中華民國第52屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030403

當「皇后」遇見「小三」

－正三角形棋盤上的皇后互不侵犯問題

學校名稱：嘉義市立北興國民中學

作者：	指導老師：
國二 李威締 國二 賴冠錡	黃俊賓

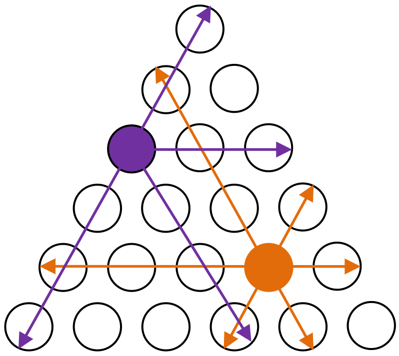
關鍵詞：皇后、正三角形棋盤

當「皇后」遇見「小三」

-正三角形棋盤上的皇后互不侵犯問題

摘要

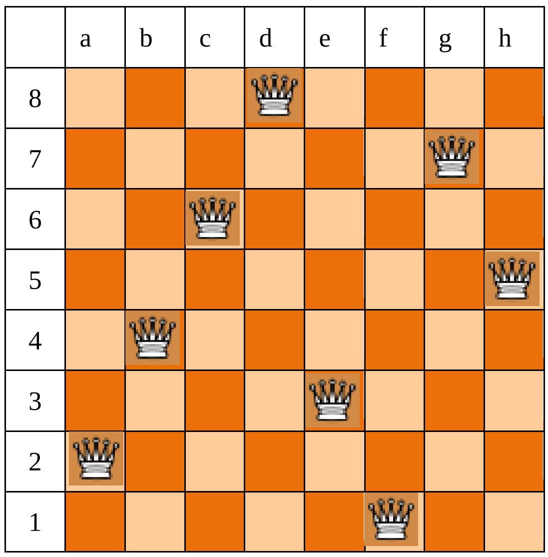
如下圖所示，在一邊有 6 個圓圈的正三角形棋盤，將某個圓圈擺上皇后，此為皇后的根據地，箭號所指的三個與邊平行的方向，是皇后所能管轄的範圍，且兩個皇后不能互相管轄到對方的根據地，不是根據地的圓圈可以兩個皇后共管。我們的研究在討論一邊有 n 個圓圈的正三角形棋盤中使每個圓圈都被管轄到時，最少需要幾個皇后以及最多可放幾個皇后。



為了解最少需要的皇后數，我們採用算術推理以及從三個方向（↘、↙、⟵）的考慮、由外而內的一整排來作邏輯上的推理得到了一邊有 1~12 個圓圈的正三角形棋盤的最少皇后數，並嘗試透過電腦程式的執行求出更大邊圓圈數棋盤的最少皇后數。最多皇后數部分，我們透過數學歸納法得到了所有邊數情況的最多皇后數。

壹、研究動機

在一次偶然的機會下，在網路上看到一道八皇后問題(也就是如何能夠在 8×8 的西洋棋棋盤上放置八個皇后，使得任何一個皇后都無法直接吃掉其他的皇后，為了達到此目的，任兩個皇后都不能處於同一條橫行、縱行或斜線上)，因八皇后問題的解已被全部解出(12 組解)且限制將八個皇后放在西洋棋盤上，所以我們將棋盤更改為正三角形棋盤，雖然僅需考慮到三個方向，但不限制其皇后數，就可以討論在一邊有 n 個圓圈且所有圓圈需被管轄到時，最少和最多可擺放幾個皇后。研究過程中，我們也運用了數學一上的「以符號列式」、「式子的化簡」與二下的「等差級數」單元來進行研究。



八皇后範例

貳、研究目的

1、討論皇后在不同的圓圈位置時，所能管轄的總圓圈數的差異。
2、探討兩個皇后至少共同管轄幾個圓圈？最多共同管轄幾個圓圈？
3、將一邊有 n 個圓圈的正三角形棋盤上擺放皇后使得所有圓圈都被管轄到，最少需要幾個皇后？
4、盡可能在一邊有 n 個圓圈的棋盤上擺放皇后使得所有圓圈都被管轄到，最多可以擺幾個皇后？

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦程式 Visual Basic

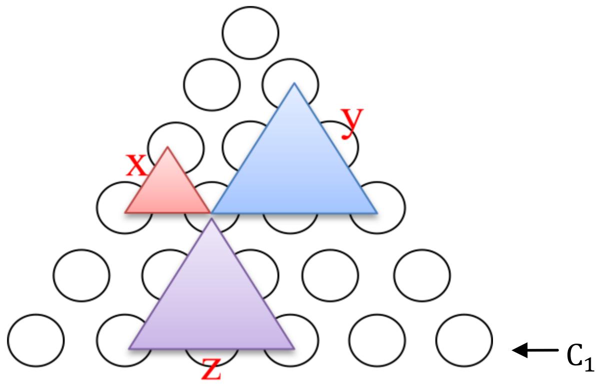
肆、研究過程與方法

一、不論皇后在哪一個位置，所管轄的圓圈數皆相同。

【證明】

令$a_{i,j}$表示正三角形棋盤由上而下數第 i 列，由左至右數第 j 個圓圈

令C_1表示棋盤中↔方向的最下面一排圓圈



在一邊有 n 個圈的正三角形棋盤上任意一個圈擺上皇后，三個與邊平行的方向是此皇后所能管轄的範圍。

如上圖所示，假設左上方正三角形(即紅色三角形)的一邊有 x 個圈；右上方正三角形(即藍色三角形)的一邊有 y 個圈；正下方正三角形(即紫色三角形)的一邊有 z 個圈

例如：上圖為一邊有 6 個圈的正三角形棋盤，當皇后在$a_{4,2}$時，x 為 2、y 為 3、z 為 3

假設 m 為一邊的圓圈數，考慮C_1排可得 x+y+z-2=m

假設 n 為 1 個皇后所管轄的圓圈總數，可得(x+y-1)+(x+z-1)+(y+z-1)-2=n

⇒2(x+y+z)-4=2m⋯(1)

2(x+y+z)-5=n⋯(2)

⇒由(1)(2)可得 n=2m-1

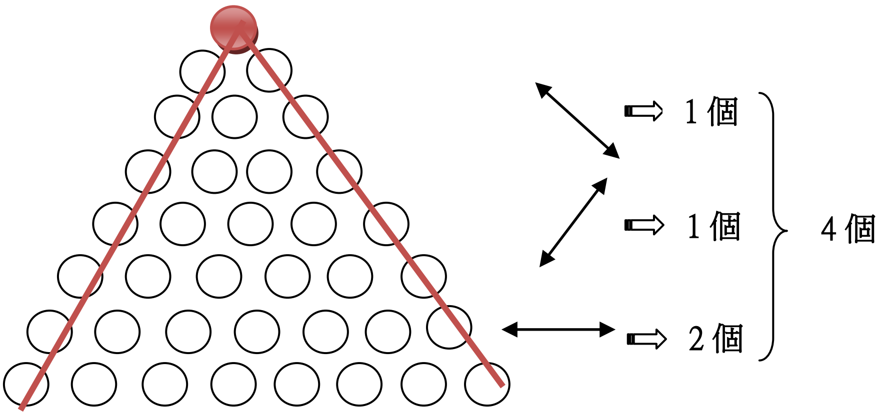
故將皇后擺置任一個圓圈上，其管轄圓圈數恆相等(等於 2 倍邊上圓圈數－1)

二、任兩個皇后至少共同管轄 4 個圓圈，最多共同管轄 6 個圓圈。

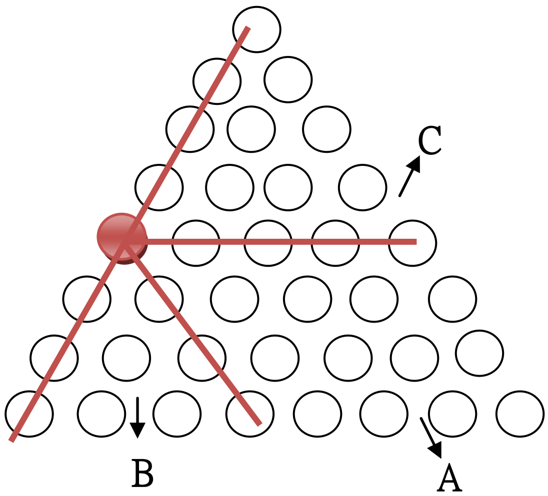
【證明】

將第一個皇后的位置分成三種情況討論：在頂點、在邊上但不在頂點、不在頂點也不在邊上。接著探討第二個皇后在不同的區域與第一個皇后所產生的共同管轄圓圈數，結果發現兩個皇后共同管轄的圓圈數為 4 個、5 個或 6 個。

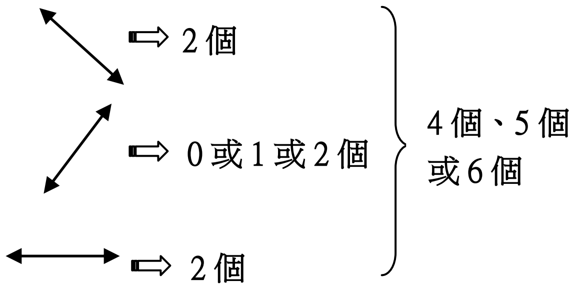
1、第一個皇后在頂點：



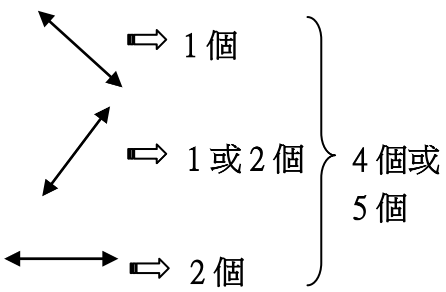
2、第一個皇后在邊上但不在頂點：



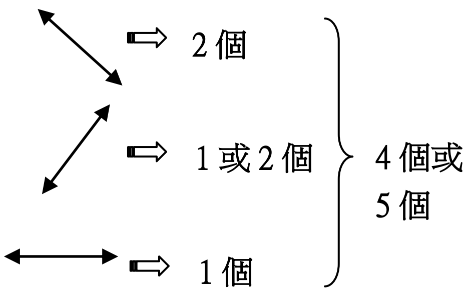
第二個皇后在 A 區：



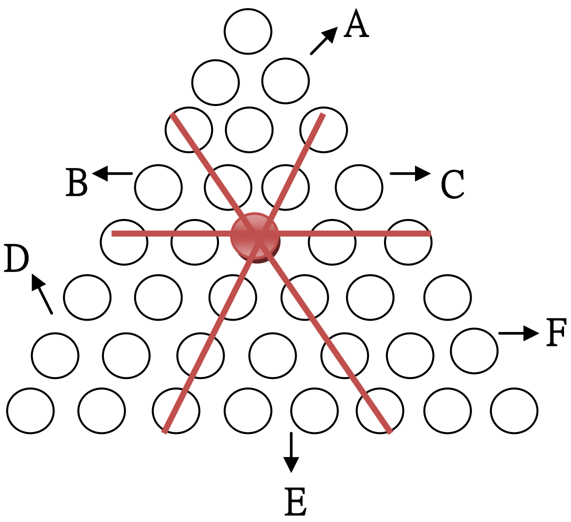
第二個皇后在 B 區：



第二個皇后在 C 區：



3、第一個皇后不在頂點也不在邊上



※(此可包含到任何皇后不在頂點不在邊的情形，因此討論一次即可)

