta_2+\alpha)+\lambda\mathrm{rcos}\left(-\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2+\alpha\right)=(\mathrm{R}-\mathrm{r})\cos(\theta_2+\alpha)+\lambda\mathrm{rcos}\left(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2-\alpha\right) \\ y_1=(\mathrm{R}-\mathrm{r})\sin(\theta_2+\alpha)+\lambda\mathrm{rsin}\left(-\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2+\alpha\right)=(\mathrm{R}-\mathrm{r})\sin(\theta_2+\alpha)-\lambda\mathrm{rsin}\left(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2-\alpha\right) \end{cases}$$

所以$\mathrm{M}_1(x_1，y_1)$的座標為

$$\mathrm{M}_1\left((\mathrm{R}-\mathrm{r})\cos(\theta_2+\alpha)+\lambda\mathrm{rcos}\left(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2-\alpha\right)，(\mathrm{R}-\mathrm{r})\sin(\theta_2+\alpha)-\lambda\mathrm{rsin}\left(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2-\alpha\right)\right)$$

令點M_2座標為$\left((\mathrm{R}-\mathrm{r})\cos\theta_2+\lambda\mathrm{rcos}\left(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2\right)，(\mathrm{R}-\mathrm{r})\sin\theta_2-\lambda\mathrm{rsin}\left(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2\right)\right)$

設隨著θ_2在0°到360°之間逐漸變動，所有M_2所成的圖形為Γ_2，

則Γ_2的參數式為：$\begin{cases} x=(\mathrm{R}-\mathrm{r})\cos\theta_2+\lambda\mathrm{rcos}\left(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2\right) \\ y=(\mathrm{R}-\mathrm{r})\sin\theta_2-\lambda\mathrm{rsin}\left(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2\right) \end{cases}$-----------(11)

由內次擺線的參數式知，所有M_2所成的圖形Γ_2為內次擺線，且中心為(0，0)

$$\because\left[(\mathrm{R}-\mathrm{r})\cos\theta_2+\lambda\mathrm{rcos}\left(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2\right)+\mathrm{i}\ \left((\mathrm{R}-\mathrm{r})\sin\theta_2-\lambda\mathrm{rsin}\left(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2\right)\right)\right]\times(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$$

$$=\left((\mathrm{R}-\mathrm{r})\cos\theta_2+\lambda\mathrm{rcos}\left(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2\right)\right)\cos\alpha-\left((\mathrm{R}-\mathrm{r})\sin\theta_2-\lambda\mathrm{rsin}\left(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2\right)\right)\sin\alpha$$

$$+\mathrm{i}\left[\left((\mathrm{R}-\mathrm{r})\cos\theta_2+\lambda\mathrm{rcos}\left(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2\right)\right)\sin\alpha+\left((\mathrm{R}-\mathrm{r})\sin\theta_2-\lambda\mathrm{rsin}\left(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2\right)\right)\cos\alpha\right]$$

$$=(\mathrm{R}-\mathrm{r})(\cos\theta_2\cos\alpha-\sin\theta_2\sin\alpha)+\lambda\mathrm{r}\left[\cos\left(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2\right)\cos\alpha+\sin\left(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2\right)\sin\alpha\right]$$

$$+\mathrm{i}\left[(\mathrm{R}-\mathrm{r})(\cos\theta_2\sin\alpha+\sin\theta_2\cos\alpha)-\lambda\mathrm{r}(\sin\left(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2\right)\cos\alpha-\cos\left(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2\right)\sin\alpha\right]$$

$$=(\mathrm{R}-\mathrm{r})\cos(\theta_2+\alpha)+\lambda\mathrm{rcos}\left(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2-\alpha\right)+\mathrm{i}\left[(\mathrm{R}-\mathrm{r})\sin(\theta_2+\alpha)-\lambda\mathrm{rsin}(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2-\alpha)\right]$$

所以將$\mathrm{M}_2\left((\mathrm{R}-\mathrm{r})\cos\theta_2+\lambda\mathrm{rcos}\left(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2\right)，(\mathrm{R}-\mathrm{r})\sin\theta_2-\lambda\mathrm{rsin}\left(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2\right)\right)$

