中華民國第52屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030405

任意矩形的三階多米諾骨牌填圖謎題

學校名稱：桃園縣私立新興高級中學(附設國中)

作者：	指導老師：
國一 游垚騰	陳怡君

關鍵詞：L-tromino、填圖、缺陷矩形

任意矩形的三階多米諾骨牌填圖謎題

摘要

三階多米諾骨牌(Tromino)填任意矩形 R(m,n), m,n≧0 解之謎是一個很有趣且複雜的問題。本研究利用塗色法、歸納法，巧妙應用矩形的上下、左右對稱特性，經過系統化分類與邏輯化推演，成功且完整求證下列三個以 L-tromino 填任意矩形的問題：

一、 當 3|(mn-1)，填任意移除一格小正方形的一階缺陷矩形問題。

二、 當 3|(mn)，填 R(m,n)矩形問題。

三、 當 3|(mn-2)，填任意移除二格小正方形的二階缺陷矩形問題。

本研究成功得證，並給出所有符合解條件的 m,n 及於矩形中任意移除一格或兩格小正方形且符合解的所有限制條件。

壹、研究動機

為了準備 2010 年 10 月 10~16 日在印尼峇里島由印尼教育部舉辦的「國際小學數學及科學奧林匹亞(International Mathematics and Science Olympiad for Primary School, IMSO)」數學競賽，於練習 2004 年 IMSO 考題時，首次接觸到 L-形三階多米諾骨牌(**L-tromino**)謎題問題，其後陸續探討並閱讀相關的文獻，發現 L-tromino 的拼圖或填圖謎題雖然也有不少學者研究並證明解存在的條件，但使用的數學方法相對艱深，也留下許多尚待解答及可供延伸討論的問題，因此促使我想靈活運用國中數學課程內容所學的數列級數、平面中的幾何圖形排列及組合，進一步利用幾何圖形的對稱特性，使用塗色法、歸納法等證明方法探討 L-tromino 填任意矩形解之謎的問題。

貳、研究目的

本研究擬利用塗色法、歸納法等證明方法探討 L-tromino 填任意矩形解之謎的問題：

一、 研究一：是否在 R(m,n), m,n≧0 矩形任意移除一格小正方形，當 3|(mn-1) (矩形方格數被 3 除餘 1 的情況)，皆可被 L-tromino 所填滿？給出所有符合條件的 m, n 及於矩形中任意移除一格小正方形符合解的限制條件。

二、 研究二：是否在 R(m,n), m,n≧0 矩形，當 3|(mn) (矩形方格數被 3 整除的情況)，皆可被 L-tromino 所填滿？給出所有符合條件的 m, n。

三、 研究三：是否在 R(m,n), m,n≧0 矩形任意移除二格小正方形，當 3|(mn-2) (矩形方格數被 3 除餘 2 的情況)，皆可被 L-tromino 所填滿？給出所有符合條件的 m, n 及於矩形中任意移除二格小正方形符合解的限制條件。

參、研究設備及器材

格子紙、筆、正方形積木、筆記型電腦。

肆、研究過程或方法

本研究首先定義下列符號或名詞：

一、 $R(m,n)$：二維(2D) $m\times n$ 矩形，$m,n\in\mathbb{N}$。

二、 $R(m,n)^{\blacksquare}$：$R(m,n)$, $3|(mn-1)$, $m,n\in\mathbb{N}$，任意移除一格小正方形的一階缺陷矩形。

三、 $R(m,n)^{\blacksquare\blacksquare}$：$R(m,n)$, $3|(mn-2)$, $m,n\in\mathbb{N}$，任意移除二格小正方形的二階缺陷矩形。

四、 $R(2^k,2^k)^{\llcorner}$：$R(2^k,2^k)$, $k\in\mathbb{N}$缺角正方形，其缺角大小為 $R(2^{k-1}, 2^{k-1})$，並且為 k 階重複、$(2^{(k-1)})^2$ 個 L-tromino 排列。

五、 $M(m,n)^{\blacksquare}$：$R(m,n)$, $3|(mn-1)$, $m, n\in\mathbb{N}$，使用 L-tromino 填滿 $R(m,n)$任意移除一格小正方形的所有局部移動情況之集合。

六、 $M(m,n)^{\blacksquare\blacksquare}$：$R(m,n)$, $3|(mn-2)$, $m, n\in\mathbb{N}$，使用 L-tromino 填滿 $R(m,n)$任意移除二格小正方形的所有局部移動情況之集合。

七、 $M(2^k,2^k)^{\llcorner}$：$R(2^k,2^k)$, $k\in\mathbb{N}$缺角正方形的所有局部移動情況之集合。

依據前述的定義，可顯見下列的事實或性質：

一、 **事實 1.1**：$R(2,2)^{\blacksquare}$即為 L-tromino，如**圖 4.1(a)**。

二、 **性質 1.1**：$R(0,0)$可被 0 個 L-tromino 填滿。

三、 **性質 1.2**：$R(1,1)^{\blacksquare}$可被 0 個 L-tromino 填滿。

四、 **性質 1.3**：$M(2,2)^{\blacksquare}$，可依圖形的上下、左右對稱特性，使用 1 個 L-tromino 填滿，共有 4 種填滿情況，如**圖 4.1(b)**。

五、 **性質 1.4**：$R(2,3)$或 $R(3,2)$、$R(2,6)$或 $R(6,2)$、$R(3,6)$或 $R(6,3)$分別可被 2, 4, 6 個 L-tromino 填滿，如**圖 4.1(c)~(e)**。

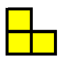


圖 4.1(a) $R(2,2)^{\blacksquare}$或 L-tromino

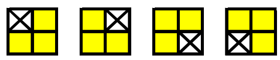


圖 4.1(b) $M(2,2)^{\blacksquare}$

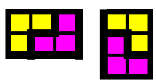


圖 4.1(c)

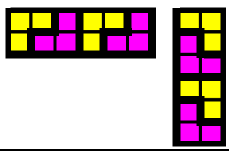


圖 4.1(d)

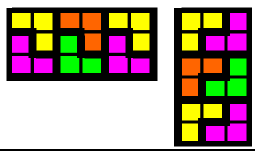


圖 4.1(e)

六、 **性質 1.5**：$M(2^k,2^k)^{\llcorner}$可依圖形的上下、左右對稱特性，使用 k 階重複、$(2^{(k-1)})^2$ 個 L-tromino 排列形成 $R(2^k,2^k)^{\llcorner}$，共有 4 種情況。

證明：

當 k=1，如**圖 4.1(b)** $M(2,2)^{\blacksquare}$與 $M(2^1,2^1)^{\llcorner}$等價；當 k=2, $R(2^2,2^2)^{\llcorner}$排列及當 k=3, $R(2^3,2^3)^{\llcorner}$排列皆各有 4 種情況，分別如**圖 4.1(f), (g)**。因此，疊代歸納得證 $M(2^k,2^k)^{\llcorner}$, $k\in\mathbb{N}$各有 4 種情況。

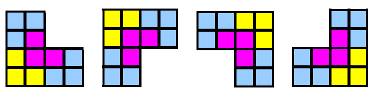


圖 4.1(f) $R(2^2,2^2)^{\llcorner}$及 $M(2^2,2^2)^{\llcorner}$

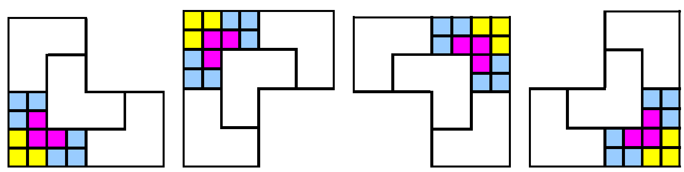


圖 4.1(g) $R(2^3,2^3)^{\llcorner}$及 $M(2^3,2^3)^{\llcorner}$

七、 **性質 1.6**：$R(1,2)^{\blacksquare\blacksquare}$、$R(2,1)^{\blacksquare\blacksquare}$可被 0 個 L-tromino 填滿。

研究一：當 3|(mn-1)，填任意移除一格小正方形的一階缺陷矩形問題。

當 m=n，區分成 m=1, 2, 4, 8, 5, 7, 11 等情況進行討論；當 m≠n，R(m,n), 3|(mn-1), m, n∈N，解存在的條件與矩形旋轉 90 度後的 R(n,m)相同，故延伸 m=n 的結論，討論 n≧m 的情況即可。

引理 1.1：R(6,t)或 R(t,6), t≧2, t∈N，可被 2t 個 L-tromino 填滿。

證明：

1. R(6,t)和 R(t,6)僅須證明 R(6,t)的情況。
2. 在 R(6, t)的情況中：
   (1) 因 t≧2, t∈N，t=2p+3q，p, q 為非同時為零的非負整數。
   (2) 利用**性質 1.4**，當 t=2，R(6,2)如**圖 4.1(d)**成立；當 t=3，R(6,3)如**圖 4.1(e)**成立。
   (3) 利用歸納法求證：因為 R(6, 2p) = p R(6, 2), p∈N 或 R(6, 3q) = q R(6, 3), q∈N，歸納得證。

引理 1.2：$R(2^k,2^k)^{\blacksquare}$, k 為非負整數，可被 L-tromino 填滿。

證明：

1. k=0，$R(2^0,2^0)^{\blacksquare}$可被 0 個 L-tromino 填滿(**性質 1.2**)。
2. k=1，$R(2^1,2^1)^{\blacksquare}$ (與 $R(2^1,2^1)^{\llcorner}$等價)可被 1 個 L-tromino 填滿，共有 4 種情況，如 $M(2,2)^{\blacksquare}$ (**性質 1.3**)。
3. k=2，可用 $R(2^2,2^2)^{\llcorner}$及 $R(2^1,2^1)^{\llcorner}$各 1 個拼成 $R(2^2,2^2)^{\blacksquare}$。並且，利用**性質 1.5** $M(2^2,2^2)^{\llcorner}$及 $M(2^1,2^1)^{\llcorner}$的個別局部移動特性得證。
4. 利用歸納法求證：當 k=t 時，可依次遞迴使用 $R(2^t,2^t)^{\llcorner}$、$R(2^{t-1},2^{t-1})^{\llcorner}$、$R(2^{t-2},2^{t-2})^{\llcorner}$、…、至 $R(2^1,2^1)^{\llcorner}$各 1 個拼成 $R(2^t,2^t)^{\blacksquare}$。並且，利用**性質 1.5** $M(2^t,2^t)^{\llcorner}$、$M(2^{t-1},2^{t-1})^{\llcorner}$、$M(2^{t-2},2^{t-2})^{\llcorner}$、…、至 $M(2^1,2^1)^{\llcorner}$的個別局部移動特性歸納得證。

在 Solomon W. Golomb 所著的 Polyominoes 中指出任意大小的方形，當 $n=2^k$; k≧0，任意移除其中一格，都可用 L-tromino 填滿該方形。**引理 1.2** 的證明結果與其結論相同。

引理 1.3：$R(5,5)^{\blacksquare}$，移除**圖 4.2(b)**任意一格註記為黑色的小正方形除外，移除其他任一格小正方形無法被 L-tromino 填滿。

證明：

利用圖形的上下、左右對稱特性，僅須討論**圖 4.2(a)**移除註記為 1~6 的方格之解。由於任意移除一格小正方形，限制使用 8 個 L-tromino 填滿，而每一個 L-tromino 僅能覆蓋一個**圖 4.2(b)**註記為黑色的小正方形。因此，利用**塗色法**，若任意移除一格**圖 4.2(b)**註記為黑色的小正方形，則剩下 8 個註記為黑色的小正方形，符合解的條件；反之，若任意移除一格白色的小正方形，則餘下 9 個註記為黑色的小正方形，不符合解的條件，故得證，且解如**圖 4.2(c)~(e)**。

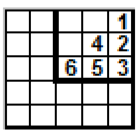
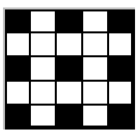
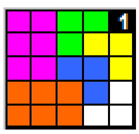
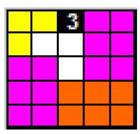
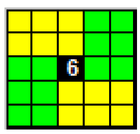
				

圖 4.2(a) R(5,5)	圖 4.2(b)	圖 4.2(c)	圖 4.2(d)	圖 4.2(e)

引理 1.4：R(7,7)$^{\blacksquare}$，可被 L-tromino 填滿。

證明：

1. 利用圖形的上下、左右對稱特性及**性質 1.3**，僅須討論**圖 4.3(a)**移除註記為 1, 2, 3 的方格之解。
2. 應用**性質 1.4**，分別求解如**圖 4.3(b)~(d)**得證。

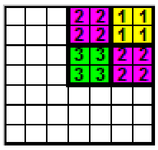
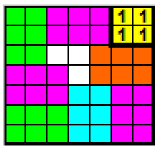
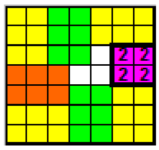
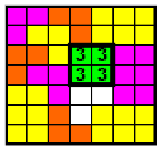
			

圖 4.3(a) R(7,7)	圖 4.3(b)	圖 4.3(c)	圖 4.3(d)

引理 1.5：R(11,11)$^{\blacksquare}$，可被 L-tromino 填滿。

證明：

1. R(11,11)可被分割成 R(7,7)、R(6,4)、R(4,6)和 R(5,5)$^{\blacksquare}$，並建構如**圖 4.4**。
2. 若令 R(5,5)$^{\blacksquare}$移除一格小正方形的位置如**圖 4.2(c)**；利用圖形的上下、左右對稱特性，讓 R(11,11)$^{\blacksquare}$移除一格小正方形的位置落於**圖 4.4** 的 R(7,7)中，使其成為 R(7,7)$^{\blacksquare}$。
3. 應用**引理 1.1, 1.3, 1.4** 得證。

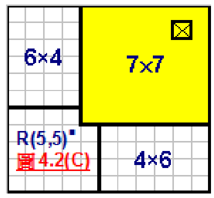


圖 4.4

引理 1.6：R(1,n)$^{\blacksquare}$, n=3k+1, k∈N，無法被 L-tromino 填滿。

證明：明顯地，無法被 L-tromino 填滿。

引理 1.7：R(2,n)$^{\blacksquare}$, n=3k+2, k∈N，移除座標(1, 3k), (2, 3k), k∈N的一格小正方形，無法被 L-tromino 填滿外，移除其餘位置的任一格小正方形可被 L-tromino 填滿。

證明：

1. 當 k=1，R(2,5)可分割成 R(2,2)和 R(2,3)。利用**性質 1.3, 1.4** 得知 R(2,5)$^{\blacksquare}$的分割必須為 R(2,2)$^{\blacksquare}$和 R(2,3)才可能被 L-tromino 填滿。然而，由圖形的左右對稱特性得知移除座標(1,3), (2,3)兩格小正方形之任一格必不能同時滿足圖形左右端對稱的 M(2,2)$^{\blacksquare}$特性，**如圖 4.5(a)**。
2. 當 k=2，R(2,8)可分割成 R(2,5)和 R(2,3)。類似證明 k=1 的原理，得知移除座標(1,3), (2,3), (1,6), (2,6)小正方形之任一格必不能同時滿足圖形左右端對稱的 M(2,2)$^{\blacksquare}$特性，**如圖 4.5(b)**。
3. 同理，當 k=3，R(2,11)可分割成 R(2,8)和 R(2,3)，**如圖 4.5(c)**。