第二個皇后在 A 區：

⇨ 2 個

⇨ 2 個

⇨ 0 或 1 或 2 個

4 個、5 個或 6 個

第二個皇后在 B 區：

⇨ 1 或 2 個

⇨ 2 個

⇨ 1 或 2 個

4 個、5 個或 6 個

第二個皇后在 C 區：

⇨ 2 個

⇨ 1 或 2 個

⇨ 1 或 2 個

4 個、5 個或 6 個

第二個皇后在 D 區：

⇨ 0 或 1 或 2 個

⇨ 2 個

⇨ 2 個

4 個、5 個或 6 個

第二個皇后在 E 區：

⇨ 1 或 2 個

⇨ 1 或 2 個

⇨ 2 個

4 個、5 個或 6 個

第二個皇后在 F 區：

⇨ 2 個

⇨ 0 或 1 或 2 個

⇨ 2 個

4 個、5 個或 6 個

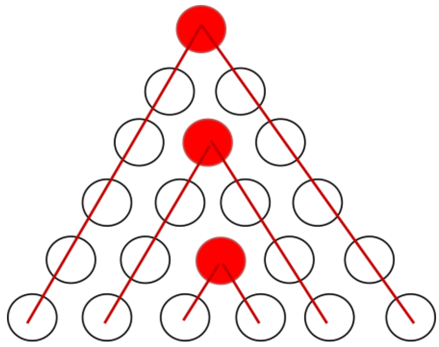
三、至少需要幾個皇后才可管轄到所有的圓圈？

在探討至少需要幾個皇后才可管轄所有圓圈的過程時，我們發現了如一、二所述的結果，因此一邊有 3 個圓圈~7 個圓圈的最少皇后數便能快速地透過算術推理而得到結果，例如：

(一) 一邊有 6 個圈的正三角形棋盤至少需要 3 個皇后才可管轄到所有圓圈

【證明】

1. 3 個皇后能管轄到所有圓圈



2. 證明 2 個皇后無法管轄到一邊有 6 個圈的正三角形棋盤的所有圓圈。

由一與二所述的結果：不管在任何位置，皇后管轄的圓圈數恆等於其正三角形棋盤之邊上圓圈數的 2 倍減 1。兩個皇后至少共同管轄 4 個圓圈。

故 2 個皇后最多可管轄的總圓圈數 $=2\times(2\times6-1)-4=2\times11-4=18$(個)

又棋盤總圓圈數 $=(1+6)\times6\times\frac{1}{2}=21$

$\because\ 18<21$

$\therefore$ 2 個皇后無法管轄到一邊有 6 個圈的正三角形棋盤的所有圓圈

因此，由 1、2 可得一邊有 6 個圓圈的正三角形棋盤至少需要 3 個皇后才可管轄到所有圓圈。

但藉由一、二之結論的算術方法無法求出一邊有 8 個圈以上的棋盤的最少皇后數，所以我們改用以三個方向（↘、↙、⟵）的考慮、由外而內的一整排來作邏輯上的推理，得到了一些成果，如下所示：

(二)、一邊有 11 個圈的正三角形棋盤至少需要 5 個皇后才可管轄到所有圓圈。

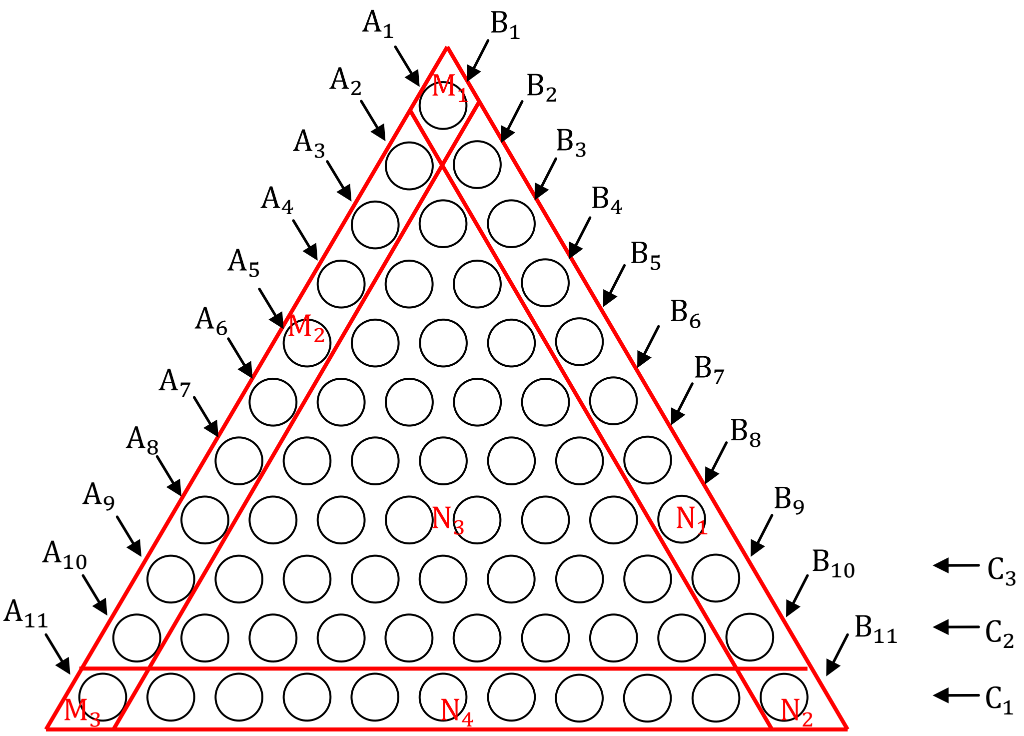
【證明】

我們先說明 5 個皇后可以管轄到所有圓圈以及提出 5 個皇后的位置圖，接著再證明 4 個皇后無法管轄到所有圓圈，以這兩個部分來證明一邊有 11 個圈的正三角形棋盤至少需要　5 個皇后才可管轄到所有圓圈。

（I）5 個皇后能管轄到所有圓圈。

令A_i、B_j、C_k分別表示⤡方向、⤢方向、⟷方向之一整排的圓圈，

$i=1,2,\cdots,11$；$j=1,2,\cdots,11$；$k=1,2,3$。



1、考慮↘方向

A_1~A_{11}任選 5 排

⟹B_1剩 6 個圓圈未管轄

若↙方向未選 B_1，則只剩⟵方向可考慮而 5 個皇后最多管轄 5 排，而 B_1剩下 6 個圓圈

故 B_1必有皇后。

2、若 A_1無皇后，則 M 區($M_1+M_2+M_3$)的 1 個皇后與 N 區($N_1+N_2+N_3+N_4$)的 4 個皇后

最多可管轄N_{A_1}排(表 N 區中 A_1排)$1+4\times2=9$ 個圓圈，但N_{A_1}排有 10 個圓圈。

故 A_1必有皇后

3、若 C_1無皇后

	M_1	M_2	N_1	N_3	最多可管轄 N_4的圓圈數
皇后數	1	0	0	4	$\rightarrow 4\times2=8$
	0	1	1	3	$\rightarrow 2+3\times2=8$

故 5 個皇后最多管轄 N_4中 8 個圓圈，但 N_4有 9 個圓圈，

故 C_1必有皇后

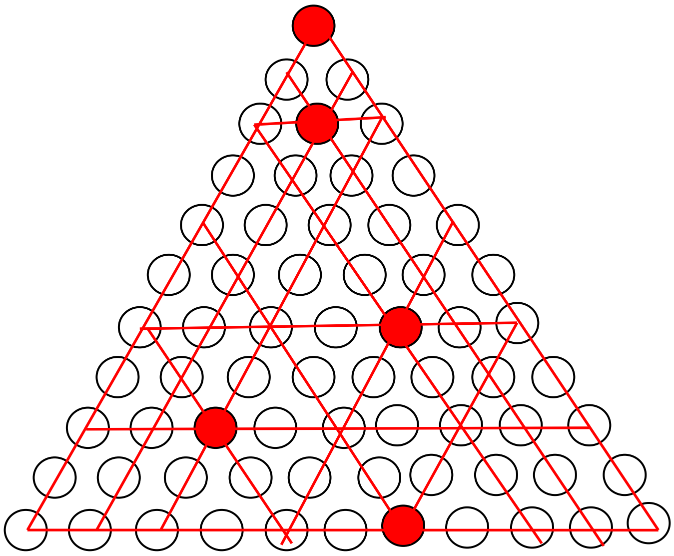
4、 A_1、B_1、C_1 皆須有皇后，接著依 M_1、M_2、N_1 三區的皇后數作分類討論：

(1)

	M_1	M_2	M_3	N_1	N_2	N_3	N_4	合計
皇后數	1	0	0	0	0	3	1	
若 A_2 無皇后，最多可管轄到 A_2 的圓圈數	0					6	1	→7
若 B_2 無皇后，最多可管轄到 B_2 的圓圈數	0					6	1	→7

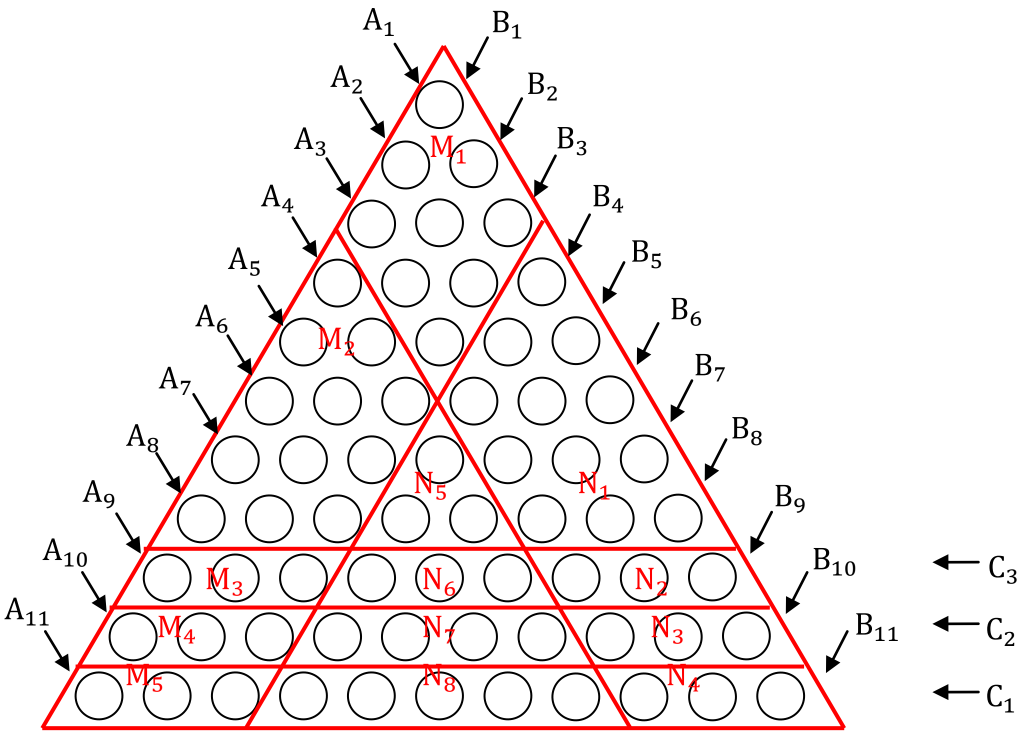
故 N_3 中的 A_2、B_2 皆須有皇后去管轄，否則 5 個皇后最多只可管轄 7 個圓圈

①若$a_{3,2}$有皇后，則 A_3、B_3 亦必有皇后，否則無法管轄完N_3區中 A_3 與 B_3 兩排的所有圓圈。嘗試後發現 5 個皇后可管轄所有圓圈，皇后位置圖如下所示：