以原點為旋轉中心，旋轉α可得

$$\mathrm{M}_1\left((\mathrm{R}-\mathrm{r})\cos(\theta_2+\alpha)+\lambda\mathrm{rcos}\left(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2-\alpha\right)，(\mathrm{R}-\mathrm{r})\sin(\theta_2+\alpha)-\lambda\mathrm{rsin}\left(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\theta_2-\alpha\right)\right)$$

∵所有M_2點所成的圖形為Γ_2，所有M_1點所成的圖形為Γ_1

∴將Γ_2以原點為旋轉中心，旋轉α可得Γ_1

又∵隨著θ_2改變，M_2的軌跡Γ_2為內次擺線，且中心為(0，0)

∴Γ_1圖形與Γ_2全等，均為內次擺線，且中心均為原點(0，0)

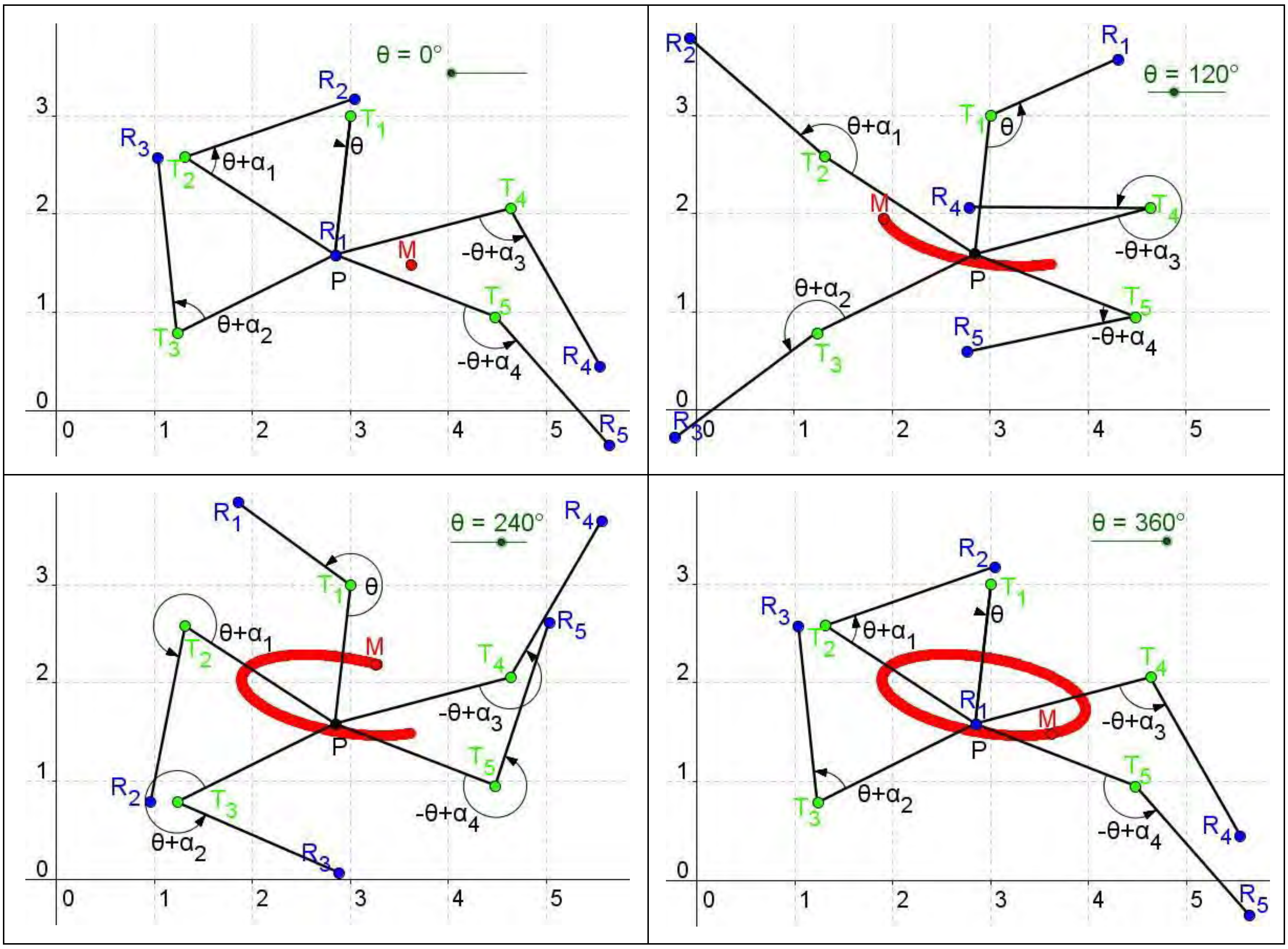
又由 P.21(*)知：Γ_1圖形平移向量$\vec{\mathrm{v}}=(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_\mathrm{n}}{\mathrm{n}}，\frac{\mathrm{b}_1+\mathrm{b}_2+\cdots+\mathrm{b}_\mathrm{n}}{\mathrm{n}})$可得$\mathrm{M}(x'，y')$的軌跡 Γ

