中華民國第52屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第三名

030404

超級比一比－多種形狀面積比例分配的研究

學校名稱：雲林縣立雲林國民中學

作者：	指導老師：
國三 陳子瑜 國三 林羿霈 國三 尤圓淨	王淑美 尤佐丞

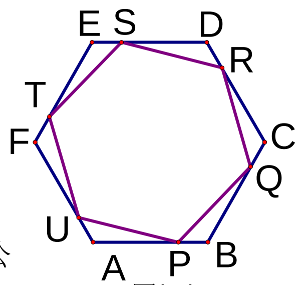
關鍵詞：相似、多邊形、比值

摘要

由學到的三角形全等、等積變換、相似多邊形、比例及二次函數等觀念，與未接觸過的三角函數及$\sum$ 的概念，利用逐步推導的方式探索由正多邊形到任意多邊形，當每邊以相同比例取分點時，依序連接各分點所形成的新多邊形與原多邊形是否相似，是否可並找出面積比值的公式及範圍；當每邊以不同比例取分點時，依序連接各分點所形成的新多邊形與原多邊形面積比值是否有公式及範圍。過程中透過 Microsoft Excel 及 GSP 繪圖軟體的運算分析來互相驗證結果。

壹、研究動機

在閱讀趣味數學時，書上有題「如圖(一)，在邊長 4 公分的正六邊形 ABCDEF，在各邊 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FA}$ 上從距離 A、B、C、D、E、F 的 3 公分處取 P、Q、R、S、T、U，連接起來，作成六邊形，則此六邊形 PQRSTU 的面積爲原六邊形 ABCDEF 面積的幾倍？」(答$\frac{13}{16}$)。



圖(一)

我們覺得這題目簡單又有趣，想從正多邊形逐一探討找出面積比值公式，更想知道若不是正多邊形、若每邊以不同比例取分點時面積比值是否也有公式？於是一起研究思索這個問題。

貳、研究目的

一、在正多邊形各邊以相同比例取分點，依序連接各分點形成一新多邊形，判斷新圖形與原圖形是否相似？是否可找出新圖形和原圖形面積比值的公式及範圍。

二、在非等邊三角形、平行四邊形、鳶形及梯形中，各邊以相同比例取分點，依序連接各分點形成一新多邊形，判斷新圖形與原圖形是否相似？是否可找出新圖形和原圖形面積比值的公式及範圍。

三、在任意 K 邊形中(K＞4)，各邊以相同比例取分點，依序連接各分點形成一新多邊形，判斷新圖形和原圖形是否相似？是否可找出新圖形和原圖形面積比值的公式及範圍。

四、在正多邊形各邊以不同比例取分點，依序連接各分點形成一新多邊形，能否找出新圖形和原圖形面積比值的公式及範圍。

五、在非等邊三角形、平行四邊形、鳶形及梯形中，各邊以不同比例取分點，依序連接各分點形成一新多邊形，能否找出新圖形和原圖形面積比值的公式。

六、在任意 K 邊形中(K＞4)，各邊以不同比例取分點，依序連接各分點形成一新多邊形，能否找出新圖形和原圖形面積比值的公式。

七、邊長相等的正 K 角星形各邊以相同比例取分點時，能否找出新圖形落在正 K 角星形內部面積與正 K 角星形面積比值的公式與範圍以及新圖形與正 K 角星形面積比值的公式與範圍。

八、邊長相等的正 K 角星形各邊以不同比例取分點時，能否找出新圖形落在正 K 角星形內部面積與正 K 角星形面積比值的公式與範圍以及新圖形與正 K 角星形面積比值的公式與範圍。

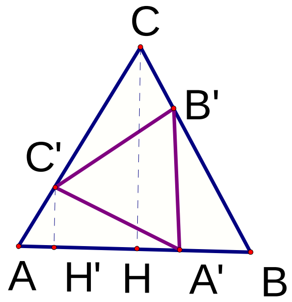
參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、Microsoft Excel 軟體、GSP 繪圖軟體

肆、研究過程與方法

一、正多邊形各邊以相同比例取分點的探討

(一)正三角形



圖(二)

如圖(二)，在正△ABC 各邊以 m：n 比例取分點 A'、B'、C'，依序連接各分點形成△$A'B'C'$。

1、因為 $\Delta AA'C' \cong \Delta BB'A' \cong \Delta CC'B'$(SAS全等)，

所以 $\overline{A'C'} = \overline{B'A'} = \overline{C'B'}$,因此 $\Delta A'B'C'$ 為正三角形，

故 $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$。

2、$\Delta AA'C'$ 與△ABC，分別以 $\overline{AA'}$、$\overline{AB}$ 為底，$\overline{C'H'}$、$\overline{CH}$ 為高，

則 $\Delta AA'C'$面積 : ΔABC面積 $= mn : (m+n)^2$，

所以 正$\Delta A'B'C'$面積 : 正ΔABC面積 $= \left((m+n)^2 - 3mn\right) : (m+n)^2$

3、$\dfrac{正\Delta A'B'C'面積}{正\Delta ABC面積} = \dfrac{(m+n)^2 - 3mn}{(m+n)^2} = 1 - 3 \cdot \dfrac{m}{m+n} \cdot \dfrac{n}{m+n}$ ，令 $\dfrac{m}{m+n} = x$, $\dfrac{n}{m+n} = 1 - x$

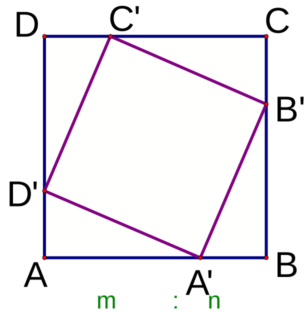
$\dfrac{正\Delta A'B'C'面積}{正\Delta ABC面積} = 1 - 3x(1-x) = 3(x - \dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{1}{4}$

當 $x = \dfrac{1}{2}$ 時，也就是 m＝n 時，正△$A'B'C'$ 面積與正△ABC 面積比值有最小值 $\dfrac{1}{4}$。

正△$A'B'C'$ 面積與正△ABC 面積比值的範圍：大於等於 $\dfrac{1}{4}$，小於 1。

(二)正方形

如圖(三)，在正方形 ABCD 各邊以 m：n 比例取分點 A'、B'、C'、D'，依序連接各分點形成四邊形 $A'B'C'D'$。



圖(三)

1、因為 $\Delta AA'D' \cong \Delta BB'A' \cong \Delta CC'B' \cong \Delta DD'C'$ (SAS 全等)，

所以 $\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'} = \overline{D'A'}$，

$\angle AA'D' = \angle BB'A' = \angle CC'B' = \angle DD'C'$，

$\angle B'A'B = \angle C'B'C = \angle D'C'D = \angle A'D'A$，

因為 $\angle AA'D' + \angle B'A'B = 90°$，所以 $\angle D'A'B' = 90°$

同理可得 $\angle A'B'C' = \angle B'C'D' = \angle C'D'A = 90°$，

所以四邊形 $A'B'C'D'$ 為正方形，故 正方形$A'B'C'D' \sim$ 正方形ABCD。

2、$\Delta AA'D'$面積 : ΔABD面積 $= mn : (m+n)^2$,

$\Delta AA'D'$面積 : 正方形ABCD面積 $= \dfrac{1}{2} mn : (m+n)^2$,

所以 正方形$A'B'C'D'$面積 : 正方形ABCD面積 $= \left((m+n)^2 - 4 \times \dfrac{1}{2} mn\right) : (m+n)^2$

$= \left((m+n)^2 - 2mn\right) : (m+n)^2$

3、$\dfrac{正方形A'B'C'D'面積}{正方形ABCD面積} = \dfrac{(m+n)^2 - 2mn}{(m+n)^2} = 1 - 2 \cdot \dfrac{m}{m+n} \cdot \dfrac{n}{m+n}$，令 $\dfrac{m}{m+n} = x$, $\dfrac{n}{m+n} = 1 - x$

$\dfrac{正方形A'B'C'D'面積}{正方形ABCD面積} = 1 - 2x(1-x) = 2(x - \dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{1}{2}$

當 $x = \dfrac{1}{2}$ 時，也就是 m＝n 時，正方形 $A'B'C'D'$ 面積與正方形 ABCD 面積比值有最小值

$\frac{1}{2}$。正方形 $A'B'C'D'$ 面積與正方形 ABCD 面積比值的範圍：大於等於 $\frac{1}{2}$，小於 1。

(三)正六邊形

如圖(四)，在正六邊形 ABCDEF 各邊以 m：n 比例取分點 A'、B'、C'、D'、E'、F'，依序連接各分點形成六邊形 $A'B'C'D'E'F'$。

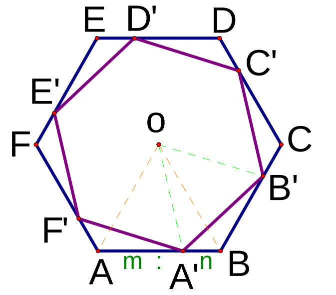
1、因爲 $\Delta AA'F' \cong \Delta BB'A' \cong \Delta CC'B' \cong \Delta DD'C' \cong \Delta EE'D' \cong \Delta FF'E'$ (SAS 全等)，

可得 $\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'} = \overline{D'E'} = \overline{E'F'} = \overline{F'A'}$，

並可推得六邊形 $A'B'C'D'E'F'$ 每個內角皆爲 $120°$，

所以六邊形 $A'B'C'D'E'F'$ 爲正六邊形，

故 正六邊形$A'B'C'D'E'F'$ ~ 正六邊形ABCDEF。



圖(四)

2、(1)設 O 爲正六邊形 ABCDEF 的中心，O 亦爲正六邊形 $A'B'C'D'E'F'$ 的中心。中心到各邊距離相等，

又因爲 $\overline{AB} = \overline{A'B} + \overline{BB'}$，

所以 ΔOAB面積 $= \Delta OA'B$面積 $+ \Delta OBB'$面積 $=$ 四邊形$OA'BB'$面積。

(2) $\Delta A'BB'$面積 $: \Delta ABC$面積 $= mn : (m+n)^2$，又ΔABC面積 $= \Delta OAB$面積

所以 $\Delta A'BB'$面積 $: \Delta OAB$面積 $= mn : (m+n)^2$，

$\Delta OA'B'$面積 $: \Delta OAB$面積

$= (\Delta OAB$面積 $- \Delta A'BB'$面積$) : \Delta OAB$面積

$= \left((m+n)^2 - mn\right) : (m+n)^2$

(3)因爲中心與各頂點連線所形成三角形面積均相等，所以

正六邊形$A'B'C'D'E'F'$面積 : 正六邊形ABCDEF面積

$= \Delta OA'B'$面積 $: \Delta OAB$面積 $= \left((m+n)^2 - mn\right) : (m+n)^2$

3、$\dfrac{\text{正六邊形}A'B'C'D'E'F'\text{面積}}{\text{正六邊形}ABCDEF\text{面積}} = \dfrac{(m+n)^2 - mn}{(m+n)^2} = 1 - \dfrac{m}{m+n} \cdot \dfrac{n}{m+n}$

令 $\dfrac{m}{m+n} = x$，$\dfrac{n}{m+n} = 1 - x$，

$\dfrac{\text{正六邊形}A'B'C'D'E'F'\text{面積}}{\text{正六邊形}ABCDEF\text{面積}} = 1 - x(1-x) = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

當 x＝$\frac{1}{2}$時，也就是 m＝n 時，正六邊形 $A'B'C'D'E'F'$ 面積與正六邊形 ABCDEF 面積比值有最小值 $\frac{3}{4}$。正六邊形 $A'B'C'D'E'F'$ 面積與正六邊形 ABCDEF 面積比值的範圍：大於等於 $\frac{3}{4}$，小於 1。

(四)正五邊形

如圖(五)，在正五邊形 ABCDE 各邊以 m：n 比例取分點 A'、B'、C'、D'、E'，依序連接各分點形成五邊形 $A'B'C'D'E'$。

1、可推得五邊形 $A'B'C'D'E'$ 爲正五邊形，所以 正五邊形$A'B'C'D'E'$ ~ 正五邊形ABCDE。

2、(1)設 O 爲正五邊形 ABCDE 的中心，O 亦爲正五邊形 $A'B'C'D'E'$ 的中心。

ΔOAB面積 $= \Delta OA'B$面積 $+ \Delta OBB'$面積 $=$ 四邊形$OA'BB'$面積。

(2)設正五邊形 ABCDE 邊長爲 a，

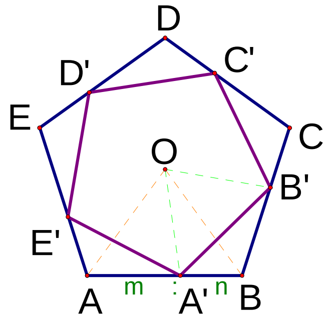
$\Delta A'BB'$面積 $= \dfrac{a^2}{2}\cdot\dfrac{m}{m+n}\cdot\dfrac{n}{m+n}\sin 72°$,

ΔOAB面積 $= \dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a}{2}\cot 36° = \dfrac{a^2}{4}\cot 36°$,

$\Delta OA'B'$面積 $: \Delta OAB$面積

$= (\dfrac{a^2}{4}\cot 36° - \dfrac{a^2}{2}\cdot\dfrac{m}{m+n}\cdot\dfrac{n}{m+n}\sin 72°) : (\dfrac{a^2}{4}\cot 36°)$

$= \left((m+n)^2 - \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}mn\right) : (m+n)^2$



圖(五)

【利用黃金三角形可推得 $\dfrac{\sin 72°}{\cot 36°} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{4}$ 】

(3) 正五邊形$A'B'C'D'E'$面積 : 正五邊形$ABCDE$面積 $= \left((m+n)^2 - \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}mn\right) : (m+n)^2$

3、$\dfrac{\text{正五邊形}A'B'C'D'E'\text{面積}}{\text{正五邊形}ABCDE\text{面積}} = 1 - \dfrac{(5-\sqrt{5})}{2}\dfrac{mn}{(m+n)^2}$, 令 $\dfrac{m}{m+n} = x$, $\dfrac{n}{m+n} = 1-x$,

$\dfrac{\text{正五邊形}A'B'C'D'E'\text{面積}}{\text{正五邊形}ABCDE\text{面積}} = 1 - \dfrac{(5-\sqrt{5})}{2}x(1-x) = \dfrac{(5-\sqrt{5})}{2}(x-\dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$,

當 $x=\dfrac{1}{2}$ 時，也就是 $m=n$ 時，正五邊形 $A'B'C'D'E'$ 面積與正五邊形 ABCDE 面積比值有最小值 $\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$ 。正五邊形 $A'B'C'D'E'$ 面積與正五邊形 ABCDE 面積比值的範圍：大於等於 $\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$ ，小於 1。

(五)正十邊形

如圖(六)，在正十邊形 ABCDEFGHIJ 各邊以 m：n 比例取分點 A' 、B' 、C' 、D' 、E' 、F' 、G' 、H' 、I' 、J' ，依序連接各分點形成十邊形 $A'B'C'D'E'F'G'H'I'J'$ 。

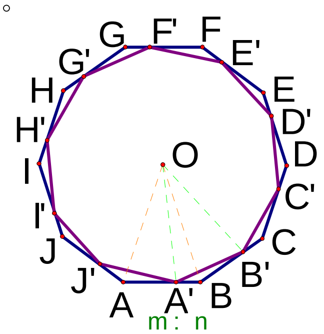
1、可推得十邊形 $A'B'C'D'E'F'G'H'I'J'$ 為正十邊形，

所以，正十邊形$A'B'C'D'E'F'G'H'I'J' \sim$ 正十邊形$ABCDEFGHIJ$ 。

2、(1)設 O 為正十邊形 ABCDEFGHIJ 的中心，O 亦為正十邊形 $A'B'C'D'E'F'G'H'I'J'$ 的中心。

ΔOAB面積 $= \Delta OA'B$面積 $+ \Delta OBB'$面積 $=$ 四邊形$OA'BB'$面積 。

(2)設正十邊形 ABCDEFGHIJ 邊長為 a，



圖(六)

$\Delta A'BB'$面積 $= \dfrac{a^2}{2}\cdot\dfrac{m}{m+n}\cdot\dfrac{n}{m+n}\sin 36°$,

ΔOAB面積 $= \dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a}{2}\cot 18° = \dfrac{a^2}{4}\cot 18°$,

$\Delta OA'B'$面積 $: \Delta OAB$面積

$= (\dfrac{a^2}{4}\cot 18° - \dfrac{a^2}{2}\cdot\dfrac{m}{m+n}\cdot\dfrac{n}{m+n}\sin 36°) : (\dfrac{a^2}{4}\cot 18°)$

$= \left((m+n)^2 - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}mn\right) : (m+n)^2$ 【利用黃金三角形可推得 $\dfrac{\sin 36°}{\cot 18°} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$ 】

(3) 正十邊形$A'B'C'D'E'F'G'H'I'J'$面積 : 正十邊形$ABCDEFGHIJ$面積

$= \left((m+n)^2 - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}mn\right) : (m+n)^2$

3、$\dfrac{\text{正十邊形}A'B'C'D'E'F'G'H'I'J'\text{面積}}{\text{正十邊形}ABCDEFGHIJ\text{面積}}=1-\dfrac{(3-\sqrt{5})mn}{2(m+n)^2}$，令 $\dfrac{m}{m+n}=x$，$\dfrac{n}{m+n}=1-x$

$$\dfrac{\text{正十邊形}A'B'C'D'E'F'G'H'I'J'\text{面積}}{\text{正十邊形}ABCDEFGHIJ\text{面積}}=1-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}x(1-x)=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{5+\sqrt{5}}{8},$$