因為已發現 5 個皇后可管轄所有圓圈，故不再探討其他情況是否 5 個皇后可管轄到所有圓圈。

（II）證明 4 個皇后無法管轄到一邊有 11 個圈的正三角形棋盤的所有圓圈。



1、若 B_1、B_2、B_3 無皇后

考慮↘方向

⇒A_1~A_{11} 任選 4 排

⇒B_1 剩 7 個圓圈待管轄，而 4 個皇后↔方向最多可管轄 4 個圓圈

B_2 至少剩 6 個圓圈待管轄，而 4 個皇后↔方向最多可管轄 4 個圓圈

B_3 至少剩 5 個圓圈待管轄，而 4 個皇后↔方向最多可管轄 4 個圓圈

⇒故 B_1、B_2、B_3 必有皇后

2、若 A_1 無皇后，M 區(=M_1+M_2+M_3+M_4+M_5)的 3 個皇后與 N 區(=N_1+N_2+N_3+N_4+N_5+N_6+N_7+N_8)的 1 個皇后最多可管轄$\mathbf{N_{A_1}}$排(表 N 區中 A_1 排)3+1×2=5 個圓圈,但$\mathbf{N_{A_1}}$排中有 8 個圓圈

⇒故 A_1 必有皇后

同理 A_2、A_3 亦必有皇后

3、若 C_1 無皇后

	M_1	M_2+M_3+M_4	N_1+N_2+N_3	N_5+N_6+N_7	最多可管轄到 N_8 中的圓圈數
皇后數	3	0	0	1	⇒2
	2	1	1	0	⇒2

4 個皇后最多可管轄 N_8 中 2 個圓圈⇒故 C_1 必有皇后

同理 C_2、C_3 亦必有皇后

4、A_1、A_2、A_3、B_1、B_2、B_3、C_1、C_2、C_3皆須有皇后，接下來以 M_1、M_2、N_1三區的皇后數作分類討論：

	M_1	M_2	N_1
(1)	3	0	0
(2)	2	1	1
(3)	2	1	0
(4)	2	0	0
(5)	1	2	1
(6)	1	2	0
(7)	1	1	1
(8)	1	1	0
(9)	1	0	0
(10)	0	3	1
(11)	0	3	0
(12)	0	2	2
(13)	0	2	1
(14)	0	2	0
(15)	0	1	1
(16)	0	1	0
(17)	0	0	0

則

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8	
(1)	3	0				0					1	1	1	至少需 6 個皇后(不合)
(2)	2	1				1					1	1	1	至少需 7 個皇后(不合)
(3)	2	1				0	1					1	1	至少需 6 個皇后(不合)
(4)	2	0	1			0		1					1	至少需 5 個皇后(不合)
(5)	1	2				1	1					1	1	至少需 7 個皇后(不合)
(6)	1	2				0	1	1					1	至少需 6 個皇后(不合)
(7)	1	1	1			1		1					1	至少需 6 個皇后(不合)
(8)	1	1	1			0		1	1					至少需 5 個皇后(不合)
(9)	1	0				0								(M_3＋M_4＋M_5)區需 2 個皇后，(N_2＋N_3＋N_4)區需 2 個，共需 4 個皇后。但這兩區最多可有 3 個皇后，故不合。
(10)	0	3				1	1	1					1	至少需 7 個皇后(不合)
(11)	0	3				0	1	1	1					至少需 6 個皇后(不合)
(12)	0	2	1			2		1					1	至少需 7 個皇后(不合)
(13)	0	2	1			1		1	1					至少需 6 個皇后(不合)
(14)	0	2				0								(M_3＋M_4＋M_5)區需 1 個皇后，(N_2＋N_3＋N_4)區需 3 個，共需 4 個皇后。但

														這兩區最多可有 3 個皇后，故不合。
(15)	0	1				1								($M_3+M_4+M_5$)區需 2 個皇后，($N_2+N_3+N_4$)區需 2 個，共需 4 個皇后。但這兩區最多可有 3 個皇后，故不合。
(16)	0	1				0								($M_3+M_4+M_5$)區需 2 個皇后，($N_2+N_3+N_4$)區需 3 個，共需 5 個皇后。但這兩區最多可有 3 個皇后，故不合。
(17)	0	0				0								($M_3+M_4+M_5$)區需 3 個皇后，($N_2+N_3+N_4$)區需 3 個，共需 6 個皇后。但這兩區最多可有 3 個皇后，故不合。

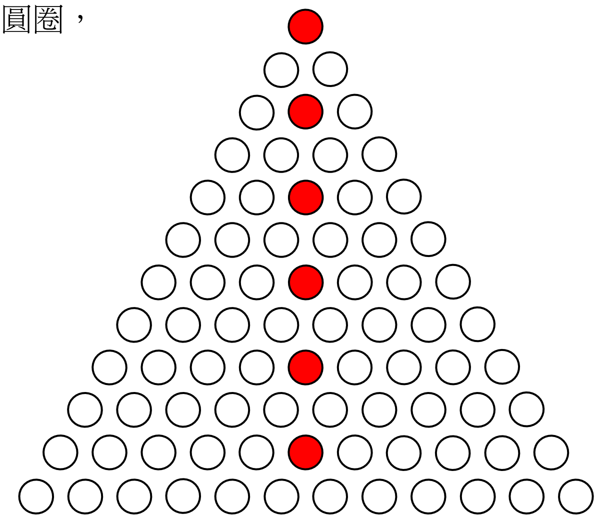
因此 4 個皇后無法使得 A_1、A_2、A_3、B_1、B_2、B_3、C_1、C_2、C_3 皆有皇后
故 4 個皇后無法管轄到一邊有 11 個圈的正三角形棋盤的所有圓圈。

由(I)、(II)可得一邊有 11 個圈的正三角形棋盤至少需要 5 個皇后才可管轄到所有圓圈

(三)一邊有 12 個圈的正三角形棋盤至少需要 6 個皇后才可管轄到所有圓圈。

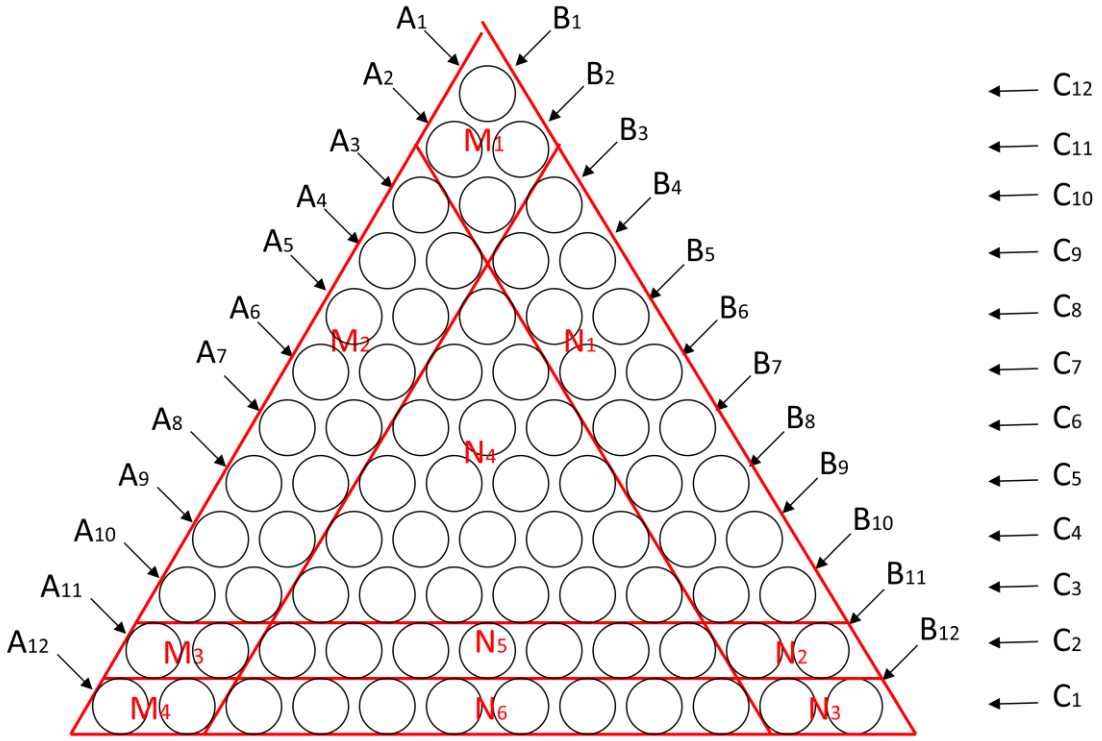
【證明】

（I）6 個皇后可管轄到所有圓圈，
皇后位置如右圖所示：



（II）證明 5 個皇后無法管轄到所有圓圈。

令A_i、B_j、C_k分別表示↘↖方向、↙↗方向、↔方向之一整排的圓圈，$i=1,2,\cdots,12$；$j=1,2,\cdots,12$；$k=1,2,\cdots,12$



1、考慮↘方向

A_1~A_{12}任選 5 排⇒B_1剩 7 個圈未管轄

B_2至少剩 6 個圈未管轄

若↙方向未選 B_1、B_2，則只剩←方向可考慮，5 個皇后最多管轄 5 排而 B_1、B_2分別剩 7 個圈以及至少 6 個圈，故 B_1、B_2必有皇后。

2、若 A_1無皇后,則 M 區(=$M_1+M_2+M_3+M_4$)的 2 個皇后與 N 區(=$N_1+N_2+N_3+N_4+N_5+N_6$)的 3 個皇后最多可管轄N_{A_1}排(表 N 區中 A_1排) 2+3×2=8 個圈,但N_{A_1}排有 10 個圈，故 A_1必有皇后，同理 A_2亦必有皇后。

3、

(1) 若 C_1無皇后

	M_1	M_2+M_3	N_1+N_2	N_4+N_5	最多可管轄 N_6的圓圈數
皇后數	2	0	0	3	→3×2=6
	1	1	1	2	→1+1+2×2=6
	0	2	2	1	→2+2+1×2=6

5 個皇后最多消去 N_6中 6 個圈，但 N_6有 8 個圈，故 C_1必有皇后。

(2) 若 C_2 無皇后

	M_1	M_2	M_4	N_1	N_3	N_4	N_6	最多可管轄 N_5 的圓圈數
皇后數	2	0	0	0	0	2	1	→2×2+1×2=6
	1	1	0	1	0	1	1	→1+1+2+2=6
	1	1	0	0	1	2	0	→1+2×2=5
	1	0	1	1	0	2	0	→1+2×2=5
	0	2	0	2	0	0	1	→2+2+2=6
	0	2	0	1	1	1	0	→2+1+2=5

5 個皇后最多只能管轄 N_5 中 6 個圈，但 N_5 有 7 個圈，故 C_2 必有皇后。

4、A_1、A_2、B_1、B_2、C_1、C_2 皆須有皇后，接著以 M_1、M_2、N_1 三個區域的圓圈數來做分類討論，可能成立的情形如下表所示：

	M_1	M_2	N_1
(1)	2	0	0
(2)	1	1	1
(3)	1	1	0
(4)	1	0	0
(5)	0	2	1
(6)	0	2	0
(7)	0	1	1

令 $a_{i,j}$ 為第 i 列(由上往下數)第 j 個(由左往右數)圓圈

(1)若 A_3、A_4、B_3、B_4 無皇后

	M_1	N_4	N_5	N_6	
皇后數	2	1	1	1	
最多可管轄到 N_4 中 A_3 排的圓圈數	0	2	1	1	→4
最多可管轄到 N_4 中 A_4 排的圓圈數	0	2	1	1	→4
最多可管轄到 N_4 中 B_3 排的圓圈數	0	2	1	1	→4
最多可管轄到 N_4 中 B_4 排的圓圈數	0	2	1	1	→4