∴當θ角在0°到360°之間逐漸變動時，M 點會跟著改變，所有 M 點所成圖形為一內次擺線，中心為$(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_\mathrm{n}}{\mathrm{n}}，\frac{\mathrm{b}_1+\mathrm{b}_2+\cdots+\mathrm{b}_\mathrm{n}}{\mathrm{n}})$，得證

2、 “$a\mathrm{b} > 0$時，所有 M 點所成圖形為外次擺線，中心為$(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{\mathrm{n}}, \frac{\mathrm{b}_1+\mathrm{b}_2+\cdots+\mathrm{b}_\mathrm{n}}{\mathrm{n}})$”的證明與 1、$a\mathrm{b} < 0$時的情形類似。請參閱附錄七 P.62■

(五)操縱旋轉角度內θ值的正負得到橢圓軌跡

我們證明出內(外)次擺線的結果後，想到若將a，b改為$\mathrm{b} = -a$，那平均點M點的移動軌跡會是怎麼樣的特例呢？用 Geogebra 軟體作圖後(如下列四圖)，我們發現隨著θ值由0°到360°作變化時，M的移動軌跡是一個橢圓，因此將這個發現寫成【推論十七】，並著手證明之。



【推論十七】

承定理七，當$\mathrm{b} = -a \neq 0$時，

證明：若 P 點固定，則當θ角在0°到360°之間逐漸變動時，M 點會跟著改變，所有 M 點所成圖形為一橢圓，中心為$(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{\mathrm{n}}, \frac{\mathrm{b}_1+\mathrm{b}_2+\cdots+\mathrm{b}_\mathrm{n}}{\mathrm{n}})$

【證明】

$\because b=-a\neq 0 \therefore ab<0$，回到定理十六的證明過程中 P.22，其中$R=\frac{b-a}{b}\times r_1$，$r=-\frac{a}{b}\times r_1$

以$b=-a$代入得$R=\frac{b-a}{b}\times r_1=2r_1$，$r=-\frac{a}{b}\times r_1=r_1 \therefore R=2r$

內次擺線的圖形中$R=2r$時為橢圓

$\therefore$所有 M 點所成圖形為一橢圓，又由定理十六知中心為$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}，\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\right)$，得證■

備註：由 P.20 式子(1)(2)知，只要滿足“$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n=0$且$\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n=0$”則$nx'$，$ny'$與$x$，$y$無關，定理十六及推論十七中的 P($x$，$y$)即可任意變動，不影響 M 的軌跡，否則 P 點就必須固定，平均點 M 的軌跡才會是固定形狀的內(外)次擺線。

五、多次旋轉問題及其應用

我們用 Geogebra 畫圖時發現，二次旋轉的結果好像可以改成只旋轉一次就辦得到，於是往這方面研究，證實二次旋轉可以改成一次旋轉或一次平移，我們又想：三次旋轉也可以嗎？n 次旋轉均可改成一次旋轉或一次平移嗎？我們發現可行，並表示成【定理二十五】。這部分我們研究完定稿後，才在文獻中知道它已經被研究過了，當時有些失望。後來想想，至少我們從中獲得很多寶貴的經驗。因此還是決定把它呈現出來。礙於篇幅的關係，正文中只列出下面多次旋轉應用中會用到的定理二十五。而定理十八至定理二十五及所有詳細的思考過程及證明，請參閱附錄八 P.66。

【定理二十五】n 次旋轉均可改成一次旋轉或一次平移

設$0^\circ<\alpha_1$，α_2，⋯，$\alpha_n<360^\circ$，A_1，A_2，⋯，A_n為平面上 n 個點($n\geq 2$)，P 為另一點。以A_1為旋轉中心，將 P 旋轉α_1至P_1點；以A_2為旋轉中心，將P_1旋轉α_2至P_2點；⋯；以A_n為旋轉中心，將P_{n-1}旋轉α_n至P_n點，證明：