當 $x=\dfrac{1}{2}$ 時，也就是 m＝n 時，正十邊形 A′B′C′D′E′F′G′H′I′J′ 面積與正十邊形 ABCDEFGHIJ 面積比值有最小值 $\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$。正十邊形 A′B′C′D′E′F′G′H′I′J′ 面積與正十邊形 ABCDEFGHIJ 面積比值的範圍：大於等於 $\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$，小於 1。

(六)正 K 邊形

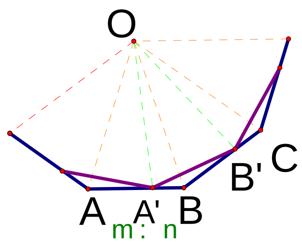
如圖(七)，在正 K 邊形各邊以 m：n 比例取分點，依序連接各分點形成一新 K 邊形。

1、可推得新圖形與原圖形相似。

2、(1)設 O 為正 K 邊形的中心，O 亦為新正 k 邊形的中心。

$$\Delta OAB\text{面積}=\Delta OA'B\text{面積}+\Delta OBB'\text{面積}=\text{四邊形}OA'BB'\text{面積}\text{。}$$

(2)設正 K 邊形的邊長為 a，



圖(七)

$$\Delta A'BB'\text{面積}=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{m}{m+n}\cdot\frac{n}{m+n}\sin\frac{2\pi}{K},$$

$$\Delta OAB\text{面積}=\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{K}=\frac{a^2}{4}\cot\frac{\pi}{K},$$

$$\Delta OA'B'\text{面積}:\Delta OAB\text{面積}$$

$$=(\frac{a^2}{4}\cot\frac{\pi}{K}-\frac{a^2}{2}\cdot\frac{m}{m+n}\cdot\frac{n}{m+n}\sin\frac{2\pi}{K}):(\frac{a^2}{4}\cot\frac{\pi}{K})$$

$$=\left((m+n)^2-2(1-\cos\frac{2\pi}{K})mn\right):(m+n)^2$$ 【利用二倍角公式可推得 $\dfrac{\sin\frac{2\pi}{K}}{\cot\frac{\pi}{K}}=1-\cos\dfrac{2\pi}{K}$】

(3) 新正K邊形面積 : 正K邊形面積

$=\left((m+n)^2-2(1-\cos\dfrac{2\pi}{K})mn\right):(m+n)^2$，所以面積比值與圖形邊長無關。

3、$\dfrac{\text{新正K邊形面積}}{\text{正K邊形面積}}=1-2(1-\cos\dfrac{2\pi}{K})\dfrac{mn}{(m+n)^2}$，令 $\dfrac{m}{m+n}=x$，$\dfrac{n}{m+n}=1-x$

$$\frac{\text{新正K邊形面積}}{\text{正K邊形面積}}=1-2(1-\cos\frac{2\pi}{K})x(1-x)=2(1-\cos\frac{2\pi}{K})(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}(1+\cos\frac{2\pi}{K})$$

當 $x=\dfrac{1}{2}$ 時，也就是 m＝n，分點位置在線段的中點時，新正 K 邊形面積與正 K 邊形面積比值有最小值 $\dfrac{1}{2}(1+\cos\dfrac{2\pi}{K})$。所以新正 K 邊形面積與正 K 邊形面積比值的範圍：大於等於 $\dfrac{1}{2}(1+\cos\dfrac{2\pi}{K})$，小於 1。

(七)藉助 Microsoft Excel 及 GSP 繪製正多邊形來探討

1、利用 Excel 表格找出新正 K 邊形與原正 K 邊形面積比值，並繪製成圖。

(1)在表(一)輸入 m、n 之值可找出面積比值。

(2)由圖(八)中的點可看出，分點在該線段中的位置與面積比值呈現拋物線的關係。

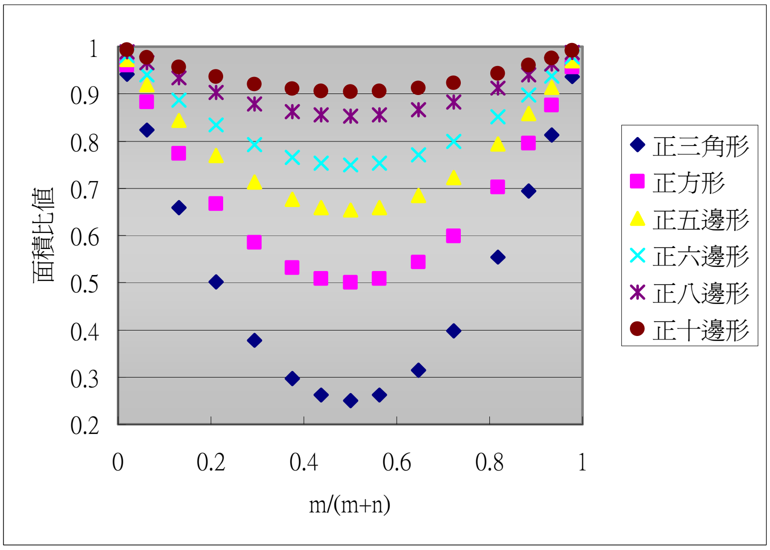
①當 $\frac{m}{m+n}$ 的值愈靠近 0 或 1，也就是分點位置愈靠近線段的端點時，新正 K 邊形面積與原正 K 邊形面積比值會愈大。

②當 $m=n$ 時，也就是分點位置在線段的中點時，新正 K 邊形與原正 K 邊形面積的比值有最小值。

③正多邊形邊數愈多，拋物線開口愈大，新正 K 邊形與原正 K 邊形面積比值愈靠近 1。

m	n	m/(m+n)	面積比值					
			正三角形	正方形	正五邊形	正六邊形	正八邊形	正十邊形
1	50	0.0196	0.94233	0.96155	0.97343	0.98078	0.98874	0.99266
2	30	0.0625	0.82422	0.88281	0.91903	0.94141	0.96568	0.97762
3	20	0.1304	0.65974	0.77316	0.84326	0.88658	0.93356	0.95668
4	15	0.2105	0.50139	0.66759	0.77031	0.8338	0.90264	0.93652
5	12	0.2941	0.37716	0.58478	0.71309	0.79239	0.87838	0.9207
6	10	0.375	0.29688	0.53125	0.6761	0.76563	0.86271	0.91048
7	9	0.4375	0.26172	0.50781	0.65991	0.75391	0.85584	0.906
8	8	0.5	0.25	0.5	0.65451	0.75	0.85355	0.90451
9	7	0.5625	0.26172	0.50781	0.65991	0.75391	0.85584	0.906
11	6	0.6471	0.31488	0.54325	0.6844	0.77163	0.86622	0.91277
13	5	0.7222	0.39815	0.59877	0.72275	0.79938	0.88248	0.92337
18	4	0.8182	0.55372	0.70248	0.79442	0.85124	0.91286	0.94318
23	3	0.8846	0.69379	0.79586	0.85894	0.89793	0.94021	0.96101
28	2	0.9333	0.81333	0.87556	0.91401	0.93778	0.96355	0.97623
45	1	0.9783	0.9362	0.95747	0.97061	0.97873	0.98754	0.99188

表(一)



圖(八)

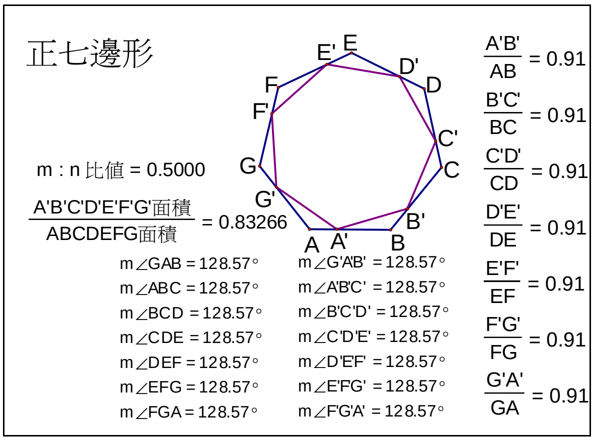
(3)在表(二) 輸入 k、m、n 之值可找出面積比值及面積比值最小值。

k	m	n	面積比值	面積比值 的最小值
3	8	25	0.44904	0.25000

(表二)

2、GSP 繪製正七邊形

(1)移動分點 A' 可改變各邊 $m:n$ 比例，此時面積比值會跟著改變。面積比值與分點位置有關。
(2)在 $m:n$ 比例不動下，移動正多邊形頂點(A 或 B 或 C)改變圖形大小，面積比值不變。所以面積比值與邊長無關。
(3)由新圖形與原圖形邊長比值與角度，可看出兩個多邊形相似。



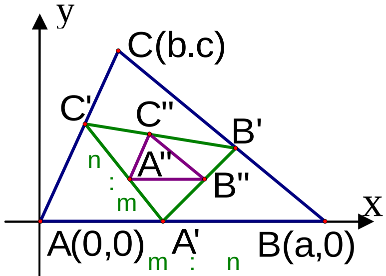
二、非等邊三角形、平行四邊形、鳶形及梯形各邊以相同比例取分點的探討

(一) 非等邊三角形

如圖(九)，△ABC，設 A(0，0)，B(a，0)，C(b，c)

1、分別在△ABC 各邊依序以 m：n 比例取分點為

$A'\left(\frac{ma}{m+n},0\right)$、$B'\left(\frac{mb+na}{m+n},\frac{mc}{m+n}\right)$、$C'\left(\frac{nb}{m+n},\frac{nc}{m+n}\right)$，形成 $\Delta A'B'C'$



圖(九)

(1)因為 $\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=\sqrt{(a-b)^2+c^2}$，$\overline{CA}=\sqrt{b^2+c^2}$ 與

$$\overline{A'B'}=\sqrt{\left(\frac{mb+na-ma}{m+n}\right)^2+\left(\frac{mc}{m+n}\right)^2},$$

$$\overline{B'C'}=\sqrt{\left(\frac{nb-mb-na}{m+n}\right)^2+\left(\frac{nc-mc}{m+n}\right)^2},$$

$$\overline{C'A'}=\sqrt{\left(\frac{ma-nb}{m+n}\right)^2+\left(\frac{-nc}{m+n}\right)^2}$$，三邊對應不成比例，所以△ABC 與△ $A'B'C'$ 不相似

(2) $$\frac{\Delta A'B'C'\text{面積}}{\Delta ABC\text{面積}}=\frac{\Delta ABC\text{面積}-\Delta AA'C'\text{面積}-\Delta BB'A'\text{面積}-\Delta CC'B'\text{面積}}{\Delta ABC\text{面積}}=1-\frac{3mn}{(m+n)^2}$$

與正△ABC 各邊依序以 m：n 比例取分點時面積比值相同。同樣可得，

當 m＝n 時，△ $A'B'C'$ 面積與△ABC 面積比值有最小值 $\frac{1}{4}$。

2、若再將△ $A'B'C'$ 各邊以 n：m 比例取分點為

$B''\left(\frac{m^2a+nmb+n^2a}{(m+n)^2},\frac{mnc}{(m+n)^2}\right)$、$C''\left(\frac{m^2b+mna+n^2b}{(m+n)^2},\frac{m^2c+n^2c}{(m+n)^2}\right)$、

$A''\left(\frac{mnb+mna}{(m+n)^2},\frac{mnc}{(m+n)^2}\right)$，形成 $\Delta A''B''C''$

(1) $\overline{A''B''}=\frac{(m^2-mn+n^2)}{(m+n)^2}a$，$\overline{B''C''}=\frac{(m^2-mn+n^2)}{(m+n)^2}\sqrt{(a-b)^2+c^2}$，

$\overline{C''A''}=\frac{(m^2-mn+n^2)}{(m+n)^2}\sqrt{b^2+c^2}$，

因為 $\frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{B''C''}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{C''A''}}{\overline{CA}}=\frac{(m^2-mn+n^2)}{(m+n)^2}$，可得 $\Delta ABC\sim\Delta A''B''C''$。

(2)因爲相似三角形面積的比等於對應邊平方比，所以

$$\frac{\Delta A''B''C''\text{面積}}{\Delta ABC\text{面積}}=\left[\frac{m^2-mn+n^2}{(m+n)^2}\right]^2=\left[1-\frac{3mn}{(m+n)^2}\right]^2$$，面積比值只與 m、n 有關。

令 $\frac{m}{m+n}=x$，$\frac{n}{m+n}=1-x$，$\frac{\Delta A''B''C''\text{面積}}{\Delta ABC\text{面積}}=(1-3x(1-x))^2=\left[3(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\right]^2\geq\frac{1}{16}$，

當 $x=\frac{1}{2}$ 時，也就是 m＝n 時，$\Delta A''B''C''$ 面積與△ABC 面積的比值有最小值 $\frac{1}{16}$。

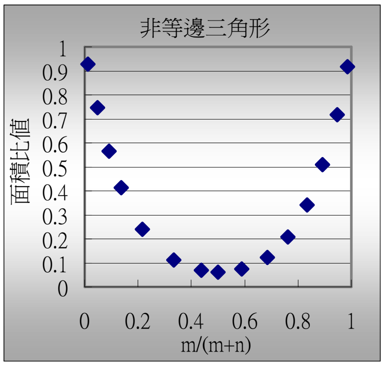
$\Delta A''B''C''$ 面積與△ABC 面積比值的範圍：大於等於 $\frac{1}{16}$，小於 1。

(3)找 $\Delta A''B''C''$ 與△ABC 面積比值如表(三)，並繪成圖(十)

①輸入 m、n 之值可找出面積比值。
②分點在該線段中的位置與面積比值的圖形呈現凹向上的曲線。
❶當 $\frac{m}{m+n}$ 的值愈靠近 0 或 1，也就是分點在該線段中愈靠近端點時，面積的比值會愈大。
❷當 m＝n 時，也就是分點在該線段中點時，面積比值有最小值 $\frac{1}{16}$。

m	n	m/(m+n)	面積比值
1	80	0.01235	0.92818
2	40	0.04762	0.7464
3	30	0.09091	0.5656
4	25	0.13793	0.41381
5	18	0.21739	0.23971
6	12	0.33333	0.11111
7	9	0.4375	0.0685
8	8	0.5	0.0625
10	7	0.58824	0.07472
13	6	0.68421	0.12376
16	5	0.7619	0.20774
20	4	0.83333	0.34028
25	3	0.89286	0.50838
35	2	0.94595	0.71674
70	1	0.98592	0.91842

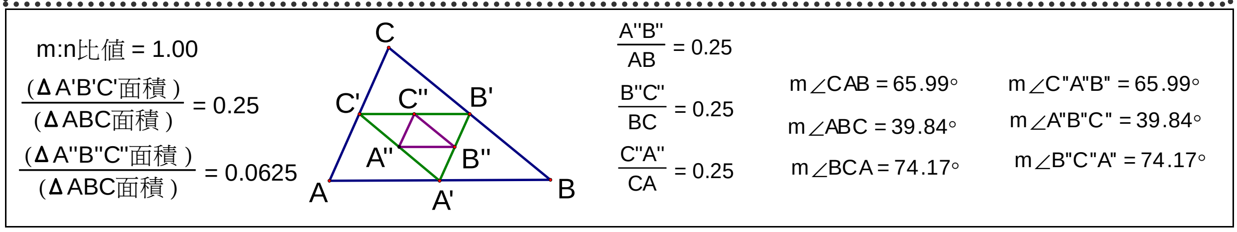
表(三)



圖(十)

(4)GSP 繪製△ABC 來探討

①移動 A′點改變各邊 m : n(或 n : m)比例，此時面積比值會跟著改變。
②在 m : n 比例不動下，移動三角形 ABC 頂點改變圖形，面積比值不變。
③由 $\Delta A''B''C''$ 與△ABC 的邊長比例與角度，可看出兩個三角形相似。



(二)平行四邊形

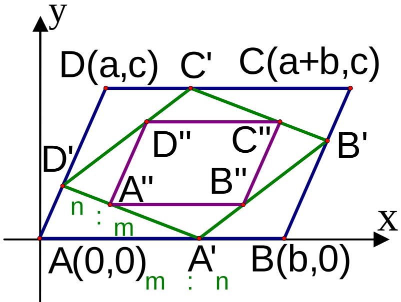
如圖(十一)，平行四邊形 ABCD，設 A(0，0)，B(b，0)，C(a+b，c)，D(a，c)，

則 $\overline{AB}=\overline{DC}=b$，$\overline{AD}=\overline{BC}=\sqrt{a^2+c^2}$，

$\overline{AB}$斜率 $=\overline{DC}$斜率 $=0$，$\overline{AD}$斜率 $=\overline{BC}$斜率 $=\frac{c}{a}$

1、依序在平行四邊形 ABCD 各邊以 m：n 比例取分點爲

$A'(\frac{mb}{m+n},0)$、$B'(\frac{ma+mb+nb}{m+n},\frac{mc}{m+n})$、



圖(十一)

$C'(\frac{ma+na+nb}{m+n},c)$、$D'(\frac{na}{m+n},\frac{nc}{m+n})$，形成四邊形 $A'B'C'D'$，