5 個皇后最多只能管轄 4 個圈，故 A_3、A_4、B_3、B_4 皆須有皇后去管轄，則 N_4 中的皇后必在 $a_{5,3}$、$a_{6,3}$、$a_{6,4}$、$a_{7,4}$ 四個位置之一，N_5 與 N_6 的兩個皇后位置便確定(譬如:若 N_4 的皇后在 $a_{6,3}$,則 N_5、N_6 的兩個皇后在 A_3、B_4)，結果 $a_{9,5}$、$a_{10,5}$、$a_{10,6}$ 無法被管轄到。

(2)若 A_3、B_3 無皇后

	M_1	M_2	M_3	M_4	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	
皇后數	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	
最多可管轄到 N_4 中 A_3 排的圓圈數	0	1			2				1	1	→5
最多可管轄到 N_4 中 B_3 排的圓圈數	0	2			1				1	1	→5

故 A_3、B_3 必須要有皇后去管轄，則 M_2、N_1、N_5、N_6 中的 4 個皇后有 2 個在 A_3、B_3，剩下兩個皇后最多可管轄 N_4 的 A_4 排、B_4 排 3 個圓圈，故 A_4、B_4 亦需有皇后，結果 $a_{9,5}$、$a_{10,5}$、$a_{10,6}$ 無法被管轄到。

(3)若 A_3、A_4、B_3、C_3 無皇后

	M_1	M_2	M_3	M_4	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	
皇后數	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	
最多可管轄到 N_4 中 A_3 排的圓圈數	0	1				0		2		1	→4
最多可管轄到 N_4 中 A_4 排的圓圈數	0	1				0		2		1	→4
最多可管轄到 N_4 中 B_3 排的圓圈數	0	2				0		2		1	→5
最多可管轄到 N_4 中 C_3 排的圓圈數	0	1				0		2		2	→5

故 A_3、A_4、B_3、C_3 必須要有皇后去管轄

⇒N_4 中的皇后在 $a_{5,3}$、$a_{6,3}$、$a_{10,3}$、$a_{10,7}$、$a_{10,8}$ 五個位置之一，另兩個在 M_2、N_6 的皇后位置便確定，但結果皆無法管轄到 $a_{8,4}$、$a_{9,4}$、$a_{9,5}$。

(4)若 A_3、A_4、B_3、B_4 無皇后

	M_1	M_2	M_3	M_4	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	
皇后數	1	0	1	0	0	0	1	2	0	0	
最多可管轄到 N_4 中 A_3 排的圓圈數	0		0				0	4			→4
最多可管轄到 N_4 中 A_4 排的圓圈數	0		0				0	4			→4
最多可管轄到 N_4 中 B_3 排的圓圈數	0		0				0	4			→4
最多可管轄到 N_4 中 B_4 排的圓圈數	0		0				0	4			→4

5 個皇后最多只能消去 4 個圈，故 A_3、A_4、B_3、B_4 必須要有皇后去管轄，N_4 中的 2 個皇后分別在 $a_{5,3}$ 和 $a_{7,4}$，結果 $a_{9,5}$、$a_{10,5}$、$a_{10,6}$ 無法被管轄到。

(5)若 A_3、C_3 無皇后

	M_1	M_2	M_3	M_4	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	
皇后數	0	2	0	0	1	1	0	0	0	1	
最多可管轄到 N_4 中 A_3 排的圓圈數		2			2	0				1	→5
最多可管轄到 N_4 中 C_3 排的圓圈數		2			1	0				2	→5

5 個皇后最多只能管轄 5 個圈，而 N_4 中 A_3 排、C_3 排各有 6 個圈，故 A_3、C_3 皆須要有皇后去管轄，則 M_2 與 N_6 中的 3 個皇后其中一個在 A_3

⇒若 A_4 無皇后，考慮 N_4 中的 A_4，最多能被管轄到 1+1+2=4 個圈，故 A_4 必有皇后。因此 M_2、N_1、N_6 中的 3 個皇后分別在 A_3、A_4、C_3 其中之一，結果剩下的 1 個皇后無法將 $a_{7,3}$、$a_{8,3}$、$a_{8,4}$、$a_{9,3}$、$a_{9,4}$、$a_{9,5}$ 全管轄完。

(6)若 A_3、A_4、C_3、C_4 無皇后

	M_1	M_2	M_3	M_4	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	
皇后數	0	2	0	0	0	1	1	1	0	0	
最多可管轄到 N_4 中 A_3 排的圓圈數		2				0	0	2			→4
最多可管轄到 N_4 中 A_4 排的圓圈數		2				0	0	2			→4
最多可管轄到 N_4 中 C_3 排的圓圈數		2				0	0	2			→4
最多可管轄到 N_4 中 C_4 排的圓圈數		2				0	0	2			→4

故 A_3、A_4、C_3、C_4 必須要有皇后去管轄

⇒N_4 中的皇后在 $a_{9,6}$、$a_{9,7}$、$a_{10,7}$、$a_{10,8}$ 這四個位置之一，M_2 的兩個皇后的位置便確定，結果 $a_{7,3}$、$a_{8,3}$、$a_{8,4}$ 無法被管轄到

(7)若 A_3、B_3、C_3、C_4 無皇后

	M_1	M_2	M_3	M_4	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	
皇后數	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	
最多可管轄到 N_4 中 A_3 排的圓圈數		1	0		2		0	2			→5
最多可管轄到 N_4 中 B_3 排的圓圈數		2	0		1		0	2			→5
最多可管轄到 N_4 中 C_3 排的圓圈數		1	0		1		0	2			→4
最多可管轄到 N_4 中 C_4 排的圓圈數		1	0		1		0	2			→4

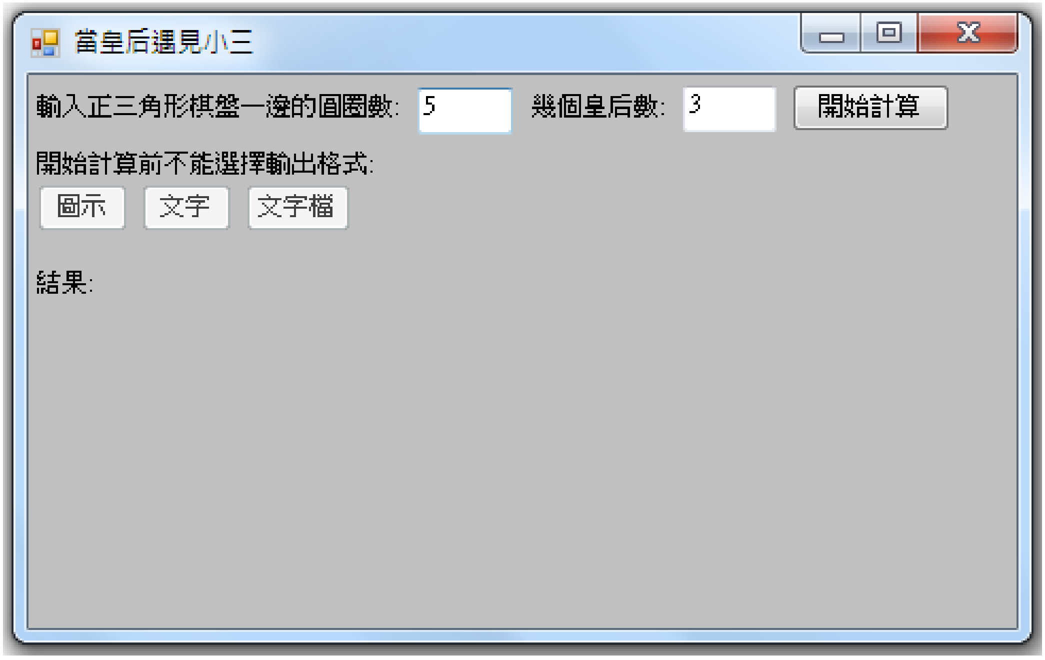
故 A_3、B_3、C_3、C_4 必須要有皇后去管轄

⇒N_4 中的皇后在 $a_{5,3}$、$a_{9,3}$、$a_{10,3}$、$a_{9,7}$、$a_{10,8}$ 這五個位置之一，則 M_2 與 N_1 的兩個皇后位置便確定，但結果 $a_{7,4}$、$a_{8,4}$、$a_{8,5}$ 無法被管轄到

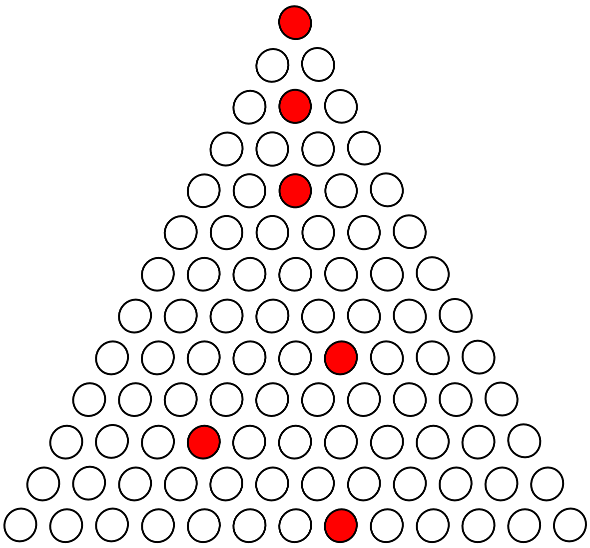
故由 1、2、3、4 可知 5 個皇后無法管轄到一邊有 12 個圓圈的正三角形棋盤的所有圓圈

因此，由(I)、(II)可知一邊有 12 個圈的正三角形棋盤至少需要 6 個皇后才可管轄到所有圓圈

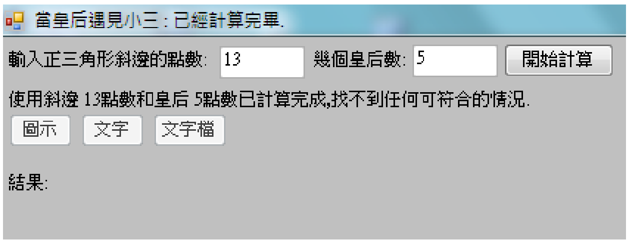
對於邊圓圈數更大的正三角形棋盤，如(二)、(三)的邏輯推理解法將會越來越複雜，在未想到其他更好的方法之下，我們嘗試透過 Visual Basic 程式的執行，由電腦進行檢查，找出其他邊圓圈數的正三角形棋盤的最少皇后數。程式介面如下所示，輸入正三角形一邊的圓圈數與皇后數，程式便會檢查該皇后數是否可以管轄到所有圓圈。



預測一邊有 13 個圈的正三角形棋盤至少需要 6 個皇后才可管轄到所有圓圈，如圖(一)所示，因此由電腦檢查 5 個皇后是否可管轄到所有圓圈，檢查結果為**否**，如圖(二)所示，因此確定**一邊有 13 個圈的正三角形棋盤至少需要 6 個皇后才可管轄到所有圓圈**。

