中華民國第52屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

最佳(鄉土)教材獎

030401

一線生機－單色三、四、五邊形之連線比賽

學校名稱：彰化縣立陽明國民中學

作者：	指導老師：
國一 簡意安	洪淑琴
國一 吳筱筑	張睿哲
國二 吳筱婷	

關鍵詞：最優勢畫法、潛在線、封閉線

作品名稱：一線生機
～單色三、四、五邊形之連線比賽

摘要

連線比賽是由甲拿藍色筆，乙拿紅色筆，甲先乙後輪流在凸 n 邊形上的頂點連一線段，如比賽單色三角形，先連出單色三角形者為勝。我們的研究首先求出 n 之最小值為 6，接下來找出被指定不同圖形的雙方皆使用最優勢畫法且互相封閉時，具有必勝策略者，得到以下結果：

甲指定的圖形	乙指定的圖形	雙方皆使用最優勢畫法且互相封閉時，具有必勝策略者
一個藍色三角形	一個紅色三角形	甲
一個藍色四邊形	一個紅色四邊形	甲
一個藍色四邊形	二個紅色三角形	甲
二個藍色三角形	一個紅色四邊形	乙
三個藍色三角形	二個紅色四邊形	乙
二個藍色四邊形	三個紅色三角形	甲
一個藍色五邊形	一個紅色五邊形	甲

並發現畫 n 條線段能產生最多的單色 n 邊形之潛在線數的規律性，同時歸納出必勝策略的方向。

壹、研究動機

自從學到簡單幾何圖形，班上流行起一種藍紅兩色連線比賽的遊戲，也就是兩位同學分別拿著藍、紅筆在五邊形的頂點上輪流連線，誰先連出單色三角形就贏了，我們也好奇地在旁圍觀，發現有時無法連出單色三角形，比賽只好重來。究竟要幾個點才能確保遊戲能分出輸贏呢？有什麼策略可以讓自己獲勝呢？如果改畫四邊形、五邊形，結果又是如何呢？種種的疑問，帶給我們強烈的好奇心，促使我們反覆的探討此問題。接下來，是我們的研究之旅。

貳、研究目的

一、在單位圓上 10 個點之藍紅兩色連線比賽，探討以下各種比賽甲或乙獲勝之情形：

(一) 甲先連出一個藍色三角形，或乙先連出一個紅色三角形。

(二) 甲先連出一個藍色四邊形，或乙先連出一個紅色四邊形。

(三) 甲先連出一個藍色四邊形，或乙先連出二個紅色三角形。

(四) 甲先連出二個藍色三角形，或乙先連出一個紅色四邊形。

(五) 甲先連出三個藍色三角形，或乙先連出二個紅色四邊形。

(六) 甲先連出二個藍色四邊形，或乙先連出三個紅色三角形。

(七) 甲先連出一個藍色五邊形，或乙先連出一個紅色五邊形。

二、探討畫 n 條線段能產生最多的單色 n 邊形之潛在線數的規律性。

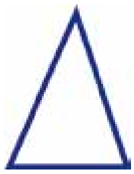
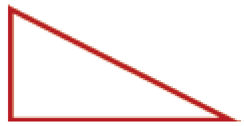
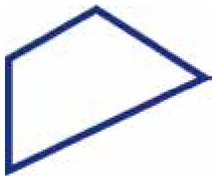
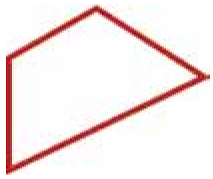
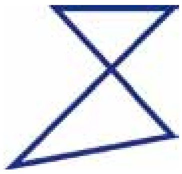
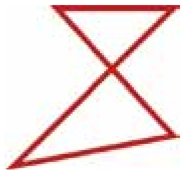
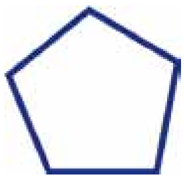
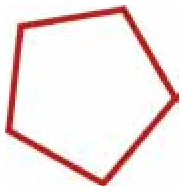
三、歸納出必勝策略的方向。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、繪圖軟體 Adobe Illustrator。

肆、研究方法

一、解釋名詞：

單色三角形 如：		藍色三角形		紅色三角形
單色四邊形 如：		藍色四邊形		紅色四邊形
		藍色四邊形		紅色四邊形
單色五邊形 如：		藍色五邊形		紅色五邊形

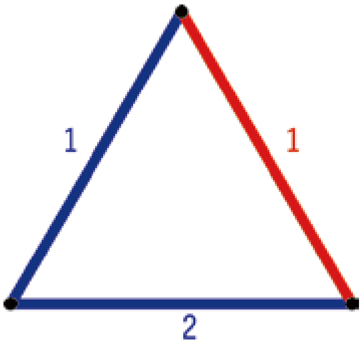
二、 遊戲規則：

(一)甲拿藍色筆，乙拿紅色筆，甲先乙後輪流在凸 n 邊形上的頂點，任何三點不共線，每兩點之間用線段連起來，如比賽單色三角形，先連出單色三角形者為勝。
同理，如比賽單色四邊形、五邊形，先連出單色四邊形、五邊形者為勝。

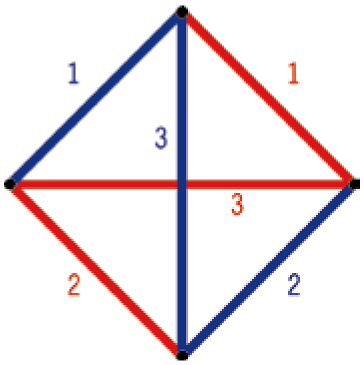
(二)定理一：

1. 三角形的 n 之最小值：

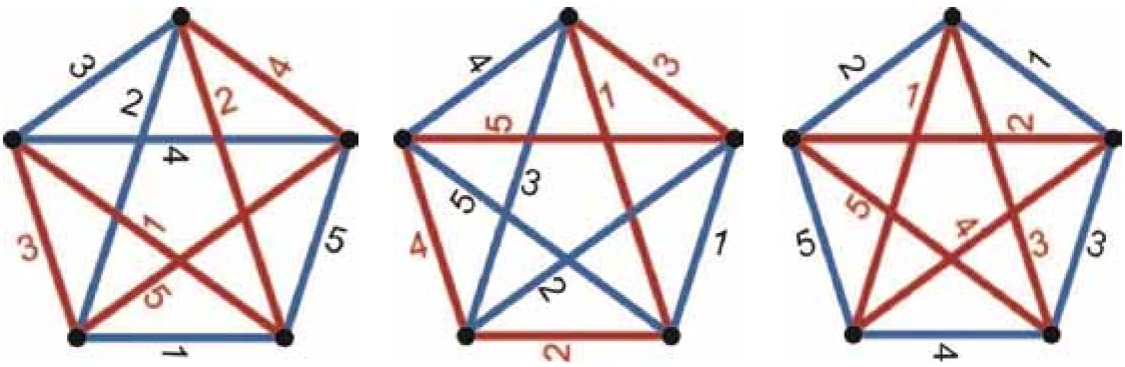
(1) 平面上，n 多邊形若 n=3，則從 3 個頂點無法連出單色三角形的例子如下：