則 $\overline{A'B'}=\sqrt{(\frac{ma+nb}{m+n})^2+(\frac{mc}{m+n})^2}$，$\overline{B'C'}=\sqrt{(\frac{na-mb}{m+n})^2+(\frac{nc}{m+n})^2}$，

(1)因為 $\Delta AA'D'\cong\Delta CC'B'$，$\Delta BB'A'\cong\Delta DD'C'$，所以 $\overline{A'D'}=\overline{C'B'}$，$\overline{B'A'}=\overline{D'C'}$，

因此四邊形 $A'B'C'D'$ 為平行四邊形。但 $\overline{A'B'}:\overline{AB}\neq\overline{B'C'}:\overline{BC}$，

所以平行四邊形 $A'B'C'D'$ 與平行四邊形 ABCD 不相似。

(2)又 $\Delta AA'D'$面積 $=\Delta BB'A'$面積 $=\Delta CC'B'$面積 $=\Delta DD'C'$面積

$$=\frac{mn}{2(m+n)^2}\text{平行四邊形ABCD面積}，$$

所以 $\frac{\text{平行四邊形}A'B'C'D'\text{面積}}{\text{平行四邊形ABCD面積}}=1-4\cdot\frac{mn}{2(m+n)^2}=1-\frac{2mn}{(m+n)^2}$

與正方形各邊依序以 m：n 比例取分點時面積比值相同。同樣可得，

當 m＝n 時，平行四邊形 $A'B'C'D'$ 面積與平行四邊形 ABCD 面積比值有最小值 $\frac{1}{2}$。

2、若再將平行四邊形 $A'B'C'D'$ 各邊依序以 n：m 比例取分點為

$B''(\frac{m^2b+mna+mnb+n^2b}{(m+n)^2},\frac{mnc}{(m+n)^2})$、

$C''(\frac{m^2a+m^2b+mna+mnb+n^2a+n^2b}{(m+n)^2},\frac{m^2c+nmc+n^2c}{(m+n)^2})$、

$D''(\frac{m^2a+mna+mnb+n^2a}{(m+n)^2},\frac{m^2c+nmc+n^2c}{(m+n)^2})$、$A''(\frac{mna+mnb}{(m+n)^2},\frac{mnc}{(m+n)^2})$

形成四邊形 $A''B''C''D''$，

則 $\overline{A''B''}=\overline{D''C''}=\frac{(m^2+n^2)}{(m+n)^2}b$，$\overline{B''C''}=\overline{A''D''}=\frac{(m^2+n^2)}{(m+n)^2}=\sqrt{a^2+c^2}$，

(1)因為 $\overline{A''B''}$斜率 $=\overline{D''C''}$斜率 $=0$，$\overline{A''D''}$斜率 $=\overline{B''C''}$斜率 $=\frac{c}{a}$，

所以，四邊形 $A''B''C''D''$ 為平行四邊形。

因為 $\overline{A''B''}$斜率 $=\overline{D''C''}$斜率 $=\overline{AB}$斜率 $=\overline{DC}$斜率 $=0$，

$\overline{A''D''}$斜率 $=\overline{B''C''}$斜率 $=\overline{AD}$斜率 $=\overline{BC}$斜率 $=\frac{c}{a}$，

所以 $\angle A''=\angle A,\angle B''=\angle B,\angle C''=\angle C,\angle D''=\angle D$，

又 $\frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{B''C''}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{C''D''}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{D''A''}}{\overline{DA}}=\frac{(m^2+n^2)}{(m+n)^2}$,

故平行四邊形 平行四邊形 $A''B''C''D''\sim$ 平行四邊形ABCD。

(2)因為相似形面積的比等於對應邊平方比，所以

$\frac{\text{平行四邊形}A''B''C''D''\text{面積}}{\text{平行四邊形ABCD面積}}=\left(\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}\right)^2=\left(1-\frac{2mn}{(m+n)^2}\right)^2$，面積比值只與 m、n 有關。

令 $\frac{m}{m+n}=x$, $\frac{n}{m+n}=1-x$

$\frac{\text{平行四邊形}A''B''C''D''\text{面積}}{\text{平行四邊形ABCD面積}}=(1-2x(1-x))^2=\left(2(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}\right)^2\geq\frac{1}{4}$，

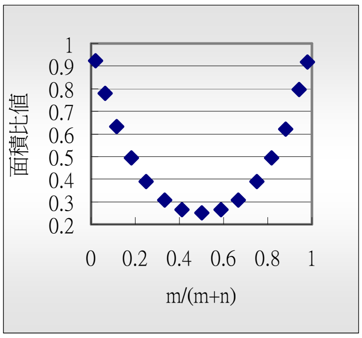
當 $x=\dfrac{1}{2}$，也就是 m＝n 時，平行四邊形 $A''B''C''D''$ 面積與平行四邊形 ABCD 面積比值有最小值 $\dfrac{1}{4}$。面積比值的範圍：大於等於 $\dfrac{1}{4}$，小於 1。

(3)找面積比值如表(四) 並繪成圖(十二)

①輸入 m、n 之值可找出面積比值。
②分點在該線段中的位置與面積比值的圖形呈現凹向上的曲線。
❶當 $\dfrac{m}{m+n}$ 的值愈靠近 0 或 1，也就是分點在該線段中愈靠近端點時，面積比值會愈大。
❷當 m＝n 時，也就是分點在該線段中點時，面積比值有最小值 $\dfrac{1}{4}$。

m	n	m/(m+n)	面積比值
1	50	0.01961	0.92458
2	30	0.0625	0.77936
3	23	0.11538	0.63339
4	18	0.18182	0.49348
5	15	0.25	0.39063
6	12	0.33333	0.30864
7	10	0.41176	0.26581
8	8	0.5	0.25
10	7	0.58824	0.26581
12	6	0.66667	0.30864
15	5	0.75	0.39063
18	4	0.81818	0.49348
22	3	0.88	0.62221
33	2	0.94286	0.7961
45	1	0.97826	0.91674

表(四)



圖(十二)

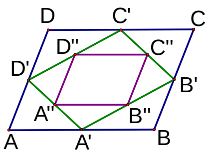
(4)GSP 繪製平行四邊形來探討

①移動 A' 點改變各邊 m : n 比例，此時面積比值會跟著改變。
②在 m : n 比例不動下，移動平行四邊形 ABCD 頂點改變圖形，面積比值不變。
③由四邊形 $A''B''C''D''$ 與平行四邊形 ABCD 的邊長比例與角度,可看出兩個四邊形相似。

m : n 比值 = 1.0

$\dfrac{(A'B'C'D'\text{面積})}{(ABCD\text{面積})} = 0.50$

$\dfrac{(A''B''C''D''\text{面積})}{(ABCD\text{面積})} = 0.2500$



$\dfrac{A''B''}{AB} = 0.50$　$\dfrac{C''D''}{CD} = 0.50$

$\dfrac{B''C''}{BC} = 0.50$　$\dfrac{D''A''}{DA} = 0.50$

$m\angle DAB = 68.38°$
$m\angle ABC = 111.62°$
$m\angle BCD = 68.38°$
$m\angle CDA = 111.62°$

$m\angle D''A''B'' = 68.38°$
$m\angle A''B''C'' = 111.62°$
$m\angle B''C''D'' = 68.38°$
$m\angle C''D''A'' = 111.62°$

(三)鳶形

如圖(十三)，鳶形 ABCD，設 A(0，－a)，B(b，0)，C(0，c)，D(－b，0)，
則 $\overline{AB}=\overline{AD}=\sqrt{a^2+b^2}$，$\overline{CB}=\overline{CD}=\sqrt{b^2+c^2}$，

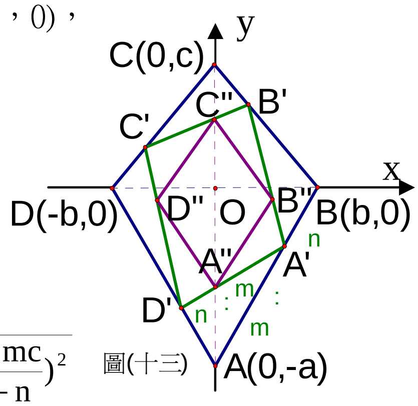
1、依序在鳶形 ABCD 各邊以 m：n 比例取分點爲

$A'(\dfrac{mb}{m+n},-\dfrac{na}{m+n})$、$B'(\dfrac{nb}{m+n},\dfrac{mc}{m+n})$、

$C'(-\dfrac{mb}{m+n},\dfrac{nc}{m+n})$、$D'(-\dfrac{nb}{m+n},-\dfrac{ma}{m+n})$

形成四邊形 $A'B'C'D'$，

$\overline{A'B'}=\sqrt{(\dfrac{nb-mb}{m+n})^2+(\dfrac{mc+na}{m+n})^2}$，$\overline{B'C'}=\sqrt{(\dfrac{mb+nb}{m+n})^2+(\dfrac{nc-mc}{m+n})^2}$



圖(十三)

(1)因爲 $\overline{A'B'}:\overline{AB}\neq\overline{B'C'}:\overline{BC}$，所以四邊形 $A'B'C'D'$ 與鳶形 ABCD 不相似。

(2) $\Delta AA'D'\text{面積}=\dfrac{mn}{(m+n)^2}\cdot\dfrac{a}{a+c}$ 鳶形ABCD面積，

$\Delta CC'B'$面積 $=\dfrac{mn}{(m+n)^2}\cdot\dfrac{c}{a+c}$ 鳶形ABCD面積 ，

$\Delta BB'A'$面積 $=\Delta DD'C'$面積 $=\dfrac{mn}{2(m+n)^2}$ 鳶形ABCD面積 ，

所以 $\dfrac{\text{四邊形}A'B'C'D'\text{面積}}{\text{鳶形}ABCD\text{面積}}=1-\dfrac{2mn}{(m+n)^2}$

與正方形各邊依序以 m：n 比例取分點時面積比值相同。同樣可得，

當 m＝n，也就是四邊形 $A'B'C'D'$ 為矩形時，

四邊形 $A'B'C'D'$ 面積與鳶形 ABCD 面積比值有最小值 $\dfrac{1}{2}$ 。

2、若再將四邊形 $A'B'C'D'$ 各邊依序以 n：m 比例取分點為

$B''(\dfrac{b(m^2+n^2)}{(m+n)^2},\dfrac{mn(c-a)}{(m+n)^2})$ 、$C''(0\ ,\dfrac{c(m^2+n^2)}{(m+n)^2})$ 、$D''(\dfrac{-b(m^2+n^2)}{(m+n)^2},\dfrac{mn(c-a)}{(m+n)^2})$ 、

$A''(0,\dfrac{-a(m^2+n^2)}{(m+n)^2})$ ，形成四邊形 $A''\ B''\ C''\ D''$

(1)由各頂點座標可知，若 m≠n 四邊形 $A''B''C''D''$ 為鳶形；

若 m = n 四邊形 $A''B''C''D''$ 為菱形。

$\overline{A''B''}=\dfrac{1}{(m+n)^2}\sqrt{b^2(m^2+n^2)^2+(mnc-mna+m^2a+n^2a)^2}$ ，

$\overline{B''C''}=\dfrac{1}{(m+n)^2}\sqrt{b^2(m^2+n^2)^2+(mnc-mna-m^2c-n^2c)^2}$ ，

因為 $\overline{A''B''}:\overline{AB}\neq\overline{B''C''}:\overline{BC}$ ，所以四邊形 $A''B''C''D''$ 與鳶形 ABCD 不相似。

(2) $\dfrac{\text{四邊形}A''B''C''D''\text{面積}}{\text{鳶形}ABCD\text{面積}}=\dfrac{\overline{A''C''}\times\overline{B''D''}}{\overline{AC}\times\overline{BD}}=\dfrac{\dfrac{(a+c)(m^2+n^2)}{(m+n)^2}\cdot\dfrac{2b(m^2+n^2)}{(m+n)^2}}{(a+c)\cdot 2b}=\left[1-\dfrac{2mn}{(m+n)^2}\right]^2$,

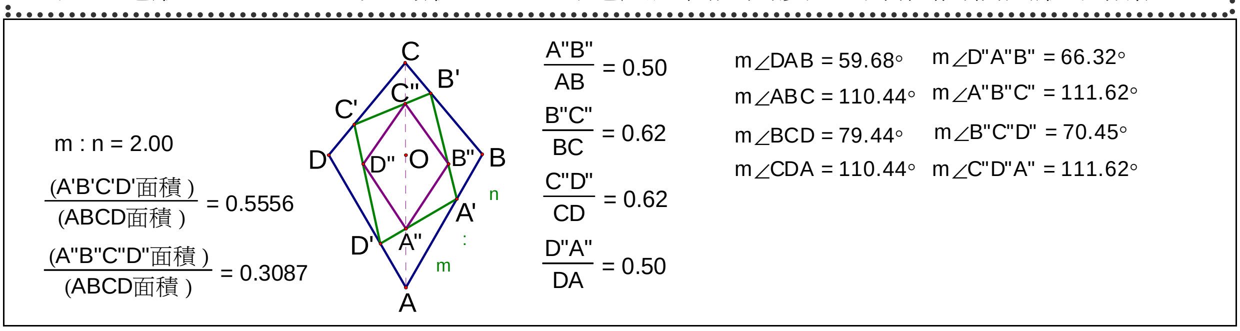
與平行四邊形面積比值相同。同樣可得當 m＝n，四邊形 $A''B''C''D''$ 為菱形時，四邊形 $A''B''C''D''$ 面積與鳶形 ABCD 面積比值有最小值 $\dfrac{1}{4}$ 。

當 m≠n 時，鳶形 $A''B''C''D''$ 面積與鳶形 ABCD 面積比值的範圍：大於 $\dfrac{1}{4}$ ，小於 1。

(3)利用 Excel 來探討，同平行四邊形中(3) ①②的結論。

(4)GSP 繪製鳶形 ABCD 來探討

①移動 A' 點改變各邊 m : n 比例，此時面積比值會跟著改變。
②在 m : n 比例不動下，改變鳶形 ABCD 圖形，面積比值不變。
③由四邊形 $A''\ B''\ C''\ D''$ 與鳶形 ABCD 的邊長比例與角度，可看出兩個圖形不相似。



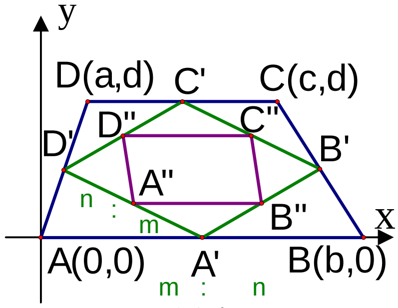
(四)梯形

如圖(十四)，梯形 ABCD，設 A(0，0)，B(b，0)，C(c，d)，D(a，d)，$\overline{AB}//\overline{CD}$

1、依序在梯形 ABCD 各邊以 m：n 比例取分點為

$$A'(\frac{mb}{m+n},0)、B'(\frac{mc+nb}{m+n},\frac{md}{m+n})、C'(\frac{ma+nc}{m+n},d)、D'(\frac{na}{m+n},\frac{nd}{m+n})$$

形成四邊形 $A'B'C'D'$，



圖(十四)

$$\overline{A'B'}斜率=\frac{md}{mc+nb-mb}，\overline{B'C'}斜率=\frac{nd}{ma+nc-mc-nb}，$$

$$\overline{C'D'}斜率=\frac{md}{ma+nc-na}，\overline{D'A'}斜率=\frac{nd}{na-mb}$$

(1)因為 $\overline{A'B'}$、$\overline{B'C'}$、$\overline{C'D'}$、$\overline{D'A'}$ 任兩條線皆不平行，

所以，四邊形 $A'B'C'D'$ 與梯形 ABCD 不相似。

(2) $$\Delta AA'D'面積=\Delta BB'A'面積=\frac{mn}{(m+n)^2}\cdot\frac{b}{b+c-a}梯形ABCD面積，$$

$$\Delta CC'B'面積=\Delta DD'C'面積=\frac{mn}{(m+n)^2}\cdot\frac{c-a}{b+c-a}梯形ABCD面積，$$

所以 $\dfrac{四邊形A'B'C'D'面積}{梯形ABCD面積}=1-\dfrac{2mn}{(m+n)^2}$，與正方形各邊依序以 m：n 比例取分點時面積比值相同。同樣可得，當 m＝n，也就是四邊形 $A'B'C'D'$ 為平行四邊形時，四邊形 $A'B'C'D'$ 面積與梯形 ABCD 面積比值有最小值 $\dfrac{1}{2}$。

2、若再將四邊形 $A'B'C'D'$ 各邊依序以 n：m 比例取分點為

$$B''(\frac{m^2b+mnc+n^2b}{(m+n)^2},\frac{mnd}{(m+n)^2})、C''(\frac{m^2c+mna+mnb+n^2c}{(m+n)^2},\frac{m^2d+mnd+n^2d}{(m+n)^2})、$$

$$D''(\frac{m^2a+mnc+n^2a}{(m+n)^2},\frac{m^2d+mnd+n^2d}{(m+n)^2})、A''(\frac{mna+mnb}{(m+n)^2},\frac{mnd}{(m+n)^2})$$

形成四邊形 $A''B''C''D''$

(1)由各頂點座標可知，若 m≠n 四邊形 $A''B''C''D''$ 為梯形；

若 m = n 四邊形 $A''B''C''D''$ 為平行四邊形。

$$\overline{A''B''}=\frac{b(m^2+n^2)+mn(c-a-b)}{(m+n)^2}，\overline{C''D''}=\frac{(c-a)(m^2+n^2)+mn(a+b-c)}{(m+n)^2}，$$