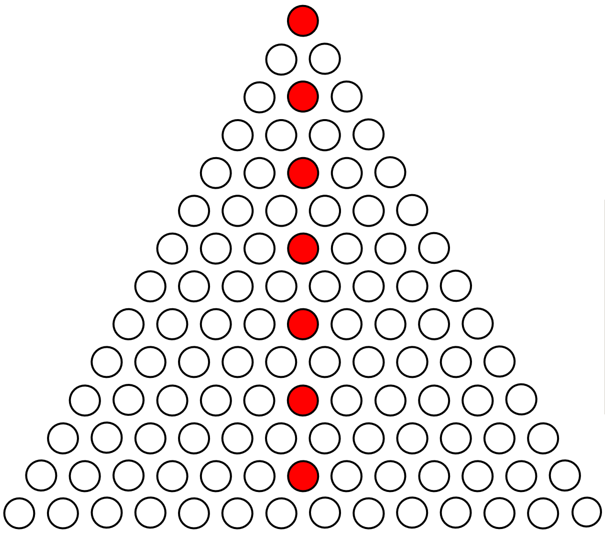


圖一

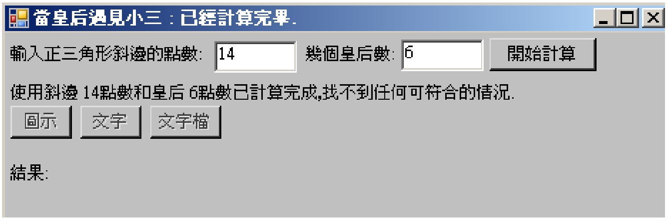


圖二

預測一邊有 14 個圈的正三角形棋盤至少需要 7 個皇后才可管轄到所有圓圈，如圖(三)所示，因此由電腦檢查 6 個皇后是否可管轄到所有圓圈，檢查結果為**否**，如圖(四)所示，因此確定**一邊有 14 個圈的正三角形棋盤至少需要 7 個皇后才可管轄到所有圓圈**。



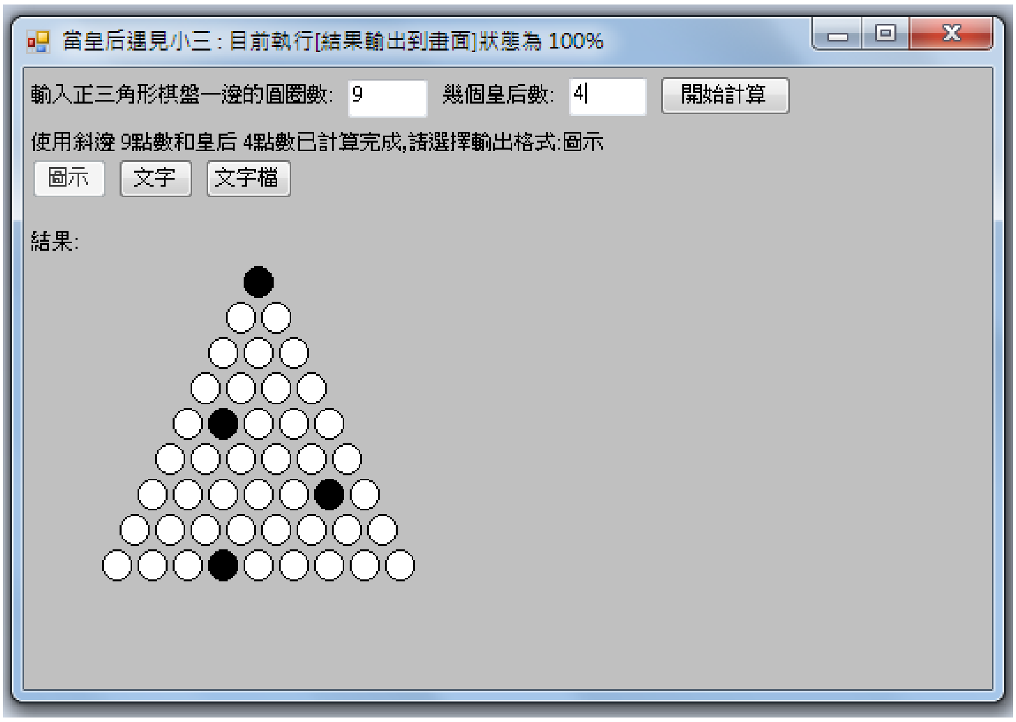
圖三



圖四

由於時間限制，一邊有 15 個圈以上的正三角形棋盤的最少皇后數的程式檢查結果未能列入。

此外，也藉由此程式，再一次檢驗其他由推理得到的最少皇后數結果是正確的，譬如：



四、一邊有 n 個圓圈的正三角形棋盤最多可放置幾個皇后？

為了思考這個問題，我們選擇從一邊圓圈數較少的棋盤開始思考，先在一邊有 7 個圈、一邊有 8 個圈、一邊有 9 個圈、一邊有 10 個圈、一邊有 11 個圈、一邊有 12 個圈這幾種正三角形棋盤上試著畫出皇后的位置（盡可能畫出多一些皇后），經過了多次的嘗試，發現了一種似乎可放置最多個皇后的方法，如(一)所述。

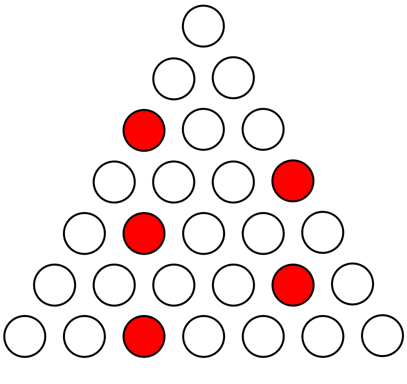
接著，以此放置皇后的方法所得的皇后數作為基礎來試著解開一邊有 n 個圓圈的正三角形棋盤最多可放置幾個皇后。

令 n=t 表示一邊有 t 個圓圈的正三角形棋盤。

(一)似乎可放置最多個皇后的方法

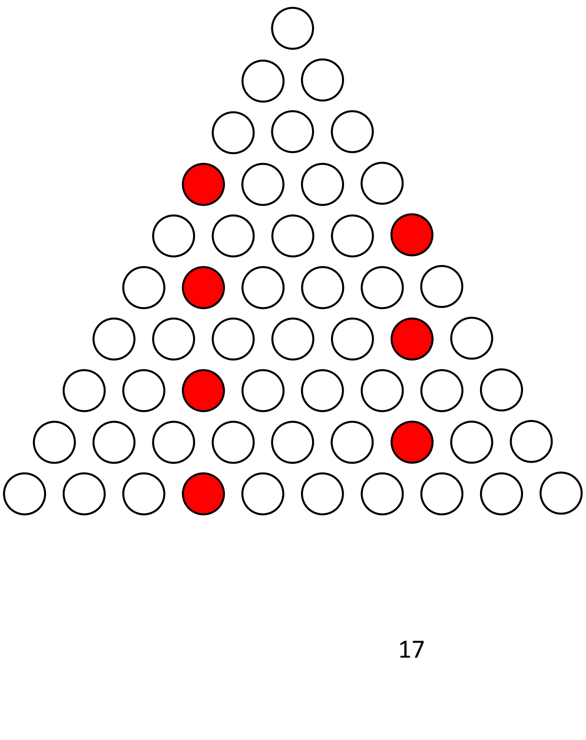
1、一邊有(3k＋1)個圓圈的正三角形棋盤，k 為 0 或正整數。

n＝7



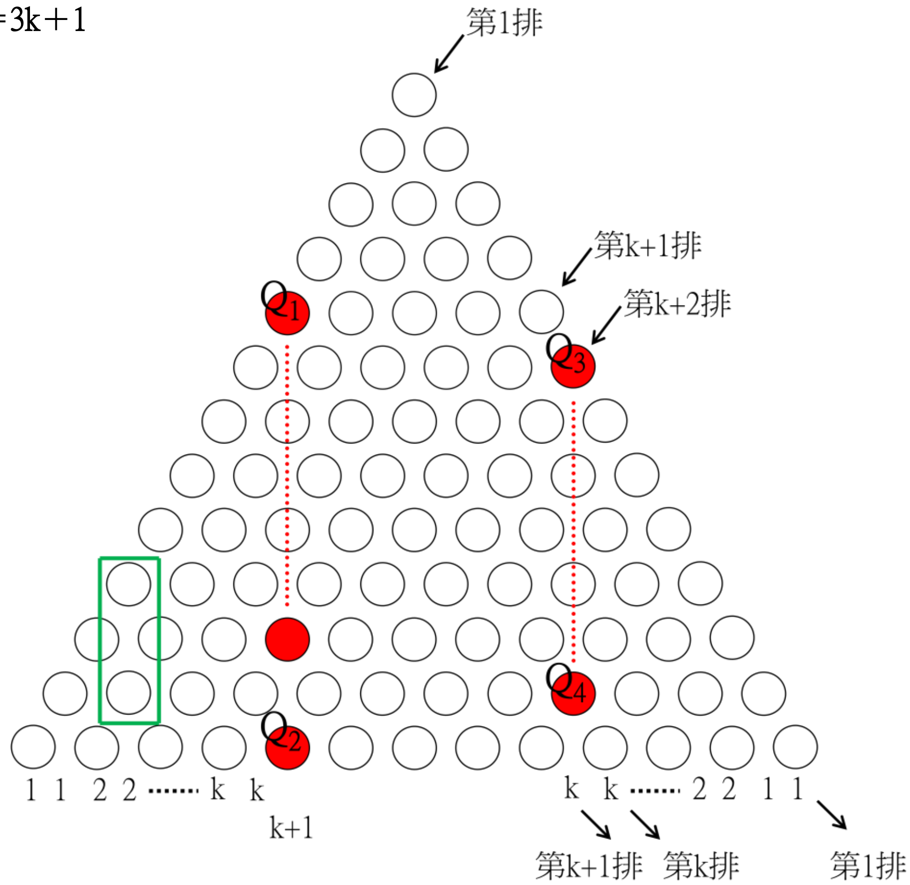
n＝7＝3×2＋1
皇后數(3＋2)個

n＝10



n＝10＝3×3＋1
皇后數(4＋3)個

$n=3k+1$



上圖中的下方數字表示該直排(上下方向)的圓圈總數，譬如綠色長方形中的圓圈數為 2 個。

Q_1在↘方向為第$(k+1)$排：$(3k+1)-2k=k+1$

Q_4在↘方向為第 k 排

Q_2在↙方向為第$(k+1)$排

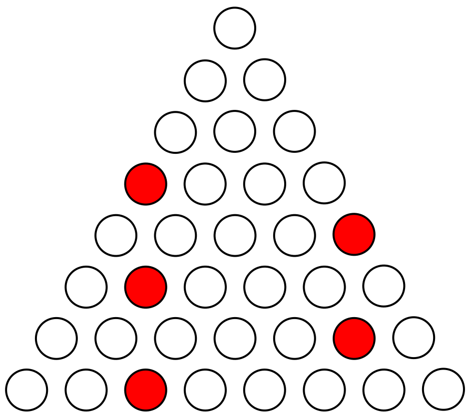
Q_3在↙方向為第$(k+2)$排：$(3k+1)-2k+1=k+2$

故此圖的皇后位置成立。

$n=3k+1$ 時，皇后數：$(k+1)+k=2k+1$(個)