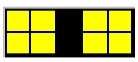
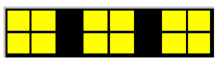
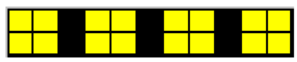
		

圖 4.5(a) R(2,5)	圖 4.5(b) R(2,8)	圖 4.5(c) R(2,11)

4. 從 n=3k+2 推證 n=3(k+1)+2, k∈N，利用歸納法證明並推展規律：R(m,n)=R(2,3(k+1)+2)≡R(2,(3k+2)+3)，可分割成 R(2,3k+2)和 R(2,3)。因此，歸納得證符合解之條件如下：當 m=2, n=3k+2, n∈N，若移除 n 方向 3 的倍數行之任意一格小正方形(註：移除座標(1, 3k), (2, 3k), k∈N的一格小正方形)無法被

L-tromino 填滿；移除其餘位置的任一格小正方形則可被填滿。

引理 1.8：R(5,n)▪, n=3(k+1)+2, k∈N，移除座標(m, n) = (3, 2), (3, n-1)的一格小正方形，無法被 L-tromino 填滿外，移除其餘位置的任一格小正方形可被 L-tromino 填滿。

證明：

1. n=8：利用圖形的上下、左右對稱特性及**性質 1.3**，僅須討論**圖 4.6(a)**移除註記為 1~6 小正方形之解。應用**性質 1.3, 1.4**，分別求解如**圖 4.6(b)~(g)**。

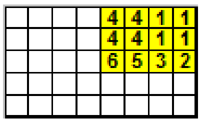


圖 4.6(a) R(5,8)

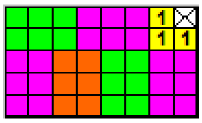


圖 4.6(b)

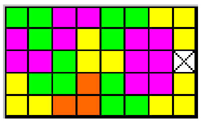


圖 4.6(c)

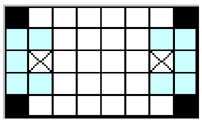


圖 4.6(d)

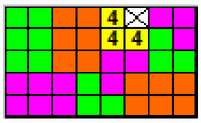


圖 4.6(e)

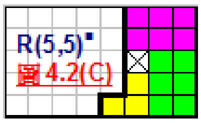


圖 4.6(f)

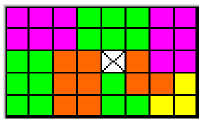


圖 4.6(g)

圖 4.6(d)顯示，當移除註記 X 的小正方形時，註記為黑色的小正方形必至少有一格無法被 L-tromino 填滿。

2. n=11：類似 n=8，僅須討論**圖 4.6(h)**移除註記為 1, 3, 1/3, 6, 7, 8, 9, 10 的小正方形之解。應用**性質 1.3, 1.4** 和**引理 1.3** 分別求解如**圖 4.6(i)~(k)**、**圖 4.6(m)~(q)**。

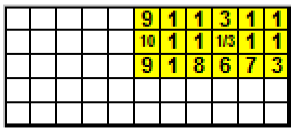


圖 4.6(h) R(5,11)

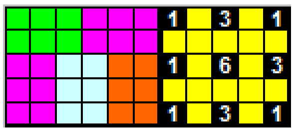


圖 4.6(i)

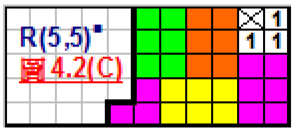


圖 4.6(j)

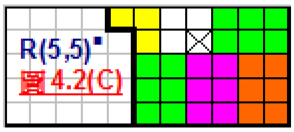


圖 4.6(k)

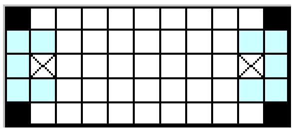


圖 4.6(l)

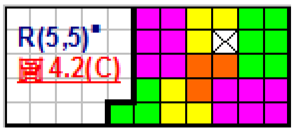


圖 4.6(m)

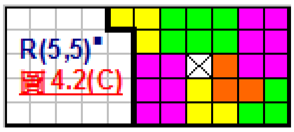


圖 4.6(n)

圖 4.6(l)顯示，當移除註記 X 的小正方形時，註記為黑色的小正方形必至少有一格無法被 L-tromino 填滿。

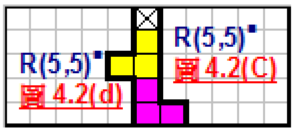


圖 4.6(o)

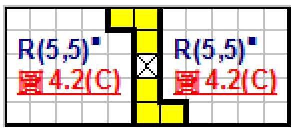


圖 4.6(p)

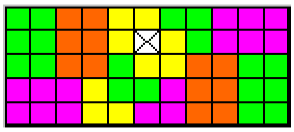


圖 4.6(q)

3. n=14：類似 n=8、並應用 n=8 的結論及引理 1.1，僅須討論圖 4.6(r)移除註記為 11 和 12 的小正方形之解。移除註記為 12 的小正方形，可重新建構如圖 4.6(s)，由 n=8 的結論得證。
4. 當 n＞11：從 n=3(k+1)+2 推證 n=3(k+2)+2，利用證明 n=8, 11 的方法和引理 1.1 得證。

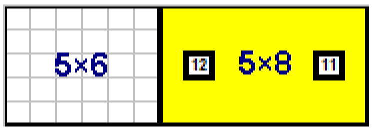


圖 4.6(r) R(5,14)■

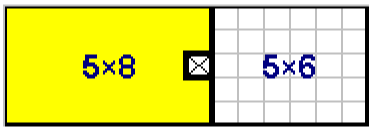


圖 4.6(s)

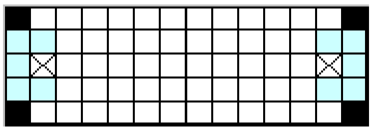


圖 4.6(t)

圖 4.6(t) ：當移除註記 X 的小正方形時，註記為黑色的小正方形必至少有一格無法被 L-tromino 填滿。同理，歸納得證 n=3(k+1)+2, k∈N 符合解之條件如下：當 m=5，在座標(m, n) = (3, 2)、(3, n-1)位置的小正方形若被移除時，無法被 L-tromino 填滿；移除其餘位置的任一格小正方形皆可被 L-tromino 填滿。

引理 1.9：R(4,n)■, n=3k+1, k∈N，可被 L-tromino 填滿。

證明：

1. n=4，由引理 1.2 得知 R(4,4)■可被 L-tromino 填滿。
2. n≧4，從 n=3k+1 推證 n=3(k+1)+1, R(4,3(k+1)+1)≡R(4,3)+R(4,3k+1)。利用圖形的上下、左右對稱特性及性質 1.4，依次疊代 R(4,4)■證明 R(4,7)■ (圖 4.7(a))、疊代 R(4,7)■證明 R(4,10)■ (圖 4.7(b))、疊代 R(4,10)■證明 R(4,13)■(圖 4.7(c))，故歸納得證。

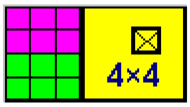


圖 4.7(a) R(4,7)■

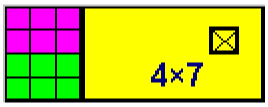


圖 4.7(b) R(4,10)■

圖 4.7(c) R(4,13)■

引理 1.10：R(7,n)■, n=3(k+1)+1, k∈N，可被 L-tromino 填滿。

證明：

1. n=7，由引理 1.4 得知 R(7,7)■可被 L-tromino 填滿。
2. n≧7，應用引理 1.9 (圖 4.7(a)) R(4,7)■的證明結果，將其區分為兩組：
   (1) 應用性質 1.4，建構 R(7,10)■如圖 4.8(a)，得證。n≧10，從 n=3(k+2)+1 推證 n=3((k+2)+2)+1, R(7, 3((k+2)+2)+1)≡R(7,6)+R(7,3(k+2)+1)。應用引理 1.1 並依次疊代如 R(7,10)■證明 R(7,16)■ (圖 4.8(b))，歸納得證。

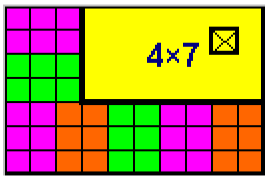


圖 4.8(a) R(7,10)■

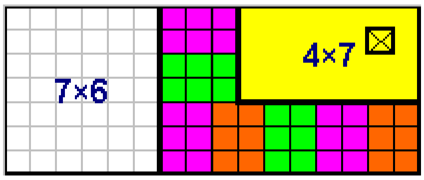


圖 4.8(b) R(7,16)■

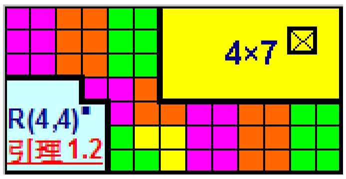


圖 4.8(c) R(7,13)▀

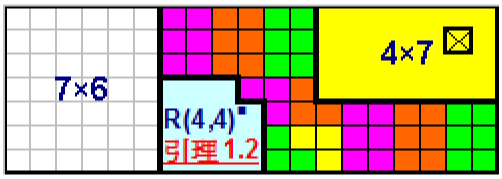


圖 4.8(d) R(7,19)▀

(2) 應用**性質 1.4** 及**引理 1.2**，建構 R(7,13)▀如**圖 4.8(c)**，得證。n≧13，從 n=3(k+3)+1 推證 n=3((k+2)+3)+1, R(7, 3((k+2)+3)+1)≡R(7,6)+R(7,3(k+3)+1)。應用**引理 1.1** 並依次疊代如 R(7,13)▀證明 R(7,19)▀ (**圖 4.8(d)**)，歸納得證。

引理 1.11：R(8,n)▀, n=3(k+1)+2, k∈N，可被 L-tromino 填滿。

證明：

1. n=8，由**引理 1.2** 得知 R(8,8)▀可被 L-tromino 填滿。
2. n≧8，從 n=3(k+1)+2 推證 n=3(k+2)+2, R(8,3(k+2)+2)≡R(8,3)+R(8,3(k+1)+2)。利用圖形的上下、左右對稱特性及**性質 1.4**，並依次疊代 R(8,8)▀證明 R(8,11)▀ (**圖 4.9(a)**)、疊代 R(8,11)▀證明 R(8,14)▀ (**圖 4.9(b)**)，歸納得證。

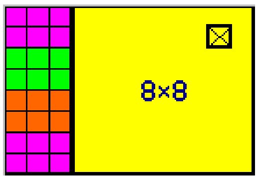


圖 4.9(a) R(8,11)▀

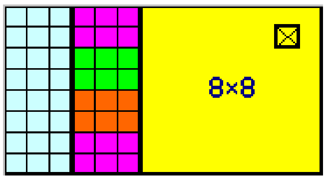


圖 4.9(b) R(8,14)▀

引理 1.12：R(11,n)▀, n=3(k+2)+2, k∈N，可被 L-tromino 填滿。

證明：

1. n=11，由**引理 1.5** 得知 R(11,11)▀可被 L-tromino 填滿。
2. n≧11，利用圖形的上下、左右對稱特性及**引理 1.1, 1.3, 1.4**，R(11,14)▀可被分割成 R(7,7)▀、R(5,5)▀、R(4,6)、R(6,3)及 R(7,4)▀和 R(6,3)，如**圖 4.10(a)**得證。接著，從 n=3(k+2)+2 推證 n=3(k+3)+2, R(11,3(k+3)+2)可固定 R(7,7)▀、R(5,5)▀、R(4,6)、R(6,3)的部分，並依次遞增 R(7,4)▀、R(6,3)分割部分為 R(7,7)▀、R(6,6) (**圖 4.10(b)**)、R(7,10)▀、R(6,9) (**圖 4.10(c)**)、R(7,13)▀、R(6,12) (**圖 4.10(d)**)，歸納得證。

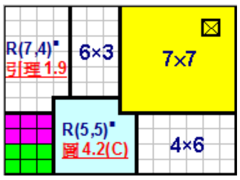


圖 4.10(a) R(11,14)▀

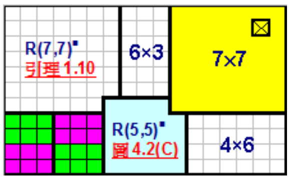


圖 4.10(b) R(11,17)▀

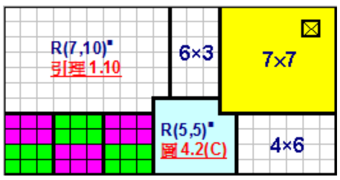


圖 4.10(c) R(11,20)▀

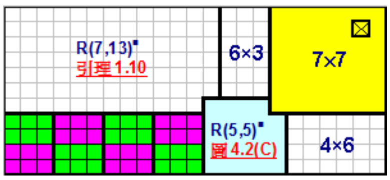


圖 4.10(d) R(11,23)▀

定理 1：任意 R(m,n), m,n∈N 缺陷矩形可被至少(含) 1 個以上 L-tromino 填滿的條件，若不論移除一格小正方形的位置，3|(mn-1), 2≦m 或 n 一階缺陷矩形可被填滿的條件，若且唯若：(a) 任一邊邊長不小於 2，除非兩邊同時等於 2；(b) m 或 n≠5。

證明：

1. R(m,n), m, n∈N 所有符合 3|(mn-1)的條件，其 m, n 可區分為 3(k-1)+1 或 3(k-1)+2, k∈N，分別證明如下：
   (1) m 和 n=1 的情況：由<u>**性質 1.2**</u> 得知可被 0 個 L-tromino 填滿；m 或 n 任一數等於 1、另一數大於 1 的情況：由<u>**引理 1.6**</u> 得知無法被 L-tromino 填滿。
   (2) m 和 n=2 的情況，由<u>**引理 1.2**</u> 得知 R(2,2)可被 L-tromino 填滿；m 或 n 任一數等於 2、另一數大於 2 的情況：可被 L-tromino 填滿的條件得證如<u>**引理 1.7**</u>。
   (3) m 和 n=5 及 m 或 n 任一數等於 5、另一數大於 5 的情況，可被 L-tromino 填滿的條件分別證明如<u>**引理 1.3, 1.8**</u>。
   (4) 不符合前述條件之其他各種情況，經過分析歸納，可區分為下列 4 個群組，並分別證明(p, q∈N)：
   群組 1：m, n≧4, m=6(p-1)+4, n=3q+1。
   群組 2：m, n≧7, m=6p+1, n=3q+4。
   群組 3：m, n≧8, m=6p+2, n=3(q+1)+2。
   群組 4：m, n≧11, m=6p+5, n=3(q+1)+5。
   在 R(m,n)，當 3|(mn-1)，求證任意移除一格小正方形皆可被 L-tromino 填滿？