因為 $\overline{A''B''}:\overline{AB}\neq\overline{B''C''}:\overline{BC}$，所以四邊形 $A''B''C''D''$ 與梯形 ABCD 不相似。

(2) $$\frac{四邊形A''B''C''D''面積}{梯形ABCD面積}=\frac{\dfrac{(b+c-a)(m^2+n^2)}{(m+n)^2}\cdot\dfrac{d(m^2+n^2)}{(m+n)^2}}{(b+c-a)\cdot d}=\left[\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}\right]^2=\left[1-\frac{2mn}{(m+n)^2}\right]^2$$

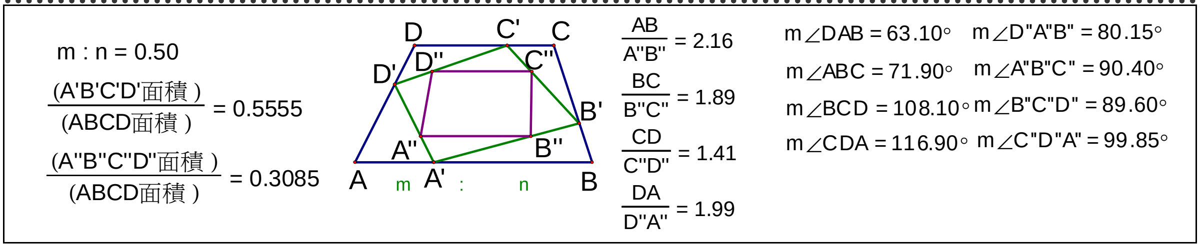
與平行四邊形面積比值相同。同樣可得當 x＝$\dfrac{1}{2}$ 時，也就是 m＝n，四邊形 $A''B''C''D''$ 為平行四邊形時，四邊形 $A''B''C''D''$ 面積與梯形 ABCD 面積比值有最小值 $\dfrac{1}{4}$。

當 m≠n 時，梯形 $A''B''C''D''$ 面積與梯形 ABCD 面積比值的範圍：大於 $\dfrac{1}{4}$，小於 1。

(3)利用 Excel 來探討，可得同平行四邊形中(3) ①②的結論。

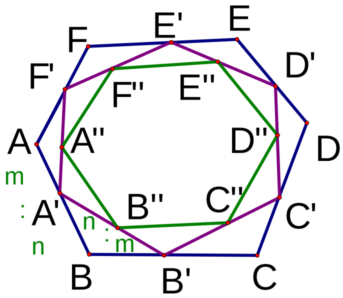
(4)GSP 繪製梯形來探討

①移動 A′ 點改變各邊 m : n 比例，此時面積比值會跟著改變。
②在 m : n 比例不動下，改變梯形 ABCD 圖形，面積比值不變。
③由梯形 ABCD 與四邊形 A″B″C″D″ 的邊長比例與角度，可看出兩個圖形不相似。



三、任意 K 邊形(K＞4)各邊以相同比例取分點的探討

(一) 任意六邊形



圖(十五)

如圖(十五)，在六邊形 ABCDEF，設邊長依序爲 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6，各內角依序爲 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4、θ_5、θ_6

1、依序在六邊形 ABCDEF 各邊以 m：n 比例取分點 A′、B′、C′、D′、E′、F′形成六邊形 A′B′C′D′E′F′，則

(1)六邊形 A′B′C′D′E′F′ 與六邊形 ABCDEF 不相似。

(2)六邊形 ABCDEF 面積＝ΔABF 面積＋ ΔBCF 面積＋ ΔCDF 面積＋ ΔDEF 面積

$$=\frac{1}{2}a_1\left[a_2\sin\theta_2-a_3\sin(\theta_2+\theta_3)+a_4\sin(\theta_2+\theta_3+\theta_4)-a_5\sin(\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5)\right]$$
$$+\frac{1}{2}a_2\left[a_3\sin\theta_3-a_4\sin(\theta_3+\theta_4)+a_5\sin(\theta_3+\theta_4+\theta_5)\right]$$
$$+\frac{1}{2}a_3\left[a_4\sin\theta_4-a_5\sin(\theta_4+\theta_5)\right]+\frac{1}{2}a_4a_5\sin\theta_5$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4}\left\{(-1)^{j+1}a_j\cdot\left[\sum_{i=j+1}^{5}(-1)^i\cdot a_i\cdot\sin(\theta_{j+1}+\cdots+\theta_i)\right]\right\}$$

$$\Delta A'BB'\text{面積}+\Delta B'CC'\text{面積}+\Delta C'DD'\text{面積}+\Delta D'EE'\text{面積}+\Delta E'FF'\text{面積}+\Delta F'AA'\text{面積}$$
$$=\frac{\mathrm{mn}(a_1a_2\sin\theta_2+a_2a_3\sin\theta_3+a_3a_4\sin\theta_4+a_4a_5\sin\theta_5+a_5a_6\sin\theta_6+a_6a_1\sin\theta_1)}{2(\mathrm{m}+\mathrm{n})^2}$$
$$=\frac{\mathrm{mn}}{2(\mathrm{m}+\mathrm{n})^2}(a_6a_1\sin\theta_1+\sum_{i=1}^{5}a_ia_{i+1}\sin\theta_{i+1})$$

$$\text{六邊形A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'\text{E}'\text{F}'\text{ 面積}=\text{六邊形ADCDEF面積}-\Delta A'BB'\text{面積}-\Delta B'CC'\text{面積}$$
$$-\Delta C'DD'\text{面積}-\Delta D'EE'\text{面積}-\Delta E'FF'\text{面積}-\Delta F'AA'\text{面積}$$

所以 $$\frac{\text{六邊形A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'\text{E}'\text{F}'\text{面積}}{\text{六邊形ABCDEF面積}}=1-\frac{\dfrac{\mathrm{mn}}{(\mathrm{m}+\mathrm{n})^2}(a_6a_1\sin\theta_1+\sum_{i=1}^{5}a_ia_{i+1}\sin\theta_{i+1})}{\sum_{j=1}^{4}\left\{(-1)^{j+1}a_j\cdot\left[\sum_{i=j+1}^{5}(-1)^i\cdot a_i\cdot\sin(\theta_{j+1}+\cdots+\theta_i)\right]\right\}}$$

(3)令 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}+\mathrm{n}}=\mathrm{x}$，$\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{m}+\mathrm{n}}=1-x$，$$\frac{(a_6a_1\sin\theta_1+\sum_{i=1}^{5}a_ia_{i+1}\sin\theta_{i+1})}{\sum_{j=1}^{4}\left\{(-1)^{j+1}a_j\cdot\left[\sum_{i=j+1}^{5}(-1)^i\cdot a_i\cdot\sin(\theta_{j+1}+\cdots+\theta_i)\right]\right\}}=\mathrm{R}$$

$\frac{\text{六邊形A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'\text{E}'\text{F}'\text{面積}}{\text{六邊形ABCDEF面積}}=1-\mathrm{x}(1-\mathrm{x})\mathrm{R}=\mathrm{R}(\mathrm{x}-\frac{1}{2})^2+1-\frac{\mathrm{R}}{4}$。當 $\mathrm{x}=\frac{1}{2}$，也就是 m＝n 時

，面積比值有最小值 $1-\dfrac{R}{4}$。六邊形 A′B′C′D′E′F′ 面積與六邊形 ABCDEF 面積

比值範圍：大於等於 $1-\dfrac{(a_6a_1\sin\theta_1+\sum_{i=1}^{5}a_ia_{i+1}\sin\theta_{i+1})}{4\cdot\sum_{j=1}^{4}\left\{(-1)^{j+1}a_j\cdot\left[\sum_{i=j+1}^{5}(-1)^i\cdot a_i\cdot\sin(\theta_{j+1}+\cdots+\theta_i)\right]\right\}}$，小於 1。

所以，面積比值及面積比值最小值會依邊長與角度不同而不同。

2、依序在六邊形 A′B′C′D′E′F′ 各邊以 n：m 比例取分點 B″、C″、D″、E″、F″、A″形成六邊形 A″B″C″D″E″F″，設邊長依序爲 a_1'、a_2'、a_3'、a_4'、a_5'、a_6'，各內角依序爲 θ_1'、θ_2'、θ_3'、θ_4'、θ_5'、θ_6' 則

(1)六邊形 A″B″C″D″E″F″ 與六邊形 ABCDEF 不相似。

(2) $\dfrac{\text{六邊形A″B″C″D″E″F″面積}}{\text{六邊形ABCDEF面積}}$

$$=1-\frac{\frac{\mathrm{mn}}{(\mathrm{m+n})^2}(a_6a_1\sin\theta_1+\sum_{i=1}^{5}a_ia_{i+1}\sin\theta_{i+1})+\frac{\mathrm{mn}}{(\mathrm{m+n})^2}(a_6'a_1'\sin\theta_1'+\sum_{i=1}^{5}a_i'a_{i+1}'\sin\theta_{i+1}')}{\sum_{j=1}^{4}\left\{(-1)^{j+1}a_j\cdot\left[\sum_{i=j+1}^{5}(-1)^i\cdot a_i\cdot\sin(\theta_{j+1}+\cdots+\theta_i)\right]\right\}}$$

(3)令 $\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{m+n}}=\mathrm{x}$，$\dfrac{\mathrm{n}}{\mathrm{m+n}}=1-x$，

$$\frac{(a_6a_1\sin\theta_1+\sum_{i=1}^{5}a_ia_{i+1}\sin\theta_{i+1})+(a_6'a_1'\sin\theta_1'+\sum_{i=1}^{5}a_i'a_{i+1}'\sin\theta_{i+1}')}{\sum_{j=1}^{4}\left\{(-1)^{j+1}a_j\cdot\left[\sum_{i=j+1}^{5}(-1)^i\cdot a_i\cdot\sin(\theta_{j+1}+\cdots+\theta_i)\right]\right\}}=R'$$

$$\frac{\text{六邊形A″B″C″D″E″F″面積}}{\text{六邊形ABCDEF面積}}=1-\mathrm{x}(1-\mathrm{x})\mathrm{R}'=\mathrm{R}'(\mathrm{x}-\frac{1}{2})^2+1-\frac{\mathrm{R}'}{4}$$

當 $\mathrm{x}=\dfrac{1}{2}$，也就是 m＝n 時，六邊形 A″B″C″D″E″F″ 面積與六邊形 ABCDEF 面積比值有最小值 $1-\dfrac{R'}{4}$。六邊形 A″B″C″D″E″F″ 面積與六邊形 ABCDEF 面積比值範圍：大於等於 $1-\dfrac{(a_6a_1\sin\theta_1+\sum_{i=1}^{5}a_ia_{i+1}\sin\theta_{i+1})+(a_6'a_1'\sin\theta_1'+\sum_{i=1}^{5}a_i'a_{i+1}'\sin\theta_{i+1}')}{4\cdot\sum_{j=1}^{4}\left\{(-1)^{j+1}a_j\cdot\left[\sum_{i=j+1}^{5}(-1)^i\cdot a_i\cdot\sin(\theta_{j+1}+\cdots+\theta_i)\right]\right\}}$，小於 1。

所以，面積比值及面積比值最小值會依邊長及角度不同而不同。

3、利用 Excel 表格舉例及 GSP 繪製六邊形來探討

(1)設六邊形 ABCDEF，A($\frac{1}{4}$，0)，B($\frac{3}{4}$，0)，C($\frac{7}{8},\frac{\sqrt{3}}{8}$)，D($\frac{5}{8},\frac{3\sqrt{3}}{8}$)，E($\frac{3}{8},\frac{3\sqrt{3}}{8}$)，F($\frac{1}{8},\frac{\sqrt{3}}{8}$)

①在表(五)中輸入 m、n 之值，可找出面積比值。
②六邊形 A′B′C′D′E′F′ 與六邊形 ABCDEF，對應角不相等，所以不相似。
③六邊形 A″B″C″D″E″F″ 與六邊形 ABCDEF，雖對應角相等，但對應邊不成比例，所以不相似。

A (x , y)		B (x , y)		C (x , y)		D (x , y)		E(x , y)		F (x , y)		m	n
0.25	0	0.75	0	0.875	0.217	0.625	0.65	0.375	0.65	0.125	0.217	3	2
A' (x , y)		B' (x , y)		C' (x , y)		D' (x , y)		E'(x , y)		F' (x , y)			
0.55	0	0.825	0.13	0.725	0.476	0.475	0.65	0.225	0.39	0.2	0.087		
A" (x , y)		B"(x , y)		C "(x , y)		D "(x , y)		E"(x , y)		F"(x , y)			
0.34	0.052	0.66	0.052	0.785	0.268	0.625	0.546	0.375	0.546	0.215	0.268		

線段長度						各內角度數						面積
AB	BC	CD	DE	EF	FA	A	B	C	D	E	F	
0.5	0.25	0.5	0.25	0.5	0.25	120	120	120	120	120	120	0.352
A'B'	B'C'	C'D'	D'E'	E'F'	F'A'	A'	B'	C'	D'	E'	F'	
0.304	0.361	0.304	0.361	0.304	0.361	140.8	99.18	140.8	99.18	140.8	99.18	0.274
A"B"	B"C"	C"D"	D"E"	E"F"	F"A"	A"	B"	C"	D"	E"	F"	
0.32	0.25	0.32	0.25	0.32	0.25	120	120	120	120	120	120	0.21

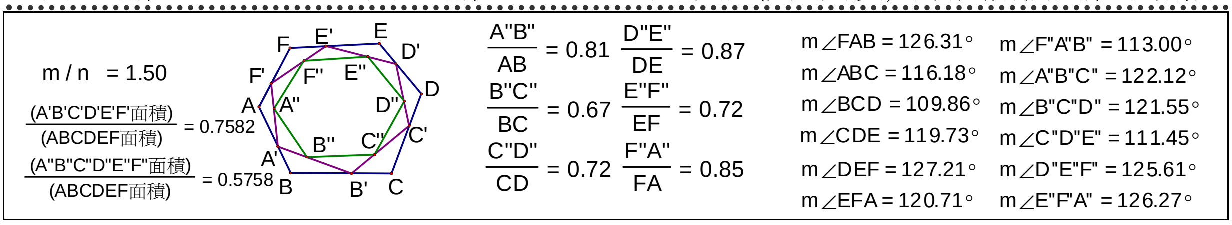
六邊形A'B'C'D'E'F'面積與六邊形ABCDEF面積比值= 0.778

六邊形A"B"C"D"E"F"面積與六邊形ABCDEF面積比值= 0.597

表(五)

(2)透過 GSP 繪製六邊形 ABCDEF

①移動 A′點改變各邊 m : n 比例，此時面積比值會跟著改變。
②在 m : n 比例不動下，改變六邊形 ABCDEF 圖形，面積比值及比值最小值跟著改變。
③由六邊形 A″B″C″D″E″F″ 與六邊形 ABCDEF 的邊長比值與角度,可看出兩個圖形不相似。



由(1)、(2)中的例子可知新圖形與原圖形不相似；且雖然 m : n 的比例相同，但面積比值及面積比值最小值不同，所以面積比值及面積比值最小值會依邊長、角度不同而不同。

(3)將(1)中六邊形 A′B′C′D′E′F′ 與 ABCDEF 面積比值及六邊形 A″B″C″D″E″F″ 與 ABCDEF 面積比值列出如表(六)，並繪成圖(十六)

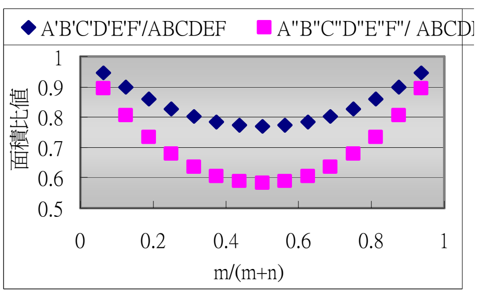
分點在該線段中的位置與面積比值的圖形呈現凹向上的曲線。

①當 $\frac{m}{m+n}$ 的值愈靠近 0 或 1，也就是分點位置越靠近線段端點時，面積的比值愈大。

②當 m＝n 時，也就是分點位置在該線段中點時，面積比值有最小值。

m	n	m/(m+n)	A'B'C'D'E'F'/ABCDEF	A"B"C"D"E"F"/ ABCDEF
15	1	0.063	0.9459	0.8942
14	2	0.125	0.899	0.8064
13	3	0.188	0.8594	0.7348
12	4	0.25	0.8269	0.6782
11	5	0.313	0.8017	0.6353
10	6	0.375	0.7837	0.6053
9	7	0.438	0.7728	0.5876
8	8	0.5	0.7692	0.5817
7	9	0.563	0.7728	0.5876
6	10	0.625	0.7837	0.6053
5	11	0.688	0.8017	0.6353
4	12	0.75	0.8269	0.6782
3	13	0.813	0.8594	0.7348
2	14	0.875	0.899	0.8064
1	15	0.938	0.9459	0.8942

表(六)



圖(十六)

(二) 任意 K 邊形(K＞4)