2、一邊有$(3k+2)$個圓圈的正三角形棋盤，k 為 0 或正整數。

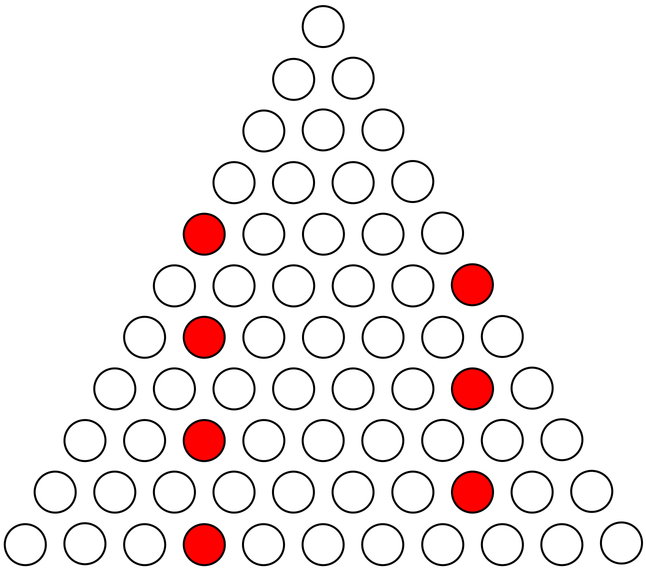
$n=8$



$n=8=3\times2+2$

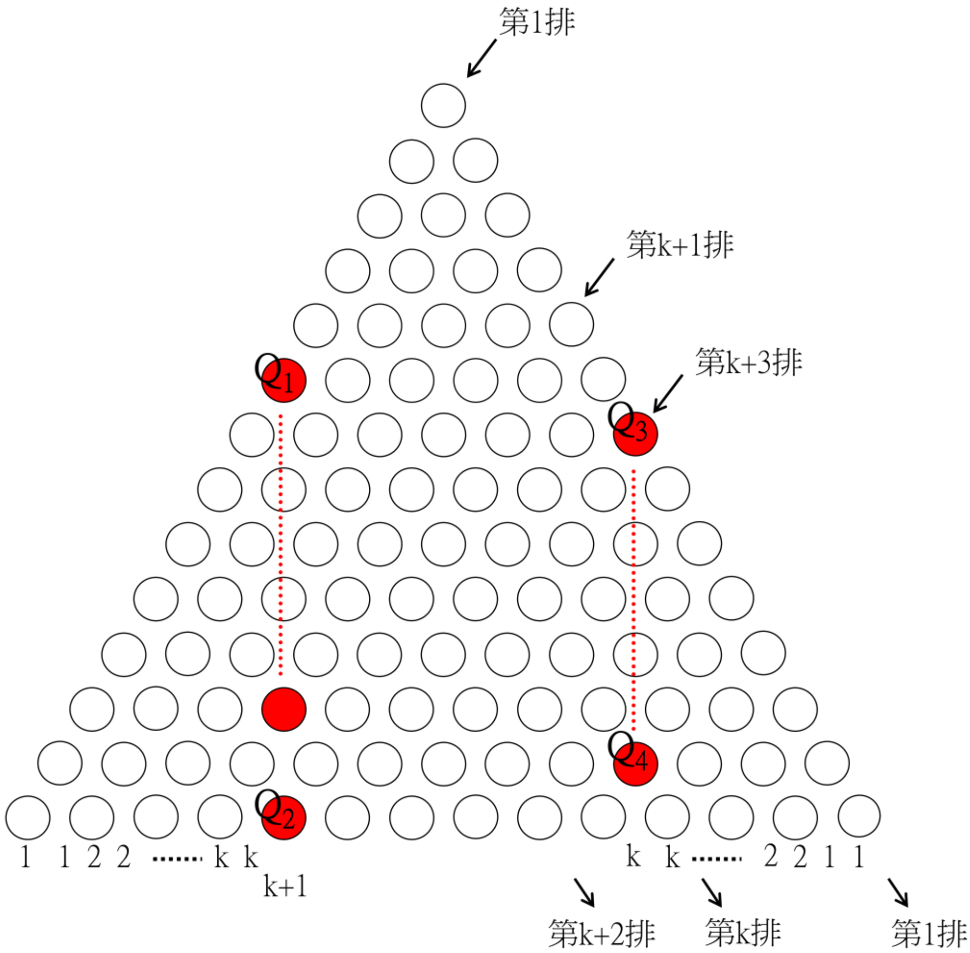
皇后數$(3+2)$個

n＝11



n＝11＝3×3＋2
皇后數(4＋3)個

n＝3k＋2



Q_1在↘方向為第(k＋2)排：(3k＋2)－2k＝k＋2
Q_4在↘方向為第 k 排

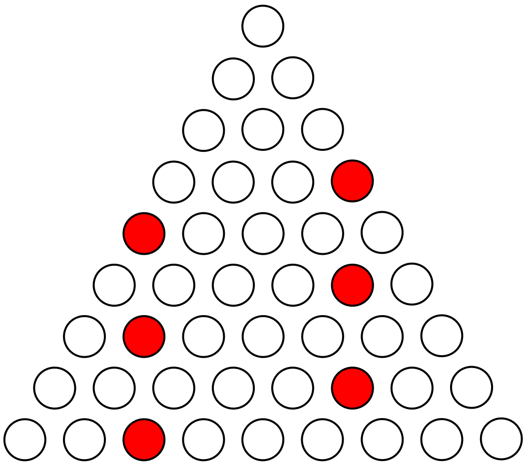
Q_2在↙方向為第(k＋1)排
Q_3在↙方向為第(k＋3)排：(3k＋2)－2k＋1＝k＋3

故此圖的皇后位置成立。

n＝3k＋2 時，皇后數：(k＋1)＋k＝2k＋1(個)

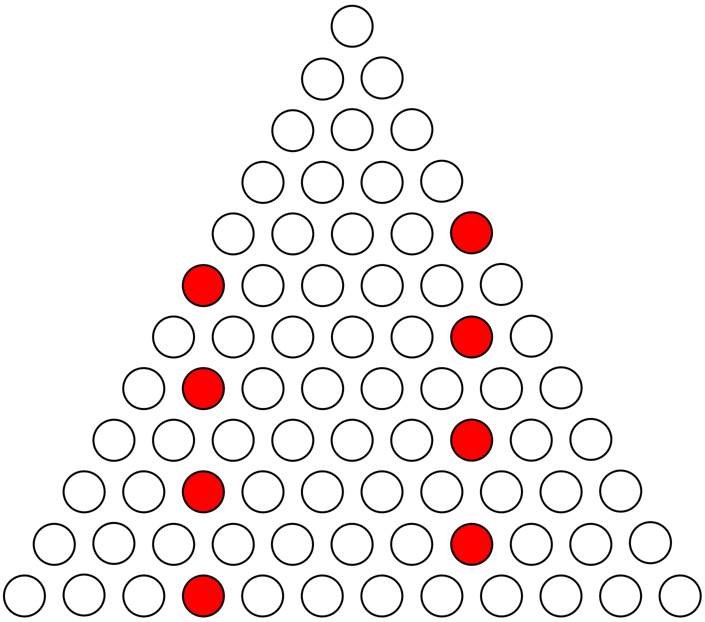
3、一邊有 3k 個圓圈的正三角形棋盤，k 為正整數。

n＝9



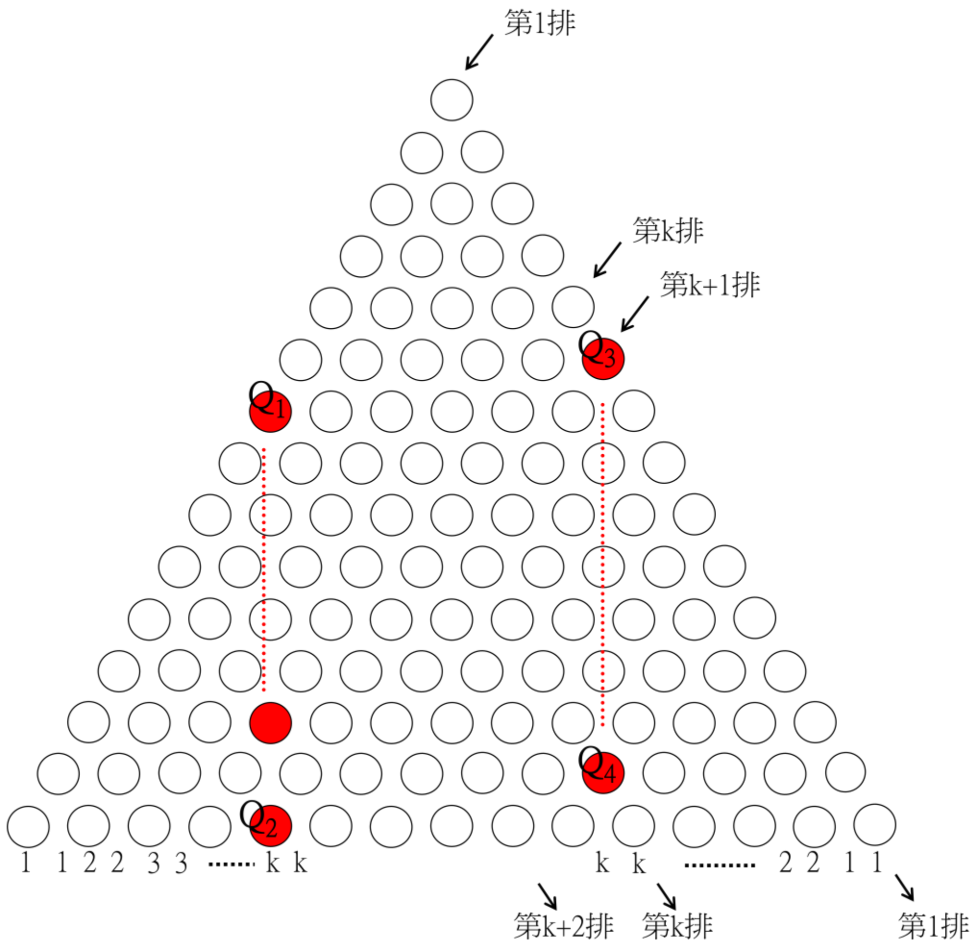
n＝9＝3×3
皇后數(3＋3)個

n＝12



n＝12＝3×4
皇后數(4＋4)個

$n=3k$



Q_1在↘方向為第$(k+2)$排：$3k-2(k-1)=k+2$
Q_4在↘方向為第 k 排

Q_2在↙方向為第 k 排
Q_3在↙方向為第$(k+3)$排：$3k-2k+1=k+1$

故此圖的皇后位置成立。

$n=3k$ 時，皇后數：$k+k=2k$ (個)

(二)證明當 n＝3k+1 時，最多可放置(2k+1)個皇后；當 n＝3k+2 時，最多可放置(2k+1)個皇后；當 n＝3k+3 時，最多可放置(2k+2)個皇后，k＝0，1，2，3，…

如下所示，第二排列出的皇后數為(一)的結果，我們的想法：從 n＝2 明顯成立出發，藉此證明 n＝3 與 n＝4 成立，再用 n＝4 來證明 n＝5 成立。接著以相同的模式，用 n＝5 來證明 n＝6 與 n＝7 成立，再用 n＝7 來證明 n＝8 成立。以此類推…，透過數學歸納法確認所欲證明的目標皆成立，對於所有 n 為正整數值。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	……	3(k-1)+1	3(k-1)+2	3(k-1)+3	3k+1	3k+2	3k+3
皇后數	1	1	2	3	3	4	5	5	6	……	2k-1	2k-1	2k	2k+1	2k+1	2k+2