(一)若$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$不為$360^\circ$的同界角，則可找到一點$E_n$，以$E_n$為旋轉中心，將 P 旋轉$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$可得到$P_n$點

(二)若$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$為$360^\circ$的同界角，則可找到一個向量$\overrightarrow{v_n}$，將 P 點平移$\overrightarrow{v_n}$可得 P_n點

(其中：E_n點與$\overrightarrow{v_n}$只與A_1，A_2，⋯，A_n，α_1，α_2，⋯，α_n有關，與 P 點無關，不因 P 點的改變而改變)

註：定理二十五之(一)當 n=2 時即為二次旋轉可改為一次旋轉，表示成下面的定理

【定理二十五之(一)當 n=2 時：二次旋轉可改為一次旋轉】

設$0^\circ<\alpha$，$\beta<360^\circ$，A，B 為平面上兩點，P 為另一點，以 A 為旋轉中心將 P 旋轉α至 Q 點，再以 B 為旋轉中心將 Q 旋轉β至 R 點，若$\alpha+\beta\neq 360^\circ$，則可找到一點 D，以 D 為旋轉中心將P旋轉$\alpha+\beta$可得 R 點，其中D 與 P 點無關，不因 P 點的改變而改變。

(一)發現相等向量

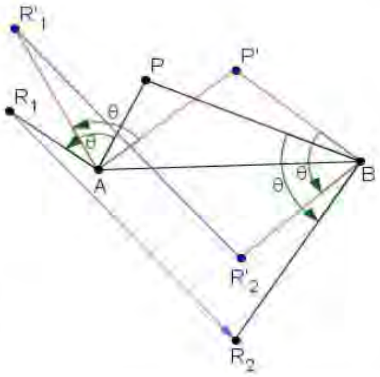
我們利用 Geogebra 畫圖時，發現了向量相等的情形，關於它的證明，我們想到兩種證明方法，方法一是幾何證法，方法二是利用附錄 P.69【定理二十一】的結果來證，此方法可以求出$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{R_1R_2}$的關係，所以我們把它寫成定理二十六，至於兩個證明我們皆放在 P.76 附錄九的地方。

【定理二十六】向量相等問題(證明請參閱 P.76 附錄九)

設$0^\circ < \theta < 360^\circ$，平面上有兩定點 A，B，設 P 為平面上另一點，以 A 為旋轉中心，將 P 旋轉θ至R_1；以 B 為旋轉中心，將 P 旋轉θ至R_2。今任意取另一點P'，一樣以 A 為旋轉中心，將P'旋轉θ至R_1'；以 B 為旋轉中心，將P'旋轉θ至R_2'，證明：

一、$\overrightarrow{R_1R_2} = \overrightarrow{R_1'R_2'}$

二、將$\overrightarrow{AB}$以 A 為旋轉中心，旋轉$(\frac{\theta}{2} - 90^\circ)$ 再將長度乘以 $2\sin\frac{\theta}{2}$ 即為$\overrightarrow{R_1R_2}$



(二)應用多次旋轉於平均點問題的探討

n 次旋轉可改成一次旋轉的驗證，給了我們一個新靈感，來統整前面部分談過的多個旋轉中心之固定點的問題，將得出平均點繞圈與相似軌跡的相同結論，我們以下面實例說明之。

設$0^\circ < \alpha_1$，α_2，α_3，α_4，α_5，$\alpha_6 < 360^\circ$，設A_1，A_2，B_1，B_2，C_1，C_2為平面上六個點，P 為另一點。以A_1為旋轉中心將 P 旋轉α_1至A'，以A_2為旋轉中心將A'旋轉α_2至R_1；

以B_1為旋轉中心將 P 旋轉α_3至B'，以B_2為旋轉中心將B'旋轉α_4至R_2；

以C_1為旋轉中心將 P 旋轉α_5至C'，以C_2為旋轉中心將C'旋轉α_6至R_3，

其中$\alpha_1 + \alpha_2$，$\alpha_3 + \alpha_4$，$\alpha_5 + \alpha_6 \neq 360^\circ$，設$\Delta R_1R_2R_3$的重心為 G，證明：

