中華民國第52屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

最佳團隊合作獎

030402

錢進『2』勢力

學校名稱：嘉義縣立朴子國民中學

作者：	指導老師：
國二 許芷寧	蔡孟哲
國二 陳瀅竹	莊曜旭
國二 辜鈺雯	

關鍵詞：公差、最小整數、整數和

摘要

在100個硬幣內，任取若干個，若能將硬幣分成至少2堆以上，且每堆的數量依少而多成為公差2的等差數列，則稱為1種分法。能以最少硬幣排出最多種分法者為優勝。

先排出1~100的數中，計算每一個數的分法，再歸納出任一個整數有多少種分法的計算方式，發現與其因數個數相關。**若一個數有n個因數，則有$\frac{n+1}{2}-1$（當n為奇數）或$\frac{n}{2}-1$（當n為偶數）種分法。**從中**將同樣多種分法的數歸為一類，並找出其中最小的整數**，這些數就是我們獲勝的關鍵。

計算出1~100種方法的最小整數，發現可**由k種方法的最小整數推論出$2k+1$種方法的最小整數**。而這之中有一些例外的情況，探討之後也整理出兩大類不同型態的原因。

壹、研究動機

老師在課堂上介紹了一個遊戲，遊戲規則如下：有 A 、 B 兩個人，在1~100個硬幣中，任取若干個，若能將硬幣分成至少兩堆以上，且每堆的數量依少而多成為公差2的等差數列，則稱為一種分法。

(1)如果 A 能將硬幣分成2堆、3堆、4堆，則我們稱 A 有三種分法；若 B 有四種分法，則 B 獲勝

(2)如果 A 、 B 分法數一樣多，但 B 選擇的硬幣個數比較少，則 B 獲勝。

這讓我們覺得很新奇，所以我們請教老師這有沒有訣竅，但老師笑而不答，只對我們說你們可以玩玩看，看可不可以從中找到規律，進而知道訣竅在哪裡。



貳、研究目的

想了解這個遊戲有沒有訣竅及我們是利用那些工具去解決這個難題。看看我們學過的數學知識能否幫助我們解決問題。

參、研究設備及器材

紙、筆、計算機和電腦、數學課本。

肆、研究過程或方法

一、初期

在此我們先介紹遊戲規則如下：有 A 、 B 兩個人，在1~100個硬幣中，任取若干個，若能將硬幣分成至少兩堆以上，且每堆的數量依少而多成為公差2的等差數列，則稱為一種分法。

(1) 如果 A 能將硬幣分成2堆、3堆、4堆，則我們稱 A 有三種分法；若 B 有更多種分法，例如：4種，則 B 獲勝。

(2)如果 A 、 B 所能排出的種類個數一樣，但 B 所選擇的硬幣個數比較少，則 B 獲勝。

舉例說明：

36個硬幣	42個硬幣
分成2堆 	分成2堆 
分成3堆 	分成3堆 
分成4堆 	分成6堆 
分成6堆 	

我們把遊戲換成數學形式來說明我們的題目：若給定一個正整數，有沒有用2個以上的正整數(其中的正整數公差為2)來表示此正整數的方法。換成簡單一點的說法，我們先拿12個硬幣，則12個硬幣能排成2堆、3堆，因為12＝5+7＝2+4+6。我們就可以知道12有2種用2個以上公差為2的正整數相加的表示方法。我們想了解1～100個硬幣中，要拿幾個硬幣才能贏得比賽？若題目改成1～200硬幣又該拿幾個硬幣可以贏得比賽？有沒有規律可以追尋？我們藉由拆解1～50的數字觀察，發現了一些規律：

硬幣個數	因數	分解方法	分解方法種數
4	1，2，4	1+3(兩疊)	1
5	1，5		
6	1，2，3，6	2+4(兩疊)	1
7	1，7		
8	1，2，4，8	3+5(兩疊)	1
9	1，3，9	1+3+9(三疊)	1
10	1，2，5，10	4+6(兩疊)	1
11	1, 11		
12	1，2，3，4，6，12	5+7(兩疊)。 2+4+6(三疊)	2
13	1，13		
14	1，2，7，14	6+8(兩疊)	1
15	1，3，5，15	3+5+7(三疊)	1
16	1，2，4，8，16	7+9(兩疊)。 1+3+5+7(四疊)	2
17	1，17		
18	1，2，3，6，9，18	8+10(兩疊)。 4+6+8。(三疊)	2
19	1，19		
20	1，2，4，5，10，20	9+11(兩疊)。 2+4+6+8(四疊)	2
21	1，3，7，21	5+7+9(三疊)	1
22	1，2，11，22	10+12(兩疊)	1
23	1，23		
24	1，2，3，4，6，8，12，24	11+13(兩疊)。 6+8+10。(三疊) 3+5+7+9。(四疊)	3
25	1，5，25	1+3+5+7+9(五疊)	1