K 邊形Γ，邊長依序為a_1、a_2、a_3、⋯、a_K，各內角依序為θ_1、θ_2、θ_3、⋯、θ_K。

1、依序在 K 邊形Γ各邊以 m：n 比例取 K 個分點形成新 K 邊形Γ′，則

(1) K 邊形Γ′與 K 邊形Γ不相似。

(2) $$\frac{\text{K邊形}\Gamma'\text{面積}}{\text{K邊形}\Gamma\text{面積}}=1-\frac{\frac{mn}{(m+n)^2}\left(a_K a_1\sin\theta_1+\sum_{i=1}^{K-1}a_i a_{i+1}\sin\theta_{i+1}\right)}{\sum_{j=1}^{K-2}\left\{(-1)^{j+1}a_j\cdot\left[\sum_{i=j+1}^{K-1}(-1)^i\cdot a_i\cdot\sin(\theta_{j+1}+\cdots+\theta_i)\right]\right\}},$$

(3)面積比值範圍：大於等於 $1-\dfrac{\left(a_K a_1\sin\theta_1+\sum_{i=1}^{K-1}a_i a_{i+1}\sin\theta_{i+1}\right)}{4\cdot\sum_{j=1}^{K-2}\left\{(-1)^{j+1}a_j\cdot\left[\sum_{i=j+1}^{K-1}(-1)^i\cdot a_i\cdot\sin(\theta_{j+1}+\cdots+\theta_i)\right]\right\}}$，小於 1。

K 邊形Γ′與 K 邊形Γ面積比值及面積比值最小值會依邊長及角度不同而不同。

2、K 邊形Γ′邊長依序為a_1'、a_2'、a_3'、⋯、a_K'，各內角依序為θ_1'、θ_2'、θ_3'、⋯、θ_K'。

(1)依序在 K 邊形Γ′各邊以 n：m 比例取分點，形成新 K 邊形Γ″，則 K 邊形Γ″與 K 邊形Γ不相似。

(2) $$\frac{\text{K邊形}\Gamma''\text{面積}}{\text{K邊形}\Gamma\text{面積}}$$
$$=1-\frac{\frac{mn}{(m+n)^2}\left(a_K a_1\sin\theta_1+\sum_{i=1}^{K-1}a_i a_{i+1}\sin\theta_{i+1}\right)+\frac{mn}{(m+n)^2}\left(a_K' a_1'\sin\theta_1'+\sum_{i=1}^{K-1}a_i' a_{i+1}'\sin\theta_{i+1}'\right)}{\sum_{j=1}^{K-2}\left\{(-1)^{j+1}a_j\cdot\left[\sum_{i=j+1}^{K-1}(-1)^i\cdot a_i\cdot\sin(\theta_{j+1}+\cdots+\theta_i)\right]\right\}}$$

(3)面積比值範圍：大於等於 $1-\dfrac{\left(a_K a_1\sin\theta_1+\sum_{i=1}^{K-1}a_i a_{i+1}\sin\theta_{i+1}\right)+\left(a_K' a_1'\sin\theta_1'+\sum_{i=1}^{K-1}a_i' a_{i+1}'\sin\theta_{i+1}'\right)}{4\cdot\sum_{j=1}^{K-2}\left\{(-1)^{j+1}a_j\cdot\left[\sum_{i=j+1}^{K-1}(-1)^i\cdot a_i\cdot\sin(\theta_{j+1}+\cdots+\theta_i)\right]\right\}}$

，小於 1。

K 邊形Γ″與 K 邊形Γ面積比值及面積比值最小值會依邊長及角度不同而不同。

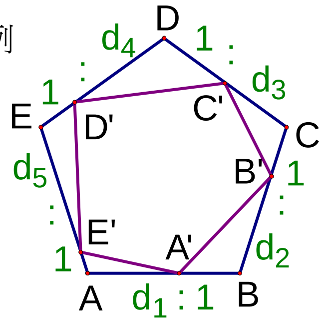
四、正多邊形各邊以不同比例取分點的探討

(一)面積比值公式

1、如圖(十七)，在正五邊形各邊依序以$d_1:1, d_2:1, d_3:1,\cdots, d_5:1$的比例取分點，並將各分點依序連成一新五邊形。設正五邊形邊長為 1,

新五邊形面積

$$=5\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cot36^\circ-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{d_1+1}\cdot\frac{d_2}{d_2+1}\sin72^\circ+\frac{1}{d_2+1}\cdot\frac{d_3}{d_3+1}\sin72^\circ+\frac{1}{d_3+1}\cdot\frac{d_4}{d_4+1}\sin72^\circ+\cdots+\frac{1}{d_5+1}\cdot\frac{d_1}{d_1+1}\sin72^\circ\right)$$



圖(十七)

$$\frac{\text{新五邊形面積}}{\text{正五邊形面積}}=1-\frac{2}{5}\cdot\frac{\sin72^\circ}{\cot36^\circ}\left(\frac{d_2}{(d_1+1)(d_2+1)}+\frac{d_3}{(d_2+1)(d_3+1)}+\cdots+\frac{d_1}{(d_5+1)(d_1+1)}\right)$$
$$=1-\frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{d_2}{(d_1+1)(d_2+1)}+\frac{d_3}{(d_2+1)(d_3+1)}+\cdots+\frac{d_1}{(d_5+1)(d_1+1)}\right)$$

2、在正 K 邊形各邊依序以 $d_1:1, d_2:1, d_3:1, \cdots, d_k:1$ 的比例取分點，並將各分點依序連成一新 K 邊形。設正 K 邊形邊長爲 1，

新 K 邊形面積

$$= K\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cot\frac{180^\circ}{K}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{d_1+1}\cdot\frac{d_2}{d_2+1}\sin\frac{360^\circ}{K}+\frac{1}{d_2+1}\cdot\frac{d_3}{d_3+1}\sin\frac{360^\circ}{K}+\frac{1}{d_3+1}\cdot\frac{d_4}{d_4+1}\sin\frac{360^\circ}{K}+\cdots+\frac{1}{d_K+1}\cdot\frac{d_1}{d_1+1}\sin\frac{360^\circ}{K}\right)$$

$$\frac{\text{新K邊形面積}}{\text{正K邊形面積}}=1-\frac{2}{K}\cdot\frac{\sin\frac{360^\circ}{K}}{\cot\frac{180^\circ}{K}}\left(\frac{d_2}{(d_1+1)(d_2+1)}+\frac{d_3}{(d_2+1)(d_3+1)}+\cdots+\frac{d_1}{(d_k+1)(d_1+1)}\right)$$

$$=1-\frac{2}{K}\left(1-\cos\frac{360^\circ}{K}\right)\left[\frac{d_1}{(d_k+1)(d_1+1)}+\sum_{i=1}^{K-1}\frac{d_{i+1}}{(d_i+1)(d_{i+1}+1)}\right]$$

由比值公式可知，新 K 邊形面積與正 K 邊形面積比值不受邊長影響，只與 d_1、d_2、⋯、d_K 值有關，也就是只與分點位置有關。

(二)面積比值的範圍

當 d_2 趨近於很大時，$\frac{d_2}{(d_1+1)(d_2+1)}$ 趨近於 1；當 d_3 趨近於 0 時，$\frac{d_3}{(d_2+1)(d_3+1)}$ 趨近於 0。因此當 d_1、d_3、d_5、⋯趨近於 0 且 d_2、d_4、d_6、⋯趨近於很大時，新 K 邊形面積與正 K 邊形面積比值趨近於 $1-\frac{2}{K}(1-\cos\frac{360^\circ}{K})\cdot[\frac{K}{2}]$。([ ]爲高斯符號)

所以，$1-\frac{2}{K}(1-\cos\frac{360^\circ}{K})\cdot[\frac{K}{2}]<\frac{\text{新K邊形面積}}{\text{正K邊形面積}}<1$。

(三)利用 Excel 及 GSP 繪圖求出面積比值

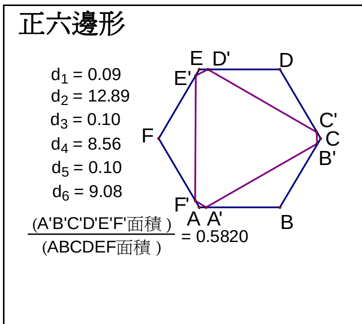
1、利用 Excel 表格表(七)，(1)求出面積比值。(2)找出 $1-\frac{2}{K}(1-\cos\frac{360^\circ}{K})\cdot[\frac{K}{2}]$ 之值。

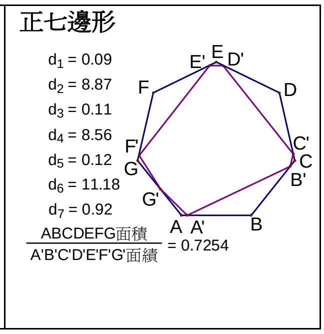
邊數K	d1	d2	d3	d4	d5	d6	d7	d8	d9	d10	⋯	面積比值	1-2/K*(1-COS(2π/K))*[K/2]
3	1.0	2.0	1.5									0.2666667	0.000000000
4	2.0	1.0	4.0	5.0								0.5777778	0.000000000
5	1.5	2.0	1.0	2.6	6.0							0.6909222	0.447213595
6	1.E-05	1.E+05	1.E-05	1.E+05	1.E-05	1.E+05						0.50001	0.5
7	1.E-05	1.E+05	1.E-05	1.E+05	1.E-05	1.E+05	1.E-05					0.6772824	0.677276973
8	1.E-05	1.E+05	1.E-05	1.E+05	1.E-05	1.E+05	1.E-05	1.E+05				0.7071126	0.707106781
9	1.E-06	1.E+06	1.E-06	1.E+06	1.E-06	1.E+06	1.E-06	1.E+06	1.E-05			0.7920399	0.792039505
10	1.E-09	1.E+09	1.E-09	1.E+09	1.E-09	1.E+09	1.E-09	1.E+09	1.E-09	1.E+09		0.809017	0.809016994

表(七)

2、GSP 繪製正多邊形

(1)移動各分點改變各邊比例，此時面積比值會跟著改變。
(2)在各分點不動下，移動正多邊形頂點(A 或 B 或 C)改變圖形大小，面積比值不變。
(3)當 d_1、d_2、d_3、⋯、d_K 之值一小一大差距較大時，面積比值會變得較小。

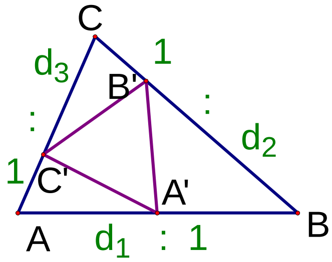




五、非等邊三角形、平行四邊形、鳶形及梯形各邊以不同比例取分點的探討

(一)非等邊三角形

如圖(十八)，在三角形ΔABC各邊依序以$d_1:1, d_2:1, d_3:1$ 的比例取分點A'、B'、C'，連接各分點成$\triangle A'B'C'$。因為



圖(十八)

$$\Delta AA'C' = \frac{1}{d_3+1}\Delta AA'C = \frac{1}{d_3+1}\cdot\frac{d_1}{d_1+1}\Delta ABC，$$

$$\Delta BB'A' = \frac{1}{d_1+1}\Delta BB'A = \frac{1}{d_1+1}\cdot\frac{d_2}{d_2+1}\Delta ABC，$$

$$\Delta CC'B' = \frac{1}{d_2+1}\Delta CC'B = \frac{1}{d_2+1}\cdot\frac{d_3}{d_3+1}\Delta ABC，所以$$

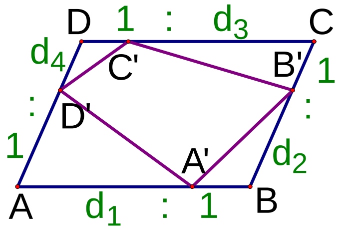
$$\frac{\Delta A'B'C'面積}{\Delta ABC面積} = 1-\left(\frac{d_2}{(d_1+1)(d_2+1)}+\frac{d_3}{(d_2+1)(d_3+1)}+\frac{d_1}{(d_3+1)(d_1+1)}\right)，$$

與正三角形各邊以不同比例取分點時，所得面積比值結果相同。面積比值與邊長無關。

(二)平行四邊形

如圖(十九)，在平行四邊形 ABCD 各邊依序以$d_1:1, d_2:1, d_3:1, d_4:1$ 的比例取分點A'、B'、C'、D'，連接各分點形成四邊形$A'B'C'D'$。因為

$$\Delta AA'D' = \frac{d_1}{2(d_4+1)(d_1+1)}平行四邊形ABCD, \Delta BB'A' = \frac{d_2}{2(d_1+1)(d_2+1)}平行四邊形ABCD$$



圖(十九)

$$\Delta CC'B' = \frac{d_3}{2(d_2+1)(d_3+1)}平行四邊形ABCD，$$

$$\Delta DD'C' = \frac{d_4}{2(d_3+1)(d_4+1)}平行四邊形ABCD，所以，$$

$$\frac{平行四邊形A'B'C'D'面積}{平行四邊形ABCD面積}$$

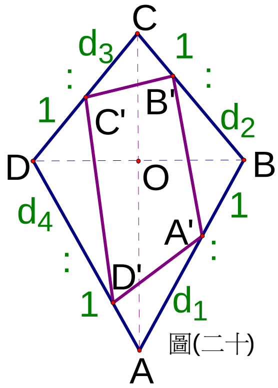
$$=1-\frac{1}{2}\left(\frac{d_2}{(d_1+1)(d_2+1)}+\frac{d_3}{(d_2+1)(d_3+1)}+\frac{d_4}{(d_3+1)(d_4+1)}+\frac{d_1}{(d_4+1)(d_1+1)}\right)$$

與正方形各邊以不同比例取分點時，所得面積比值結果相同。面積比值與邊長無關。

(三)鳶形

如圖(二十)，在鳶形 ABCD 各邊依序以$d_1:1, d_2:1, d_3:1, d_4:1$ 的比例取分點A'、B'、C'、D'，連接各分點形成四邊形$A'B'C'D'$。已知鳶形 ABCD 兩對角線相交於 O 點，且 $\overline{BO}=\overline{DO}$，$\overline{AO}:\overline{CO}=r:1$，

$$\Delta AA'D' = \frac{1}{d_4+1}\cdot\frac{d_1}{d_1+1}\Delta ABD = \frac{r}{r+1}\cdot\frac{d_1}{(d_4+1)(d_1+1)}鳶形ABCD，$$



圖(二十)

$$\Delta BB'A' = \frac{d_2}{2(d_1+1)(d_2+1)}鳶形ABCD，$$

$$\Delta CC'B' = \frac{1}{r+1}\cdot\frac{d_3}{(d_2+1)(d_3+1)}鳶形ABCD，$$

$$\Delta DD'C' = \frac{d_4}{2(d_3+1)(d_4+1)}鳶形ABCD，$$

$$\frac{四邊形A'B'C'D'面積}{鳶形ABCD面積}$$

$$=1-(\frac{d_2}{2(d_1+1)(d_2+1)}+\frac{1}{r+1}\cdot\frac{d_3}{(d_2+1)(d_3+1)}+\frac{d_4}{2(d_3+1)(d_4+1)}+\frac{r}{r+1}\cdot\frac{d_1}{(d_4+1)(d_1+1)})$$

面積比值與對稱軸上的對角線的兩端點跟兩對角線交點的距離及分點位置有關。

(四)梯形

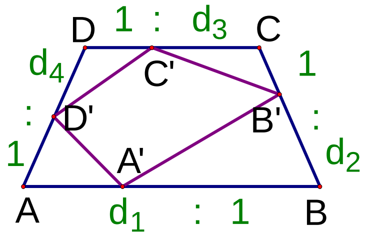
如圖(二十一)，在梯形 ABCD 各邊依序以 $d_1:1, d_2:1, d_3:1, d_4:1$ 的比例取分點 A′、B′、C′、D′，連接各分點形成四邊形 A′ B′ C′ D′。已知梯形 ABCD 兩底的比 $\overline{AB}:\overline{CD}=r:1$，

$$\Delta AA'D'=\frac{1}{d_4+1}\cdot\frac{d_1}{d_1+1}\Delta ABD=\frac{r}{r+1}\cdot\frac{d_1}{(d_4+1)(d_1+1)}梯形ABCD，$$

$$\Delta BB'A'=\frac{r}{r+1}\cdot\frac{d_2}{(d_1+1)(d_2+1)}梯形ABCD，$$

$$\Delta CC'B'=\frac{1}{r+1}\cdot\frac{d_3}{(d_2+1)(d_3+1)}梯形ABCD，$$

$$\Delta DD'C'=\frac{1}{r+1}\cdot\frac{d_4}{(d_3+1)(d_4+1)}梯形ABCD，$$



圖(二十一)

$$\frac{四邊形A'B'C'D'面積}{梯形ABCD面積}$$

$$=1-(\frac{r}{r+1}\cdot\frac{d_2}{(d_1+1)(d_2+1)}+\frac{1}{r+1}\cdot\frac{d_3}{(d_2+1)(d_3+1)}+\frac{1}{r+1}\cdot\frac{d_4}{(d_3+1)(d_4+1)}+\frac{r}{r+1}\cdot\frac{d_1}{(d_4+1)(d_1+1)})$$

面積比值與兩底的比及分點位置有關。

(五) 利用 Excel 表格及 GSP 繪圖求出面積比值

1、利用表(八)求出面積比值。可得面積比值範圍：大於 0，小於 1。

形狀	d_1	d_2	d_3	d_4	γ	面積比值
三角形ABC	1	1.2	2			0.25758
平行四邊形ABCD	1.2	1	4	2		0.52879
鳶形ABCD， 線段AO: 線段CO= γ :1	1.5	2	1	3	1.5	0.52250
梯形ABCD，線段AB: 線段CD= γ :1	0.5	2	1.6	1	2.1	0.45782