(一)若$\theta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$，$\theta_2 = \alpha_3 + \alpha_4$，$\theta_3 = \alpha_5 + \alpha_6$則

(1)只要α_1，α_2，α_3，α_4，α_5，α_6是固定角度，P 的軌跡與 G 的變動軌跡會是同向相似圖形。

(2)若$\theta_1 = \theta$，$\theta_2 = \theta + \beta_1$，$\theta_3 = \theta + \beta_2$

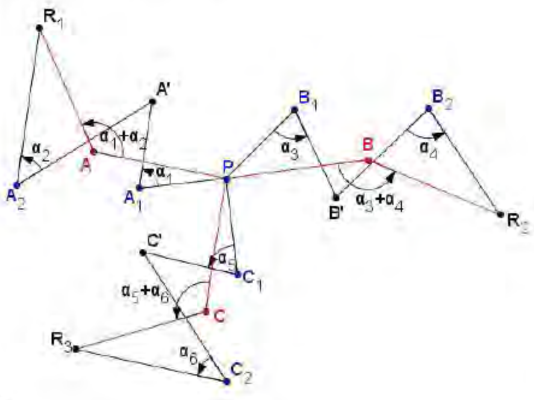
(其中β_1，β_2為固定角度)，若 P 點固定，則隨著θ在0°到360°之間逐漸變動，所有 G 點所成圖形會構成一個圓。

(二)若$\theta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$，$\theta_2 = \alpha_3 + \alpha_4$，$\theta_3 = \alpha_5 + \alpha_6$，

滿足$\theta_1 = \theta$，$\theta_2 = \theta + 120^\circ$，$\theta_3 = \theta + 240^\circ$，則

(1)設θ角度固定，則不論 P 點如何變動，G 為固定點

(2)當θ改變時，G 會跟著改變。隨著θ在0°到360°之間逐漸變動，所有 G 點所成圖形會構成一個圓(P 變動無妨，不影響 G 的軌跡)



【證明詳見 P.82 附錄十】

六、不動點問題

(一)固定點 M 是不動點

最後讓我們再回到【定理二】中的固定點 M 身上，發現 M 有著重要的數學意義，符合函數的**不動點定義**，我們對這部分做了思考和研究之後，發現用【二次旋轉改成一次旋轉】可以一併說明 M 是固定點和 M 是不動點，下面是我們的說明：

定義函數$R_{O,\theta}$：E → E (將平面 E 對應至平面 E)，$R_{O,\theta}(P)=P'$表示以 O 為旋轉中心，將 P 旋轉θ得到的點為P'。我們現在考慮二次旋轉問題：(以正表逆時針旋轉，以負表順時針旋轉)

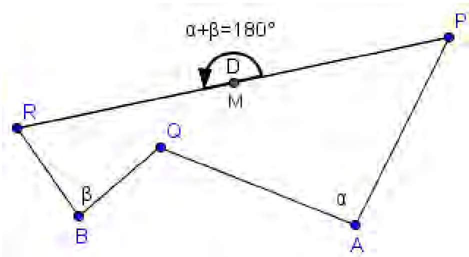
> 【定理二十七】
> 以 A 為旋轉中心，將 P 旋轉α至 Q 點；以 B 為旋轉中心，將 Q 旋轉β至 R 點，其中$\alpha+\beta=180^{\circ}$，令$\overline{PR}$的中點為 M，證明：(1)不論 P 如何變動，M 恆為固定點。
>
> (2)M 為函數$R_{B,\beta}\circ R_{A,\alpha}$唯一的不動點

【證明】

1、以 A 為旋轉中心，將 P 旋轉α至 Q 點；以 B 為旋轉中心，將 Q 旋轉β至 R 點

$\alpha+\beta=180^{\circ}\neq 360^{\circ}$

由定理二十五之(一) 當 n=2 時二次旋轉可改為一次旋轉知：可找到一點 D，以 D 為旋轉中心將P旋轉$\alpha+\beta$可得到R，且 D 點與P 無關，不會隨著P的改變而改變