26	1，2，13，26	12+14(兩疊)	1
27	1，3，9，27	7+9+11(三疊)	1
28	1，2，4，7，14，28	13+15(兩疊)。 4+6+8+10(四疊)。	2
29	1，29		
30	1，2，3，5，6，10，15，30	14+16(兩疊)。 8+10+12(三疊)。 2+4+6+8+10(五疊)	3
31	1，31		
32	1，2，4，8，16，32	15+17(兩疊)。 5+7+9+11(四疊)。	2
33	1，3，11，33	9+11+13(三疊)	1
34	1，2，17，34	16+18(兩疊)	1
35	1，5，7，35	3+5+7+9+11(五疊)	1
36	1，2，3，4，6，9，12，18，36	17+19(兩疊)。 10+12+14(三疊)。 6+8+10+12(四疊)。 1+3+5+7+9+11(六疊)	4
37	1，37		
38	1，2，19，38	18+20(兩疊)	1
39	1，39		
40	1，2，4，5，8，10，20，40	19+21(兩疊)。 7+9+11+13(四疊)。 4+6+8+10+12(五疊)	3
41	1，41		
42	1，2，3，6，7，14，21，42	20+22(兩疊)。 12+14+16(三疊)。 2+4+6+8+10+12(六疊)。	3
43	1，43		
44	1，2，4，11，22，44	21+23(兩疊)。 8+10+12+14(四疊)。	2
45	1，3，5，9，15，45	13+15+17(三疊)。 5+7+9+11+13(五疊)。	2
46	1，2，23，46	22+24(兩疊)。	1
47	1，47		

48	1，2，3，4，6，8，12，16，24，48	23+25(兩疊)。 14+16+18(三疊)。 9+11+13+15(四疊)。 3+5+7+9+11+13(六疊)。	4
49	1，7，49	1+3+5+7+9+11+13(七疊)。	1
50	1，2，5，10，25，50	24+26(兩疊)。 6+8+10+12+14(五疊)。	2

我們發現如果取若干個數量的硬幣，能堆疊的疊數剛好是硬幣數量的因數且是較小的因數。因此我們有下列結論。

【結論一】如果正整數 N，可以表示成兩正整數l、m 的乘積 $N=l\times m$，且 $l\le m$，則 N 能表示為l 個正整數相加，在此我們要分情況討論：

(一)、　如果l為奇數，則我們觀察此數列應該為下式

$$\underbrace{(m-2)-2\left(\frac{l-1}{2}-1\right),\cdots\cdots,m-4,m-2}_{\frac{l-1}{2}\text{個}},m,\underbrace{m+2,m+4,\cdots\cdots,(m+2)+2\left(\frac{l-1}{2}-1\right)}_{\frac{l-1}{2}\text{個}}$$

稍微整理一下可以得到

$$\underbrace{m-l+1,\cdots\cdots,m-4,m-2}_{\frac{l-1}{2}\text{個}},m,\underbrace{m+2,m+4,\cdots\cdots,m+l-1}_{\frac{l-1}{2}\text{個}}$$

觀察知道這是等差數列，公差為 2，且總和為$l\times m$。

(二)、　如果l為偶數，則我們觀察此數列應該為下式

$$\underbrace{(m-1)-2\left(\frac{l}{2}-1\right),\cdots\cdots,m-3,m-1}_{\frac{l}{2}\text{個}},\underbrace{m+1,m+3,\cdots\cdots,(m+1)+2\left(\frac{l}{2}-1\right)}_{\frac{l}{2}\text{個}}$$

稍微整理一下可以得到

$$\underbrace{m-l+1,\cdots\cdots,m-3,m-1}_{\frac{l}{2}\text{個}},\underbrace{m+1,m+3,\cdots\cdots,m+l-1}_{\frac{l}{2}\text{個}}$$

觀察知道這是等差數列且公差為 2，且總和為$l\times m$。因為$l\le m$且l、m 為正整數，所以$m-l+1\ge 1$，由此可知 N 能表示為l個正整數之和。

例：$64=2^6$，可以知道64的正因數個數有7個。$64=1\times64=2\times32=4\times16=8\times8$，由上述**【結論一】**可知64能拆解成2，4，8個公差為2的連續正整數相加，所以64有3種分解方法。另外我們觀察得知64可分成1、64與2、32與4、16及8、8四組，其中第一組1、64沒有分解方法，所以我們就知道拿64個硬幣就有三種不同的分法，如此下來我們只要計算1~100這幾個數字中哪一個數的分法最多且此數字又是相同種數分法的最小數字，則拿這麼多數量的硬幣就能獲得勝利。所以我們可以把一正整數N的因數個數先算出來，再計算有幾種分解方法。在國中一年級就學過把一個數N先做成標準分解式$N=2^a\times3^b\times5^c\times\cdots\cdots$，則$N$的正因數個數為$(a+1)\times(b+1)\times(c+1)\times\cdots\cdots$。則我們就可以很容易的判斷出種類的多寡。