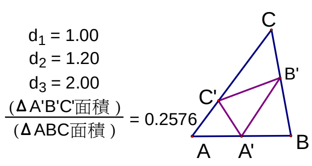
表(八)

2、透過 GSP 繪圖來探討

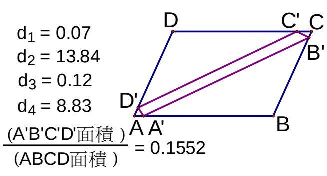
(1)移動各分點改變各邊比例，此時面積比值會跟著改變。

(2)在 m : n 比例不動下，改變圖形，非等邊三角形、平行四邊形面積比值不變；鳶形及梯形面積比值跟著改變。

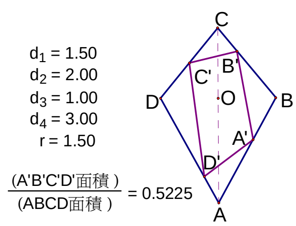
非等邊三角形



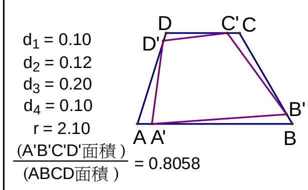
平行四邊形



鳶形

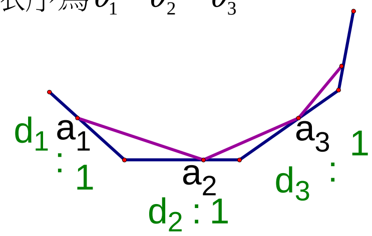


梯形



六、K 邊形(K＞4)各邊以不同比例取分點的探討

(一)如圖(二十二)K 邊形Γ，邊長依序爲a_1、a_2、a_3、⋯、a_K，各內角依序爲θ_1、θ_2、θ_3、⋯、θ_K。在 K 邊形各邊依序以$d_1:1, d_2:1, d_3:1, \cdots, d_k:1$的比例取分點，並將各分點依序連成一新 K 邊形Γ′。



圖(二十二)

K 邊形Γ面積$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-2}\left\{(-1)^{j+1}a_j\cdot\left[\sum_{i=j+1}^{K-1}(-1)^i\cdot a_i\cdot\sin(\theta_{j+1}+\cdots+\theta_i)\right]\right\}$

K 邊形Γ′面積

$=$K 邊形Γ面積$-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{d_1+1}\cdot\frac{a_2d_2}{d_2+1}\sin\theta_2+\frac{a_2}{d_2+1}\cdot\frac{a_3d_3}{d_3+1}\sin\theta_3+\cdots+\frac{a_k}{d_k+1}\cdot\frac{a_1d_1}{d_1+1}\sin\theta_1\right)$，

所以$\dfrac{\text{K邊形}\Gamma'\text{面積}}{\text{K邊形}\Gamma\text{面積}}=1-\dfrac{\dfrac{a_Ka_1d_1\sin\theta_1}{(d_k+1)(d_1+1)}+\sum_{i=1}^{K-1}\dfrac{a_ia_{i+1}d_{i+1}\sin\theta_{i+1}}{(d_i+1)(d_{i+1}+1)}}{\sum_{j=1}^{K-2}\left\{(-1)^{j+1}a_j\cdot\left[\sum_{i=j+1}^{K-1}(-1)^i\cdot a_i\cdot\sin(\theta_{j+1}+\cdots+\theta_i)\right]\right\}}$，

所以 K 邊形(K＞4)，各邊以不同比例取分點所得面積比值除了與分點位置有關並與圖形的邊長、角度都有關係。面積比值範圍：大於 0，小於 1。

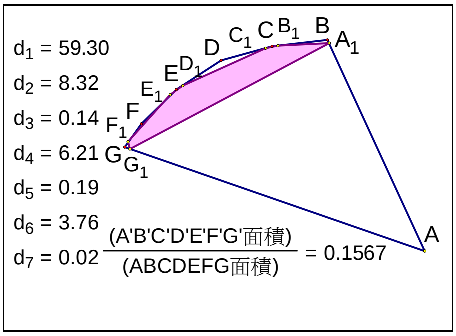
(二)透過 GSP 繪製七邊形來探討

七邊形 ABCDEFG，各邊依序以$d_1:1, d_2:1, \cdots, d_7:1$的比例取分點 A′、B′、C′、D′、E′、F′、G′

1、移動各分點改變各邊比例,此時面積比值會跟著改變。

2、在各分點不動下，改變七邊形 ABCDEFG 圖形，面積比值跟著改變。

3、當移動 A 點使得$\overline{AB}$及$\overline{AG}$長度增長，面積比值會愈趨近於 0。



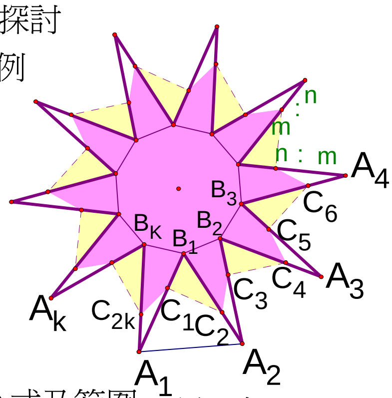
七、邊長相等的正 K 角星形各邊以相同比例取分點時，新圖形落在正 K 角星形內部面積與正 K 角星形面積比值與範圍以及新圖形與正 K 角星形面積比值與範圍的探討

如圖(二十三)，邊長相等的正 K 角星形$A_1A_2...A_k$，在各邊以 m：n 比例依序取分點$C_1,C_2,...,C_{2k}$，連接各分點形成一新圖形$C_1C_2...C_{2k}$，

已知$\overline{A_1C_1}:\overline{C_1B_1}=\overline{B_1C_2}:\overline{C_2A_2}=\cdots=\overline{B_KC_{2K}}:\overline{C_{2k}A_1}=m:n$，

設$\overline{A_1A_2}=a$，$\angle A_1B_1A_2=r°$，$\frac{360}{K}<r\le 180$，

可得$\angle B_1A_1A_2=90°-\frac{r°}{2}$，$\angle B_1A_2B_2=r°-\frac{360°}{K}$，$\overline{A_1B_1}=\frac{a}{2}\csc(\frac{r°}{2})$



圖(二十三)

(一)新圖形$C_1C_2...C_{2k}$在正 K 角星形內部面積與正 K 角星形面積比值公式及範圍

1、新圖形$C_1C_2...C_{2k}$在正 K 角星形內部面積

$=$正 K 角星形面積$-K\times\Delta C_2A_2C_3$面積

$=\left[K\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cot\frac{180°}{K}-K\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cot(\frac{r°}{2})\right]-\frac{Kmn}{2(m+n)^2}\left[\frac{a}{2}\csc(\frac{r°}{2})\right]^2\sin(r°-\frac{360°}{K})$， 2、$\dfrac{\text{新圖形在正K角星形內部面積}}{\text{正K角星形面積}}=1-\dfrac{mn}{2(m+n)^2}\left[\dfrac{\csc^2(\frac{r^\circ}{2})\cdot\sin(r^\circ-\frac{360^\circ}{K})}{\cot\frac{180^\circ}{K}-\cot\frac{r^\circ}{2}}\right]$，面積比值與

K 值、r 值及分點位置有關。 令 $\dfrac{m}{m+n}=x$，$\dfrac{n}{m+n}=1-x$，

$$\frac{\text{新圖形在正K角星形內部面積}}{\text{正K角星形面積}}=\frac{\csc^2(\frac{r^\circ}{2})\cdot\sin(r^\circ-\frac{360^\circ}{K})}{2(\cot\frac{180^\circ}{K}-\cot\frac{r^\circ}{2})}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{\csc^2(\frac{r^\circ}{2})\cdot\sin(r^\circ-\frac{360^\circ}{K})}{8(\cot\frac{180^\circ}{K}-\cot\frac{r^\circ}{2})}$$

當 $x=\dfrac{1}{2}$ 時，也就是 m＝n，分點位置在線段的中點時，新圖形在正 K 角星形內部面積與正 K 角星形面積比值有最小值 $1-\dfrac{\csc^2(\frac{r^\circ}{2})\cdot\sin(r^\circ-\frac{360^\circ}{K})}{8(\cot\frac{180^\circ}{K}-\cot\frac{r^\circ}{2})}$。所以面積比值範圍：大於等於 $1-\dfrac{\csc^2(\frac{r^\circ}{2})\cdot\sin(r^\circ-\frac{360^\circ}{K})}{8(\cot\frac{180^\circ}{K}-\cot\frac{r^\circ}{2})}$，小於 1。

3、藉助 Microsoft Excel 來探討

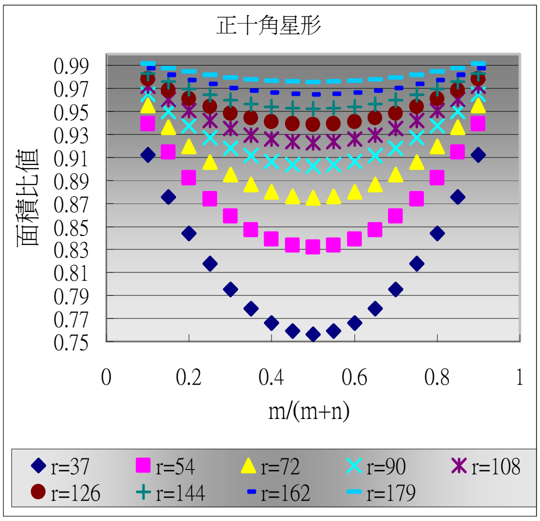
以正十角星形為例，用 Excel 表格表(九)找面積比值，並繪製成圖(二十四)。

(1)分點在該線段中的位置與面積比值呈現拋物線的關係。當 $\dfrac{m}{m+n}$ 的值愈靠近 0 或 1，也就是分點位置愈靠近線段的端點時，面積的比值會越大。當 m＝n 時，也就是分點位置在線段的中點時，面積的比值有最小值。

(2)當 m : n 比例固定，r 值由小到大，面積比值會越大。

m	n	m/(m+n)	r=37	r=72	r=108	r=144	r=179
1	9	0.1	0.91235	0.955	0.97219	0.98281	0.99117
15	85	0.15	0.87583	0.93625	0.9606	0.97565	0.9875
2	8	0.2	0.84418	0.92	0.95056	0.96944	0.98431
25	75	0.25	0.8174	0.90625	0.94206	0.96419	0.98161
3	7	0.3	0.79549	0.895	0.93511	0.95989	0.97941
35	65	0.35	0.77845	0.88625	0.9297	0.95655	0.97769
4	6	0.4	0.76628	0.88	0.92584	0.95416	0.97647
45	55	0.45	0.75897	0.87625	0.92352	0.95273	0.97573
5	5	0.5	0.75654	0.875	0.92275	0.95225	0.97549
55	45	0.55	0.75897	0.87625	0.92352	0.95273	0.97573
6	4	0.6	0.76628	0.88	0.92584	0.95416	0.97647
65	35	0.65	0.77845	0.88625	0.9297	0.95655	0.97769
7	3	0.7	0.79549	0.895	0.93511	0.95989	0.97941
75	25	0.75	0.8174	0.90625	0.94206	0.96419	0.98161
8	2	0.8	0.84418	0.92	0.95056	0.96944	0.98431
85	15	0.85	0.87583	0.93625	0.9606	0.97565	0.9875
9	1	0.9	0.91235	0.955	0.97219	0.98281	0.99117

表(九)



圖(二十四)

(二)新圖形 $C_1C_2...C_{2k}$ 面積與正 K 角星形面積比值公式及範圍

1、新圖形 $C_1C_2...C_{2k}$ 面積＝正 K 角星形面積＋K×$\Delta C_1B_1C_2$ 面積－K×$\Delta C_2A_2C_3$ 面積

$$=\left[K\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cot\frac{180^\circ}{K}-K\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cot(\frac{r^\circ}{2})\right]+\frac{Kmn}{2(m+n)^2}\left[\frac{a}{2}\csc(\frac{r^\circ}{2})\right]^2\left[\sin r^\circ-\sin(r^\circ-\frac{360^\circ}{K})\right]$$

2、$\dfrac{\text{新圖形面積}}{\text{正K角星形面積}}=1+\dfrac{mn}{2(m+n)^2}\cdot\dfrac{\csc^2(\frac{r^\circ}{2})\cdot\left[\sin r^\circ-\sin(r^\circ-\frac{360^\circ}{K})\right]}{\cot\frac{180^\circ}{K}-\cot\frac{r^\circ}{2}}$，令$\dfrac{m}{m+n}=x$

$$\frac{\text{新圖形面積}}{\text{正K角星形面積}}$$

$$=-\frac{\csc^2(\frac{r^\circ}{2})\cdot\left[\sin r^\circ-\sin(r^\circ-\frac{360^\circ}{K})\right]}{2(\cot\frac{180^\circ}{K}-\cot\frac{r^\circ}{2})}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1+\frac{\csc^2(\frac{r^\circ}{2})\cdot\left[\sin r^\circ-\sin(r^\circ-\frac{360^\circ}{K})\right]}{8(\cot\frac{180^\circ}{K}-\cot\frac{r^\circ}{2})}$$

(1)當$\dfrac{360}{K}<r<90+\dfrac{180}{K}$時，$\sin r^\circ>\sin(r^\circ-\dfrac{360^\circ}{K})$。所以在$x=\dfrac{1}{2}$時，面積比值有最大值。

面積比值範圍：大於 1，小於等於$1+\dfrac{\csc^2(\frac{r^\circ}{2})\cdot\left[\sin r^\circ-\sin(r^\circ-\frac{360^\circ}{K})\right]}{8(\cot\frac{180^\circ}{K}-\cot\frac{r^\circ}{2})}$。

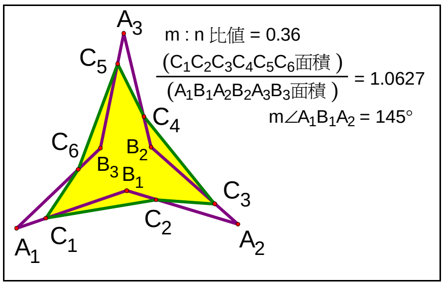
(2)當$r=90+\dfrac{180}{K}$時，$\sin r^\circ=\sin(r^\circ-\dfrac{360^\circ}{K})$。面積比值為 1。

(3)當$90+\dfrac{180}{K}<r\le 180$時，$\sin r^\circ<\sin(r^\circ-\dfrac{360^\circ}{K})$。所以在$x=\dfrac{1}{2}$時，面積比值有最小值。

面積比值範圍：小於 1，大於等於$1+\dfrac{\csc^2(\frac{r^\circ}{2})\cdot\left[\sin r^\circ-\sin(r^\circ-\frac{360^\circ}{K})\right]}{8(\cot\frac{180^\circ}{K}-\cot\frac{r^\circ}{2})}$。

3、繪製正三角星形找面積比值

(1)移動 C_1 點改變 m : n 比例，面積比值會跟著改變。
(2)移動 B_1 點改變 r 值由小到大，面積比值會由大到小。
(3)當 r=150 時，改變 m : n 比例，面積比值仍為 1。
(4)在 m : n 比例不動下，移動 A_1 點改變圖形大小，面積比值不變。



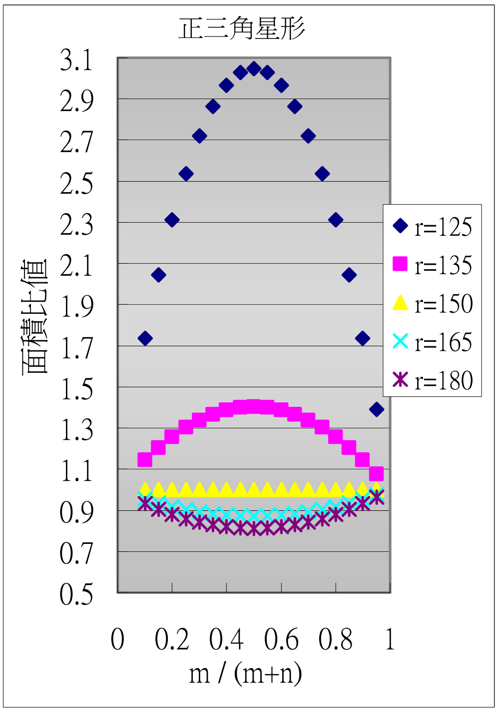
4、藉助 Microsoft Excel 來探討

以正三角星形為例，用 Excel 表格表(十)找面積比值，並繪成圖(二十五)