$\therefore R_{B,\beta}\circ R_{A,\alpha}(P)=R_{D,\alpha+\beta}(P)=R$

$\because\ \alpha+\beta=180^{\circ}$

∴以 D 為旋轉中心將P旋轉180°可得到R

∴D 為$\overline{PR}$的中點∴D 為 M 點

∵D 點與P無關，不會隨著P的改變而改變

∴M 點與P無關，不會隨著P的改變而改變，即不論 P 點如何變動，M 恆為固定點

2、∵以 D 為旋轉中心將P旋轉180°可得到R∴以 M 為旋轉中心將P旋轉180°可得到R，

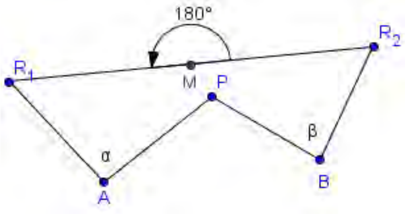
$\therefore R_{B,\beta}\circ R_{A,\alpha}(P)=R_{M,180^{\circ}}(P)=R$，若$P\neq M$則P與R不可能是同一點，

而$R_{B,\beta}\circ R_{A,\alpha}(M)=R_{M,180^{\circ}}(M)=M$ ∴M 為函數$R_{B,\beta}\circ R_{A,\alpha}$唯一的不動點■

回到【定理二】，除了證明 M 為固定點，也證明 M 為不動點，我們表示成定理二十八

> 【定理二十八】
> 平面上有兩定點 A，B，設 P 為平面上另一點。以 A 為圓心，$\overline{AP}$長為半徑，將 P 逆時針旋轉α至R_1；以 B 為圓心，$\overline{BP}$長為半徑，將 P 順時針旋轉β至R_2，其中$\alpha+\beta=180^{\circ}$，令$\overline{R_1R_2}$的中點為 M，證明：
> (1)不論 P 點在平面上如何變動，M 恆為固定點
>
> (2)M 為函數$R_{A,\alpha}\circ R_{B,\beta}$唯一的不動點

【證明】



1、可以把題意改成以 B 為旋轉中心，將R_2逆時針旋轉β至P；
以 A 為旋轉中心，將 P 逆時針旋轉α至R_1，且$\alpha+\beta=180^\circ$

2、以函數來表示為$R_{B,\beta}(R_2)=P$，$R_{A,\alpha}(P)=R_1$，

$R_{A,\alpha}\circ R_{B,\beta}(R_2)=R_1$，

由定理二十七即可得證：不論R_2點在平面上如何變動，M 恆為固定點，而且 M 為函數

$R_{A,\alpha}\circ R_{B,\beta}$唯一的不動點，得證。

3、以 B 為旋轉中心，將 P 順時針旋轉β可得R_2，∴P 及R_2互相對應，會一起變動
而不論R_2點在平面上如何變動，M 恆為固定點
∴不論P點在平面上如何變動，M 恆為固定點，得證■

(二)定理二的推廣

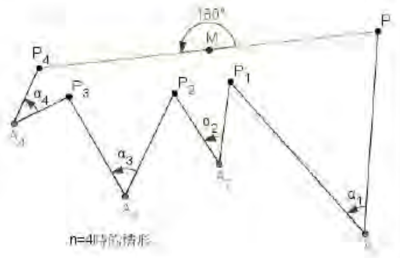
最後我們利用【n 次旋轉改成一次旋轉】的理論，應用於【定理二】推廣的情況中，來討論多個旋轉中心時固定點 M 是否仍為不動點，我們將其表示成定理二十九。

【定理二十九】

設$0^\circ<\alpha_1$，α_2，⋯，$\alpha_n<360^\circ$，A_1，A_2，⋯，A_n爲平面上 n 個點(n≥ 2)，P 爲另一點。以A_1爲旋轉中心，將 P 旋轉α_1至P_1點；以A_2爲旋轉中心，將P_1旋轉α_2至P_2點；⋯；以A_n爲旋轉中心，將P_{n-1}旋轉α_n至P_n點，其中$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$爲$180^\circ$的同界角，設$\overline{PP_n}$中點爲 M，證明：