【結論二】若正整數N有k個正因數，則分解方法的個數可分成兩種情況敘述：

(一) k為奇數，則N有$\frac{k+1}{2}-1$種分解方法。

(二) k為偶數，則N有$\frac{k}{2}-1$種分解方法。

【結論三】若正整數N沒有分解方法$\Leftrightarrow$ N必為質數

($\Rightarrow$)因為N沒有分解方法，所以N的正因數個數必為 2，(如果N的正因數個數大於2，但依**【結論二】**可知N就至少有一種分解方法，由此可知N的正因數個數不可能大於2)。所以N為質數。

($\Leftarrow$)因為N為質數，所以依**【結論二】**可知N沒有分解方法。

我們由此可知質數以外的所有數皆有分解方法。

【結論四】在100個硬幣中拿取60個硬幣就能獲勝。

二、中期

現在讓我們再思考我們的問題：若硬幣的個數改為1000個，那我們不可能把1個硬幣到1000個硬幣能分解的種類全算出來，因此我們須另想一個方法，這個方法就是找出『恰有k種分解方法的最小整數是多少』如果我們可以知道所有恰有k種分解方法的最小整數，則只需檢查到底有

那些最小整數小於等於 1000，在其中找到唯一一個最多種的最小整數，那麼我們就能順利的贏得比賽。所以我們先考慮簡單一點的情況。5 種分解方法的最小整數可能是哪些數，讓我們分情況討論。

(一) 若最小的整數 N 有 k 個正因數且 k 為奇數，則 $\frac{k+1}{2}-1=5$，所以 $k=11$。將 N 表示為標準分解式的形式，則 $N=2^a\times3^b\times5^c\times\cdots\cdots$，可知 N 的因數個數為 $(a+1)\times(b+1)\times(c+1)\times\cdots\cdots$。綜合以上結果可知，在此種情況下最小的整數 N 應該為 2^{10}。

(二) 若最小的整數 N 有 k 個正因數且 k 為偶數，則 $\frac{k}{2}-1=5$，所以 $k=12$。因為 $12=12\times1=6\times2=4\times3=3\times2\times2$，所以最小整數 N 可能為 2^{11}，$2^5\times3$，$2^3\times3^2$，$2^2\times3\times5$。

所以我們只需找出最小的一個數即可，$2^2\times3\times5$ 為所求。

接著再比較(一)、(二) 這兩個情況下何者是最小的數，很容易知道 $2^2\times3\times5$ 比 2^{10} 小，所以我們找出了恰有 5 種分解方法的最小整數就是 $2^2\times3\times5$。接下來我們使用上述方法找出恰好 1 種到 100 種的最小整數。

分解種類	因數個數	最小整數	分解種類	因數個數	最小整數
1	3，4(O)	2^2	2	5， 6(O)	$2^2\times3$
3	7，8(O)	$2^3\times3$	4	9(O)，10	$2^2\times3^2$
5	11，12(O)	$2^2\times3\times5\ =60$	6	13，14(O)	$2^6\times3\ =192$
7	15，16(O)	$2^3\times3\times5\ =120$	8	17，18(O)	$2^2\times3^2\times5\ =180$
9	19，20(O)	$2^4\times3\times5\ =240$	10	21(O)，22	$2^6\times3^2\ =576$
11	23，24(O)	$2^3\times3^2\times5\ =360$	12	25(O)，26	$2^4\times3^4\ =1296$
13	27(O)，28	$2^2\times3^2\times5^2\ =900$	14	29，30(O)	$2^4\times3^2\times5\ =720$