當 m:n 比例固定，r 值由小到大，面積比值會越小。且
(1)當 120＜r＜150 時，分點在該線段中的位置與面積比值呈現開口向下的拋物線關係。當分點位置愈靠近線段的端點時，面積比值會越小；當分點位置在線段的中點時，面積比值有最大值。面積比值皆大於 1。
(2)當 r=150 時，分點在該線段中的位置與面積比值呈現一水平直線的關係。分點的位置不影響面積比值，面積比值等於 1。
(3)當 150＜r≤180 時，分點在該線段中的位置與面積比值呈現開口向上的拋物線關係。當分點位置愈靠近線段的端點時，面積比值會越大；當分點位置在線段的中點時，面積比值有最小值。面積比值皆小於 1。

m	n	m/(m+n)	r=125	r=135	r=150	r=165	r=180
1	9	0.1	1.7373	1.14487	1	0.95395	0.9325
15	85	0.15	2.04451	1.20524	1	0.93477	0.90438
2	8	0.2	2.31075	1.25755	1	0.91814	0.88
25	75	0.25	2.53604	1.30182	1	0.90407	0.85938
3	7	0.3	2.72036	1.33804	1	0.89256	0.8425
35	65	0.35	2.86373	1.36621	1	0.88361	0.82938
4	6	0.4	2.96613	1.38633	1	0.87721	0.82
45	55	0.45	3.02757	1.3984	1	0.87337	0.81438
5	5	0.5	3.04805	1.40242	1	0.87209	0.8125
55	45	0.55	3.02757	1.3984	1	0.87337	0.81438
6	4	0.6	2.96613	1.38633	1	0.87721	0.82
65	35	0.65	2.86373	1.36621	1	0.88361	0.82938
7	3	0.7	2.72036	1.33804	1	0.89256	0.8425
75	25	0.75	2.53604	1.30182	1	0.90407	0.85938
8	2	0.8	2.31075	1.25755	1	0.91814	0.88
85	15	0.85	2.04451	1.20524	1	0.93477	0.90438
9	1	0.9	1.7373	1.14487	1	0.95395	0.9325
95	5	0.95	1.38913	1.07646	1	0.9757	0.96438

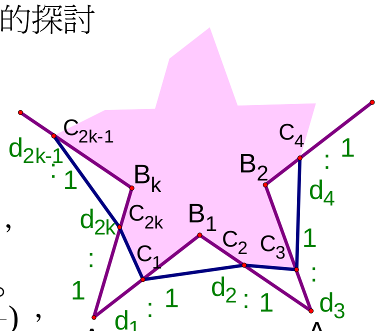
表(十)



圖(二十五)

八、邊長相等的正 K 角星形各邊以不同比例取分點時，新圖形落在正 K 角星形內部面積與正 K 角星形面積比值與範圍以及新圖形與正 K 角星形面積比值與範圍的探討

如圖(二十六)，邊長相等的正 K 角星形 $A_1A_2...A_k$ ，在各邊依序以不同比例 $d_1:1, d_2:1, d_3:1, \cdots, d_{2k}:1$ 的比例取分點 $C_1, C_2, ..., C_{2k}$ ，依序連接各分點，形成新圖形 $C_1C_2...C_{2k}$ ，



圖(二十六)

設 $\overline{A_1A_2}=a$， $\angle A_1B_1A_2=r°$ ， $\frac{360}{K}<r\le 180$，可得 $\angle B_1A_1A_2=90°-\frac{r°}{2}$ ，

$\angle B_1A_2B_2=r°-\frac{360°}{K}$ ，$\overline{A_1B_1}=\frac{a}{2}\csc(\frac{r°}{2})$，$\overline{B_1B_2}=a\cdot\csc(\frac{r°}{2})\sin(\frac{r°}{2}-\frac{180°}{K})$ ，

(一)新圖形 $C_1C_2...C_{2k}$ 在正 K 角星形內部面積與正 K 角星形面積比值公式及範圍

1、新圖形在正 K 角星形內部面積 $=\left[K\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cot\frac{180°}{K}-K\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cot(\frac{r°}{2})\right]-$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{a}{2}\csc(\frac{r°}{2})\right]^2\sin(r°-\frac{360°}{K})\left[\frac{d_3}{(d_2+1)(d_3+1)}+\frac{d_5}{(d_4+1)(d_5+1)}+\ldots+\frac{d_1}{(d_{2K}+1)(d_1+1)}\right]$$

$$=\frac{Ka^2}{4}\left[\cot\frac{180°}{K}-\cot(\frac{r°}{2})\right]-\frac{a^2}{8}\csc^2(\frac{r°}{2})\sin(r°-\frac{360°}{K})\cdot(\sum_{i=1}^{K-1}\frac{d_{2i+1}}{(d_{2i}+1)(d_{2i+1}+1)}+\frac{d_1}{(d_{2K}+1)(d_1+1)})$$

2、$\dfrac{\text{新圖形在正K角星形內部面積}}{\text{正K角星形面積}}$

$$=1-\frac{1}{2K}\left[\frac{\csc^2(\frac{r°}{2})\cdot\sin(r°-\frac{360°}{K})}{\cot\frac{180°}{K}-\cot\frac{r°}{2}}\right]\cdot(\sum_{i=1}^{K-1}\frac{d_{2i+1}}{(d_{2i}+1)(d_{2i+1}+1)}+\frac{d_1}{(d_{2K}+1)(d_1+1)}) ，$$

面積比值與 K 值、r 值及 d_i 值有關。

3、新圖形 $C_1C_2...C_{2k}$ 在正 K 角星形內部面積與正 K 角星形面積比值範圍

$$\frac{\text{正K邊形}B_1B_2...B_k\text{面積}}{\text{正K角星形面積}}<\frac{\text{新圖形在正K角星形內部面積}}{\text{正K角星形面積}}<1，$$

$$\frac{\dfrac{K\left[a\cdot\csc\frac{r°}{2}\cdot\sin(\frac{r°}{2}-\frac{180°}{K})\right]^2}{4}\cot\frac{180°}{K}}{\dfrac{Ka^2}{4}(\cot\frac{180°}{K}-\cot\frac{r°}{2})}<\frac{\text{新圖形在正K角星形內部面積}}{\text{正K角星形面積}}<1，$$

$$\frac{\left[\csc\frac{r°}{2}\cdot\sin(\frac{r°}{2}-\frac{180°}{K})\right]^2\cot\frac{180°}{K}}{\cot\frac{180°}{K}-\cot\frac{r°}{2}}<\frac{\text{新圖形在正K角星形內部面積}}{\text{正K角星形面積}}<1，$$

4、以正三角星形為例，用 Excel 表格表(十一)找(1)面積比值。(2)正 $\Delta B_1B_2B_3$ 與正三角星形 $A_1A_2A_3$ 面積比值。

d1	d2	d3	d4	d5	d6	r=121面積比值	r=135面積比值	r=150面積比值	r=165面積比值	r=180面積比值
1000	0.001	1000	0.001	1000	0.001	0.007	0.072496	0.135704	0.194604	0.251498
0.001	1000	0.001	1000	0.001	1000	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999

	r=121	r=135	r=150	r=165	r=180
正三角形B1B2B3與正三角星形A1A2A3面積比值	0.005013	0.07064	0.133975	0.192993	0.25

表(十一)

(二)新圖形 $C_1C_2...C_{2k}$ 與正 K 角星形面積比值公式及範圍

1、新圖形面積 $=\left[K\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cot\frac{180°}{K}-K\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cot(\frac{r°}{2})\right]$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{a}{2}\csc(\frac{r°}{2})\right]^2\cdot\sin r°\cdot\left[\frac{d_2}{(d_1+1)(d_2+1)}+\frac{d_4}{(d_3+1)(d_4+1)}+...+\frac{d_{2k}}{(d_{2K-1}+1)(d_{2k}+1)}\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{a}{2}\csc(\frac{r°}{2})\right]^2\cdot\sin(r°-\frac{360°}{K})\cdot\left[\frac{d_3}{(d_2+1)(d_3+1)}+\frac{d_5}{(d_4+1)(d_5+1)}+...+\frac{d_1}{(d_{2K}+1)(d_1+1)}\right]$$

$$=\frac{Ka^2}{4}\left[\cot\frac{180°}{K}-\cot(\frac{r°}{2})\right]+\frac{a^2}{8}\csc^2(\frac{r°}{2})\sin r°\cdot(\sum_{i=1}^{K}\frac{d_{2i}}{(d_{2i-1}+1)(d_{2i}+1)})$$

$$-\frac{a^2}{8}\csc^2(\frac{r°}{2})\sin(r°-\frac{360°}{K})\cdot(\sum_{i=1}^{K-1}\frac{d_{2i+1}}{(d_{2i}+1)(d_{2i+1}+1)}+\frac{d_1}{(d_{2K}+1)(d_1+1)})$$

2、$\dfrac{\text{新圖形面積}}{\text{正K角星形面積}}$

$$=1+\frac{1}{2K}\cdot\frac{\csc^2(\frac{r°}{2})}{\cot\frac{180°}{K}-\cot\frac{r°}{2}}\left[\sin r°\cdot(\sum_{i=1}^{K}\frac{d_{2i}}{(d_{2i-1}+1)(d_{2i}+1)})-\sin(r°-\frac{360°}{K})\cdot(\sum_{i=1}^{K-1}\frac{d_{2i+1}}{(d_{2i}+1)(d_{2i+1}+1)}+\frac{d_1}{(d_{2K}+1)(d_1+1)})\right]$$

面積比值與 K 值、r 值及 d_i 值有關。

3、新圖形面積與正 K 角星形面積比值範圍

$$\frac{\text{正K邊形}B_1B_2\cdots B_k\text{面積}}{\text{正K角星形面積}}<\frac{\text{新圖形面積}}{\text{正K角星形面積}}\le\frac{\text{正K邊形}A_1A_2\cdots A_k\text{面積}}{\text{正K角星形面積}}，$$

$$\frac{\left[\csc\frac{r°}{2}\cdot\sin(\frac{r°}{2}-\frac{180°}{K})\right]^2\cot\frac{180°}{K}}{\cot\frac{180°}{K}-\cot\frac{r°}{2}}<\frac{\text{新圖形面積}}{\text{正K角星形面積}}\le\frac{\cot\frac{180°}{K}}{\cot\frac{180°}{K}-\cot\frac{r°}{2}}$$

4、以正三角星形爲例，用 Excel 表格表(十二)，找(1)面積比值。(2)面積比值範圍。

d1	d2	d3	d4	d5	d6	r=121面積比值	r=135面積比值	r=150面積比值	r=165面積比值	r=180面積比值
1000	0.001	1000	0.001	1000	0.001	0.007049	0.0724987	0.1357049	0.1946047	0.2514978
0.001	1000	0.001	1000	0.001	1000	49.77075	3.5339866	1.8642951	1.2947944	0.9999993

	r=121	r=135	r=150	r=165	r=180
正三角形B1B2B3與正三角星形A1A2A3面積比值	0.0050132	0.07064027	0.1339746	0.1929928	0.25
正三角形A1A2A3與正三角星形A1A2A3面積比值	49.868341	3.53905801	1.8660254	1.29538514	1

表(十二)

伍、研究結果和討論

以下我們將研究結果分別整理論述於下

一、正多邊形各邊以相同比例 m : n 取分點的結果

(一)新圖形與原圖形會相似。面積比值及範圍如下表，

原圖形	面積比值	面積比值範圍	原圖形	面積比值	面積比值範圍
正三角形	$1-\frac{3mn}{(m+n)^2}$	$\frac{1}{4}\le$比值<1	正六邊形	$1-\frac{mn}{(m+n)^2}$	$\frac{3}{4}\le$比值<1
正方形	$1-\frac{2mn}{(m+n)^2}$	$\frac{1}{2}\le$比值<1	正八邊形	$1-\frac{(2-\sqrt{2})mn}{(m+n)^2}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{4}\le$比值<1
正五邊形	$1-\frac{(5-\sqrt{5})mn}{2(m+n)^2}$	$\frac{3+\sqrt{5}}{8}\le$比值<1	正十邊形	$1-\frac{(3-\sqrt{5})mn}{2(m+n)^2}$	$\frac{5+\sqrt{5}}{8}\le$比值<1
正 K 邊形	$1-\frac{2(1-\cos\frac{2\pi}{K})mn}{(m+n)^2}$	$\frac{1+\cos\frac{2\pi}{K}}{2}\le$比值$<1$			

(二)面積比值不受邊長影響。

(三)分點在該線段中的位置與面積比值呈現拋物線的關係。當分點位置愈靠近線段端點時，面積比值會越大。當分點位置在線段的中點時，面積比值最小。

二、非等邊三角形、平行四邊形、鳶形及梯形，各邊以相同比例取分點的結果

(一)先以 m : n 比例在 Γ 上取分點，得圖形 Γ',再以 n : m 比例在 Γ' 上取分點，得圖形 Γ''。

原圖形	圖形 Γ' 與圖形 Γ 比較			圖形 Γ'' 與圖形 Γ 比較		
	相似	面積比值	面積比值範圍	相似	面積比值	面積比值範圍
非等邊三角形	否	$1-\frac{3mn}{(m+n)^2}$	$\frac{1}{4}\le$比值<1。當 m＝n 時,有最小值 $\frac{1}{4}$。	是	$\left[1-\frac{3mn}{(m+n)^2}\right]^2$	$\frac{1}{16}\le$比值<1。當 m＝n 時，有最小值 $\frac{1}{16}$。
平行四邊形	否	$1-\frac{2mn}{(m+n)^2}$	$\frac{1}{2}\le$比值<1。當 m＝n 時,有最小值 $\frac{1}{2}$，此時 Γ' 爲平行四邊形。	是	$\left[1-\frac{2mn}{(m+n)^2}\right]^2$	$\frac{1}{4}\le$比值<1。當 m＝n 時，有最小值 $\frac{1}{4}$。

原圖形	圖形Γ′與圖形Γ比較			圖形Γ″與圖形Γ比較		
	相似	面積比值	面積比值範圍	相似	面積比值	面積比值範圍
鳶形	否	$1-\frac{2mn}{(m+n)^2}$	$\frac{1}{2}\le$ 比值 <1。當 m＝n 時,有最小值 $\frac{1}{2}$，此時Γ′爲矩形。	否	$\left[1-\frac{2mn}{(m+n)^2}\right]^2$	$\frac{1}{4}\le$ 比值 <1。當 m＝n 時,有最小值 $\frac{1}{4}$，此時Γ″爲菱形。當 m≠n 時，Γ″爲鳶形。
梯形	否	$1-\frac{2mn}{(m+n)^2}$	$\frac{1}{2}\le$ 比值 <1。當 m＝n 時，有最小值 $\frac{1}{2}$，此時Γ′爲平行四邊形。	否	$\left[1-\frac{2mn}{(m+n)^2}\right]^2$	$\frac{1}{4}\le$ 比值 <1。當 m＝n 時，有最小值 $\frac{1}{4}$，此時Γ″爲平行四邊形。當 m≠n 時，Γ″爲梯形。

(二)面積比值不受邊長影響。非等邊三角形與正三角形面積比值相同。一般四邊形與正方形面積比值相同。

(三)分點在該線段中的位置與面積比值呈現凹向上的圖形關係。當分點位置愈靠近線段的端點時，面積比值會越大。當分點位置在線段的中點時，面積比值最小。

三、在任意 K 邊形中(K＞4)，各邊以相同比例取分點的結果

(一)K 邊形Γ的邊長 a_i，內角 θ_i。

1、先以 m : n 比例取分點，新圖形Γ′與原圖形Γ不相似，

$$\Gamma' \text{與}\Gamma\text{面積比值}=1-\frac{\frac{mn}{(m+n)^2}\left(a_K a_1\sin\theta_1+\sum_{i=1}^{K-1}a_i a_{i+1}\sin\theta_{i+1}\right)}{\sum_{j=1}^{K-2}\left\{(-1)^{j+1}a_j\cdot\left[\sum_{i=j+1}^{K-1}(-1)^i\cdot a_i\cdot\sin(\theta_{j+1}+\cdots+\theta_i)\right]\right\}},$$

$$\text{面積比值範圍：大於等於 }1-\frac{\left(a_K a_1\sin\theta_1+\sum_{i=1}^{K-1}a_i a_{i+1}\sin\theta_{i+1}\right)}{4\cdot\sum_{j=1}^{K-2}\left\{(-1)^{j+1}a_j\cdot\left[\sum_{i=j+1}^{K-1}(-1)^i\cdot a_i\cdot\sin(\theta_{j+1}+\cdots+\theta_i)\right]\right\}}\text{，小於 1。}$$

2、K 邊形Γ′的邊長 a_i'，內角 θ_i'，再以 n : m 比例取分點，新圖形Γ″與圖形Γ不相似，

Γ″與Γ面積比值

$$=1-\frac{\frac{mn}{(m+n)^2}\left(a_K a_1\sin\theta_1+\sum_{i=1}^{K-1}a_i a_{i+1}\sin\theta_{i+1}\right)+\frac{mn}{(m+n)^2}\left(a_K' a_1'\sin\theta_1'+\sum_{i=1}^{K-1}a_i' a_{i+1}'\sin\theta_{i+1}'\right)}{\sum_{j=1}^{K-2}\left\{(-1)^{j+1}a_j\cdot\left[\sum_{i=j+1}^{K-1}(-1)^i\cdot a_i\cdot\sin(\theta_{j+1}+\cdots+\theta_i)\right]\right\}},$$

$$\text{面積比值範圍：大於等於 }1-\frac{\left(a_K a_1\sin\theta_1+\sum_{i=1}^{K-1}a_i a_{i+1}\sin\theta_{i+1}\right)+\left(a_K' a_1'\sin\theta_1'+\sum_{i=1}^{K-1}a_i' a_{i+1}'\sin\theta_{i+1}'\right)}{4\cdot\sum_{j=1}^{K-2}\left\{(-1)^{j+1}a_j\cdot\left[\sum_{i=j+1}^{K-1}(-1)^i\cdot a_i\cdot\sin(\theta_{j+1}+\cdots+\theta_i)\right]\right\}}$$