2. 群組 1 之疊代歸納證明：整理歸納如表 4.1。

表 4.1 群組 1 之疊代歸納證明

起始 n 值 / m	4	7	10	3(q-1)+1 q∈N	3q+1 q∈N
4	R(4, 4)	R(4, 7)	R(4, 10)	R(4, 0+3(q-1)+1)	R(4, 0+3q+1)
	4×4	4×7	4×10	…	4×(0+3q+1)
10	R(10, 10)	R(10, 13)	R(10, 16)	R(10, 6+3(q-1)+1)	R(10, 6+3q+1)
	4×6 | 4×4 6×6 | 6×4	4×6 | 4×7 6×6 | 6×7	4×6 | 4×10 6×6 | 6×10	…	4×6 | 4×(0+3q+1) 6×6 | 6×(0+3q+1)
16	R(16, 16)	R(16, 19)	R(16, 22)	R(16, 12+3(q-1)+1)	R(16, 12+3q+1)
	10×6 | 10×10 6×6 | 6×10	10×6 | 10×13 6×6 | 6×13	10×6 | 10×16 6×6 | 6×16	…	10×6 | 10×(6+3q+1) 6×6 | 6×(6+3q+1)
6(p-2)+4 p∈N	R(6(p-2)+4, 6(p-2)+4)	R(6(p-2)+4, 6(p-2)+7)	R(6(p-2)+4, 6(p-2)+10)	R(6(p-2)+4, 6(p-2)+3(q-1)+1)	R(…, …)
	…	…	…	…	…
6(p-1)+4 p∈N	R(6(p-1)+4, 6(p-1)+4)	R(6(p-1)+4, 6(p-1)+7)	R(6(p-1)+4, 6(p-1)+10)	R(6(p-1)+4, 6(p-1)+3(q-1)+1)	R(6(p-1)+4, 6(p-1)+3q+1)
	(6(p-2)+4)×6 | (6(p-2)+4)×(6(p-2)+4) 6×6 | 6×(6(p-2)+4)	(6(p-2)+4)×6 | (6(p-2)+4)×(6(p-2)+7) 6×6 | 6×(6(p-2)+7)	(6(p-2)+4)×6 | (6(p-2)+4)×(6(p-2)+10) 6×6 | 6×(6(p-2)+10)	…	(6(p-2)+4)×6 | (6(p-2)+4)×(6(p-2)+3q+1) 6×6 | 6×(6(p-2)+3q+1)

(1) m=4，證明如引理 **1.9**。

(2) m=10，應用圖形的上下、左右對稱特性得知必須指定大於 R(5,5)■的分割才具備一般性，因此 R(10,10)■可重新分割為 R(7,7)■、R(3,6)、R(6,3)、R(4,4)■ (圖 **4.11(a)**)；R(10,13)■可重新分割為 R(10,10)■+R(10,3) (圖 **4.11(b)**)；R(10,16)■可重新分割為 R(10,13)■+R(10,3) (圖 **4.11(c)**)；…；R(10,6+3q+1)■可重新分割為 R(10,3q+4)■+R(10,3)。應用引理 **1.1, 1.2, 1.4**，歸納得證。

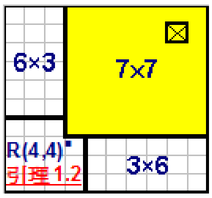


圖 4.11(a) R(10,10)■

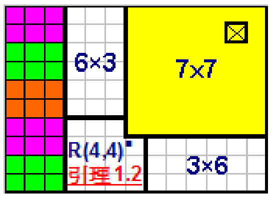


圖 4.11(b) R(10,13)■

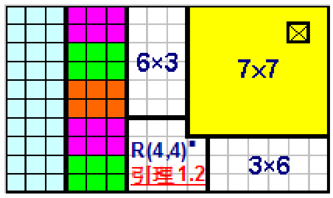


圖 4.11(c) R(10,16)■

(3) m≧4，從 R(10,10)■可分割成 R(4,4)■、R(6,4)、R(4,6)、R(6,6)；R(10,13)■可分割成 R(4,7)■、R(6,7)、R(4,6)、R(6,6)；…；R(10, 6+3q+1)■可分割成 R(4, 3q+1)■、R(6,3q+1)、R(4,6)、R(6,6)。應用引理 **1.1**、如表 **4.1** 依次疊代 m=4 的情況證明 m=10、疊代 m=10 的情況證明 m=16、…、疊代 m=6(p-2)+4 的情況證明 m=6(p-1)+4，歸納得證。

3. 群組 2 之疊代歸納證明：整理歸納如表 4.2。

表 4.2 群組 2 之疊代歸納證明

m \ 起始 n 值	7	10	13	3(q-1)+4 q∈N	3q+4 q∈N
7	R(7, 7)	R(7, 10)	R(7, 13)	R(7, 0+3(q-1)+4)	R(7, 0+3q+4)
	7×7	7×10	7×13	…	7×(0+3q+4)
13	R(13, 13)	R(13, 16)	R(13, 19)	R(13, 6+3(q-1)+4)	R(13, 6+3q+4)
	7×6 7×7 6×6 6×7	7×6 7×10 6×6 6×10	7×6 7×13 6×6 6×13	…	7×6 7×(0+3q+4) 6×6 6×(0+3q+4)
19	R(19, 19)	R(19, 22)	R(19, 25)	R(19, 12+3(q-1)+4)	R(19, 12+3q+4)
	13×6 13×13 6×6 6×13	13×6 13×16 6×6 6×16	13×6 13×19 6×6 6×19	…	13×6 13×(6+3q+4) 6×6 6×(0+3q+4)
6(p-1)+1 p∈N	R(6(p-1)+1, 6(p-1)+1)	R(6(p-1)+1, 6(p-1)+4)	R(6(p-1)+1, 6(p-1)+7)	R(6(p-1)+1, 6(p-2)+3(q-1)+4)	R(…, …)
	…	…	…	…	…
6p+1 p∈N	R(6p+1, 6p+1)	R(6p+1, 6p+4)	R(6p+1, 6p+7)	R(6p+1, 6(p-1)+3(q-1)+4)	R(6p+1, 6(p-1)+3q+4)
	(6(p-1)+1)×6 (6(p-1)+1)×(6(p-1)+1) 6×6 6×(6(p-1)+1)	(6(p-1)+1)×6 (6(p-1)+1)×(6(p-1)+4) 6×6 6×(6(p-1)+4)	(6(p-1)+1)×6 (6(p-1)+1)×(6(p-1)+7) 6×6 6×(6(p-1)+7)	…	(6(p-1)+1)×6 (6(p-1)+1)×(6(p-1)+3q+4) 6×6 6×(6(p-1)+3q+4)

(1) m=7，證明如引理 **1.10**。

(2) m≧7，從 R(13,13)■可分割成 R(7,7)■、R(6,7)、R(7,6)、R(6,6)；R(13,16)■可

分割成 R(7,10)■、R(6,10)、R(7,6)、R(6,6)；…；R(13, 6+3q+4)■可分割成 R(7, 3q+4)■、R(6,3q+4)、R(7,6)、R(6,6)。應用<u>引理 **1.1**</u>、如<u>表 **4.2**</u> 依次疊代 m=7 的情況證明 m=13、疊代 m=13 的情況證明 m=19、…、疊代 m=6(p-1)+1 的情況證明 m=6p+1，歸納得證。

4. 群組 3 之疊代歸納證明：整理歸納如表 4.3。

表 4.3 群組 3 之疊代歸納證明

起始 n 值 / m	8	11	14	3q+2 q∈N	3(q+1)+2 q∈N
8	R(8, 8) 8×8	R(8, 11) 8×11	R(8, 14) 8×14	R(8, 0+3q+2) …	R(8, 0+3(q+1)+2) 8×(0+3(q+1)+2)
14	R(14, 14) 8×6 8×8 6×6 6×8	R(14, 17) 8×6 8×11 6×6 6×11	R(14, 20) 8×6 8×14 6×6 6×14	R(14, 6+3q+2) …	R(14, 6+3(q+1)+2) 8×6 8×(0+3(q+1)+2) 6×6 6×(0+3(q+1)+2)
20	R(20, 20) 14×6 14×14 6×6 6×14	R(20, 23) 14×6 14×17 6×6 6×17	R(20, 26) 14×6 14×20 6×6 6×20	R(20, 12+3q+2) …	R(20, 12+3(q+1)+2) 14×6 14×(6+3(q+1)+2) 6×6 6×(6+3(q+1)+2)
6(p-1)+2 p∈N	R(6(p-1)+2, 6(p-1)+2) …	R(6(p-1)+2, 6(p-1)+5) …	R(6(p-1)+2, 6(p-1)+8) …	R(6(p-1)+2, 6(p-1)+3q+2) …	R(…, …) …
6p+2 p∈N	R(6p+2, 6p+2) (6(p-1)+2)×6 (6(p-1)+2)×(6(p-1)+2) 6×6 6×(6(p-1)+2)	R(6p+2, 6p+5) (6(p-1)+2)×6 (6(p-1)+2)×(6(p-1)+5) 6×6 6×(6(p-1)+5)	R(6p+2, 6p+8) (6(p-1)+2)×6 (6(p-1)+2)×(6(p-1)+8) 6×6 6×(6(p-1)+8)	R(6p+2, 6(p-1)+3q+2) …	R(6p+2, 6(p-1)+3(q+1)+2) (6(p-1)+2)×6 (6(p-1)+2)×(6(p-2)+3(q+1)+2) 6×6 6×(6(p-2)+3(q+1)+2)

(1) m=8，證明如<u>引理 **1.11**</u>。

(2) m≧8，從 R(14,14)■可分割成 R(8,8)■、R(6,8)、R(8,6)、R(6,6)；R(14,17)■可分割成 R(8,11)■、R(6,11)、R(8,6)、R(6,6)；…；R(14, 6+3(q+1)+2)■可分割成 R(8, 3(q+1)+2)■、R(6,3(q+1)+2)、R(8,6)、R(6,6)。應用<u>引理 **1.1**</u>、如<u>表 **4.3**</u> 依次疊代 m=8 的情況證明 m=14、疊代 m=14 的情況證明 m=20、…、疊代 m=6(p-1)+2 的情況證明 m=6p+2，歸納得證。

5. 群組 4 之疊代歸納證明：整理歸納如表 4.4。

(1) m=11，證明如<u>引理 **1.12**</u>。

(2) m≧11，從 R(17,17)■可分割成 R(11,11)■、R(6,11)、R(11,6)、R(6,6)；R(17,20)■可分割成 R(11,14)■、R(6,14)、R(11,6)、R(6,6)；…；R(17, 6+3(q+1)+5)■可分割成 R(11, 3(q+1)+5)■、R(6,3(q+1)+5)、R(11,6)、R(6,6)。應用<u>引理 **1.1**</u>、如<u>表 **4.4**</u> 依次疊代 m=11 的情況證明 m=17、疊代 m=17 的情況證明 m=23、…、疊代 m=6(p-1)+5 的情況證明 m=6p+5，歸納得證。

表 4.4 群組 4 之疊代歸納證明

起始 n 值 / m	11	14	17	3q+5 q∈N	3(q+1)+5 q∈N
11	R(11, 11)	R(11, 14)	R(11, 17)	R(11, 0+3q+5)	R(11, 0+3(q+1)+5)
	11×11	11×14	11×17	…	11×(0+3(q+1)+5)
17	R(17, 17)	R(17, 20)	R(17, 23)	R(17, 6+3q+5)	R(17, 6+3(q+1)+5)
	11×6 11×11 6×6 6×11	11×6 11×14 6×6 6×14	11×6 11×17 6×6 6×17	…	11×6 11×(0+3(q+1)+5) 6×6 6×(0+3(q+1)+5)
23	R(23, 23)	R(23, 26)	R(23, 29)	R(23, 12+3q+5)	R(23, 12+3(q+1)+5)
	17×6 17×17 6×6 6×17	17×6 17×20 6×6 6×20	17×6 17×23 6×6 6×23	…	17×6 17×(6+3(q+1)+5) 6×6 6×(6+3(q+1)+5)
6(p-1)+5 p∈N	R(6(p-1)+5, 6(p-1)+5)	R(6(p-1)+5, 6(p-1)+8)	R(6(p-1)+5, 6(p-1)+11)	R(6(p-1)+5, 6(p-1)+3q+5)	R(…, …)
	…	…	…	…	…
6p+5 p∈N	R(6p+5, 6p+5)	R(6p+5, 6p+8)	R(6p+5, 6p+11)	R(6p+5, 6(p-1)+3q+5)	R(6p+5, 6(p-1)+3(q+1)+5)
	(6(p-1)+5)×6 (6(p-1)+5)×(6(p-1)+5) 6×6 6×(6(p-1)+5)	(6(p-1)+5)×6 (6(p-1)+5)×(6(p-1)+8) 6×6 6×(6(p-1)+8)	(6(p-1)+5)×6 (6(p-1)+5)×(6(p-1)+11) 6×6 6×(6(p-1)+11)	…	(6(p-1)+5)×6 (6(p-1)+5)×(6(p-2)+3(q+1)+5) 6×6 6×(6(p-2)+3(q+1)+5)

研究二：當 3|(mn)，填 R(m,n)矩形問題。

當 m=n，區分成 m=3, m=6k, m=3(2k+1), k∈N 等情況討論；當 m≠n，R(m,n), 3|(mn), m, n∈N，解存在的條件與矩形旋轉 90 度後的 R(n,m)相同，故延伸 m=n 的結論，僅須討論 n≧m 的情況，並區分為 m=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 等情況進行討論。

引理 2.1：R(3,3)，無法被 L-tromino 填滿。

證明：

因為 9 格小正方形僅可能使用 3 個 L-tromino 填滿，利用塗色法得知每個 L-tromino 僅可能覆蓋圖 4.12 其中任一個註記為黑色的小正方形，但合計有 4 個註記為黑色的小正方形，因此 n=3 無法被 L-tromino 填滿。

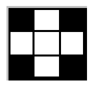


圖 4.12 R(3,3)

引理 2.2：R(6k,6k), k∈N，可被 L-tromino 填滿。

證明：應用引理 1.1，明顯地 k^2 R(6,6)可被 L-tromino 填滿。

引理 2.3：R(3(2k+1),3(2k+1)), k∈N，可被 L-tromino 填滿。

證明：

1. k=1, R(9,9)可分割如圖 4.13(a)，應用引理 1.1, 1.3 得證。
2. k＞1, R(15,15)可分割為 R(9,9)、R(6,9)、R(9,6)、R(6,6) (如圖 4.13(b))，應用引理 1.1 得證。同理，推證至任意 R(3(2k+1)+6, 3(2k+1)+6)亦可分割為 R(3(2k+1)、3(2k+1))、R(6, 3(2k+1))、R(3(2k+1), 6)、R(6,6)，應用引理 1.1 歸納得證。