15	31，32(O)	$2^3\times3\times5\times7\ =840$	16	33(O)，34	$2^{10}\times3^2\ =9216$
17	35，36(O)	$2^2\times3^2\times5\times7\ =1260$	18	37，38(O)	$2^{18}\times3$
19	39，40(O)	$2^4\times3\times5\times7$	20	41，42(O)	$2^6\times3^2\times5$
21	43，44(O)	$2^{10}\times3\times5$	22	45(O)，46	$2^4\times3^2\times5^2$
23	47，48(O)	$2^3\times3^2\times5\times7$	24	49，50(O)	$2^4\times3^4\times5$
25	51，52(O)	$2^{12}\times3\times5$	26	53，54(O)	$2^2\times3^2\times5^2\times7$
27	55，56(O)	$2^6\times3\times5\times7$	28	57(O)，58	$2^{18}\times3^2$
29	59，60(O)	$2^4\times3^2\times5\times7$	30	61，62(O)	$2^{30}\times3$
31	63，64(O)	$2^3\times3\times5\times7\times11$	32	65，66(O)	$2^{10}\times3^2\times5$
33	67，68(O)	$2^{16}\times3\times5$	34	69，70(O)	$2^6\times3^4\times5$
35	71，72(O)	$2^5\times3^2\times5\times7$	36	73，74(O)	$2^{36}\times3$
37	75(O)，76	$2^4\times3^4\times5^2$	38	77，78(O)	$2^{12}\times3^2\times5$
39	79，80(O)	$2^4\times3^3\times5\times7$	40	81(O)，82	$2^2\times3^2\times5^2\times7^2$
41	83，84(O)	$2^6\times3^2\times5\times7$	42	85(O)，86	$2^{16}\times3^4$
43	87，88(O)	$2^{10}\times3\times5\times7$	44	89，90(O)	$2^4\times3^2\times5^2\times7$
45	91(O)，92	$2^{12}\times3^6$	46	93(O)，94	$2^{30}\times3^2$
47	95，96(O)	$2^5\times3\times5\times7\times11$	48	97，98(O)	$2^6\times3^6\times5$
49	99，100(O)	$2^4\times3^4\times5\times7$	50	101，102(O)	$2^{16}\times3^2\times5$
51	103，104(O)	$2^{12}\times3\times5\times7$	52	105(O)，106	$2^6\times3^4\times5^2$

53	107，108(O)	$2^5\times3^2\times5^2\times7$	54	109，110(O)	$2^{10}\times3^4\times5$
55	111，112(O)	$2^6\times3^3\times5\times7$	56	113，114(O)	$2^{18}\times3^2\times5$
57	115(O)，116	$2^{22}\times3^4$	58	117(O)，118	$2^{12}\times3^2\times5^2$
59	119，120(O)	$2^4\times3^2\times5\times7\times11$	60	121(O)，122	$2^{10}\times3^{10}$
61	123，124(O)	$2^{30}\times3\times5$	62	125，126(O)	$2^6\times3^2\times5^2\times7$
63	127，128(O)	$2^3\times3^3\times5^3\times7$	64	129，130(O)	$2^{12}\times3^4\times5$
65	131，132(O)	$2^{10}\times3^2\times5\times7$	66	133(O)，134	$2^{18}\times3^6$
67	135(O)，136	$2^4\times3^2\times5^2\times7^2$	68	137，138(O)	$2^{22}\times3^2\times5$
69	139，140(O)	$2^6\times3^4\times5\times7$	70	141(O)，142	$2^{46}\times3^2$
71	143，144(O)	$2^5\times3^2\times5\times7\times11$	72	145(O)，146	$2^{28}\times3^4$
73	147(O)，148	$2^6\times3^6\times5^2$	74	149，150(O)	$2^4\times3^4\times5^2\times7$
75	151，152(O)	$2^{18}\times3\times5\times7$	76	153，154(O)	$2^{10}\times3^6\times5$
77	155，156(O)	$2^{12}\times3^2\times5\times7$	78	157，158(O)	$2^{78}\times3$
79	159，160(O)	$2^4\times3^3\times5\times7\times11$	80	161，162(O)	$2^5\times3^2\times5^2\times7^2$
81	163，164(O)	$2^{40}\times3\times5$	82	165(O)，166	$2^{10}\times3^4\times5^2$
83	167，168(O)	$2^6\times3^2\times5\times7\times11$	84	169，170(O)	$2^{16}\times3^4\times5$
85	171(O)，172	$2^{16}\times3^2\times5^2$	86	173，174(O)	$2^{28}\times3^2\times5$
87	175(O)，176	$2^6\times3^4\times5^4$	88	177(O)，178	$2^{58}\times3^2$
89	179，180(O)	$2^4\times3^3\times5^2\times7^2$	90	181，182(O)	$2^{12}\times3^6\times5$

91	183，184(O)	$2^{22}\times 3\times 5\times 7$	92	185，186(O)	$2^{30}\times 3^2\times 5$
93	187，188(O)	$2^{46}\times 3\times 5$	94	189(O)，190	$2^6\times 3^2\times 5^2\times 7^2$
95	191，192(O)	$2^3\times 3^2\times 5\times 7\times 11\times 13$	96	193，194(O)	$2^{96}\times 3$
97	195，196(O)	$2^6\times 3^6\times 5\times 7$	98	197，198(O)	$2^{10}\times 3^2\times 5^2\times 7$
99	199，200(O)	$2^4\times 3^4\times 5\times 7\times 11$	100	201(O)，202	$2^{66}\times 3^2$