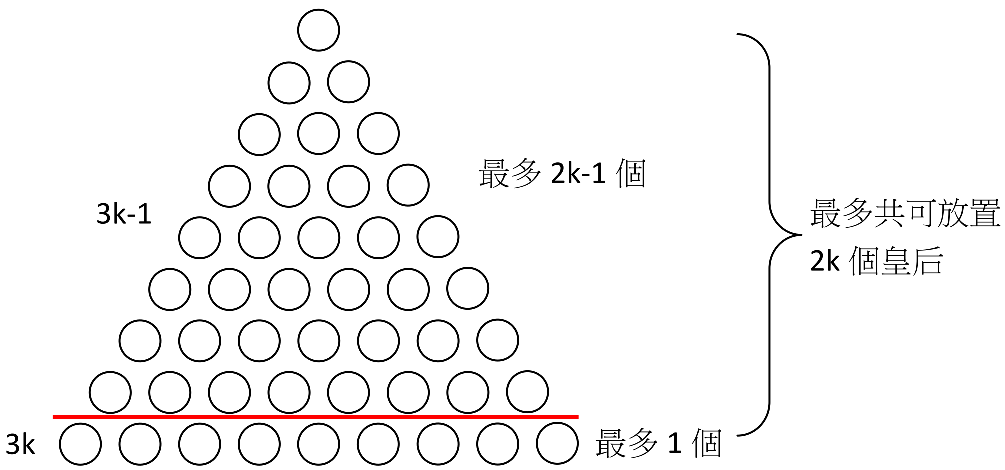
【證明】

1、n＝1 與 2 時明顯最多可放置 1 個皇后，故 n＝1 與 n＝2 時成立。

2、

（1）假設 n＝3k-1 時，最多可放置（2k-1）個皇后

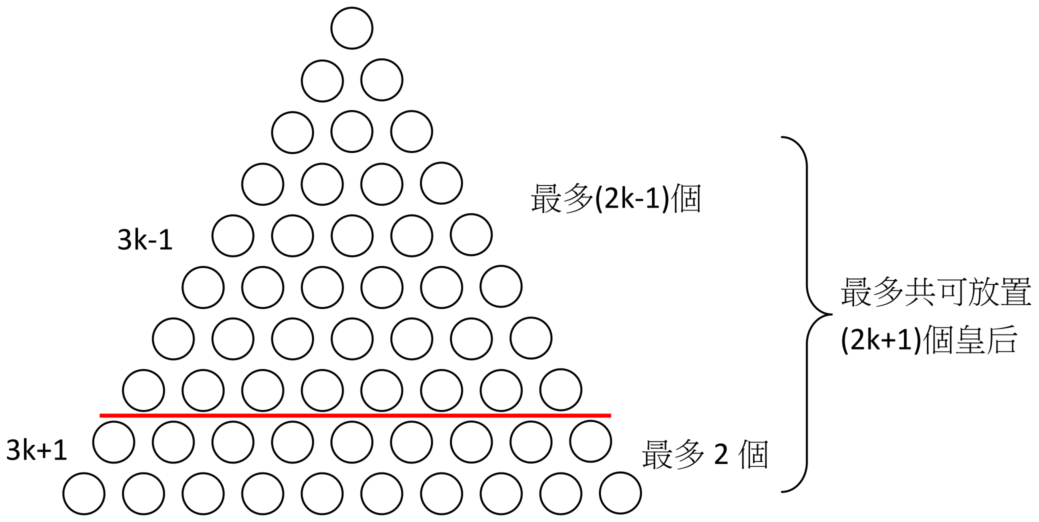
則當 n＝3k 時



又由(一)的 3 知：n＝3k 可放置 2k 個皇后

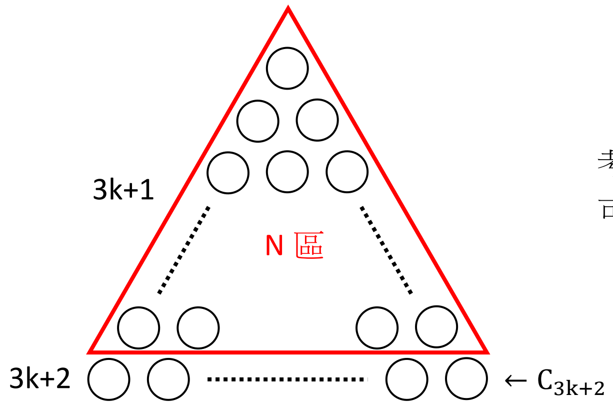
故 n＝3k 時最多可放置 2k 個皇后

（2）假設 n＝3k-1 時，最多可放置（2k-1）個皇后
則當 n＝3k+1 時



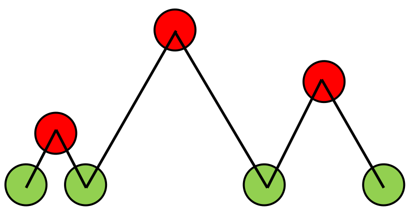
又由(一)的 1 知：n＝3k+1 時可放置(2k+1)個皇后
故 n＝3k+1 時最多可放置(2k+1)個皇后

（3）假設 n＝3k+1 時，最多可放置（2k+1）個皇后
則當 n＝3k+2 時



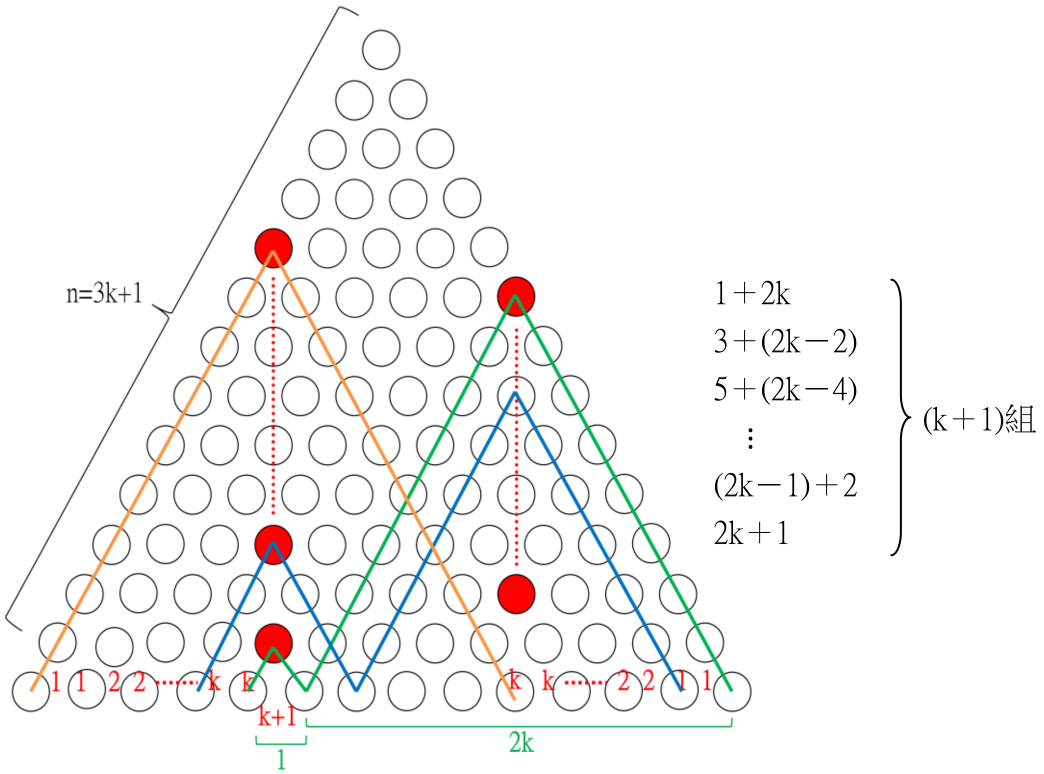
考慮 N 區中的(2k+1)個皇后至少可管轄C_{3k+2}排幾個圓圈？

因探討**至少**管轄的圓圈數，故在 N 區中的皇后共同管轄C_{3k+2}排的圓圈越多越好，也就是類似下列的圖形的組數越少越好。



(紅圈表 N 區中的皇后，綠圈表C_{3k+2}排的圓圈，類似這樣的圖形定為 1 組)

由(一)的 2，(2k+1)個皇后可分成(k+1)組。如下圖所示，綠色線那組的總間距為 1＋2k（1 與 2k 分別表示兩個皇后管轄C_{3k+2}排圓圈時所形成之間距），其餘以此類推。

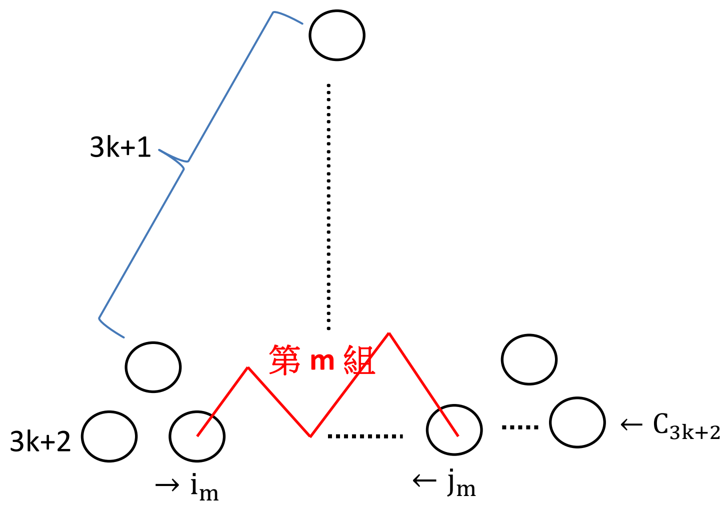


設i_m表示C_{3k+2}排由左向右數第i_m個圈，j_m表示C_{3k+2}排由右向左數第j_m個圈，m 表示第 m 組

故第 m 組於C_{3k+2}排所形成的總間格數為

$3k+2-(i_m+j_m)+2-1$

$=3k+3-(i_m+j_m)$



考慮(2k+1)個皇后是否可分成 k 組？

$\square + \cdots + \square = 3k+3-(i_1+j_1)$

$\square + \cdots + \square = 3k+3-(i_2+j_2)$

.

.

.

.

$\square + \cdots + \square = 3k+3-(i_k+j_k)$

+

可填 1~3k+1

最少$\frac{(1+2k+1)(2k+1)}{2}$

=(2k+1)(k+1)

最多

$k(3k+3)-(i_1+i_2+\sim+i_k)-(j_1+j_2+\sim+j_k)$

$=k(3k+3)-\frac{(1+k)k}{2}\times 2$

=k(3k+3)-k(1+k)

=k(2k+2)

=2k(k+1)

∵(2k+1)(k+1)＞2k(k+1)

∴k 組不可能

因此(2k+1)個皇后最少可分成(k+1)組

設M_t為第 t 組的皇后總數

M_1 M_2 ………………………. M_{k+1}

(2k+1)個皇后至少管轄C_{3k+2}排的圓圈數為：

$(M_1+1)+(M_2+1)+\cdots\cdots+(M_{k+1}+1)$

$=(M_1+M_2+\cdots\cdots+M_{k+1})+(k+1)\times 1$

=2k+1(皇后總數)+(k+1)× 1

=3k+2 個

∴C_{3k+2}排全被管轄完，無法放置 1 個皇后

故 n＝3k+2 時，最多可放置的皇后數依舊為（2k+1）個

由 1、2 依數學歸納法，得到所有 n 值的最大皇后數

伍、研究結果

1、不管在任何位置，皇后管轄的圓圈數恆等於其正三角形棋盤之邊上圓圈數的 2 倍減 1。

例：一邊有 8 個圈的正三角形棋盤，一個皇后所管轄的圓圈數皆為 15 個。

2、兩個皇后至少共同管轄 4 個圓圈，最多共同管轄 6 個圓圈。

3、一邊有 n 個圈的正三角形棋盤，至少需要 a 個皇后才能管轄到所有圓圈，只做出部分結果，如下所示：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a	1	1	2	2	3	3	3	4	4	5	5	6	6	7

4、一邊有 n 個圈的正三角形棋盤，

(1)當 n＝3k+1 時，最多可放置(2k+1)個皇后，k＝0，1，2，3，……

(2)當 n＝3k+2 時，最多可放置(2k+1)個皇后，k＝0，1，2，3，……

(3)當 n＝3k+3 時，最多可放置(2k+2)個皇后，k＝0，1，2，3，……

例如：一邊有 25 個圈的正三角形棋盤，最多可放置 17 個皇后。

一邊有 48 個圈的正三角形棋盤，最多可放置 32 個皇后。

放置皇后的方式見四、(一)。

陸、未來發展

在最少的皇后數部分，即使透過程式也只能做出部分結果，由 n＝6~14 的 a 值結果發現最少皇后數有可能是有規律的，未來希望能找到合適的方法以解出所有邊數情形的最少皇后數。