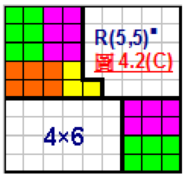
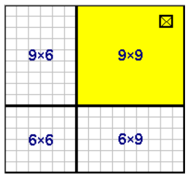
	

圖 4.13(a) R(9,9)	圖 4.13(b) R(15,15)

引理 2.4：R(1,n), n=3k, k∈N，無法被 L-tromino 填滿。

證明：明顯地，無法被 L-tromino 填滿。

引理 2.5：R(2,n), n=6(k-1)+3 或 6k, k∈N，可被 L-tromino 填滿。

證明：應用**性質 1.4**、**引理 1.1**，明顯地 R(2,3)、(k-1) R(2,6)；k R(2,6)，可被 L-tromino 填滿。

引理 2.6：R(3,n), n=2k+1, k∈N，無法被 L-tromino 填滿。

證明：類似**引理 2.1** 的證明，利用圖色法，歸納得證無法被 L-tromino 填滿。

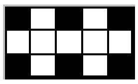
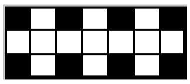
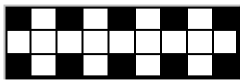
		

圖 4.14(a)	圖 4.14(b)	圖 4.14(c)

引理 2.7：R(4,n), n=6k 或 6k+3, k∈N，可被 L-tromino 填滿。

證明：應用**性質 1.4**、**引理 1.1**，明顯地 k R(4,6)；R(4,3)、k R(4,6)，可被 L-tromino 填滿。

引理 2.8：R(5,n), n=6k 或 3(2k+1), k∈N，可被 L-tromino 填滿。

證明：

1. n=6k：R(5,6k)可分割為 k R(5,6)，應用**引理 1.1** 得證。
2. n=3(2k+1)：當 k=1，建構 R(5,9)如**圖 4.15(a)**得證。從 n=3(2k+1)推證 n=3(2(k+1)+1)時，R(5,3(2(k+1)+1))可分割成 R(5,6)+R(5,3(2k+1))，歸納得證。

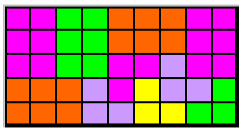
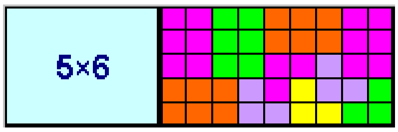
	

圖 4.15(a) R(5,9)	圖 4.15(b) R(5,15)

引理 2.9：R(6,n), n= k+5, k∈N，可被 L-tromino 填滿。

證明：應用**引理 1.1**，明顯地 R(6,k+5)，可被 L-tromino 填滿。

引理 2.10：R(7,n), n= 3(2k+1)或 6(k+1), k∈N，可被 L-tromino 填滿。

證明：

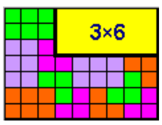
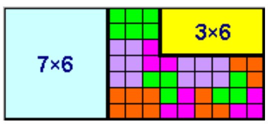
	

圖 4.16(a) R(7,9)	圖 4.16(b) R(7,15)

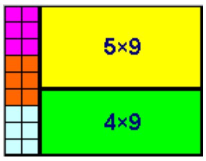
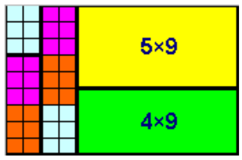
1. n=6(k+1)：R(7, 6(k+1))或可分割為(k+1)R(7,6)，應用**引理 1.1** 得證。

2. n=3(2k+1)：當 k=1，建構 R(7,9)如**圖 4.16(a)**得證。從 n=3(2k+1)推證 n=3(2(k+1)+1)時，R(7,3(2(k+1)+1))可分割成 R(7,6)+R(7,3(2k+1))，歸納得證。

引理 2.11：R(9,n), n= 2(k+3)+1 或 2(k+4), k∈N，可被 L-tromino 填滿。

證明：

1. n=2(k+4)：R(9, 2(k+4))可分割為 3(k+4)R(3,2)，應用**性質 1.4** 得證。
2. n=2(k+3)+1：當 k=1，建構 R(9,9)如**圖 4.17(a)**，利用**引理 2.7, 2.8** 得證。從 n=2(k+3)+1 推證 n=2(k+4)+1 時，R(9,2(k+4)+1)可分割成 R(9,2)+R(9, 2(k+3)+1)，利用**引理 2.5** 歸納得證。

		
圖 4.17(a) R(9,9)	圖 4.17(b) R(9,11)	圖 4.17(c) R(9,13)

定理 2：任意 R(m,n), m,n∈N 矩形可被至少(含) 1 個以上 L-tromino 填滿的條件，唯有當 3|(mn), 2≦m,n，且 R(3, 2k+1), R(2k+1, 3), k≧1 除外。

證明：

1. R(m,n), m, n∈N 所有符合 3|(mn)的條件，共可區分成下列情況，並分別證明之：
   (1) m 或 n=1：由**引理 2.4** 得知無法被 L-tromino 填滿。
   (2) m 或 n=2：由**引理 2.5** 得知可被 L-tromino 填滿。
   (3) m 或 n=3：由**引理 2.6** 得知 R(3, 2k+1)或 R(2k+1, 3), k≧1 無法被 L-tromino 填滿；由**性質 1.4** 得知 R(3, 2(k+1))或 R(2(k+1), 3), k≧1 可被 L-tromino 填滿。
   (4) 延伸前述條件的其他各種情況，經過分析歸納，可區分為下列 6 個群組(n≧m, k∈N)：
   群組 1：m=6(k-1)+2。群組 2：m=6(k-1)+4。群組 3：m=6(k-1)+5。
   群組 4：m=6k。群組 5：m=6k+1。群組 6：m=6k+3。
   在 R(m,n)，當 3|(mn)，求證是否皆可被 L-tromino 填滿？
2. 各群組的歸納證明如**表 4.5**：
   (1) 群組 1：**引理 2.5**，從 m=6(k-1)+2 推證 m=6k+2 時，R(6k+2,n)可分割成 R(6(k-1)+2,n)+R(6,n)。
   (2) 群組 2：**引理 2.7**，從 m=6(k-1)+4 推證 m=6k+4 時，R(6k+4,n)可分割成 R(6(k-1)+4,n)+R(6,n)。
   (3) 群組 3：**引理 2.8**，從 m=6(k-1)+5 推證 m=6k+5 時，R(6k+5,n)可分割成 R(6(k-1)+5,n)+R(6,n)。
   (4) 群組 4：**引理 2.9**，從 m=6k 推證 m=6(k+1)時，R(6(k+1),n)可分割成 R(6k,n)+R(6,n)。
   (5) 群組 5：**引理 2.10**，從 m=6k+1 推證 m=6(k+1)+1 時，R(6(k+1)+1,n)可分割成 R(6k+1,n)+R(6,n)。
   (6) 群組 6：**引理 2.11**，從 m=6k+3 推證 m=6(k+1)+3 時，R(6(k+1)+3,n)可分割成 R(6k+3,n)+R(6,n)。

應用引理 1.1，皆可歸納得證。

表 4.5 各群組的疊代歸納證明

群組 1	起始 m 值	2	8	14	6(k-1)+2 k∈N	6k+2 k∈N
		R(2, n)	R(8, n)	R(14, n)	R(6(k-1)+2, n)	R(6k+2 , n)
	引理 2.5	2×n	2×n 6×n	8×n 6×n	…	(6(k-1)+2)×n 6×n
群組 2	起始 m 值	4	10	16	6(k-1)+4 k∈N	6k+4 K∈N
		R(4, n)	R(10, n)	R(16, n)	R(6(k-1)+4, n)	R(6k+4 , n)
	引理 2.7	4×n	4×n 6×n	10×n 6×n	…	(6(k-1)+4)×n 6×n
群組 3	起始 m 值	5	11	17	6(k-1)+5 k∈N	6k+5 k∈N
		R(5, n)	R(11, n)	R(17, n)	R(6(k-1)+5, n)	R(6k+5 , n)
	引理 2.8	5×n	5×n 6×n	11×n 6×n	…	(6(k-1)+5)×n 6×n
群組 4	起始 m 值	6	12	18	6k k∈N	6(k+1) k∈N
		R(6, n)	R(12, n)	R(18, n)	R(6k, n)	R(6(k+1) , n)
	引理 2.9	6×n	6×n 6×n	12×n 6×n	…	6k×n 6×n
群組 5	起始 m 值	7	13	19	6k+1 k∈N	6(k+1)+1 k∈N
		R(7, n)	R(13, n)	R(19, n)	R(6k+1, n)	R((6k+1)+1 , n)
	引理 2.10	7×n	7×n 6×n	13×n 6×n	…	(6k+1)×n 6×n
群組 6	起始 m 值	9	15	21	6k+3 k∈N	6(k+1)+3 k∈N
		R(9, n)	R(15, n)	R(21, n)	R(6k+3, n)	R((6k+1)+3 , n)
	引理 2.11	9×n	9×n 6×n	15×n 6×n	…	(6k+3)×n 6×n

研究三：當 3|(mn-2)，填任意移除二格小正方形的二階缺陷矩形問題。

以下是研究三使用的符號註記說明：

一、 ☒ (或塗色為紅色)：R(m,n)中優先被任意移除一格小正方形所在的座標位置。

二、 註記為■的小正方形：表示當 R(m,n)任意移除一格註記為☒的小正方形後，若再移除任一格小正方形無法被 L-tromino 填滿的位置。

經過分析，得知類似 3|(mn), 3|(mn-1)的情況，利用圖形的上下、左右對稱特性，欲證明 R(m,n), 3|(mn-2)的填滿條件，任意移除一格註記為☒的小正方形位置，僅須討論 R(m,n)左上角落當 m,n 為偶數時，m/2 列、n/2 行以內的小正方形位置；或當 m,n 為奇數時，(m+1)/2 列、(n+1)/2 行以內的小正方形位置，即可類推到 R(m,n)的右上、左下、右下角落的對稱位置，且不失一般性。

由於 m=n, m,n∈N 的情況，僅存在 3|(mn)或 3|(mn-1)，僅須討論 m≠n，並可進一步區分成 3|(m-2)且 3|(n-1)或 3|(m-1)且 3|(n-2), m,n∈N 的情況。此外，R(m,n), 3|(mn-2), m, n∈N，解存在的條件與矩形旋轉 90 度後的 R(n,m)相同，故僅討論 n＞m 的情況。

引理 3.1：R(1,n)■■, n=3k+2, k∈N，無法被 L-tromino 填滿。

證明：明顯地，無法被 L-tromino 填滿。

引理 3.2：R(2,n), n=3k+1, k∈N，不存在當任意移除一格小正方形後，可再任意移除第二格小正方形且被 L-tromino 填滿的條件。

證明：

1. n=4：利用 M(2,2)■特性，建構**圖 4.18(a)~(c)**得證。

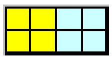
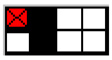
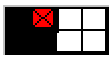
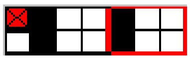
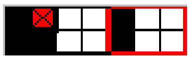
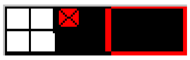
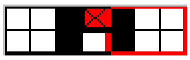
		

圖 4.18(a) R(2,4)	圖 4.18(b)	圖 4.18(c)

2. n=7：類似 n=4，將 R(2,7)■■分割成 R(2,4)■■+R(2,3)或 R(2,2)■+R(2,5)■，建構**圖 4.18(d)~(g)**得證。

			
4.18(d) R(2,7)■■	4.18(e)	4.18(f)	4.18(g)

3. n=10：延伸 n=7，將 R(2,10)■■分割成 R(2,7)■■+R(2,3)或 R(2,3)+R(2,7)■■或 R(2,5)■+R(2,5)■，建構**圖 4.18(h)~(m)**得證。

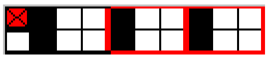
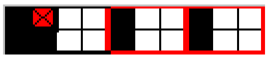
	

圖 4.18(h) R(2,10)■■	圖 4.18(i)	圖 4.18(j)

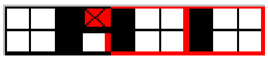
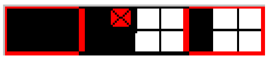
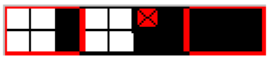

		

圖 4.18(k)	圖 4.18(l)	圖 4.18(m)

4. 由 n=4, 7, 10 證明矩形左上角落(由左至右的情況)的結果歸納得證：當 m=2, n=3k+1, k∈N 不存在當任意移除一格小正方形後，可再任意移除第二格小正方形且被 L-tromino 填滿的條件；且，解存在的條件，其移除第二格小正方形的位置必限制在非註記為■的小正方形。

   不能被 L-tromino 填滿的條件如下：

   (1) 當移除座標(--,y), y=3(k-1)+1, k, y∈N 一格小正方形後，若再任意移除 y=3(q-1)+2>3(k-1)+1 或 y=3(q-1)<3(k-1)+1, q∈N 座標的小正方形。
   (2) 當移除座標(--,y), y=3(k-1)+2, k, y∈N 一格小正方形後，若再任意移除 y=3(q-1)+2≧3(k-1)+2 或 y<3(k-1)+2, q∈N 座標的小正方形。
   (3) 當移除座標(--,y), y=3k, k, y∈N 一格小正方形後，若再任意移除 y≧3k 或 y=3(q-1)<3k, q∈N 座標的小正方形。

引理 3.3：R(4,n), n=3k+2, k∈N，當 n=5 不存在任意移除一格小正方形後，可再任意移除第二格小正方形且被 L-tromino 填滿的條件；當 n≧8 必存在移除一格小正方形後，可再任意移除第二格小正方形且被 L-tromino 填滿的條件，且其存在⊠的條件以 R(4,n)為例如**圖 4.19(a)~(d)**。