我們藉由完成上表得到，在 1000 個硬幣中拿 840 個硬幣就能有 15 種疊法，16 種疊法以上的最小數字都大於 1000 且 15 種疊法的其他數字都比 840 大，根據規則我們只要拿取 840 個硬幣就能獲勝。

三、 後期

我們觀察上表發現 8 種分解方法的最小整數是 $2^2\times 3^2\times 5$，只需在 8 種的最小整數後再乘以下一個質數就得到 17 種，17 種分解方法的最小整數 $2^2\times 3^2\times 5\times 7$。這意味著我們只要知道 21 種的最小整數 $2^{10}\times 3\times 5$，則在後面乘上 7 就能變成某一種的最小整數，這對於我們在建立表格上有莫大的幫助，因此我們探討後將規律敘述如下：

【結論五】 k 種分解方法的最小整數其標準分解式為 $p_1^{a_1}\times p_2^{a_2}\times p_3^{a_3}\times\cdots\times p_n^{a_n}$，其中 p_1，p_2，p_3 … p_n 為質數，則 $2k+1$ 種分解方法的最小整數其標準分解式為 $p_1^{a_1}\times p_2^{a_2}\times p_3^{a_3}\times\cdots\times p_n^{a_n}\times p_{n+1}$，其中 p_{n+1} 是 p_n 的下一個質數。此時並不是所有的正整數 k 皆符合規則。

現在我們想研究為什麼【**結論五**】並不是對所有的正整數k皆正確。我們研究出錯的地方，發現有兩種不一樣的類型錯誤：

【類型一】　因數個數無倍數關係

種類	使用的因數個數	最小整數	種類	使用的因數個數	最小整數
10	21	$2^6\times3^2$	21	44	$2^{10}\times3\times5$
22	45	$2^4\times3^2\times5^2$	45	91	$2^{12}\times3^6$
40	81	$2^2\times3^2\times5^2\times7^2$	81	164	$2^{40}\times3\times5$

因數個數無倍數關係，【**類型一**】的錯誤是本質上的錯誤，故無法改進。但【**類型二**】的錯誤只要再增加一些條件就有辦法改進。

【類型二】　因數個數有倍數關係，但規則未正確。如表格：

種類	使用的因數個數	最小整數	種類	使用的因數個數	最小整數
26	54	$2^2\times3^2\times5^2\times7$	53	108	$2^5\times3^2\times5^2\times7$
51	104	$2^{12}\times3\times5\times7$	103	208	$2^{12}\times3^3\times5\times7$
75	152	$2^{18}\times3\times5\times7$	151	314	$2^{18}\times3^3\times5\times7$

我們發現前面的數次方不夠大，致使後面的質數無法出現，因此規則會出錯。所以我們就增加前面的次方數，以便保證規則會正確。

【結論六】如果因數個數成倍數關係，k種分解方法的最小整數為$2^m\times3^n$。若$m\geq2$ 、$n\geq1$，

則$2k+1$種分解方法的最小整數為$2^m\times3^n\times5$

結論六的說明方法與結論七類似，因為結論六的說明較為簡單，故我們只說明結論七。

【結論七】如果因數個數成倍數關係，k 種分解方法的最小整數為 $2^m\times3^n\times5^r$。若 $m\geq3$、$n\geq1$、$r\geq1$，則 $2k+1$ 種分解方法的最小整數為 $2^m\times3^n\times5^r\times7$。

(一) 在證明結論七前我們要強調 $m\geq n\geq r$，如果 $m\geq n\geq r$ 不對，那我們只需調換 $2^m\times3^n\times5^r$ 次方數就能得到一個更小的數，那 $2^m\times3^n\times5^r$ 就不是最小整數，所以 $m\geq n\geq r$。

(二) k 種最小整數的因數個數為 $2(k+1)$ 或 $2k+1$ 其中之一，$2k+1$ 種分法的最小整數的因數個數可能為 $2\left[(2k+1)+1\right]=4(k+1)$ 或 $2\left[(2k+1)+1\right]-1=4k+3$ 其中之一。但 k 種分法的最小數與 $2k+1$ 種分法的最小數的因數個數成整數倍關係，所以只有 $2(k+1)$ 與 $4(k+1)$ 符合條件，所以在這個前提下我們知道 k 種分法的最小數的因數個數為 $2(k+1)$，$2k+1$ 種分法的最小整數的因數個數為 $2\left[(2k+1)+1\right]=4(k+1)$。

(三) 因為 k 種分解方法的最小數為 $2^m\times3^n\times5^r$，則我們知道 $2(k+1)=(m+1)(n+1)(r+1)$。然而 $2k+1$ 種分法的最小整數的因數個數為 $4(k+1)$，可得知 $4(k+1)=(m+1)(n+1)(r+1)\times2$。以下分 6 個情況討論：