此外，我們認為這個問題可以有很多的變化，很值得未來繼續探討。

柒、參考資料

1、維基百科 八皇后問題

http://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%85%AB%E7%9A%87%E5%90%8E%E9%97%AE%E9%A2%98

2、作者：黃品翰 陳毓笙 林政勛 洪翊倫 王柏鈞

作品名稱：中華民國第四十八屆中小學科學展覽會數學科

『當「月曆縱橫刪」遇上「八皇后棋」』

3、第一冊數學課本。3-1 以符號列式、3-2 式子的化簡。翰林版

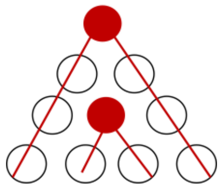
4、第四冊數學課本。1-2 等差級數。翰林版

附錄一

（一）一邊有 4 個圈的正三角形棋盤至少需要 2 個皇后才可管轄到所有圓圈

【證明】

1. 2 個皇后能管轄到所有圓圈



2. 證明 1 個皇后無法管轄到一邊有 4 個圈的正三角形棋盤的所有圓圈

由伍、研究結果第 1 點：不管在任何位置，皇后管轄的圓圈數恆等於其正三角形棋盤之邊上圓圈數的 2 倍減 1。

故 1 個皇后最多可管轄的總圓圈數 $=2\times4-1=7$(個)

又 $n=4$ 時棋盤總圓圈數 $=(1+4)\times4\times\frac{1}{2}=10$

$\because\ 7<10$

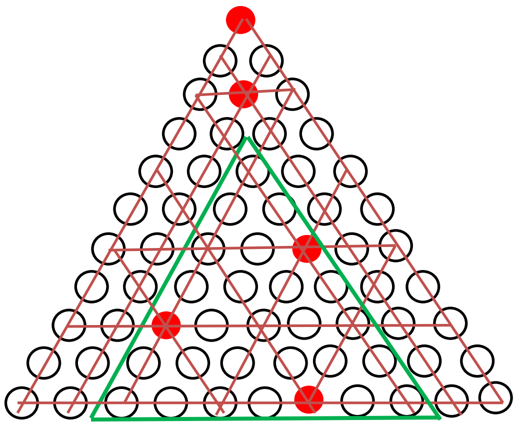
$\therefore$ 1 個皇后無法管轄到一邊有 4 個圈的正三角形棋盤的所有圓圈

因此，由 1、2 可得一邊有 4 個圓圈的正三角形棋盤至少需要 2 個皇后才可管轄到所有圓圈。

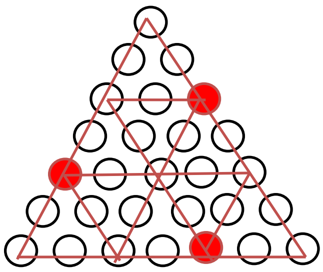
（二）一邊有 7 個圈的正三角形棋盤至少需要 3 個皇后才可管轄到所有圓圈

【證明】

1、由一邊有 11 個圓圈的皇后位置圖得知，3 個皇后能管轄到一邊有 7 個圓圈的正三角形棋盤的所有圓圈，即圖中綠色三角形內。



⇨



2、證明 2 個皇后無法管轄到一邊有 7 個圓圈的正三角形棋盤的所有圓圈

由伍、研究結果第 1 點與第 2 點：不管在任何位置，皇后管轄的圓圈數恆等於其正三角形棋盤之邊上圓圈數的 2 倍減 1。兩個皇后至少共同管轄 4 個圓圈。

故 2 個皇后最多可管轄的總圓圈數 $=2\times(2\times7-1)-4=2\times13-4=22$(個)

又 $n=7$ 時棋盤總圓圈數 $=(1+7)\times7\times\frac{1}{2}=28$

∵ 22＜28

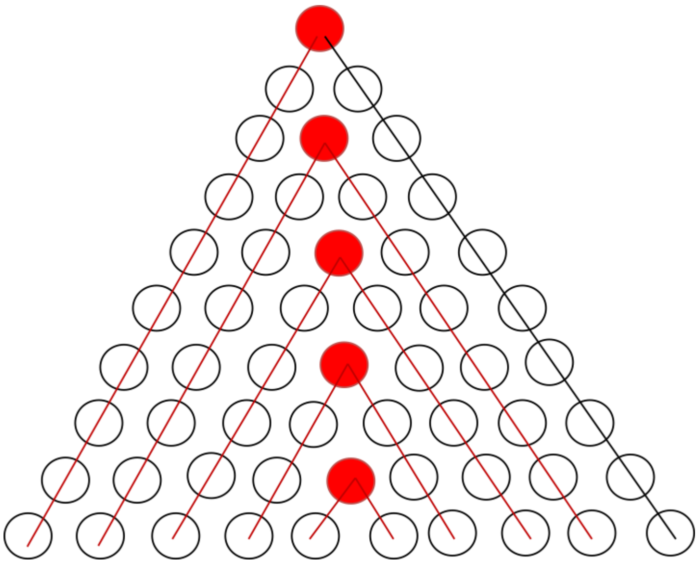
∴ 2 個皇后無法管轄到一邊有 7 個圈的正三角形棋盤的所有圓圈

因此，由 1、2 可得一邊有 7 個圓圈的正三角形棋盤至少需要 3 個皇后才可管轄到所有圓圈。

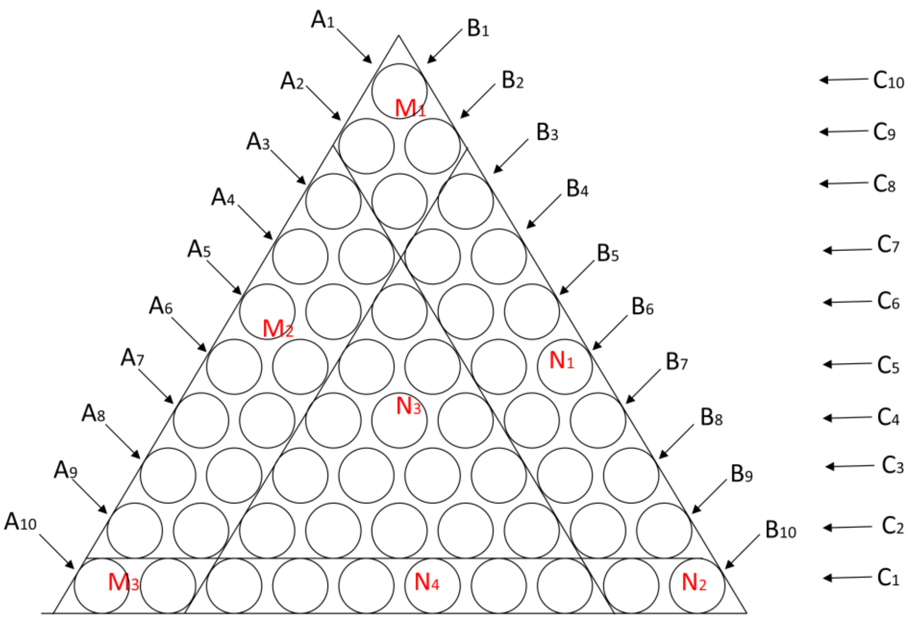
（三）一邊有 10 個圈的正三角形棋盤最少需要 5 個皇后才可管轄到所有圓圈。

【證明】

1. 5 個皇后能管轄到所有圓圈



2. 證明 4 個皇后無法管轄到一邊有 10 個圓圈的正三角形棋盤的所有圓圈



（1）若B_1無皇后

考慮↘方向

A_1~A_{10}任選 4 排

$\Longrightarrow$ B_1剩 6 個圓圈待管轄、B_2至少剩 5 個圓圈待管轄，而 4 個皇后在⟵方向最多可管轄B_1、B_2餘下的 4 個圓圈。

故B_1、B_2必有皇后

（2）若A_1無皇后，則 M 區(=M_1+M_2+M_3)的 2 個皇后與 N 區(=N_1+N_2+N_3+N_4)的 2 個皇后最多可管轄N_{A_1}排(表 N 區中的A_1排)1×2+2×2=6 個圓圈，但N_{A_1}排有 8 個圓圈，故A_1必有皇后。

同理A_2亦必有皇后

（3）若C_1無皇后

	M_1	M_2	N_1	N_3	最多可管轄到N_4中的圓圈數
皇后數	2	0	0	2	2×2=4
	1	1	1	1	1+1+1×2=4

故 4 個皇后最多可管轄N_4中的 4 個圓圈，但N_4有 6 個圓圈

故C_1必有皇后

（4）A_1、A_2、B_1、B_2、C_1皆需有皇后且只有 4 個皇后可放置，接下來以M_1、M_2、M_3、N_1、N_2、N_3、N_4七區的皇后數做分類討論，發現可分為如下四種放置皇后的情形，其餘情形明顯不合。

	M_1	M_2	M_3	N_1	N_2	N_3	N_4
①	2	0	0	0	0	1	1
②	1	1	0	1	0	0	1
③	1	1	0	0	1	1	0
④	0	2	0	1	1	0	0

①(N_3+N_4)區為一邊有 6 個圓圈的正三角形棋盤，由附錄一的(四)知至少需 3 個皇后才可管轄到所有圓圈，故N_3、N_4各 1 個皇后共 2 個皇后無法管轄到(N_3+N_4)區所有圓圈。

②

	M_1	M_2	N_1	N_4	合計
若A_3無皇后，最多可管轄到N_3區A_3排的圓圈數	0	1	2	1	4
若B_3無皇后，最多可管轄到N_3區B_3排的圓圈數	0	2	1	1	4
若C_2無皇后，最多可管轄到N_3區 C_2排的圓圈數	0	1	1	2	4

因N_3中的A_3、B_3、C_2皆有 5 個圈，故N_1、N_4、M_1的 3 個皇后必在此三排，否則無法管轄完。但此時$a_{7,4}$、$a_{8,4}$、$a_{8,5}$無法被管轄到。

③若A_3無皇后，則M_2、N_3各 1 個皇后多可管轄N_3的A_3排 1+1×2=3 個圈，但N_3的A_3排有 5 個圈，故A_3排必有皇后

同理A_4排亦必有皇后

故M_2與N_3的 2 個皇后在A_3與A_4排，但此時N_3的皇后最多可管轄N_3中A_5排 2 個圈，故無法管轄到所有圓圈。

④

	M_2	N_1	合計
若A_3無皇后，最多可管轄到N_3區A_3排的圓圈數	2	2	4 個
若C_2無皇后，最多可管轄到N_3區C_2排的圓圈數	2	1	3 個
若C_3無皇后，最多可管轄到N_3區C_3排的圓圈數	2	1	3 個

故M_2、N_1的 3 個皇后在A_3、C_2、C_3排，此時$a_{6,3}$、$a_{7,3}$、$a_{7,4}$無法被管轄到。

由(1)、(2)、(3)、(4)可知

4 個皇后無法管轄到一邊有 10 個圓圈的正三角型棋盤的所有圓圈

因此，由 1、2 可得一邊有 10 個圓圈的正三角形棋盤至少需要 5 個皇后才可管轄到所有圓圈。

【評語】030403

1. 以三個方向來考慮，推導出 $8 \leqq n \leqq 14$ 時皇后數的下界，藉由電腦程式檢驗，發現“可能的規律”這個部份值得作進一步的驗證，使其完整。

2. 作者發現“似乎可能”放置最多皇后的方法，並以此為基礎透過數學歸納法“解決了”上界問題，宜“確定”放置法的正確性，以強化這些結果的價值。

3. 問題有趣，報告條理清楚。