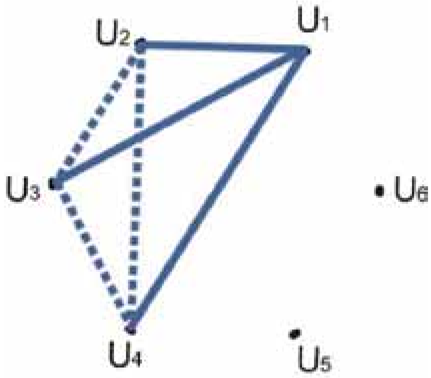
(2) 平面上，n 多邊形若 n=4，則從 4 個頂點無法連出單色三角形的例子如下：



(3) 平面上，n 多邊形若 n=5，若未採最優勢畫法，則從這 5 個頂點無法連出單色三角形例子如下：



(4) 平面上，從凸 n 多邊形上 n 個頂點先連出一個單色三角形為勝，若欲使有一方必能連出一個單色三角形，求出 n 之最小值為 6。
證明：若只連藍紅兩種顏色的線段在凸六邊形上



圖（一）

考慮圖(一)：

i. 不失一般性，固定頂點 U_1，可連 U_1U_2、U_1U_3、U_1U_4、U_1U_5、U_1U_6 共 5 條線段，至少有 3 條線段為同一顏色。

ii. 設有 U_1U_2、U_1U_3、U_1U_4 同為藍色。

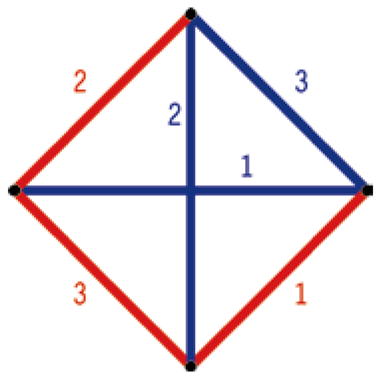
iii. 在三角形△ $U_2U_3U_4$ 的三個邊為 U_2U_3、U_2U_4、U_3U_4。

iv. 若 U_2U_3、U_2U_4、U_3U_4 皆為紅色，則形成單一紅色三角形△ $U_2U_3U_4$，定理得證。

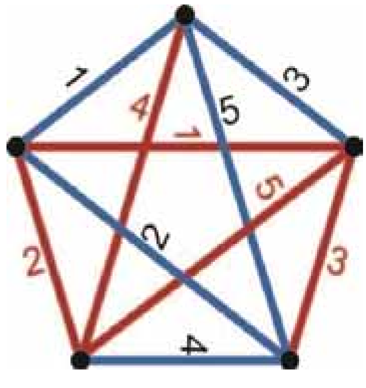
v. 若 U_2U_3、U_2U_4、U_3U_4 不全為紅色，其中至少有 1 為藍色，假設 U_2U_3 為藍色，則△ $U_1U_2U_3$ 為單一藍色三角形，其他情形亦得證。

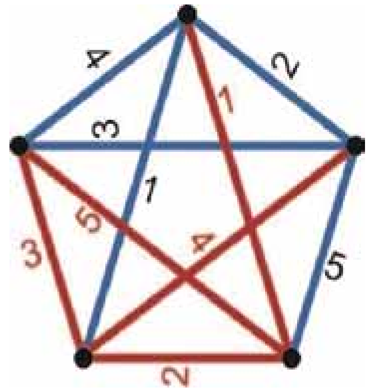
2. 四邊形的 n 之最小值：

(1) 平面上，n 多邊形若 n=4，則從 4 個頂點無法連出單色四邊形的例子如下：



(2) 平面上，n 多邊形若 n=5，若未採最優勢畫法，則從這 5 個頂點無法連出單色四邊形的例子如下：





(3) 平面上，從凸 n 多邊形 n 個頂點先連出一個單色四邊形為勝，若欲使有一方必能連出一個單色四邊形，求出 n 之最小值為 6。

證明：若只連藍紅兩種顏色的線段在凸六邊形上

i. 不失一般性，固定定點 A，可連 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{AD}$、$\overline{AE}$、$\overline{AF}$ 共 5 條線段，鴿籠原理指出，至少有 3 條線段為同一顏色。

ii. 設 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 同為藍色。

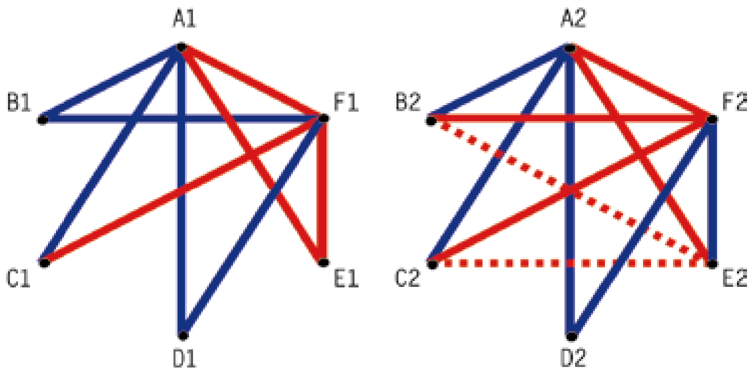


圖 (α_2)　　圖 (β_2)

圖 (二)

iii. 如圖（二）：

(i) 固定 F 點，可連 $\overline{FE}$、$\overline{FD}$、$\overline{FC}$、$\overline{FB}$、$\overline{FA}$ 共 5 條線段，鴿籠原理指出， 至少有 3 條線段為同一顏色。

(ii) 設有 3 條同為紅色。

(iii) 如圖 (α_2)，當連出的紅色線段與自 A_1 連出的藍紅各一線段相連接，藍形成一個四邊形，定理得證。

(iv) 如圖 (β_2)，當連出的紅色線段與自 A_2 連出的藍色線段相連接，出現 2 條紅色四邊形的潛在線，必能連出一個四邊形，定理得證。

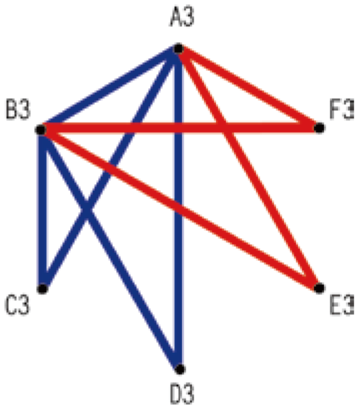


圖 (α_3)

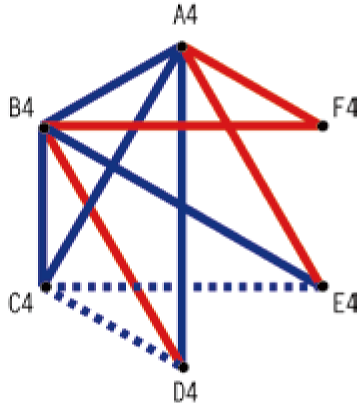


圖 (β_3)