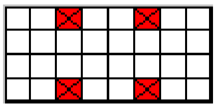


圖 4.19(a) R(4,8)■■

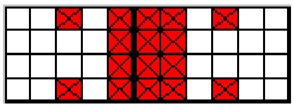


圖 4.19(b) R(4,11)■■

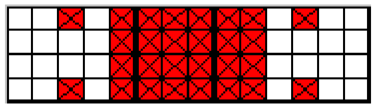


圖 4.19(c) R(4,14)■■

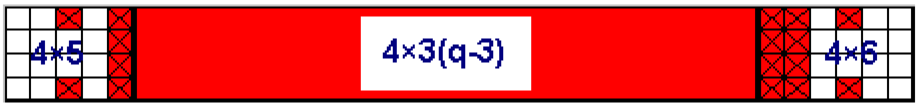


圖 4.19(d) R(4,3q+2)■■, q≧3, q∈N

證明：

1. n=5：利用 M(2,2)■特性，歸納**圖 4.19(e)** R(4,5)移除左上角落 6 個代表的填圖結果得證。

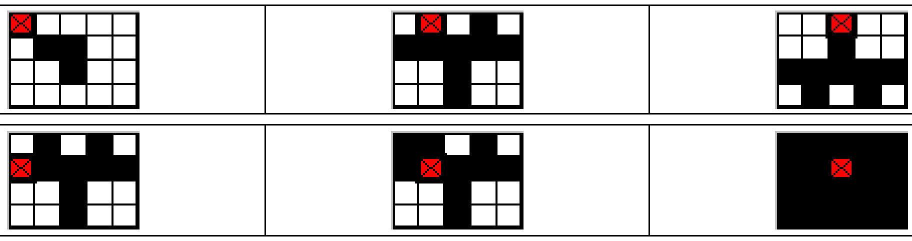
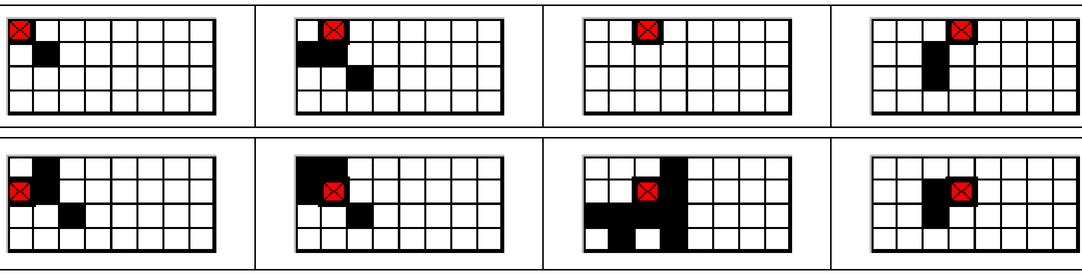


圖 4.19(e) R(4,5)■■

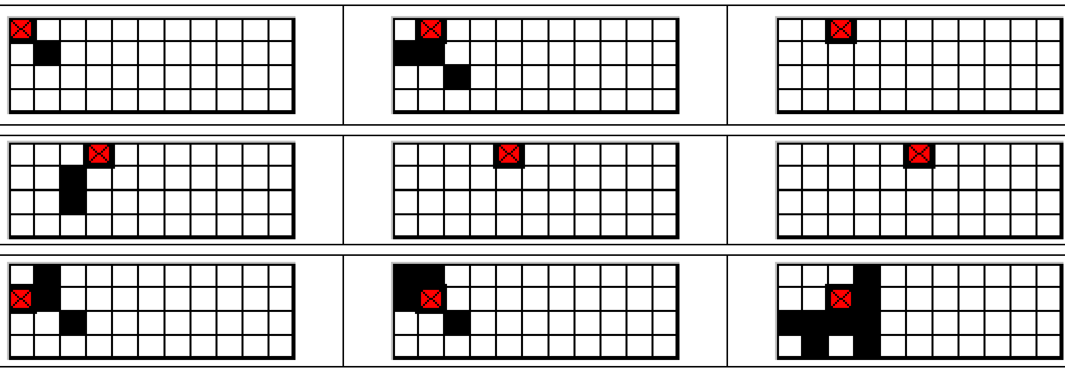
2. n=8：R(4,8)■■利用 R(4,4)■+R(4,4)■或 R(4,5)■■+R(4,3)的證明結果，檢查不可被填滿的情形，歸納**圖 4.19(f)** R(4,8)移除左上角落 8 個代表的填圖結果得證。

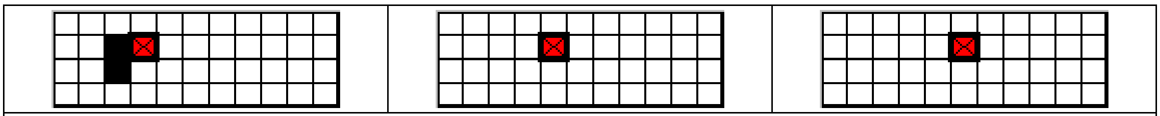


移除座標(1,3), (1,6), (4,3), (4,6)一格小正方形後，可再任意移除第二格小正方形且被 L-tromino 填滿。

圖 4.19(f) R(4,8)■■

3. n=11：R(4,11)■■利用 R(4,8)■■+R(4,3)、R(4,7)■+R(4,4)■的證明結果，歸納**圖 4.19(g)** R(4,11)移除左上角落 12 個代表的填圖結果得證。
4. n≧11：利用 R(4,11)■■分割成 R(4,8)■■+R(4,3)、R(4,7)■+R(4,4)■，R(4,3q+2)■■, q≧3, q∈N 可依次分割成 R(4,3(q-1)+2)■■+R(4,3)、R(4, 3(q-1)+1)■+R(4,4)■進行證明，故歸納得證；並且，移除座標(1,3), (1,n-2), (4,3), (4,n-2), (--,5≦y≦n-4),一格小正方形後(**圖 4.19(c)~(d)**)，可再任意移除第二格小正方形且被 L-tromino 填滿。





移除座標(1,3), (1,9), (4,3), (4,9), (--,5≦y≦n-4),一格小正方形後，可再任意移除第二格小正方形且被 L-tromino 填滿。

圖 4.19(g) R(4,11)■■

引理 3.4：R(5,n), n=3(k+1)+1, k∈N，不存在任意移除一格小正方形後，可再任意移除第二格小正方形且被 L-tromino 填滿的條件。

證明：

1. n=7：利用 M(2,2)■特性及類似 R(5,5)■塗色法證明方法，歸納**圖 4.20(a)** R(5,7)移除左上角落 12 個代表的填圖結果得證。

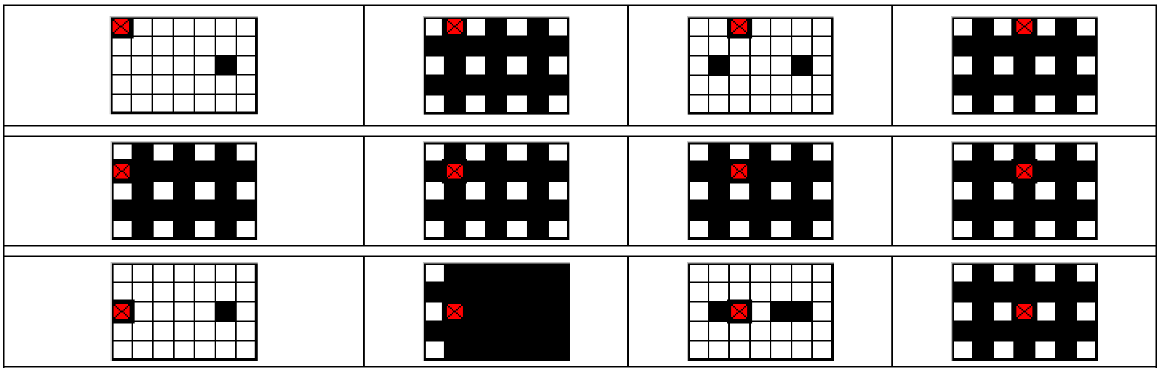


圖 4.20(a) R(5,7)■■

2. n=10：R(5,10)■■可分割成 R(5,5)■+R(5,5)■、R(5,4)■■+R(5,6)、或 R(5,2)■+R(5,8)■，利用移除 1 格或 2 格小正方形的證明結果，將此三條件可填滿的情形取聯集，檢查不可被填滿的情形，歸納**圖 4.20(b)** R(5,10)移除左上角落 15 個代表的填圖結果得證。

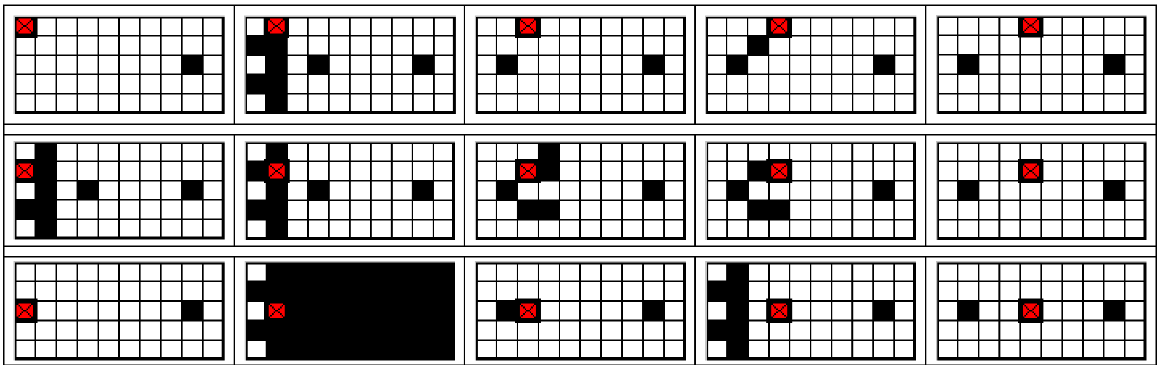
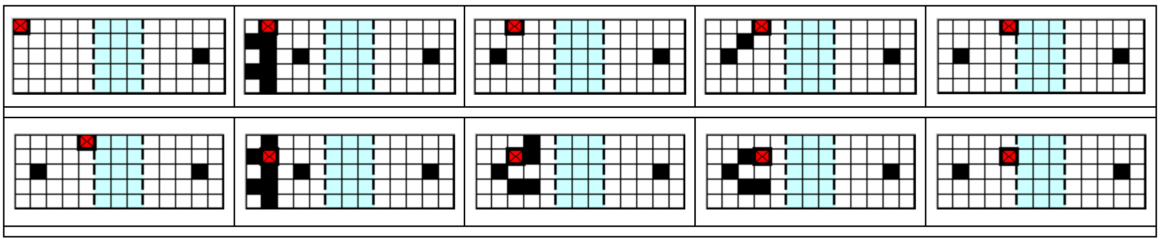


圖 4.20(b) R(5,10)■■

3. n=13：R(5,13)■■可分割成 R(5,5)■+R(5,8)■、R(5,8)■+R(5,5)■、R(5,7)■■+R(5,6)，將此三條件可填滿的情形取聯集，再檢查不可被填滿的情形，歸納**圖 4.20(c)** R(5,13)移除左上角落 15 個代表的填圖結果得證。



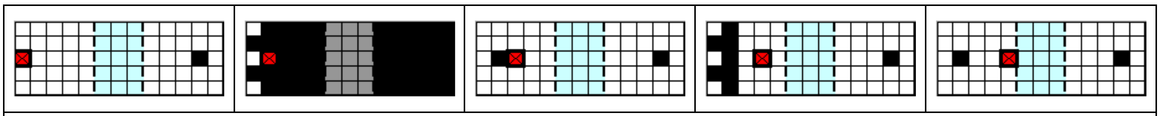


圖 4.20(c) R(5,13)■■

4. n≧13：由於 R(5,3(q+1)+1)■■ 可分割成 R(5,3(q-1)+1)■■+R(5,6) 及 R(5,3(q-1)+2)■+R(5,5)■, q≧3, q∈N，類似**圖 4.20(c)**歸納得證。

引理 3.5：R(7,n), n=3(k+1)+2, k∈N，必存在移除一格小正方形後，可再任意移除第二格小正方形且被 L-tromino 填滿的條件(**當 n≧7**)，且其存在■的條件以 R(7,n)為例如**圖 4.21(a)~(d)**。

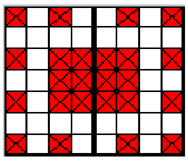


圖 4.21(a) R(7,8)■■

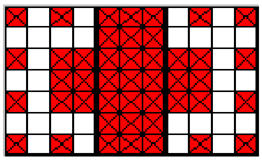


圖 4.21(b) R(7,11)■■

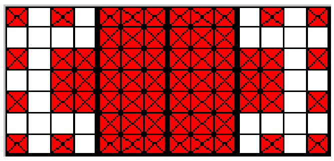


圖 4.21(c) R(7,14)■■

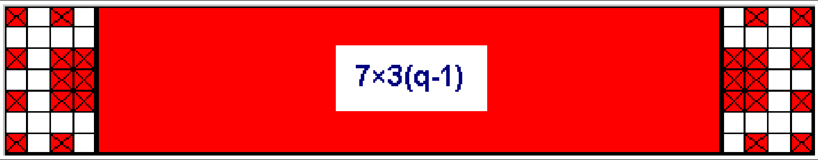
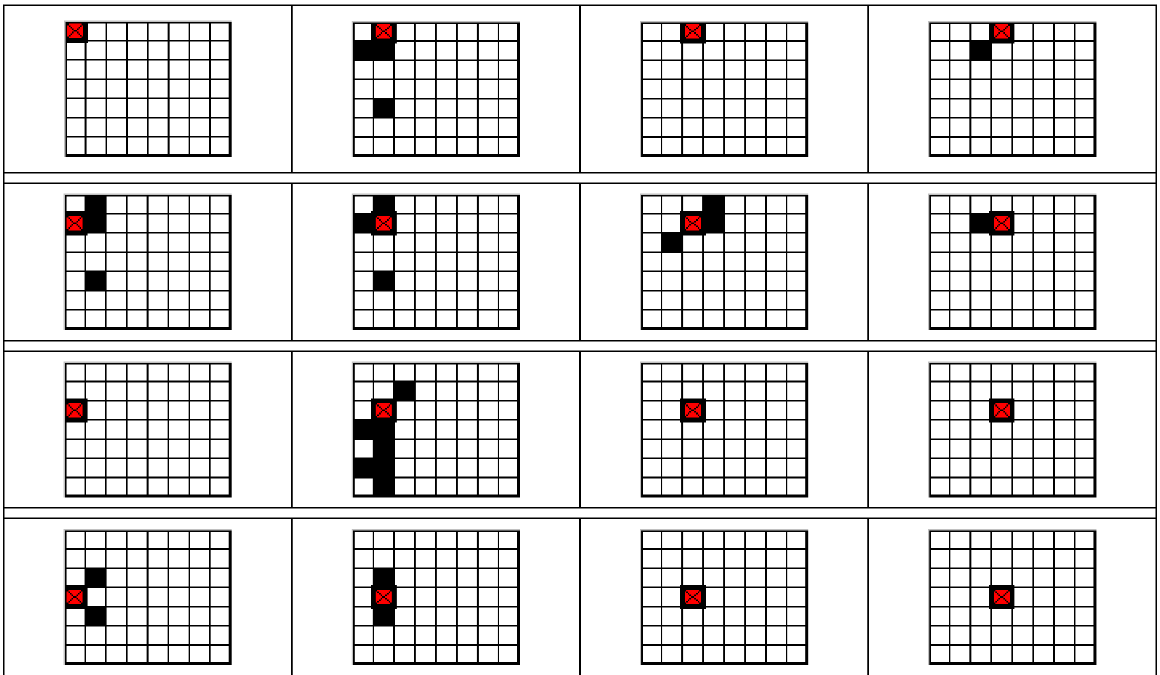