(1) 若 $4(k+1)=(m+1)(n+1)(r+1)\times2$，那我們就聲稱這個分解能做出的極小整數為 $2^m\times3^n\times5^r\times7$

(2) 若 $4(k+1)=(2m+2)(n+1)(r+1)$，那我們就聲稱這個分解能做出的極小整數為 $2^{2m+1}\times3^n\times5^r$。

(3) 若 $4(k+1)=(m+1)(2n+2)(r+1)$，那我們就聲稱這個分解能做出的極小整數為 $2^m\times3^{2n+1}\times5^r$ 或 $2^{2n+1}\times3^m\times5^r$ 其中之一。

(4) 若 $4(k+1)=(m+1)(n+1)(2r+2)$，那我們就聲稱這個分解能做出的極小整數為 $2^{2r+1}\times3^m\times5^n$、$2^m\times3^{2r+1}\times5^n$ 或 $2^m\times3^n\times5^{2r+1}$ 其中之一。

(5) 若$4(k+1)=(a+1)\times(b+1)\times(c+1)$，其中$a+1$、$b+1$、$c+1$必有一數為 2 的倍數。若$a+1$為 2 的倍數，則$2(k+1)=\left(\frac{a+1}{2}\right)\times(b+1)\times(c+1)$，但$2(k+1)$能產生最小整數的分解為$(m+1)(n+1)(r+1)$，所以$2(k+1)=\left(\frac{a+1}{2}\right)\times(b+1)\times(c+1)$不能產生最小整數，所以可知$2^{\frac{a+1}{2}-1}\times3^b\times5^c$必定不是最小整數，而且$4(k+1)=(a+1)\times(b+1)\times(c+1)$所產生出來的數字$2^a\times3^b\times5^c$一定比本說明裡第(2)個討論$4(k+1)=(2m+2)(n+1)(r+1)$所產生出來的數字$2^{2m+1}\times3^n\times5^r$還要大。同理，若$b+1$為 2 的倍數，所得到的數就可以跟本說明裡第(3)個討論所得到的數做大小比較，很容易可以知道第(3)個討論裡的數必定比較小，因此利用這個方法我們可以知道我們只須在乎說明裡的(1)、(2)、(3)、(4)。

(6) 若$4(k+1)=(a+1)\times\cdots\cdots\times(z+1)$。我們利用說明(5)中的技巧很容易知道無需考慮這種情況下的討論。

（四）所以我們只需確認(1)、(2)、(3)、(4)中最小的數為何即可。因此讓我們先來比較(1)、(2)裡數字的大小：在(1)中所獲的數字為$2^m\times3^n\times5^r\times7$，在(2)中所獲的數字為$2^{2m+1}\times3^n\times5^r$。因為$m\geq3$，所以$2^{2m+1}\times3^n\times5^r>2^m\times3^n\times5^r\times7$。

讓我們再來比較(1)、(3)裡數字的大小：

在(1)中所獲的數字為$2^m\times3^n\times5^r\times7$，在(3)中所獲的數字為$2^m\times3^{2n+1}\times5^r$或$2^{2n+1}\times3^m\times5^r$。

因為$m\geq3$、$n\geq1$，所以$2^m\times3^{2n+1}\times5^r>2^m\times3^n\times5^r\times7$且$2^{2n+1}\times3^m\times5^r>2^m\times3^n\times5^r\times7$

讓我們最後比較(1)、(4)裡數字的大小：

在(1)中所獲的數字為$2^m\times3^n\times5^r\times7$，在(4)中所獲的數字為$2^{2r+1}\times3^m\times5^n$、$2^m\times3^{2r+1}\times5^n$或$2^m\times3^n\times5^{2r+1}$。因為$m\geq3$、$n\geq1$、$r\geq1$，所以$2^{2r+1}\times3^m\times5^n>2^m\times3^n\times5^r\times7$，$2^m\times3^{2r+1}\times5^n>2^m\times3^n\times5^r\times7$且$2^m\times3^n\times5^{2r+1}>2^m\times3^n\times5^r\times7$。

比較(1)、(2)、(3)、(4)之後我們得到$2^m\times3^n\times5^r\times7$就是最小整數。因此$2k+1$種分法的最小整數為$2^m\times3^n\times5^r\times7$。

【結論八】如果因數個數成倍數關係，k 種分解方法的最小整數為 $2^m \times 3^n \times 5^r \times 7^s$ 。若 $m \ge 3$ 、$n \ge 2$ 、$r \ge 1$、$s \ge 1$ ，則 $2k+1$ 種分解方法的最小整數為 $2^m \times 3^n \times 5^r \times 7^s \times 11$。