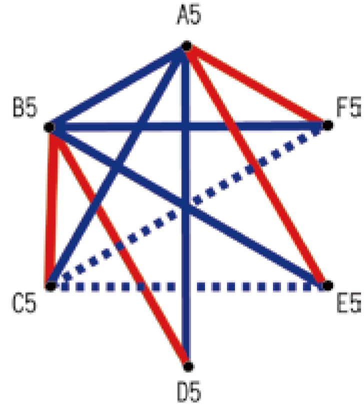


圖 (γ_3)

圖 (三)

iv. 如圖（三）：

(i) 固定 B 點，可連 $\overline{BA}$、$\overline{BC}$、$\overline{BD}$、$\overline{BE}$、$\overline{BF}$ 共 5 條線段，鴿籠原理指出，至少有 3 條線段為同一顏色。

(ii) 設有 3 條同為藍色。

(iii) 如圖 (α_3)，當連出的藍色線段與自 A_3 連出的藍色線段相連接，藍紅各形成一個四邊形，定理得證。

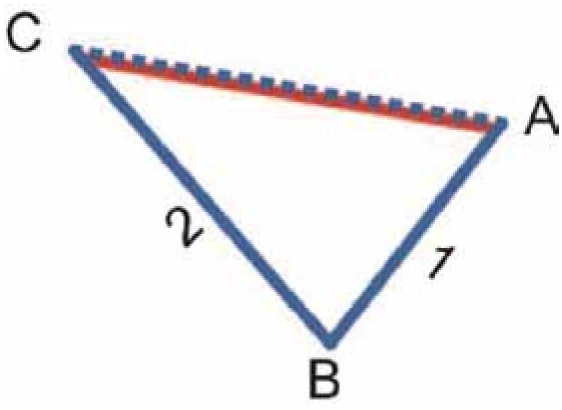
(iv) 如圖 (β_3)，當連出的藍色線段與自 A_4 連出的藍紅各一線段相連接，出現 2 條藍色四邊形的潛在線，必能連出一個四邊形，定理得證。

(v) 如圖 (γ_3)，當連出的藍色線段與自 A_5 連出的紅色線段相連接，出現 2 條藍色四邊形的潛在線，必能連出一個四邊形，定理得證。其他情形亦得證。

3. 由前面說明可知，若要比賽連出單色三、四邊形，n 至少要 6。

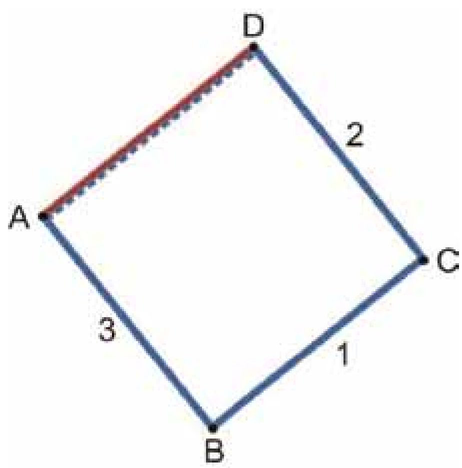
三、 潛在線、封閉線：

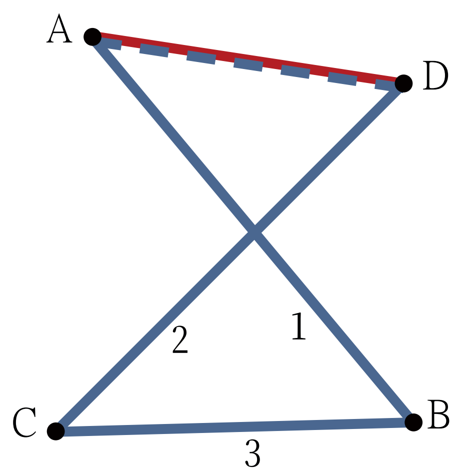
（一）三角形的潛在線、封閉線：



如圖，甲方已經連出兩條藍色線段 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$，只差連出一條藍色線段在虛線處即可形成一個藍色三角形，我們定義這條虛線 $\overline{AC}$ 為藍色三角形的潛在線，而紅色為避免藍色形成三角形，搶先以實線畫 $\overline{AC}$，我們定義紅色 $\overline{AC}$ 為封閉線。紅色三角形的潛在線、封閉線形成方式亦同。

（二）四邊形的潛在線、封閉線：





如圖，甲方已連出三條藍色線段 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$，只差虛線 $\overline{AD}$ 即可連出藍色四邊形 ABCD，故我們稱虛線 $\overline{AD}$ 為藍色四邊形的潛在線，而紅色為避免藍色形成四邊形，搶先以實線畫 $\overline{AD}$，我們定義紅色 $\overline{AD}$ 為封閉線。紅色四邊形的潛在線、封閉線形成方式亦同。

（三）五邊形的潛在線、封閉線形成方式亦同。

伍、研究過程：所有比賽皆甲先畫藍色，乙後畫紅色，依序輪流連線

一、討論：

甲先連出一個藍色三角形為勝或乙先連出一個紅色三角形為勝？

分 (一)(二) 兩種情形：

(一) 甲乙皆連出第一步　　(二) 甲乙皆連出第一步

1. 甲 1 與乙 1 相連，如圖 (四)　　甲 1 與乙 1 不相連，如圖 (五)

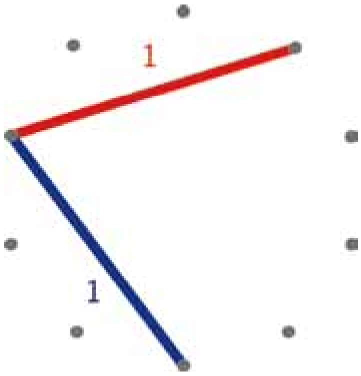


圖 (四)

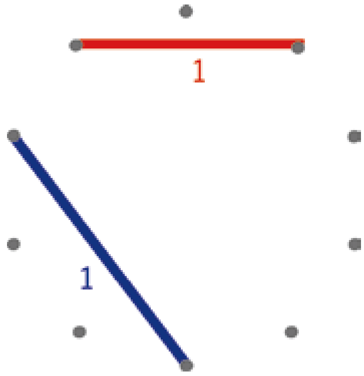


圖 (五)

2. 甲以最優勢畫法連出第二步，乙第二步勢必要封閉藍色三角形的潛在線，如圖 (六)、圖 (七)

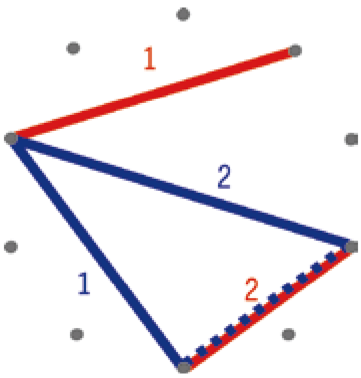


圖 (六)