圖 4.21(d) R(7,3(q+1)+2)■■, q≧2, q∈N

證明：

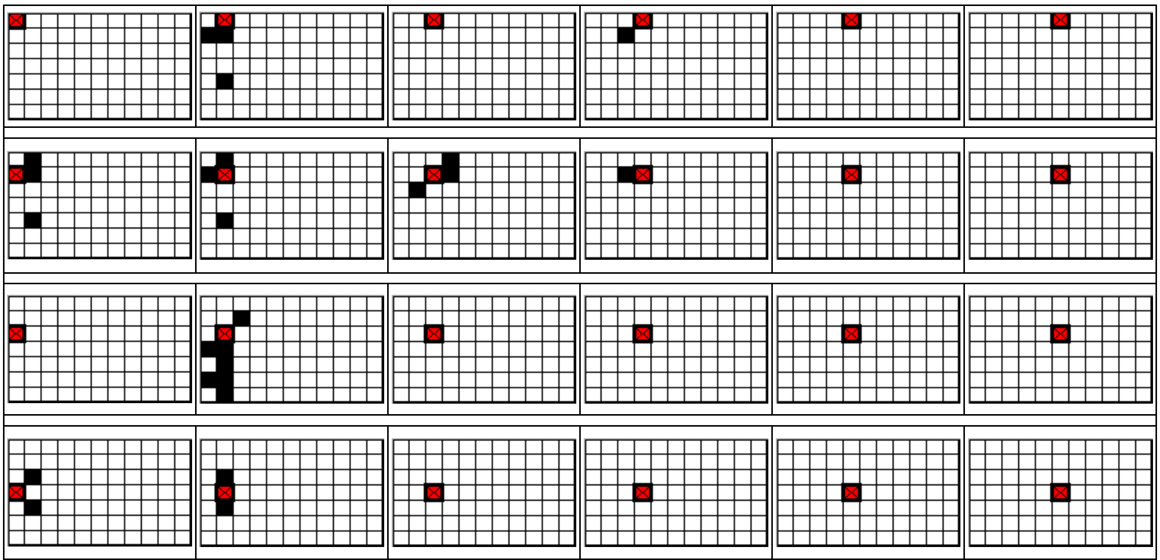
1. n=8：R(7,8)■■可分割成 R(7,4)■+R(7,4)■、R(4,8)■■+R(3,8)、R(5,8)■+R(2,8)■，檢查不可被填滿的情形，歸納**圖 4.21(e)** R(7,8)移除左上角落 16 個代表的填圖結果得證。



移除座標(1,1), (1,3) (1,6), (1,8), (3,1), (3,8), (5,1), (5,8), (7,1), (7,3), (7,6), (7,8), (3≦x≦5, 3≦y≦6)一格小正方形後，可再任意移除第二格小正方形且被 L-tromino 填滿。

圖 4.21(e) R(7,8)■■

2. n=11：R(7,11)■■可分割成 R(7,5)■■+R(7,6)、R(7,4)■+R(7,7)■、R(2,11)■+R(5,11)■，將此三條件可填滿的情形取聯集，檢查不可被填滿的情形，歸納**圖 4.21(f)** R(7,11)移除左上角落 24 個代表的填圖結果得證。



移除座標(1,1), (1,3) (1,9), (1,11), (3,1), (3,11), (5,1), (5,11), (7,1), (7,3), (7,9), (7,11), (x≦2, 5≦y≦7), (x≧6, 5≦y≦7), (3≦x≦5, 3≦y≦9)一格小正方形後，可再任意移除第二格小正方形且被 L-tromino 填滿。

圖 4.21(f) R(7,11)■■

3. n≧11：R(7,3(q+1)+2)■■, q≧2, q∈N 可分割成 R(7,3(q-1)+2)■■+R(7,6)、R(7, 3(q-1)+1)■+R(7,7)■，類推 n=8, 11 的證明過程歸納得證；並且，移除座標(1,1), (1,3) (1,n-2), (1,n), (3,1), (3,n), (5,1), (5,n), (7,1), (7,3), (7,n-2), (7,n), (x≦2, 5≦y≦n-4), (x≧6, 5≦y≦n-4), (3≦x≦5, 3≦y≦n-2)一格小正方形後(**圖 4.21(b)~(d)**)，可再任意移除第二格小正方形且被 L-tromino 填滿。

引理 3.6：R(8,n), n=3(k+2)+1, k∈N，必存在移除一格小正方形後，可再任意移除第二格小正方形且被 L-tromino 填滿的條件，且其存在⊠的條件以 R(8,n)為例如**圖 4.22(a)~(d)**。

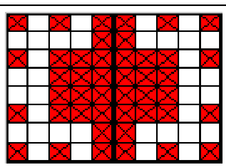


圖 4.22(a) R(8,10)■■

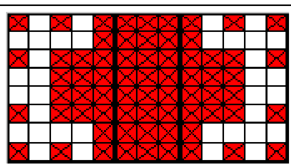


圖 4.22(b) R(8,13)■■

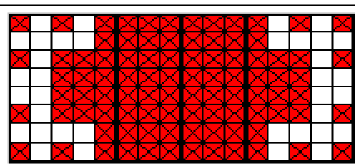


圖 5.22(c) R(8,16)■■

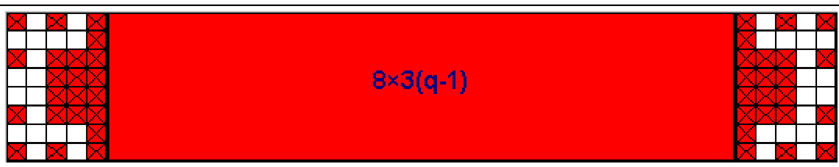
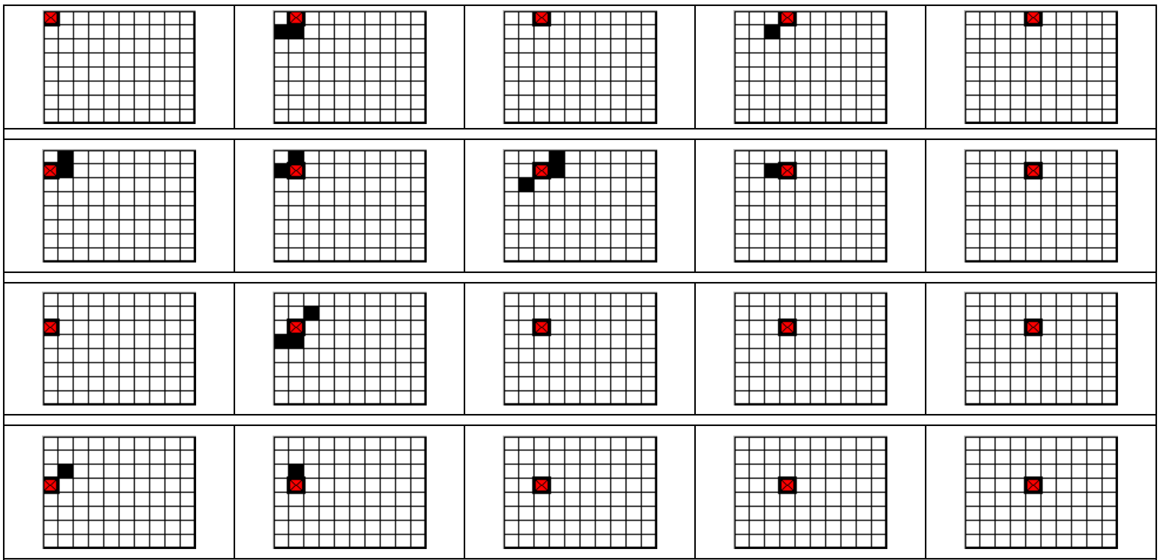


圖 4.22(d) R(8,3(q+2)+1)■■, q≧1, q∈N

證明：

1. n=10：R(8,10)■■可分割成 R(8,5)■+R(8,5)■或 R(8,7)■■+R(8,3)，利用**引理 3.3** 的證明結果，歸納**圖 4.22(e)** R(8,10)移除左上角落 20 個代表的填圖結果得證。



移除座標(1,1), (1,3) (1,8), (1,10), (3,1), (3,10), (6,1), (6,10), (8,1), (8,3), (8,8), (8,10), (x≦2, 5≦y≦6), (x≧7, 5≦y≦6), (3≦x≦6, 3≦y≦8)一格小正方形後，可再任意移除第二格小正方形且被 L-tromino 填滿。

圖 4.22(e) R(8,10)■■

2. n ＞ 10 ： R(8,3(q+2)+1)■■, q∈N 可分割成 R(8,3(q+1)+1)■■+R(8,3) 、R(8, 3(q-2)+2)■+R(8,8)■，類推 n=10 的證明過程歸納得證得證；並且，移除座標(1,1), (1,3) (1,n-2), (1,n), (3,1), (3,n), (6,1), (6,n), (8,1), (8,3), (8,n-2), (8,n) , (x≦2, 5≦y≦n-4), (x≧7, 5≦y≦n-4), (3≦x≦6, 3≦y≦n-2)一格小正方形後(**圖 4.22(b)~(d)**)，可再任意移除第二格小正方形且被 L-tromino 填滿。

引理 3.7：R(10,n), n=3(k+2)+2, k∈N，必存在移除一格小正方形後，可再任意移除第二格小正方形且被 L-tromino 填滿的條件，且其存在☒的條件以 R(10,n)為例如**圖 4.23(a)~(d)**。

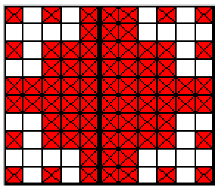


圖 4.23(a) R(10,11)■■

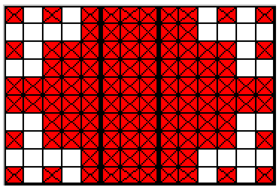


圖 4.23(b) R(10,14)■■

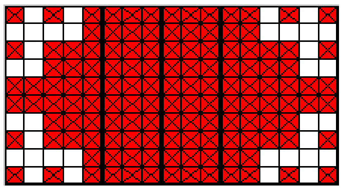


圖 4.23(c) R(10,17)■■

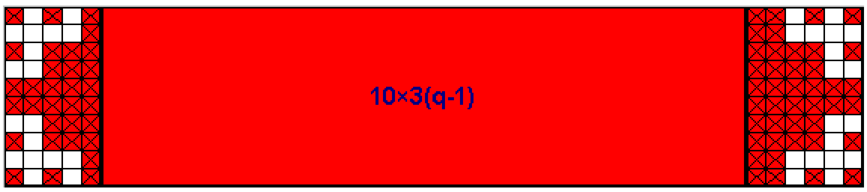
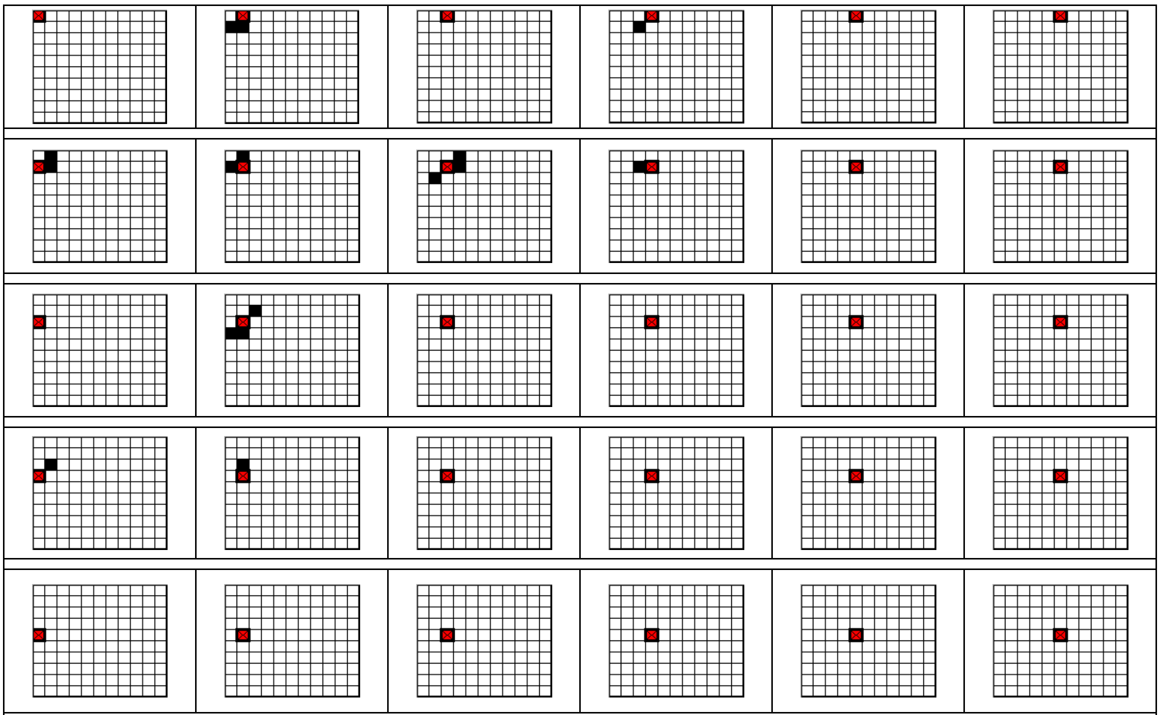


圖 4.23(d) R(10,3(q+2)+2)■■, q≧1, q∈N

證明：

1. n=11：R(10,11)■■可分割成 R(10,8)■■+R(10,3)或 R(10,7)■+R(10,4)■，歸納**圖 4.23(e)** R(10,11)移除左上角落 30 個代表的填圖結果得證。



移除座標(1,1), (1,3) (1,9), (1,11), (3,1), (3,11), (8,1), (8,11), (10,1), (10,3), (10,9), (10,11), (x≦2, 5≦y≦7), (x≧9, 5≦y≦7), (3≦x≦4 or 7≦x≦8, 3≦y≦9), (5≦x≦6, --)一格小正方形後，可再任意移除第二格小正方形且被 L-tromino 填滿。

圖 4.23(e) R(10,11)■■

2. n≧11 ： R(10,3(q+2)+2)■■, q∈N 可分割成 R(10,3(q+1)+2)■■+R(10,3)、R(10, 3(q+1)+1)■+R(10,4)■類推 n=11 的證明過程歸納得證；並且，移除座標(1,1), (1,3) (1,n-2), (1,n), (3,1), (3,n), (8,1), (8,n), (10,1), (10,3), (10,n-2), (10,n), (x≦2, 5≦y≦n-4), (x≧9, 5≦y≦n-4), (3≦x≦4 or 7≦x≦8, 3≦y≦n-2), (5≦x≦6, --)一格小正方形後(圖 4.23(b)~(d))，可再任意移除第二格小正方形且被 L-tromino 填滿。