結論八的說明方法與結論七類似，因為說明過程極為攏長，故我們結論八我們不予說明，有興趣的讀者可以模仿結論七的說明去證明。

伍、研究結果

【**訣竅**】在 100 個硬幣中拿取 60 個硬幣就能獲勝。
在 200 個硬幣中拿取 180 個硬幣就能獲勝。
在 300 個硬幣中拿取 240 個硬幣就能獲勝。
在 400 個硬幣中拿取 360 個硬幣就能獲勝。
在 500 個硬幣中拿取 360 個硬幣就能獲勝。
在 600 個硬幣中拿取 360 個硬幣就能獲勝。
在 700 個硬幣中拿取 360 個硬幣就能獲勝。
在 800 個硬幣中拿取 720 個硬幣就能獲勝。
在 900 個硬幣中拿取 840 個硬幣就能獲勝。
在 1000 個硬幣中拿取 840 個硬幣就能獲勝。

陸、討論

我們花了一些時間做了遊戲的探討及大量計算去找出恰好 1 種至恰好 100 種分解方法的最小整數。如果有我們所建造的表格就能在遊戲中屢屢獲勝，只是礙於我們所知道的數學知識太少，所以我們未能得到分解方法中最小數的完美結論，只發現了一些規律，但規律無法適用每一個數；此外我們也研究了無法推廣的原因，分為兩種類型，第二種類型錯誤只需加上某些條件，就能幫助我們建構最小數的表格。有興趣的讀者可以試著往更多種分解方法的最小整數研究，也可以致力於發現更多規則來建構表格，更可以朝公差為 3、4、5 、…的遊戲邁進，看看與公差 2 的差別到底在哪。

柒、結論

【結論一】 如果正整數 N，可以表示成兩正整數 l、m 的乘積 $N = l \times m$，且 $l \le m$，則 N 能表示為 l 個公差為 2 的正整數相加。

【結論二】 若正整數 N 有 k 個正因數，可分成兩種情況敘述：

（1）k 為奇數，則 N 有 $\frac{k+1}{2}-1$ 種分解方法。

（2）k 為偶數，則 N 有 $\frac{k}{2}-1$ 種分解方法。

【結論三】 若正整數 N 沒有分解方法 $\Leftrightarrow$ N 必為質數

【結論四】 k 種分法的最小整數其標準分解式為 ${p_1}^{a_1} \times {p_2}^{a_2} \times {p_3}^{a_3} \times \cdots \times {p_n}^{a_n}$，其中 p_1，p_2，$p_3 \cdots p_n$ 為質數，則 $2k+1$ 種分法的最小整數其標準分解式為 ${p_1}^{a_1} \times {p_2}^{a_2} \times {p_3}^{a_3} \times \cdots \times {p_n}^{a_n} \times p_{n+1}$，其中 p_{n+1} 是 p_n 的下一個質數。此時並不是所有的正整數 k 皆符合上述規則。

【結論五】 k 種分法的最小數為 $2^m \times 3^n$。若 $m \ge 2$、$n \ge 1$ 且 k 種分法的最小數與 $2k+1$ 種分法的最小數間的因數個數成倍數關係。則 $2k+1$ 種分法的最小整數為 $2^m \times 3^n \times 5$

【結論六】 k 種分法的最小數為 $2^m \times 3^n \times 5^r$。若 $m \ge 3$、$n \ge 1$、$r \ge 1$ 且 k 種分法的最小數與 $2k+1$ 種分法的最小數的因數個數成倍數關係。則 $2k+1$ 種分法的最小整數為 $2^m \times 3^n \times 5^r \times 7$。

【結論七】 k 種分法的最小數為 $2^m \times 3^n \times 5^r \times 7^s$。若 $m \ge 3$、$n \ge 2$、$r \ge 1$、$s \ge 1$ 且 k 種分法的最小數與 $2k+1$ 種分法的最小數的因數個數成倍數關係。則 $2k+1$ 種分法的最小數為 $2^m \times 3^n \times 5^r \times 7^s \times 11$。

【結論八】 $1 \sim 100$ 種分法的最小整數，如下表所列。

分解種類	最小整數	分解種類	最小整數	分解種類	最小整數
1	2^2	11	$2^3\times3^2\times5$	21	$2^{10}\times3\times5$
2	$2^2\times3$	12	$2^4\times3^4$	22	$2^4\times3^2\times5^2$
3	$2^3\times3$	13	$2^2\times3^2\times5^2$	23	$2^3\times3^2\times5\times7$
4	$2^2\times3^2$	14	$2^4\times3^2\times5$	24	$2^4\times3^4\times5$
5	$2^2\times3\times5$	15	$2^3\times3\times5\times7$	25	$2^{12}\times3\times5$
6	$2^6\times3$	16	$2^{10}\times3^2$	26	$2^2\times3^2\times5^2\times7$
7	$2^3\times3\times5$	17	$2^2\times3^2\times5\times7$	27	$2^6\times3\times5\times7$
8	$2^2\times3^2\times5$	18	$2^{18}\times3$	28	$2^{18}\times3^2$
9	$2^4\times3\times5$	19	$2^4\times3\times5\times7$	29	$2^4\times3^2\times5\times7$
10	$2^6\times3^2$	20	$2^6\times3^2\times5$	30	$2^{30}\times3$