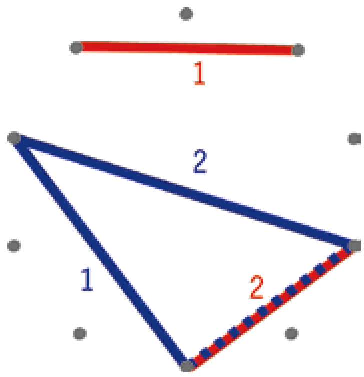


圖 (七)

3. 甲第三步與第一步、第二步形成三叉圖，產生兩條藍色三角形的潛在線，無論是第（一）或第（二）種情形，此時乙第三步均無法同時封閉這兩條藍色三角 形的潛在線，故甲必先勝出，如圖 (八)、圖 (九)

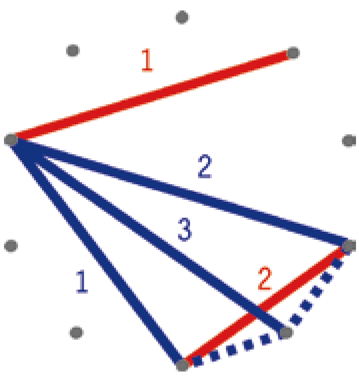


圖 (八)

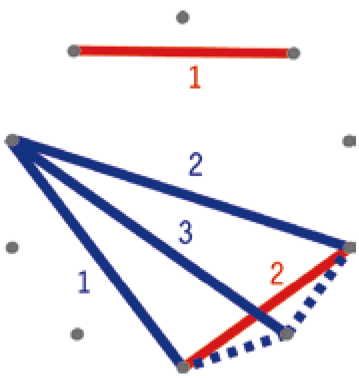


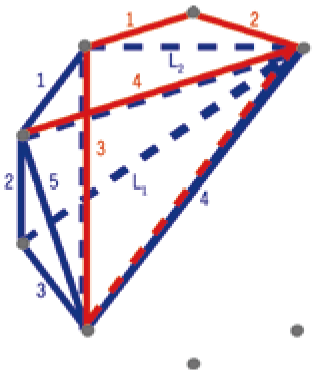
圖 (九)

二、討論：

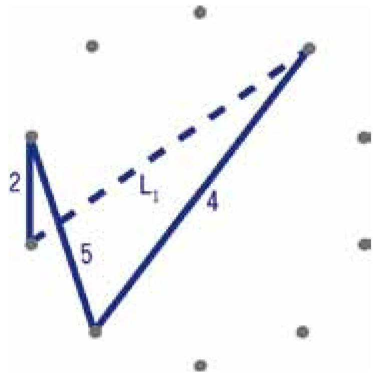
甲先連出一個藍色四邊形為勝或乙先連出一個紅色四邊形為勝？

(一) 甲 1 與乙 1 相連

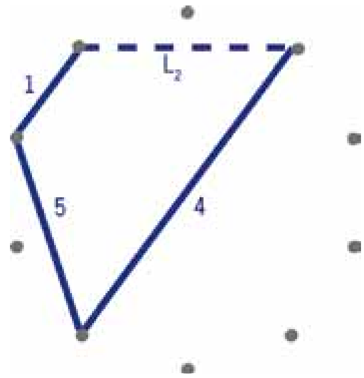
甲畫第 3、4 步各產生一條潛在線，乙畫第 3、4 步皆封閉，甲第 5 步產生了二條潛在線，乙來不及封閉，故甲必勝。如圖（十）及圖（α_{10}）、圖（β_{10}）。



圖（十）



圖（α_{10}）



圖（β_{10}）

(二) 甲 1 與乙 1 不相連

1. 不失一般性，甲乙皆連出第一步、第二步，如圖 (十一)

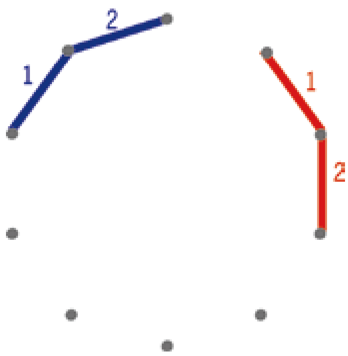


圖 (十一)

2. 甲以最優勢畫法連出第三步，產生了藍色四邊形的潛在線，所以乙第三步勢必要封閉藍色四邊形的潛在線，如圖 (十二)

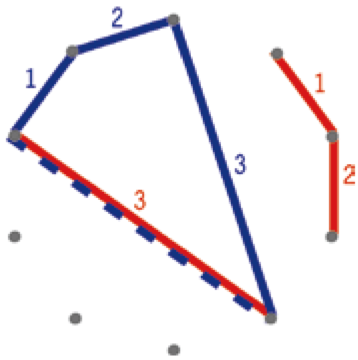


圖 (十二)

3. 不失一般性，甲再以最優勢的畫法連出第四步，產生了一條藍色四邊形的潛在線，乙第四步勢必要封閉此條潛在線，如圖 (十三)

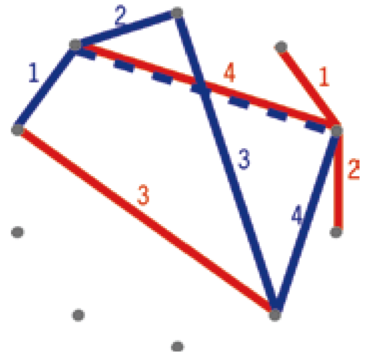


圖 (十三)

4. 甲再以最優勢畫法連出第五步，此時產生了三條藍色四邊形的潛在線，如圖 (十四) 及圖 (α_{14})、圖 (β_{14})、圖 (γ_{14})，此時乙第五步無法同時封閉這三條藍色潛在線，所以甲第六步必勝出。

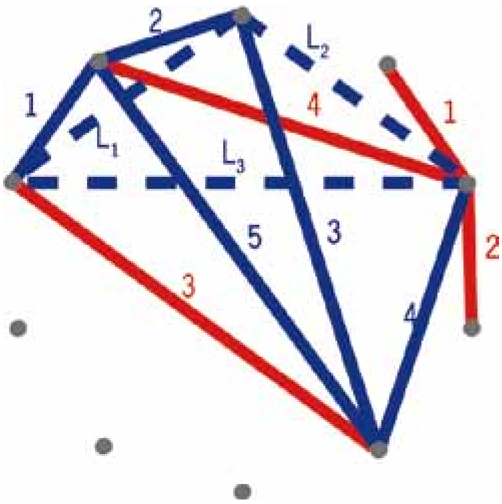


圖 (十四)

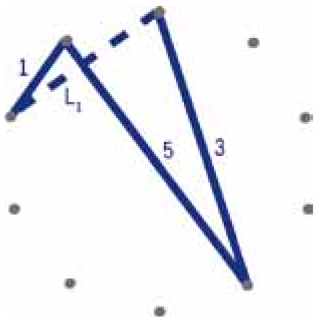


圖 (α_{14})