引理 3.8：R(11,n), n=3(k+3)+1, k∈N，必存在移除一格小正方形後，可再任意移除第二格小正方形且被 L-tromino 填滿的條件，且其存在☒的條件以 R(11,n)為例如圖 4.24(a)~(c)。

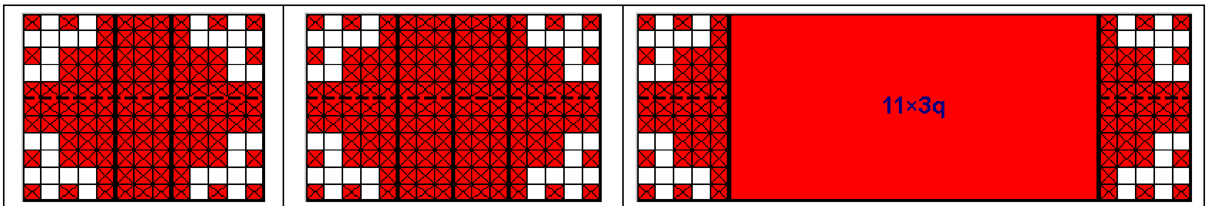


圖 4.24(a) R(11,13)■■	圖 4.24(b) R(11,16)■■	圖 4.24(c) R(11,3(q+3)+1))■■, q≧1, q∈N

證明：

R(11,3(q+3)+1)■■, q∈N 可分割成 R(11,3(q+1)+1)■■+R(11,6) 、 R(11,3q+2)■+ R(11,8)■，類似引理 3.7 的證明歸納得證；並且，移除座標(1,1), (1,3) (1,n-2), (1,n), (3,1), (3,n), (9,1), (9,n), (11,1), (11,3), (11,n-2), (11,n), (x≦2, 5≦y≦n-4), (x≧10, 5≦y≦n-4), (3≦x≦4 or 8≦x≦9, 3≦y≦n-2), (5≦x≦7, --)一格小正方形後(圖 4.24(a)~(c))，可再任意移除第二格小正方形且被 L-tromino 填滿。

定理 3.1：任意 R(m,n), 3|(mn-2), 10≦m, n∈N 二階缺陷矩形可被 L-tromino 填滿的條件，若不論移除二格小正方形的位置，若且唯若至少移除一格圖 4.25(a)或圖 4.25(b)註記為☒(或紅色)的小正方形。

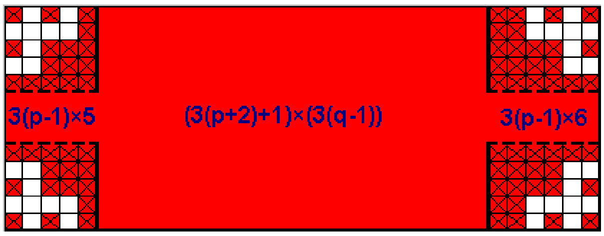


圖 4.25(a) R(3(p+2)+1,3(q+2)+2)■■, p,q≧1, p,q∈N

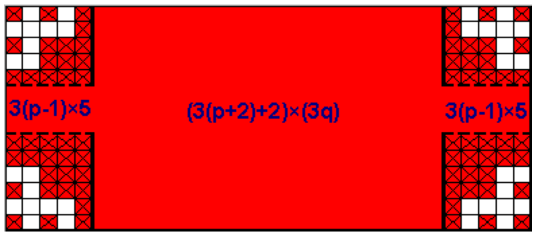


圖 4.25(b) R(3(p+2)+2,3(q+3)+1)■■, p,q≧1, p,q∈N

證明：

經過分析歸納，圖 4.25(a)~(b)區分成下列 4 個群組，並利用左右及上下對稱鏡射的特性、引理 1.1、定理 1，疊代歸納得證(p,k∈N)：

1. 群組 1：m=6p+4, n=6k+5。由引理 3.7 圖 4.23(a) R(10,11)■■，歸納如表 4.6 得證。
2. 群組 2：m=6p+5, n=6k+7。由引理 3.8 圖 4.24(a) R(11,13)■■，歸納如表 4.7 得證。
3. 群組 3：m=6p+7, n=6k+8,。R(13,14)■■可分割成 R(10,14)■■+R(3,14)，由引理 3.7 圖 4.23(b) 得證 R(13,14)■■可被 L-tromino 填滿，歸納如表 4.8 得證。
4. 群組 4：m=6p+8, n=6k+10。R(14,16)■■可分割成 R(11,16)■■+R(3,16)，由引理 3.8 圖 4.24(b) 得證 R(14,16)■■可被 L-tromino 填滿，歸納如表 4.9 得證。

表 4.6 群組 1 的疊代歸納證明

起始 n 值 / m	11	17	23	6k+5 k∈N	6(k+1)+5 k∈N
10	R(10,11) 10×11	R(10, 17) 10×11 10×6	R(10, 23) 10×17 10×6	R(10, 6k+5) …	R(10,6(k+1)+5) 10×(6k+5) 10×6
16	R(16,11) 10×11 6×11	R(16, 17) 10×11 10×6 6×11 6×6	R(16, 23) 10×17 10×6 6×17 6×6	R(16, 6k+5) …	R(16,6(k+1)+5) 10×(6k+5) 10×6 6×(6k+5) 6×6
22	R(22,11) 16×11 6×11	R(22, 17) 16×11 16×6 6×11 6×6	R(22, 23) 16×17 16×6 6×17 6×6	R(22, 6k+5) …	R(22,6(k+1)+5) 16×(6k+5) 16×6 6×(6k+5) 6×6
6p+4 p∈N	R(6p+4, 11) …	R(6p+4, 17) …	R(6p+4, 23) …	R(6p+4, 6k+5) …	R(…, …) …
6(p+1) +4 p∈N	R(6(p+1)+4, 11) (6p+4)× 11 6×11	R(6(p+1)+4, 17) (6p+4)× 11 (6p+4)×6 6×11 6×6	R(6(p+1)+4, 23) (6p+4)× 17 (6p+4)×6 6×17 6×6	R(6(p+1)+4, 6k+5) …	R(6(p+1)+4, 6(k+1)+5) (6p+4)×(6k+5) (6p+4)×6 6×(6k+5) 6×6

定理 3.2：對任意 R(m,n), 3|(mn-2), 7≦m, n∈N 二階缺陷矩形，若至少移除一格圖 4.26(a)代表矩形左上角落註記為■的小正方形或圖 4.26(b)矩形對應四個角落註記為白色的小正方形，則必存在無法被 L-tromino 填滿的條件。

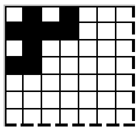
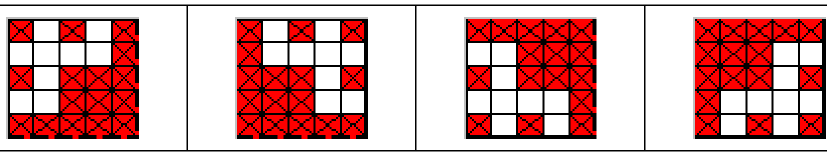
	

圖 4.26(a)	圖 4.26(b)

證明：

經過分析，共有 4 種情況(k∈N; p,q∈N)：

1. 當 m 或 n≧7，m, n=3(k+1)+2，如引理 **3.5**。
2. 當 m 或 n≧8，m, n=3(k+2)+1，如引理 **3.6**。
3. 當 m 或 n≧10，m=3(p+2)+1, n=3(q+2)+2，如定理 **3.1**。
4. 當 m 或 n≧11，m=3(p+2)+2, n=3(q+3)+1，如定理 **3.1**。

表 4.7 群組 2 的疊代歸納證明

起始 n 值 / m	13	19	25	6k+7 k∈N	6(k+1)+7 k∈N
11	R(11,13) 11×13	R(11, 19) 11×13 | 11×6	R(11, 25) 11×19 | 11×6	R(11, 6k+7) …	R(11,6(k+1)+7) 11×(6k+7) | 11×6
17	R(17,13) 11×13 6×13	R(17,19) 11×13 | 11×6 6×13 | 6×6	R(17, 25) 11×19 | 11×6 6×19 | 6×6	R(17, 6k+7) …	R(17,6(k+1)+7) 11×(6k+7) | 11×6 6×(6k+7) | 6×6
23	R(23,13) 17×13 6×13	R(23, 19) 17×13 | 17×6 6×13 | 6×6	R(23, 25) 17×19 | 17×6 6×19 | 6×6	R(23, 6K+7) …	R(23,6(k+1)+7) 17×(6k+7) | 17×6 6×(6k+7) | 6×6
6p+5 p∈N	R(6p+5, 13) …	R(6p+5, 19) …	R(6p+5, 25) …	R(6p+5, 6k+7) …	R(…, …) …
6(p+1) +5 p∈N	R(6(p+1)+5, 13) (6p+5)×13 6×13	R(6(p+1)+5, 19) (6p+5)×13 | (6p+5)×6 6×13 | 6×6	R(6(p+1)+5, 25) (6p+5)×19 | (6p+5)×6 6×19 | 6×6	R(6(p+1)+5, 6k+7) …	R(6(p+1)+5, 6(k+1)+7) (6p+5)×(6k+7) | (6p+5)×6 6×(6k+7) | 6×6

表 4.8 群組 3 的疊代歸納證明

起始 n 值 / m	14	20	26	6k+8 k∈N	6(k+1)+8 k∈N
13	R(13,14) 13×14	R(13, 20) 13×14 | 13×6	R(13, 26) 13×20 | 13×6	R(13, 6k+8) …	R(13,6(k+1)+8) 13×(6k+8) | 13×6
19	R(19,14) 13×14 6×14	R(19, 20) 13×14 | 13×6 6×14 | 6×6	R(19, 26) 13×20 | 13×6 6×20 | 6×6	R(19, 6k+8) …	R(19,6(k+1)+8 13×(6k+8) | 13×6 6×(6k+8) | 6×6
25	R(25,14) 19×14 6×14	R(25, 20) 19×14 | 19×6 6×14 | 6×6	R(25, 26) 19×20 | 19×6 6×20 | 6×6	R(25, 6k+8) …	R(25,6(k+1)+8) 19×(6k+8) | 19×6 6×(6k+8) | 6×6
6p+7 p∈N	R(6p+7, 14) …	R(6p+7, 20) …	R(6p+7, 26) …	R(6p+7, 6k+8) …	R(…, …) …
6(p+1) +7 p∈N	R(6(p+1)+7, 14) (6p+7)×14 6×14	R(6(p+1)+7, 20) (6p+7)×14 | (6p+7)×6 6×14 | 6×6	R(6(p+1)+7, 26) (6p+7)×20 | (6p+7)×6 6×20 | 6×6	R(6(p+1)+7, 6k+8) …	R(6(p+1)+7, 6(k+1)+8) (6p+7)×(6k+8) | (6p+7)×6 6×(6k+8) | 6×6

表 4.9 群組 4 的疊代歸納證明

起始 n 值 / m	16	22	28	6k+10 k∈N	6(k+1)+10 k∈N
14	R(14,16) 14×16	R(14, 22) 14×16 | 14×6	R(14, 28) 14×22 | 14×6	R(14, 6k+10) …	R(14,6(k+1)+10) 14×(6K+10) | 14×6
20	R(20,16) 14×16 6×16	R(20, 22) 14×16 | 14×6 6×16 | 6×6	R(20, 28) 14×22 | 14×6 6×22 | 6×6	R(20, 6k+10) …	R(20,6(k+1)+10) 14×(6K+10) | 14×6 6×(6K+10) | 6×6
26	R(26,16) 20×16 6×16	R(26, 22) 20×16 | 20×6 6×16 | 6×6	R(26, 28) 20×22 | 20×6 6×22 | 6×6	R(26, 6k+10) …	R(26,6(k+1)+10) 20×(6K+10) | 20×6 6×(6K+10) | 6×6
6p+8 p∈N	R(6p+8,16) …	R(6p+8, 22) …	R(6p+8, 28) …	R(6p+8, 6k+10) …	R(…, …) …
6(p+1)+8 p∈N	R(6(p+1)+8,16) (6p+8)×16 6×16	R(6(p+1)+8, 22) (6p+8)×16 | (6p+8)×6 6×16 | 6×6	R(6(p+1)+8, 28) (6p+8)×22 | (6p+8)×6 6×22 | 6×6	R(6(p+1)+8, 6k+10) …	R(6(p+1)+8, ,6(k+1)+10) (6p+8)×(6k+10) | (6p+8)×6 6×(6k+10) | 6×6

推理 3.3：任意二階多米諾骨牌缺陷矩形(Domino-deficient rectangle) R(m,n)，當 3|(mn-2), m, n≧4 時，移除 Domino 的位置若在{(1, 2), (2, 2)}, {(2, 1), (2, 2)}, {(2, 3), (2, 4)}, {(3, 2), (4, 2)}及其上下、左右對稱的其他 3 個角落共 16 個位置，無法被 L-tromino 填滿(圖 4.27)。

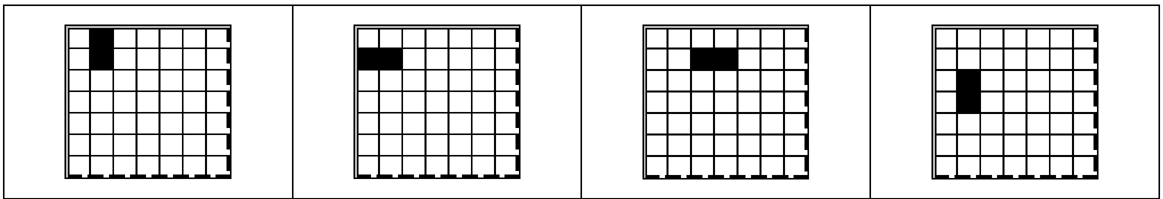


圖 4.27

證明：

經過分析，共有 3 種情況(k∈N; m, n∈N)：

1. 當 m 或 n=4，m, n=3k+2，如引理 3.3。
2. 當 m 或 n=5，m, n=3(k+1)+1，如引理 3.4。
3. 當 m 或 n≧7，3|(mn-2)，如定理 3.2。

推理 3.4：任意二階歪斜多米諾骨牌缺陷矩形(Skew-domino-deficient rectangle) R(m,n)，當 3|(mn-2), m, n≧4 時，移除 Skew-domino 的位置若在{(2, 1), (1, 2)}, {(2, 3), (1, 4)}, {(3, 2), (2, 3)}, {(4, 1), (3, 2)}及其上下、左右對稱的其他 3 個角落共 16 個位置，無法被 L-tromino 填滿(圖 4.28)。