31	$2^3\times3\times5\times7\times11$	41	$2^6\times3^2\times5\times7$	51	$2^{12}\times3\times5\times7$
32	$2^{10}\times3^2\times5$	42	$2^{16}\times3^4$	52	$2^6\times3^4\times5^2$
33	$2^{16}\times3\times5$	43	$2^{10}\times3\times5\times7$	53	$2^5\times3^2\times5^2\times7$
34	$2^6\times3^4\times5$	44	$2^4\times3^2\times5^2\times7$	54	$2^{10}\times3^4\times5$
35	$2^5\times3^2\times5\times7$	45	$2^{12}\times3^6$	55	$2^6\times3^3\times5\times7$
36	$2^{36}\times3$	46	$2^{30}\times3^2$	56	$2^{18}\times3^2\times5$
37	$2^4\times3^4\times5^2$	47	$2^5\times3\times5\times7\times11$	57	$2^{22}\times3^4$

38	$2^{12}\times3^{2}\times5$	48	$2^{6}\times3^{6}\times5$	58	$2^{12}\times3^{2}\times5^{2}$
39	$2^{4}\times3^{3}\times5\times7$	49	$2^{4}\times3^{4}\times5\times7$	59	$2^{4}\times3^{2}\times5\times7\times11$
40	$2^{2}\times3^{2}\times5^{2}\times7^{2}$	50	$2^{16}\times3^{2}\times5$	60	$2^{10}\times3^{10}$

61	$2^{30}\times3\times5$	71	$2^{5}\times3^{2}\times5\times7\times11$	81	$2^{40}\times3\times5$
62	$2^{6}\times3^{2}\times5^{2}\times7$	72	$2^{28}\times3^{4}$	82	$2^{10}\times3^{4}\times5^{2}$
63	$2^{3}\times3^{3}\times5^{3}\times7$	73	$2^{6}\times3^{6}\times5^{2}$	83	$2^{6}\times3^{2}\times5\times7\times11$
64	$2^{12}\times3^{4}\times5$	74	$2^{4}\times3^{4}\times5^{2}\times7$	84	$2^{16}\times3^{4}\times5$
65	$2^{10}\times3^{2}\times5\times7$	75	$2^{18}\times3\times5\times7$	85	$2^{16}\times3^{2}\times5^{2}$
66	$2^{18}\times3^{6}$	76	$2^{10}\times3^{6}\times5$	86	$2^{28}\times3^{2}\times5$
67	$2^{4}\times3^{2}\times5^{2}\times7^{2}$	77	$2^{12}\times3^{2}\times5\times7$	87	$2^{6}\times3^{4}\times5^{4}$
68	$2^{22}\times3^{2}\times5$	78	$2^{78}\times3$	88	$2^{58}\times3^{2}$
69	$2^{6}\times3^{4}\times5\times7$	79	$2^{4}\times3^{3}\times5\times7\times11$	89	$2^{4}\times3^{3}\times5^{2}\times7^{2}$
70	$2^{46}\times3^{2}$	80	$2^{5}\times3^{2}\times5^{2}\times7^{2}$	90	$2^{12}\times3^{6}\times5$

91	$2^{22}\times3\times5\times7$	96	$2^{96}\times3$		
92	$2^{30}\times3^{2}\times5$	97	$2^{6}\times3^{6}\times5\times7$		
93	$2^{46}\times3\times5$	98	$2^{10}\times3^{2}\times5^{2}\times7$		
94	$2^{6}\times3^{2}\times5^{2}\times7^{2}$	99	$2^{4}\times3^{4}\times5\times7\times11$		
95	$2^{3}\times3^{2}\times5\times7\times11\times13$	100	$2^{66}\times3^{2}$		

捌、參考資料及其他

一、國中數學課本，第四冊，康軒文教事業。

二、曾嘉儀，康軒版麻辣講義，第四冊。

三、連續整數和的難題。中華民國第 51 屆中小學科學展覽----高雄市鼓山區中山國民小學。

四、連續數字和。中華民國第 43 屆中小學科學展覽高中組。

【評語】030402

1. 文筆流暢，報告時三人合作無間表現優異。
2. 後期研究偏重觀察、歸納及尋找規律；作者發覺及檢討不符合的情形並試圖予以改進，富科學研究的精神。
3. 建議作一般性的研究並加強數學証明。