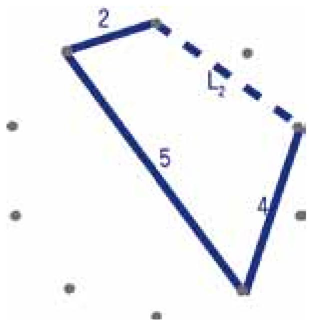


圖 (β_{14})

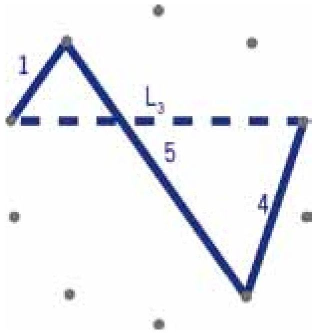


圖 (γ_{14})

三、討論：

甲先連出一個藍色四邊形為勝或乙先連出二個紅色三角形為勝？

(一) 甲 1 與乙 1 相連

1. 甲先連出第一、二步，乙連出第一步，不失一般性，如圖 (十五)

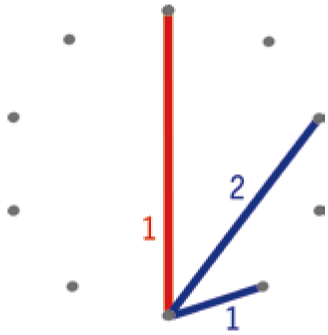


圖 (十五)

2. 乙以最優勢畫法連出第二步，產生一條紅色三角形的潛在線，但甲第三步不必封閉此條紅色三角形潛在線，反而甲逕自以最優勢畫法連出第三步，產生一條藍色四邊形的潛在線，如圖 (十六)

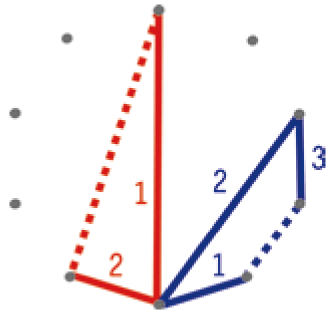


圖 (十六)

3. 乙第三步勢必要封閉藍色四邊形的潛在線，甲再畫第四步，又產生了一條藍色四邊形的潛在線，如圖 (十七)

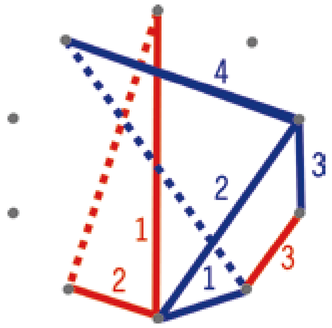


圖 (十七)

4. 乙第四步勢必要再封閉新產生的藍色四邊形潛在線，如圖 (十八)

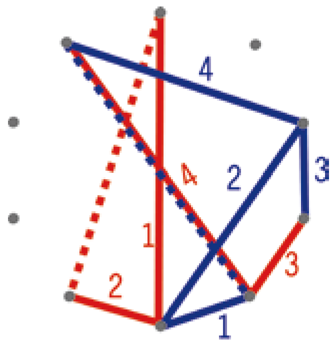
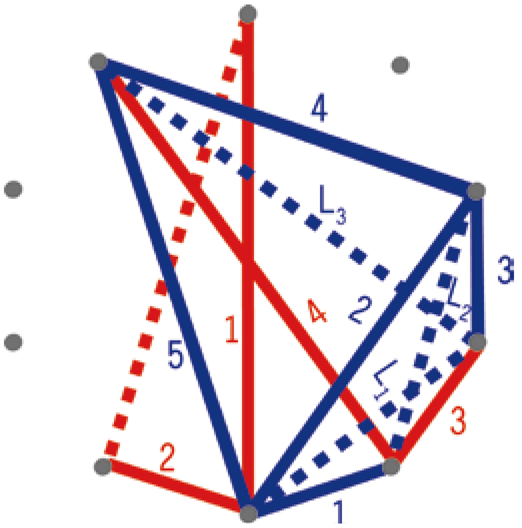
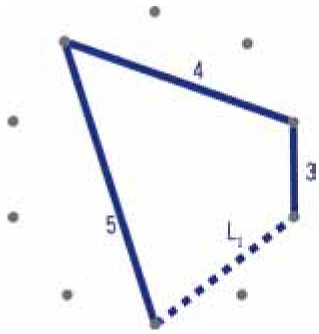


圖 (十八)

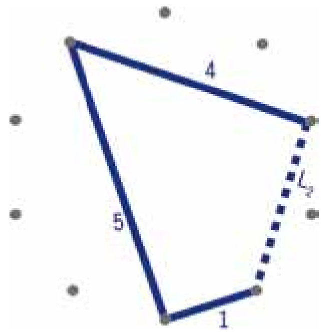
5. 甲第五步產生了三條藍色四邊形的潛在線，如圖(十九)及圖(α_{19})、圖(β_{19})、圖(γ_{19})。



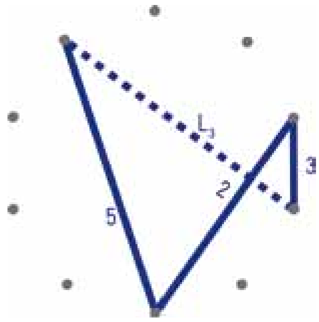
圖(十九)



圖(α_{19})



圖(β_{19})

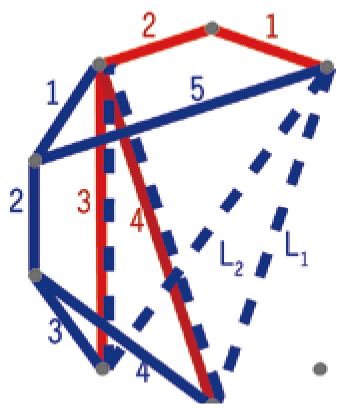


圖(γ_{19})

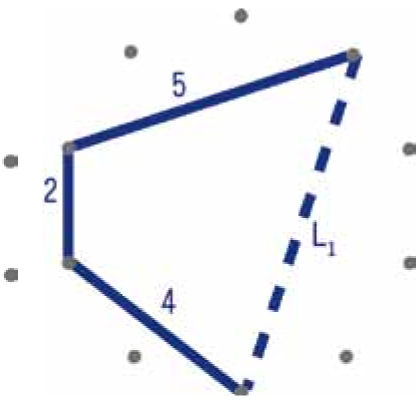
6. 乙第五步無法同時封閉這三條藍色四邊形的潛在線，所以甲第六步必能連出一個藍色四邊形，故甲必先勝。