，小於 1。

(二)邊數相同的多邊形，面積比值及比值最小值會依邊長及角度不同而有所不同。

(三)分點在該線段中的位置與面積比值呈現凹向上的曲線關係。當 $\frac{m}{m+n}$ 的值愈靠近 0 或 1，面積的比值會越大。當 m＝n 時，面積的比值有最小值。

四、正多邊形各邊以不同比例取分點的結果

(一)各邊依序以 $d_1:1, d_2:1, d_3:1, \cdots, d_k:1$ 的比例取分點，

新圖形與原圖形面積比值 $=1-\dfrac{2}{K}(1-\cos\dfrac{360^\circ}{K})\left[\dfrac{d_1}{(d_k+1)(d_1+1)}+\sum_{i=1}^{K-1}\dfrac{d_{i+1}}{(d_i+1)(d_{i+1}+1)}\right]$

(二)面積比值與圖形邊長無關，與分點位置有關。分點位置改變，面積比值會跟著改變。

(三)面積比值範圍：$1-\dfrac{2}{K}(1-\cos\dfrac{360^\circ}{K})[\dfrac{K}{2}]<\dfrac{\text{新K邊形面積}}{\text{正K邊形面積}}<1$。([ ]為高斯符號)

五、非等邊三角形、平行四邊形、鳶形及梯形，各邊以不同比例取分點的結果

(一)各邊依序以 d_1：1，d_2：1，d_3：1，d_4：1 的比例取分點，面積比值及範圍如下表

原圖形	新圖形與原圖形面積比值
非等邊三角形	$1-(\dfrac{d_2}{(d_1+1)(d_2+1)}+\dfrac{d_3}{(d_2+1)(d_3+1)}+\dfrac{d_1}{(d_3+1)(d_1+1)})$
平行四邊形	$1-\dfrac{1}{2}(\dfrac{d_2}{(d_1+1)(d_2+1)}+\dfrac{d_3}{(d_2+1)(d_3+1)}+\dfrac{d_4}{(d_3+1)(d_4+1)}+\dfrac{d_1}{(d_4+1)(d_1+1)})$
鳶形 對角線交點 O $\overline{AO}:\overline{CO}=r:1$	$1-(\dfrac{d_2}{2(d_1+1)(d_2+1)}+\dfrac{1}{r+1}.\dfrac{d_3}{(d_2+1)(d_3+1)}+\dfrac{d_4}{2(d_3+1)(d_4+1)}+\dfrac{r}{r+1}.\dfrac{d_1}{(d_4+1)(d_1+1)})$
梯形 兩底的比 $\overline{AB}:\overline{CD}=r:1$	$1-(\dfrac{r}{r+1}.\dfrac{d_2}{(d_1+1)(d_2+1)}+\dfrac{1}{r+1}.\dfrac{d_3}{(d_2+1)(d_3+1)}+\dfrac{1}{r+1}.\dfrac{d_4}{(d_3+1)(d_4+1)}+\dfrac{r}{r+1}.\dfrac{d_1}{(d_4+1)(d_1+1)})$

(二)非等邊三角形及平行四邊形面積比值不受邊長影響。鳶形面積比值與在對稱軸上的對角線的兩端點和兩對角線交點的距離有關。梯形面積比值與兩底的比有關。

(三)面積比值範圍：大於 0，小於 1。

(四)各邊以不同比例取分點所得新圖形與原圖形面積比值中：正三角形與非等邊三角形面積比值相同。正方形與平行四邊形面積比值相同。

六、任意 K 邊形(K＞4)，各邊以不同比例取分點的結果

K 邊形邊長依序為 a_1、a_2、a_3、⋯、a_K，各內角依序為 θ_1、θ_2、θ_3、⋯、θ_K。

各邊依序以 $d_1:1, d_2:1, d_3:1, \cdots, d_k:1$ 的比例取分點，

新圖形與原圖形面積比值＝$1-\dfrac{\dfrac{a_K a_1 d_1\sin\theta_1}{(d_k+1)(d_1+1)}+\sum_{i=1}^{K-1}\dfrac{a_i a_{i+1} d_{i+1}\sin\theta_{i+1}}{(d_i+1)(d_{i+1}+1)}}{\sum_{j=1}^{K-2}\left\{(-1)^{j+1}a_j\cdot\left[\sum_{i=j+1}^{K-1}(-1)^i\cdot a_i\cdot\sin(\theta_{j+1}+\cdots+\theta_i)\right]\right\}}$，

面積比值與圖形的邊長、角度都有關係。面積比值範圍：大於 0，小於 1。

七、邊長相等的正 K 角星形各邊以相同比例取分點時的結果

邊長相等的正 K 角星形 $A_1A_2...A_k$，$\angle A_1B_1A_2=r^\circ$，$\dfrac{360}{K}<r\le 180$，

在各邊以 m：n 比例依序取分點 $C_1, C_2, ..., C_{2k}$，連接各分點形成一新圖形 $C_1C_2...C_{2k}$。

(一)1、新圖形 $C_1C_2...C_{2k}$ 在正 K 角星形內部面積與正 K 角星形面積比值

$=1-\dfrac{mn}{2(m+n)^2}\left[\dfrac{\csc^2(\dfrac{r^\circ}{2})\cdot\sin(r^\circ-\dfrac{360^\circ}{K})}{\cot\dfrac{180^\circ}{K}-\cot\dfrac{r^\circ}{2}}\right]$，面積比值依 K 值及 r 值而有所不同。

2、分點在該線段中的位置與面積比值呈現開口向上拋物線的關係。分點位置愈靠近線段的端點時，面積的比值會越大。分點位置在線段的中點時，面積的比值有最小值。

3、面積比值範圍：$1-\dfrac{\csc^2(\frac{r^\circ}{2})\cdot\sin(r^\circ-\frac{360^\circ}{K})}{8(\cot\frac{180^\circ}{K}-\cot\frac{r^\circ}{2})}\le\dfrac{\text{新圖形在正K角星形內部面積}}{\text{正K角星形面積}}<1$

(二) 1、新圖形 $C_1C_2\ldots C_{2k}$ 面積與正 K 角星形面積比值

$$=1+\frac{mn}{2(m+n)^2}\cdot\frac{\csc^2(\frac{r^\circ}{2})\cdot\left[\sin r^\circ-\sin(r^\circ-\frac{360^\circ}{K})\right]}{\cot\frac{180^\circ}{K}-\cot\frac{r^\circ}{2}}$$，面積比值依 K 值及 r 值而有所不同。

2、面積比值範圍：

(1)當 $\frac{360}{K}<r<90+\frac{180}{K}$ 時，分點在該線段中的位置與面積比值呈現開口向下的拋物線的關係。當分點位置在線段的中點時，面積的比值有最大值。

$$1<\frac{\text{新圖形面積}}{\text{正K角星形面積}}\le1+\frac{\csc^2(\frac{r^\circ}{2})\cdot\left[\sin r^\circ-\sin(r^\circ-\frac{360^\circ}{K})\right]}{8(\cot\frac{180^\circ}{K}-\cot\frac{r^\circ}{2})}$$

(2)當 $r=90+\frac{180}{K}$ 時，分點在該線段中的位置與面積比值呈現一水平直線的關係。分點的位置不影響面積比值，面積比值爲 1。

(3)當 $90+\frac{180}{K}<r\le180$ 時，分點在該線段中的位置與面積比值呈現開口向上的拋物線的關係。當分點位置在線段的中點時，面積的比值有最小值。

$$1+\frac{\csc^2(\frac{r^\circ}{2})\cdot\left[\sin r^\circ-\sin(r^\circ-\frac{360^\circ}{K})\right]}{8(\cot\frac{180^\circ}{K}-\cot\frac{r^\circ}{2})}\le\frac{\text{新圖形面積}}{\text{正K角星形面積}}<1$$

八、邊長相等的正 K 角星形各邊以不同比例取分點時的結果

邊長相等的正 K 角星形 $A_1A_2\ldots A_k$ ，$\angle A_1B_1A_2=r^\circ$ ，$\frac{360}{K}<r\le180$ ，
在各邊依序以不同比例 $d_1:1, d_2:1, d_3:1, \cdots, d_{2k}:1$ 的比例取分點 $C_1,C_2,\ldots,C_{2k}$ ，，連接各分點形成一新圖形 $C_1C_2\ldots C_{2k}$ 。

(一)新圖形 $C_1C_2\ldots C_{2k}$ 在正 K 角星形內部面積與正 K 角星形面積比值

$$=1-\frac{1}{2K}\left[\frac{\csc^2(\frac{r^\circ}{2})\cdot\sin(r^\circ-\frac{360^\circ}{K})}{\cot\frac{180^\circ}{K}-\cot\frac{r^\circ}{2}}\right]\cdot\left(\sum_{i=1}^{K-1}\frac{d_{2i+1}}{(d_{2i}+1)(d_{2i+1}+1)}+\frac{d_1}{(d_{2K}+1)(d_1+1)}\right)$$ ，

面積的比值依 K 值、r 值及 d_i 值而有所不同。

面積比值範圍：$\dfrac{\left[\csc\frac{r^\circ}{2}\cdot\sin(\frac{r^\circ}{2}-\frac{180^\circ}{K})\right]^2\cot\frac{180^\circ}{K}}{\cot\frac{180^\circ}{K}-\cot\frac{r^\circ}{2}}<\dfrac{\text{新圖形在正K角星形內部面積}}{\text{正K角星形面積}}<1$

(二)新圖形 $C_1C_2\ldots C_{2k}$ 與正 K 角星形面積比值

$$=1+\frac{1}{2K}\cdot\frac{\csc^2(\frac{r^\circ}{2})}{\cot\frac{180^\circ}{K}-\cot\frac{r^\circ}{2}}\left[\sin r^\circ\cdot\left(\sum_{i=1}^{K}\frac{d_{2i}}{(d_{2i-1}+1)(d_{2i}+1)}\right)-\sin(r^\circ-\frac{360^\circ}{K})\cdot\left(\sum_{i=1}^{K-1}\frac{d_{2i+1}}{(d_{2i}+1)(d_{2i+1}+1)}+\frac{d_1}{(d_{2K}+1)(d_1+1)}\right)\right]$$

面積比值範圍：$\dfrac{\left[\csc\frac{r^\circ}{2}\cdot\sin(\frac{r^\circ}{2}-\frac{180^\circ}{K})\right]^2\cot\frac{180^\circ}{K}}{\cot\frac{180^\circ}{K}-\cot\frac{r^\circ}{2}}<\dfrac{\text{新圖形面積}}{\text{正K角星形面積}}\leq\dfrac{\cot\frac{180^\circ}{K}}{\cot\frac{180^\circ}{K}-\cot\frac{r^\circ}{2}}$

九、研究結果的應用

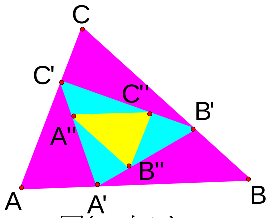
(一)可將推導出的面積比值公式應用在已知面積比值，求出比例。

1、如圖(二十七)，若△ABC 各邊依序以 m：n 比例取分點，形成△A′B′C′，再將△A′B′C′各邊以 m：n 比例取分點，形成ΔA″B″C″，可得黃色區域：水藍區域：粉紅區域= 1 : 2 : 6，求 m：n

解：△ABC：△A′B′C′：ΔA″B″C″ =9：3：1

$1-\frac{3mn}{(m+n)^2}=\frac{1}{3}$ ，令 $\frac{m}{m+n}=x$ ，

$1-3x(1-x)=\frac{1}{3}$ ，可解得 $x=\frac{1}{3},\frac{2}{3}$ ，所以 m：n＝1：3 或 2：3



圖(二十七)

2、以正 K 角星形為例，設計 Excel 表格求出比例。方法：先輸入 K 值，會出現 r 值及面積比值範圍，再根據範圍，輸入 r 值及面積比值即可找出所需要的比例。

表(十三)為已知新圖形落在正 K 角星形內部與正 K 角星形面積比值，求 m/(m+n)。表(十四)為已知新圖形與正 K 角星形面積比值，求 m/(m+n)。

新圖形落在正K角星形內部與正K角星形面積比值		
K		8
r		50
面積比值		0.81
m/(m+n)		0.300068
r > 45	面積比值<1,當m=n時,面積比值有最小值	0.773839

表(十三)

新圖形面積與正K角星形面積比值		
K		9
r		160
面積比值 (需配合下列範圍)		0.98
m/(m+n)		0.255768
40 < r < 110	面積比值>1, 當m=n時, 面積比值有最大值	
r= 110	面積比值=1, m、n為任意正數	
110 < r ≦ 180	面積比值<1, 當m=n時, 面積比值有最小值	0.973733

表(十四)

(二)在日常生活中的應用

1、設計一正十角星形水池花圃及外圍草坪

(1)水池生態區占正十角星形面積的 0.88，其中包括①水池區－為正十邊形占正十角星形面積的 0.5(淡水藍色區域)，②水生植物區－占正十角星形面積的 0.38(水藍色區域)。

(2)陸生植物區占正十角星形面積的 0.12(粉紅色區域)。

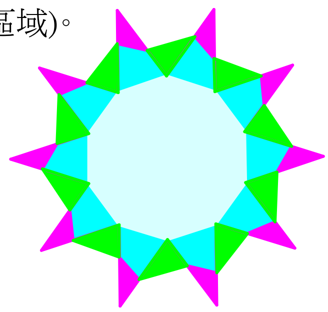
(3)草坪座落於正十角星形外圍，面積約占正十角星形面積的 0.2(綠色區域)。

作法：

將正十角星形花圃(r=72 度)各邊以 2:3 比例取分點，連接各分點，

新圖形落在正十角星形內部面積與正十角星形面積比值為 0.88，

新圖形落在正十角星形外部面積與正 K 角星形面積比值約 0.19416。



2、設計四邊形展示會園區

(1)樹林區佔園區的 3/8(綠色區域)。

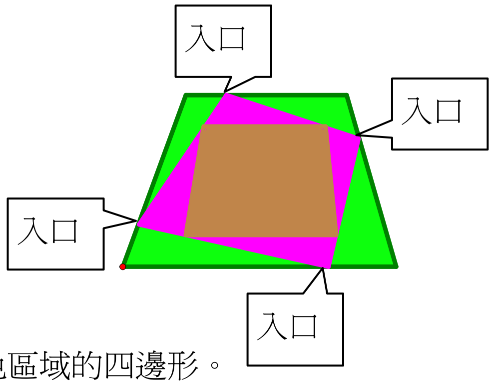
(2)花圃區佔園區的 15/64(粉紅色區域)。

(3)展示館佔園區的 25/64(咖啡色區域)。

作法：

四邊形各邊先以 3:1 比例取分點，連接各分點後的

四邊形各邊再以 1:3 比例取分點，連接各分點形成咖啡色區域的四邊形。



陸、結論

一、多邊形及邊長相等的正 K 角星形各邊以相同比例或不同比例取分點，所得新圖形與原圖形面積比值都可表成公式並可找出面積比值範圍。

(一)各邊以相同比例取分點時

1、只有正 K 邊形與原圖形會相似。還有三角形及平行四邊形各邊先以 m:n 比例取分點，連接各分點後的圖形，再以 n:m 比例取分點，所得新圖形與原圖形會相似。

2、正 K 邊形、三角形、四邊形及正 K 角星形面積比值與邊長無關。其它多邊形面積比值與邊長、角度都有關。

3、分點在該線段中的位置與面積比值呈現拋物線關係。

(1)多邊形以及正 K 角星形新圖形落在正 K 角星形內部的情形，拋物線開口會向上，面積比值有最小值。面積比值範圍：大於等於最小值，小於 1。

(2)正 K 角星形新圖形與正 K 角星形比較的情形，隨著角度由小到大的變化，從開口向下拋物線→ 一直線→開口向上的拋物線。開口向下拋物線，面積比值範圍：大於 1，小於等於最大值。一直線，面積比值＝1。開口向上拋物線，面積比值範圍：大於等於最小值，小於 1。

(二)各邊以不同比例取分點時

1、正 K 邊形、三角形、平行四邊形與正 K 角星形面積比值與邊長無關。其它多邊形面積比值與邊長、角度有關。

2、正 K 邊形(K＞4)及正 K 角星形面積比值有範圍限制。
其它多邊形面積比值範圍：大於 0，小於 1。

二、在日常生活中也可以利用在邊上取分點的方式，將一塊土地做多樣的分割。原本看似無趣的面積，其實可以擦出許多不同的火花；一行一行的公式看似複雜，其實是充滿了趣味。我們透過研究探討，在一大堆數字、符號與函數尋出了對數學更深的體悟；在過程中不僅僅得到知識，也得到了滿滿的成就感 — 幾條線、幾個點，變出超乎想像的面積比值！

柒、參考資料

一、數學趣味解題 3 /中村義作著 / 新潮社文化事業有限公司。

二、高級中學數學科第二冊三角函數/國立編譯館。

三、施承佑(民 98)/巢狀切割對內部子圖的探討/中華民國第 49 屆中小學科學展覽會國中數學組作品/高雄市立英明國中。

#【評語】030404

本作品研究按某種規則做出之子圖與原圖的面積比，有相當的困難度得到不少的結果，証明相當嚴謹。但是，一般性的研究成果呈現得太繁雜，應該想辦法化簡或代入比較特殊的情形以較簡化的方式呈現。