(1)不論 P 在平面上如何變動，M 恆爲固定點

(2)M 爲函數$R_{A_n,\alpha_n}\circ\cdots\circ R_{A_2,\alpha_2}\circ R_{A_1,\alpha_1}$唯一的不動點



n=4時的情形

備註:礙於篇幅的關係，定理二十九證明請參閱 P.84 附錄十一，另舉一實例亦放於附錄十一

柒、結論

一、兩個旋轉中心問題

若一動點 P 以兩定點 A，B 為旋轉中心分別逆時針旋轉α至R_1、順時針旋轉β至R_2，且$\alpha+\beta=180^\circ$，則$\overline{R_1R_2}$中點 M 的座標只與 A，B 及旋轉角度α，β有關，不論 P 點如何變動，M 恆為固定點。

設T_1，T_2，⋯，T_n爲座標平面上的 n 個定點，另有一動點 P，以T_1爲旋轉中心，將 P 點旋轉θ_1得到R_1；以T_2爲旋轉中心，將 P 點旋轉θ_2得到R_2；⋯⋯；以T_n爲旋轉中心，將 P 點旋轉θ_n得到R_n。設 M 爲R_1，R_2，⋯，R_n的平均點。在這前提下，我們可得到下列結論第二、三、四點。

二、多個旋轉中心問題

1. 令旋轉角度$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\frac{360^\circ}{n}$，⋯，$\theta_n=\theta+\frac{360^\circ}{n}\times(n-1)$，所得到的平均點 M 在

θ角固定時，不論 P 如何變動，M 恆為固定點。事實上旋轉角度θ_1，θ_2，…，θ_n只要滿足“$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n=0$且$\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n=0$”時，旋轉後所得的點之平均點 M 就會是固定點。

2. 對兩個及三個旋轉中心而言，$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\frac{360^\circ}{n}$，…，$\theta_n=\theta+\frac{360^\circ}{n}\times(n-1)$是讓平均點成為固定點的唯一一種旋轉角度；對四個以上的旋轉中心而言，仍有其他旋轉角度也可以讓平均點 M 是固定點。

三、發現相似軌跡

1. 當θ_1，θ_2，…，θ_n是任意角度時，令動點 P 任意變動軌跡為Γ，此時平均點 M 不再是固定點，也會隨之變動，其變動軌跡會與Γ相似。
2. 承上，若使各個旋轉中心移動，其移動軌跡皆與Γ相似，則平均點 M 的變動軌跡也仍然會與Γ相似。

四、平均點移動軌跡

延續多個旋轉中心問題，依下列情況操控旋轉角度，可得平均點移動軌跡狀況分別如下：

1. 當旋轉角度$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\frac{360^\circ}{n}$，…，$\theta_n=\theta+\frac{360^\circ}{n}\times(n-1)$時，隨著$\theta$角在$0^\circ$到$360^\circ$之間逐漸變動，M 點的軌跡會是一個半徑固定的圓，而 P 點仍可任意移動，不影響 M 的軌跡。
2. 當旋轉角度$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\alpha_1$，…，$\theta_n=\theta+\alpha_{n-1}$時(其中$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_{n-1}$為固定角度)，隨著$\theta$角在$0^\circ$到$360^\circ$之間逐漸變動，M 點軌跡仍是一個圓，但此時 P 點必須固定，不可任意變動。
3. 當旋轉角度$\theta_1=a\,\theta$，$\theta_2=a\,\theta+\alpha_1$，…，$\theta_m=a\,\theta+\alpha_{m-1}$，$\theta_{m+1}=b\,\theta+\alpha_m$，…，$\theta_n=b\,\theta+\alpha_{n-1}(1\le m<n，a\ne b，ab\ne 0)$，隨著$\theta$在$0^\circ$到$360^\circ$之間逐漸變動，平均點 M 的軌跡是內(外)次擺線。我們發現若ab>0，則平均點 M 的軌跡是外次擺線；若 ab<0，則平均點 M 的軌跡是內次擺線。其中當$b=-a$時平均點 M 的軌跡是一個橢圓。

五、多次旋轉的應用－向量相等

利用 n 次旋轉可改成一次旋轉或一次平移的論點可證明兩個旋轉中心問題中，若取動點 P 分別以兩定點 A，B 為旋轉中心旋轉θ至R_1，R_2；將 P 任意移至P'，一樣分別以 A，B 為旋轉中心將P'旋轉θ至R_1'，R_2'，則$\overrightarrow{R_1R_2}$，$\overrightarrow{R_1'R_2'}$會相等，且將$\overrightarrow{AB}$以 A 為旋轉中心，旋轉$(\frac{\theta}{2}-90°)$，再將長度乘以 $2\sin\frac{\theta}{2}$即為$\overrightarrow{R_1R_2}$，並可以與平均點繞圈及相似軌跡等現象結合來做推廣。