(二) 甲 1 與乙 1 不相連

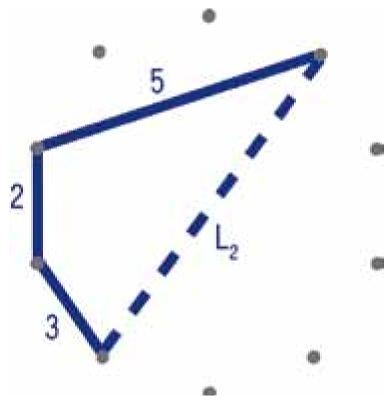
甲畫第 3、4 步各產生一條藍色潛在線，乙畫第 3、4 步皆封閉甲方，甲用最優勢畫法畫第 5 步，產生了二條潛在線，乙來不及封閉，故甲必勝。如圖（二十）及圖（α_{20}）、圖（β_{20}）。



圖（二十）



圖（α_{20}）



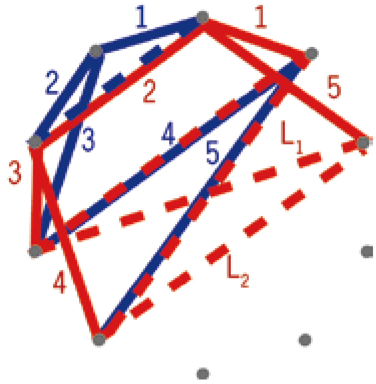
圖（β_{20}）

四、討論：

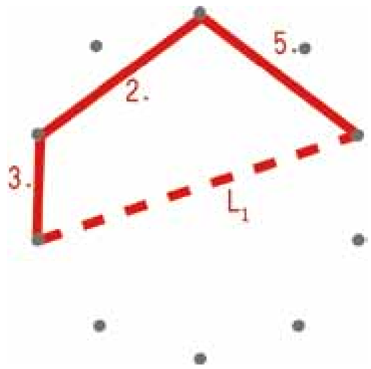
甲先連出二個藍色三角形為勝或乙先連出一個紅色四邊形為勝？

(一) 甲 1 與乙 1 相連

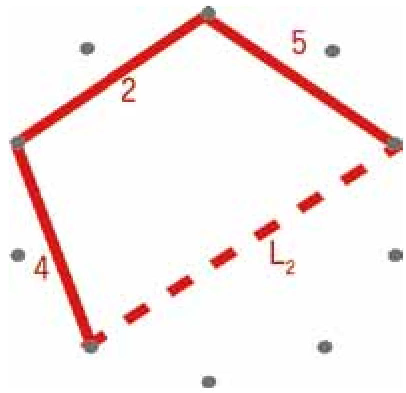
甲畫第 2、3 步，乙立刻畫第 2、3 步封閉甲產生的藍色三角形潛在線，順便產生了一條自己的紅色四邊形潛在線，甲 4 封閉，乙取得主控權，在第 5 步產生了二條潛在線，甲來不及封閉，故乙必勝。如圖（二十一）及圖（α_{21}）、圖（β_{21}）。



圖（二十一）



圖（α_{21}）

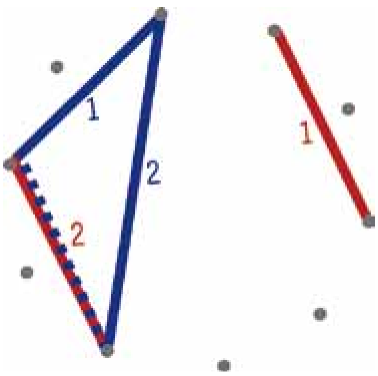


圖（β_{21}）

(二) 甲 1 與乙 1 不相連

1. 甲先畫藍色 1、2 線段，出現一條藍色三角形的潛在線

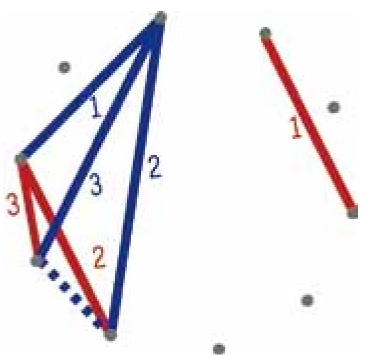
乙畫 1，再畫 2，立即封閉出現的藍色三角形潛在線，如圖（二十二）



圖（二十二）

2. 甲再以最優勢畫法畫 3，又出現了二條藍色三角形的潛在線

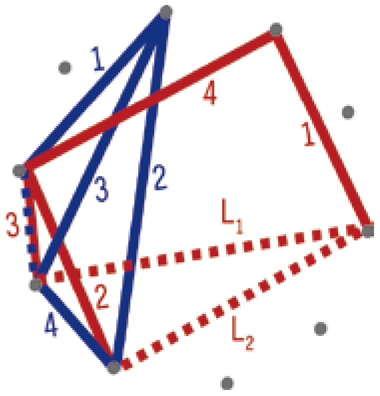
乙畫 3，封閉其中一條，如圖（二十三）



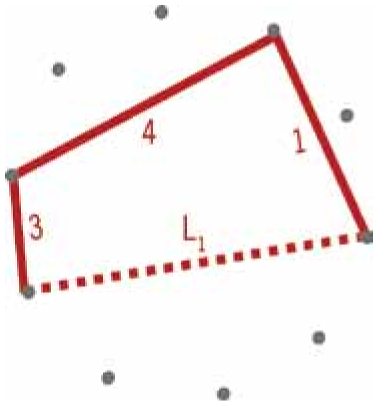
圖（二十三）

3. 甲畫 4，得到一個藍色三角形

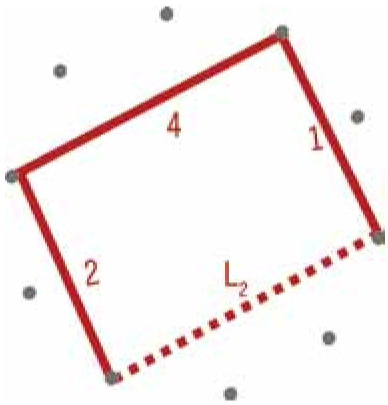
乙畫 4，出現了二條紅色四邊形的潛在線，甲第 5 步無法同時封閉此二條紅色四邊形的潛在線，故乙必勝。如圖（二十四）及圖（α_{24}）、圖（β_{24}）。



圖（二十四）



圖（α_{24}）



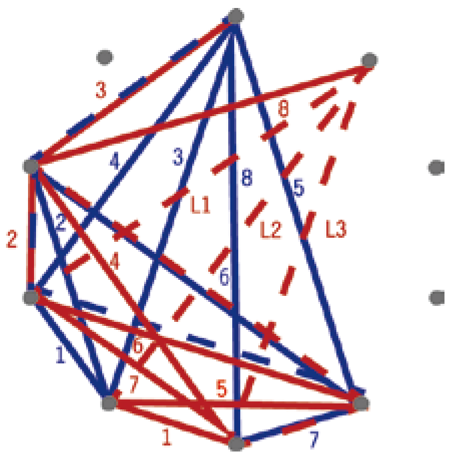
圖（β_{24}）

五、討論：

甲先連出三個藍色三角形為勝或乙先連出二個紅色四邊形為勝？

(一) 甲 1 與乙 1 相連

先畫的甲，一直逼迫乙封閉他的潛在線，但乙也同時產生自己的潛在線，甲第 6 步開始，雙方互相封閉對方，最後乙第 8 步搶先畫出三條潛在線，甲來不及封閉，故乙必勝。如圖（二十五）及圖 (α_{25})、圖 (β_{25})、圖 (γ_{25})、圖 (δ_{25})。