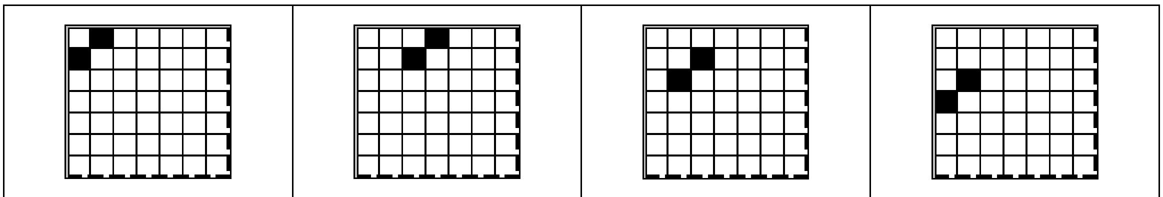


圖 4.28

證明：

類似推理 3.3，共有 3 種情況(k∈N; m, n∈N)：

1. 當 m 或 n=4，m, n=3k+2，如引理 3.3。
2. 當 m 或 n=5，m, n=3(k+1)+1，如引理 3.4。
3. 當 m 或 n≧7，3|(mn-2)，如定理 3.2。

伍、研究結果

一、本研究獲致下列重要結果：

(一) 引理 1.1：R(6,t)或 R(t,6), t≧2, t∈N，可被 2t 個 L-tromino 填滿。

(二) 定理 1：任意 R(m,n), m,n∈N 缺陷矩形可被至少(含) 1 個以上 L-tromino 填滿的條件，若不論移除一格小正方形的位置，3|(mn-1), 2≦m 或 n 一階缺陷矩形可被填滿的條件，若且唯若：(a) 任一邊邊長不小於 2，除非兩邊同時等於 2；(b) m 或 n≠5。

(三) 定理 2：任意 R(m,n), m,n∈N 矩形可被至少(含) 1 個以上 L-tromino 填滿的條件，唯有當 3|mn, 2≦m,n，且 R(3, 2k+1), R(2k+1, 3), k≧1 除外。

(四) 定理 3.1：任意 R(m,n), 3|(mn-2), 10≦m, n∈N 二階缺陷矩形可被 L-tromino 填滿的條件，若不論移除二格小正方形的位置，若且唯若至少移除一格圖 4.25(a)或圖 4.25(b)註記為☒ (或紅色)的小正方形。

(五) 定理 3.2：對任意 R(m,n), 3|(mn-2), 7≦m, n∈N 二階缺陷矩形，若至少移除一格圖 4.26(a)代表矩形左上角落註記為■的小正方形或圖 4.26(b)矩形對應四個角落註記為白色的小正方形，則必存在無法被 L-tromino 填滿的條件。

(六) 推理 3.3：任意二階多米諾骨牌缺陷矩形(Domino-deficient rectangle) R(m,n)，當 3|(mn-2), m, n≧4 時，移除 Domino 的位置若在{(1, 2), (2, 2)}, {(2, 1), (2, 2)}, {(2, 3), (2, 4)}, {(3, 2), (4, 2)}及其上下、左右對稱的其他 3 個角落共 16 個位置，無法被 L-tromino 填滿(圖 4.27)。

(七) 推理 3.4：任意二階歪斜多米諾骨牌缺陷矩形(Skew-domino-deficient rectangle) R(m,n)，當 3|(mn-2), m, n≧4 時，移除 Skew-domino 的位置若在{(2, 1), (1, 2)}, {(2, 3), (1, 4)}, {(3, 2), (2, 3)}, {(4, 1), (3, 2)}及其上下、左右對稱的其他 3 個角落共 16 個位置，無法被 L-tromino 填滿(圖 4.28)。

二、本研究獲致下列延伸結果：

(一) 性質 1.1：R(0,0)可被 0 個 L-tromino 填滿。

(二) 性質 1.2：R(1,1)▪可被 0 個 L-tromino 填滿。

(三) 性質 1.3：M(2,2)▪，可依圖形的上下、左右對稱特性，使用 1 個 L-tromino 填滿，共有 4 種填滿情況，如圖 4.1(b)。

(四) 性質 1.4：R(2,3)或 R(3,2)可被 2 個 L-tromino 填滿，如圖 4.1(c)；R(2,6)或 R(6,2)可被 4 個 L-tromino 填滿，如圖 4.1(d)；R(3,6)或 R(6,3)可被 6 個 L-tromino 填滿，如圖 4.1(e)。

(五) 性質 1.5：$M(2^k,2^k)^{\llcorner}$可依圖形的上下、左右對稱特性，使用 k 階重複、$(2^{(k-1)})^2$ 個 L-tromino 排列形成 $R(2^k,2^k)^{\llcorner}$，共有 4 種情況。

(六) 性質 1.6：R(1,2)▪▪、R(2,1)▪▪可被 0 個 L-tromino 填滿。

(七) 任意 R(m,n), 2≦m,n, m,n∈N 缺陷矩形，當 3|(mn-1)，若不論移除一格小正方形的位置，其不滿足定理 2 的例外條件可被 L-tromino 填滿：

1. 當 m=2, n≧5, n=3(k-1)+2, n∈N，移除座標(1, 3k), (2, 3k), k∈N的一格小正方形除外的任何一格小正方形皆可被 L-tromino 填滿。
2. 當 n=2, m≧5, m=3(k-1)+2, m∈N，移除座標(3k, 1), (3k, 2), k∈N的一格小正方形除外的任何一格小正方形皆可被 L-tromino 填滿。
3. 當 R(m,n)=R(5,5)，移除圖 4.2(a)任一格註記為黑色或 1, 3, 6 位置的小正方形可被 L-tromino 填滿。
4. 當 m=5, n≧8, n=3(k-1)+2, n∈N，移除座標(m, n) = (3, 2)、(3, n-1)除外之任一格小正方形可被 L-tromino 填滿。
5. 當 n=5, m≧8, m=3(k-1)+2, m∈N，移除座標(m, n) = (2, 3)、(m-1, 3) 除外之任一格小正方形可被 L-tromino 填滿。

(八) 不滿足定理 3.1 條件的任意 R(m,n), m,n∈N 二階缺陷矩形可被 L-tromino 填滿的條件，若不論移除二格小正方形的位置，3|(mn-2), m 或 n＜10 二階缺陷矩形可被填滿的條件，若且唯若:

1. 符合性質 1.6 的條件，或
2. m 或 n≠2；m 或 n≠5，或
3. (a)符合引理 3.3 圖 4.19(a)~(d) (以 m=4 為例)；(b)符合引理 3.5 圖 4.21(a)~(d) (以 m=7 為例)；(c) 符合引理 3.6 圖 4.22(a)~(d) (以 m=8 為例)，至少移除一格圖內註記為 (或紅色)的小正方形。同理，R(m,n)的轉秩對應 R(n,m)於相同條件時亦同。

(九) 研究三完整解出二階缺陷矩形可被 L-tromino 填滿或不能填滿的所有解的限制條件，詳見研究過程的圖表及相關說明。

陸、討論與結論

一、對任意 R(m,n), m,n∈N 二階缺陷矩形，3|(mn-2), 10≦m, n，若不論移除二格小正方形的位置，可被填滿的條件為至少移除一格圖 4.25(a)或圖 4.25(b)註記為 (或紅色)的小正方形。

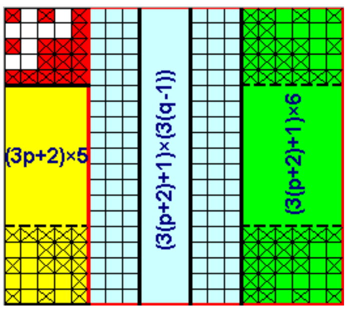
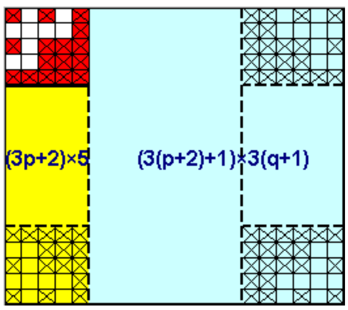
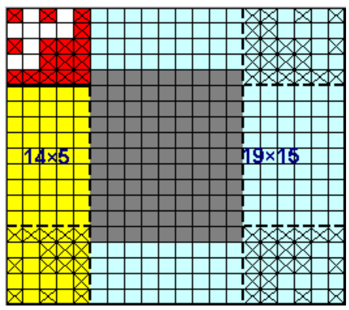
		

圖 6.1(a)	圖 6.1(b)	圖 6.1(c) R(19, 20)

圖 6.1 R(3(p+2)+1,3(q+2)+2), p,q≧1, p,q∈N

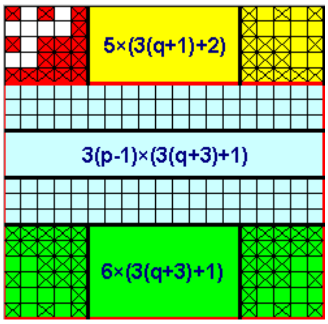


圖 6.2(a)

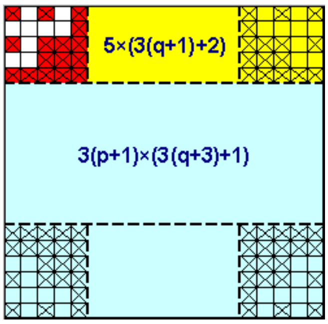


圖 6.2(b)

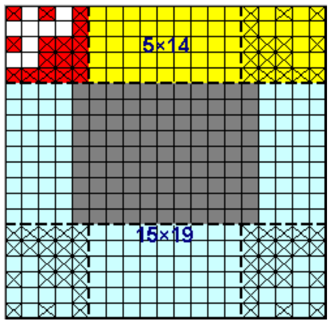


圖 6.2(c) R(20, 19)

圖 6.2 $R(3(p+2)+2,3(q+3)+1)$, $p,q\geqq 1$, $p,q\in N$

(一) 在不失一般性原則下，以矩形的左上角 R(5,5)區域為代表，若選擇移除一格**圖 6.1(a)**註記為☒ (或紅色)的小正方形，則因 R(5,5)與黃色區域的 R(3p+2,5)合併為二階缺陷矩形，其符合解的條件在研究三 m=5 的情況已經討論過。觀察**圖 6.1(a)**剩餘的子矩形，符合 3|mn 且可被 L-tromino 填滿，因此可重新組構成**圖 6.1(b)**。同理，針對**圖 4.25(b)**的情況，可分割成**圖 6.2(a)**及重新組構成**圖 6.2(b)**。

(二) 從**圖 6.1(b)**和**圖 6.2(b)**發現：對任意二階缺陷矩形，3|(mn-2), $10\leqq m, n$，若不論移除二格小正方形的位置，僅須探討**圖 6.1(b)** $R(3(p+2)+1,5)$或**圖 6.2(b)** $R(5, 3(q+3)+1)$, $p,q\geqq 1$, $p,q\in N$ 的子矩形即可，且可更進一步簡化為移除第一格小正方形係僅限於子矩形左上角 R(5,5)區域內即不失解的一般性。

(三) 從**圖 6.1(c)**和**圖 6.2(c)**發現：若分別在圖內子矩形 $R(3(p+2)+1,3(q+1))$或 $R(3(p+1),3(q+3)+1)$任意挖除一塊或數塊可被 3 整除的區域，只要剩餘的部分仍可被 L-tromino 填滿，則不影響解的一般性。

二、問題：是否 R(p,5)或 R(5,q), p,q=3, 5, 7，若任意移除 k=0, 1 或 2 格小正方形，使 3|(5p-k)或 3|(5q-k)，皆可簡易利用塗色法證明可被 L-tromino 填滿的條件?

現在使用 R(5,q)的情況為代表進行討論：

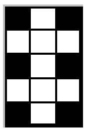


圖 6.3(a) R(5,3)

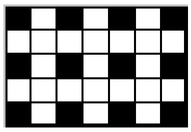


圖 6.3(b) R(5,7)

(一) 當 q=3 時，共須使用 5 個 L-tromino 填滿，但**圖 6.3(a)**有 6 個註記為黑色的小正方形，因每個 L-tromino 僅能覆蓋其中一格黑色小正方形，故無法被 L-tromino 填滿。

(二) 當 q=5 時，任意移除一格**圖 4.2(b)**註記為白色的小正方形後，共須使用 8 個 L-tromino 填滿，但**圖 4.2(b)**有 9 個註記為黑色的小正方形，故無法被 L-tromino 填滿。

(三) 當 q=7 時，任意移除二格**圖 6.3(b)**註記為白色的小正方形後，共須使用 11 個 L-tromino 填滿，但**圖 6.3(b)**有 12 個註記為黑色的小正方形，故無法被 L-tromino 填滿。

由塗色法證明得知 R(5,3)無法被 L-tromino 填滿，R(5,5)及 R(5,7)當分別任意移除一格及二格註記為白色的小正方形後，無法被 L-tromino 填滿。運用此技巧，可有效簡化引理 3.4 複雜情況的證明過程。

三、由於特定數量的 L-tromino 僅可以拼成特定矩形，例如利用 2 個 L-tromino 僅可以拼成 R(2,3)或 R(3,2)，因此本研究可以延伸探討使用 L-tromino 所拼成的特定圖形為基底模型，探討其填圖問題或者探討本研究在符合解條件下，存在多少種填圖方法數。

四、本研究可進一步發展成三維填圖問題、或者探討多階多米諾骨牌填圖問題；當然，本研究也可以延伸成探討類似 Tic-Tak-Toe (先形成 O 或 X 在同一行或同一列或在對角線的遊戲)的兩色 L-tromino 遊戲。

五、在實際的應用中，例如：平面拼圖的問題可以發展成以任意的特定圖案拼成不同花色或圖形(布料圖案設計)、採用函數化的拼圖方式，利用缺陷位置的疏密特性，變化出圖形的陰影或立體視覺效應(這可以伴隨設計隱藏式圖形密碼)、也可以探討在限定平面面積中，如何最有效利用面積的填圖問題(缺陷數極少化或空間利用率最大化的問題)，典型的應用可以延伸到積體電路佈局面積利用率最大化的設計問題。當我們將平面問題進一步延伸到三維立體空間，則最典型的例子是如何有效運用空間，做空間利用效率最佳化的包裝及產品形體設計問題，使得包裝展現最環保(材料用得最少)、成本最低、效益最高的設計。

柒、參考資料及其他

1. Golomb, Solomon W. (1994). Polyominoes (2nd ed.). Princeton, New Jersey: Princeton University Press. ISBN 0-691-02444-8.
2. Ash, J. M., Golomb, S. W. (2003). Tiling Deficient Rectangles with Trominoes, Mathematics Magazine, 77:1, pp. 46-55.
3. Martin Gardner (2009). L-Tromino Tiling of Mutilated Chessboards, The College Mathematics Journal, 40:3; The Mathematical Association of America.
4. 國中數學第一冊至第六冊 — 翰林出版社。

【評語】030405

本作品研究任意矩形三階多米諾骨牌填圖的問題利用一些引理,將一般性問題化簡到少數有限個情況再一一解決,困難度不錯，也相當完整。應該將此研究推廣到較一般性的圖形，而且文獻的引用也應該加強。