六、不動點

定義函數$R_{O,\theta}$：$E\rightarrow E$ (將平面 E 對應至平面 E)，$R_{O,\theta}(P)=P'$表示以 O 為旋轉中心，將 P 旋轉θ得到的點為P'。利用二次旋轉改成一次旋轉可證出傑克船長故事中 M 是固定點且 M 是不動點，並可推廣到 n 次旋轉的狀況中。

捌、討論與應用

利用研究過程所得之結論，我們討論出四種終極藏寶秘技，提供給二十一世紀擁有科技能力的海盜，他只要利用 google 地圖和 geogebra 軟體，在電腦上設計好藏寶地點後，就可以放心把檔案銷毀，再前往埋藏寶物，不再需要為後人留下藏寶圖。這四種秘技如下:

一、固定點法則

海盜可在地圖上找任意一點 P 和 n 個關鍵地標，分別以這些地標為旋轉中心，將 P 點逆時針旋轉θ_1，θ_2，…，θ_n角（θ_1，θ_2，…，θ_n差值固定，$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\frac{360^\circ}{n}$，…，$\theta_n=\theta+\frac{360^\circ}{n}\times(n-1)$)得到 n 個點的座標，取這 n 個點的平均座標為藏寶點。只要海盜記得或告訴傳人這 n 個地標和θ角，日後任選一點 P，下手旋轉後都可得到藏寶點。

二、平均點繞行法則

海盜先依上述固定點法則作旋轉，但將各個旋轉角度改為$\theta_1=a\theta$，$\theta_2=a\theta+\alpha_1$，…，$\theta_m=a\theta+\alpha_{m-1}$，$\theta_{m+1}=b\theta+\alpha_m$，…，$\theta_n=b\theta+\alpha_{n-1}(ab\neq 0)$，移動$\theta$角的數值滑桿，此時平均點 M 會移動，由選取不同的a、b 值可決定其移動軌跡是一個圓、橢圓或內(外)次擺線。此時再給一個確定的方向，如：在中心上放一個指北針，其指的方向與平均點移動軌跡的交點即為藏寶點。只要海盜記得 P 點、這 n 個地標和a、b 值及確定方向，日後下手旋轉後就可得到藏寶點。

三、軌跡有詐技巧

海盜任意選取一點 P 和 n 個關鍵地標並以平均點繞行法則做完旋轉後，移動θ角的數值滑桿，先留下平均點 M 的軌跡一(可能是圓、橢圓或內(外)次擺線)。之後再任意拉動 P 點，此時 P 點的移動軌跡與平均點 M 的新移動軌跡二是相似圖形，可在軌跡一與軌跡二的交點埋下地雷，而在軌跡上的其他地方埋下寶藏。因此日後就算其他想挖寶的人能成功做出這些軌跡的圖樣，勢必會從交點開始挖寶，所以他一定會踩到地雷，如此一來便可保住寶藏，也提高了尋寶的難度。

四、向量相等法則

海盜在地圖上，任意找一點 P 和兩個旋轉中心分別將 P 旋轉θ角得到兩點，把其中一點視為地標，並在另一點埋下寶藏。海盜自己知道地標和寶藏所連成的向量，便是兩個旋轉中心連成的向量，逆時針旋轉($\frac{\theta}{2}-90°$)，再將長度乘以 $2\sin\frac{\theta}{2}$。只要海盜記得或告訴傳人這個地標和兩個旋轉中心所構成的向量，就可得到藏寶點。

玖、參考文獻

一、高中數學第二冊第三章三角函數，第四冊第一章橢圓
二、高中數學第三冊第一章向量、第三章圓的方程式
三、左台益(民99)。幾何探索專題。
四、趙文敏(民 92)。幾何學概論。台北市：九章。
五、左銓如(民 92)。初等解析幾何研究。台北市：九章。

【評語】030406

從藏寶問題出發，研究動點、固定點、旋轉中心和旋轉角度間相互的關係，由簡單而複雜，有創意也有困難度，內容非常豐富，而且非常嚴謹，是一件一流之作。

數學証明完整，三角函數計算熟練。善用繪圖軟體說明作品動態繪圖。