圖（二十五）

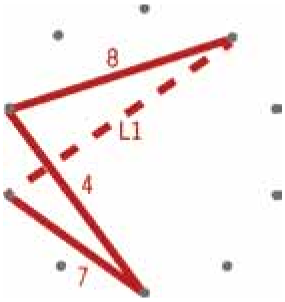


圖 (α_{25})

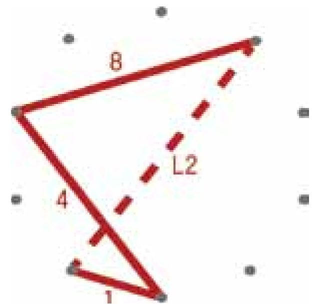


圖 (β_{25})

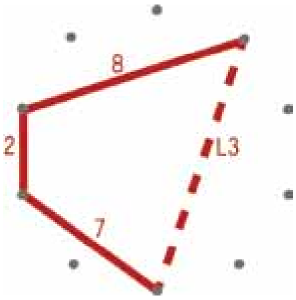


圖 (γ_{25})

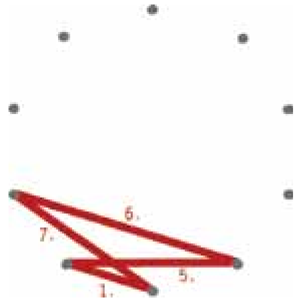
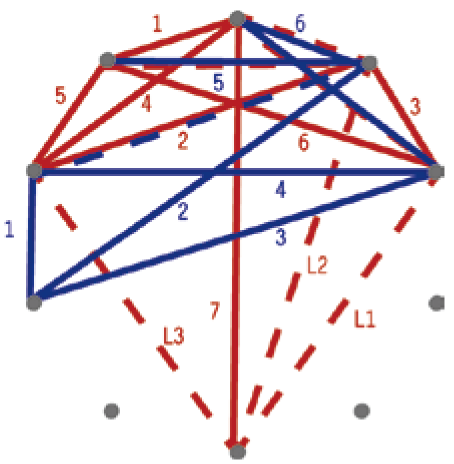


圖 (δ_{25})

(二) 甲 1 與乙 1 不相連

甲畫第 2、3 步，各產生一條潛在線，乙畫第 2、3 步皆封閉，甲第 4 步完成一個藍色三角形，乙第 4 步開始不斷逼迫甲封閉新增潛在線，乙第 7 步畫出了三條紅色四邊形潛在線，甲來不及封閉，故乙必勝。如圖（二十六）及圖 (α_{26})、圖 (β_{26})、圖 (γ_{26})、圖 (δ26)。



圖（二十六）

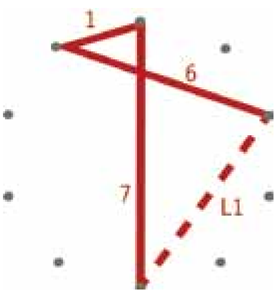


圖 (α_{26})

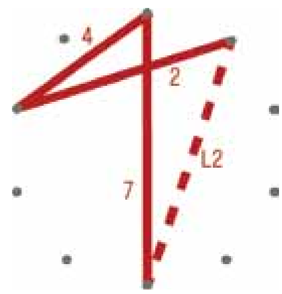


圖 (β_{26})

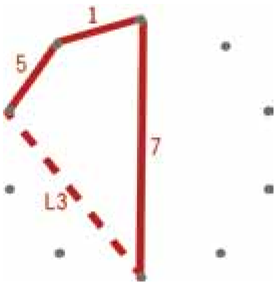


圖 (γ_{26})

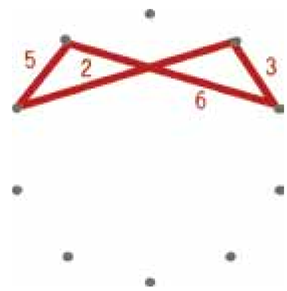


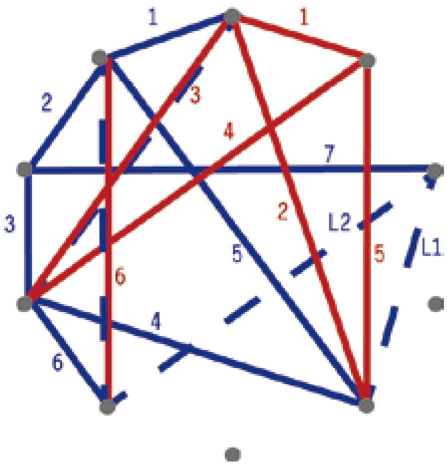
圖 (δ_{26})

六、討論：

甲先連出二個藍色四邊形為勝或乙先連出三個紅色三角形為勝？

(一) 甲 1 與乙 1 相連

乙畫第 2 步時產生了一條紅色三角形潛在線，但甲不須理會，畫第 3 步產生了一條自己的潛在線，乙第 3 步封閉此線並產生自己的潛在線，甲在封閉時又順便產生了自己的潛在線，逼迫乙去封閉，甲第 7 步產生了二條潛在線，乙來不及封閉，故甲必勝。如圖（二十七）及圖 (α_{27})、圖 (β_{27})、圖 (γ_{27})。



圖（二十七）

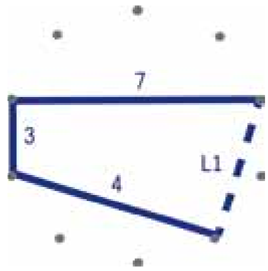


圖 (α_{27})

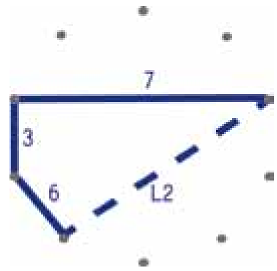


圖 (β_{27})

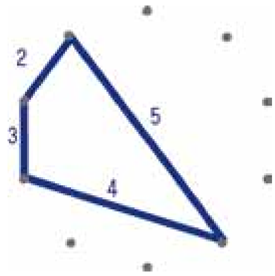
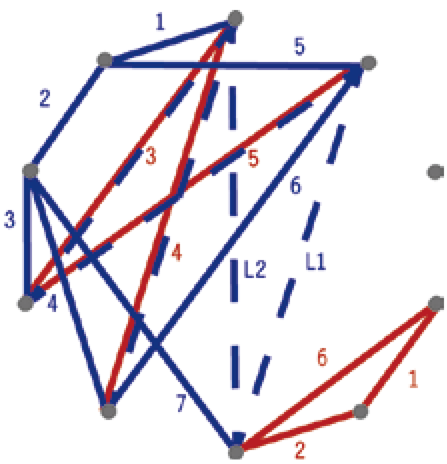


圖 (γ_{27})

(二) 甲 1 與乙 1 不相連

乙畫第 2 步時，甲不須理會，逕自畫第 3 步產生了一條潛在線，逼迫乙去封閉，甲接著以最優勢畫法畫出 4、5、6 步，產生了一個四邊形，在甲畫第 7 步時，產生了二條潛在線，乙來不及封閉，故甲必勝。如圖（二十八）及圖 (α_{28})、圖 (β_{28})、圖 (γ_{28})。



圖（二十八）

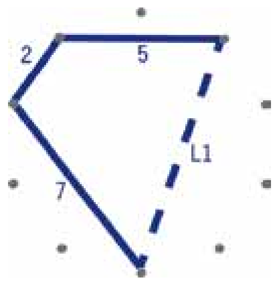


圖 (α_{28})

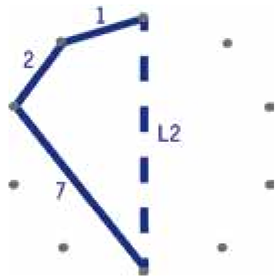


圖 (β_{28})

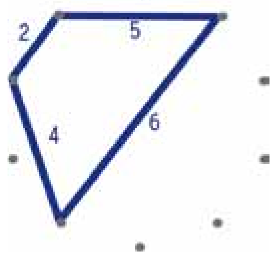


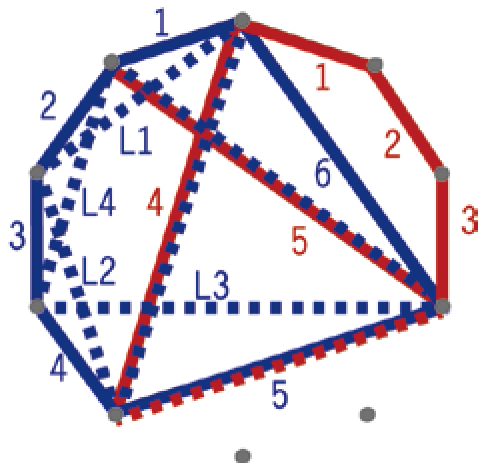
圖 (γ_{28})

七、討論：

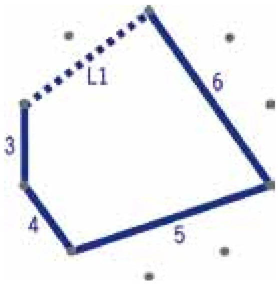
甲先連出一個藍色五邊形為勝或乙先連出一個紅色五邊形為勝？

(一) 甲 1 與乙 1 相連

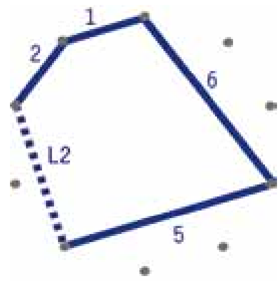
甲畫第 4、5 步時都各產生一條潛在線，乙第 4、5 步也跟著封閉，甲畫第 6 步時，產生了三條潛在線，故甲必勝。如圖（二十九）及圖(α_{29})、圖(β_{29})、圖(γ_{29})、圖(δ_{29})。



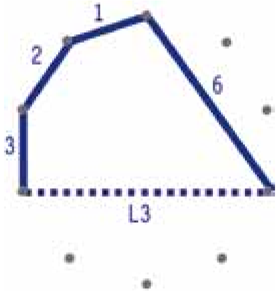
圖（二十九）



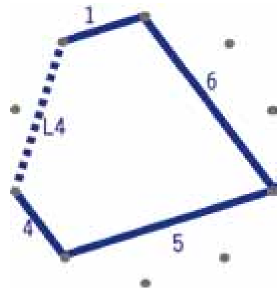
圖(α_{29})



圖(β_{29})



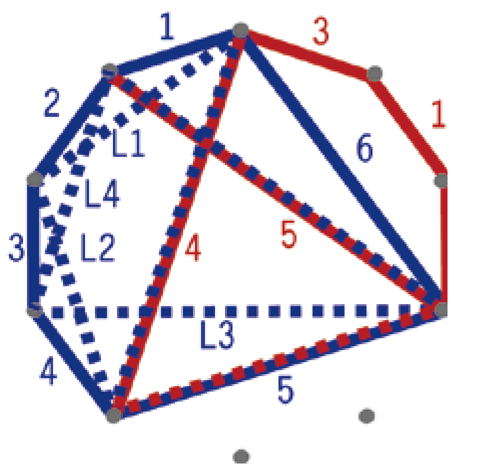
圖(γ_{29})



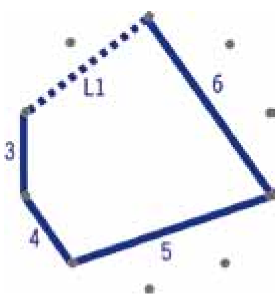
圖(δ_{29})

(二) 甲 1 與乙 1 不相連

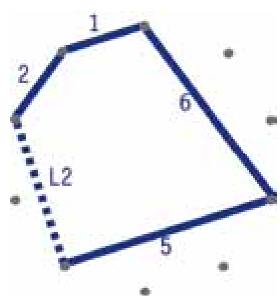
甲畫第 4、5 步時都各產生一條潛在線，乙第 4、5 步也跟著封閉，甲畫第 6 步時，產生了三條潛在線，故甲必勝，且出現和「甲 1 與乙 1 相連」同樣情形。如圖（三十）及圖(α_{30})、圖(β_{30})、圖(γ_{30})、圖(δ_{30})。



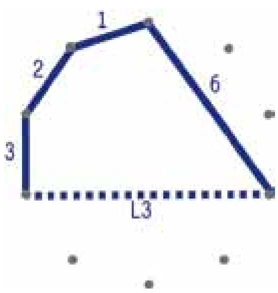
圖（三十）



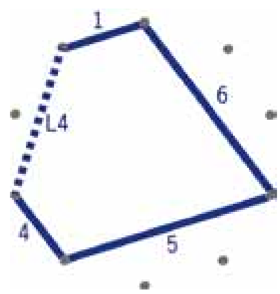
圖(α_{30})



圖(β_{30})



圖(γ_{30})



圖(δ_{30})

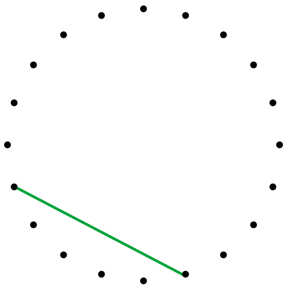
八、 討論

（一）探討畫 n 條線段能產生最多的單色三角形之潛在線數的規律性：

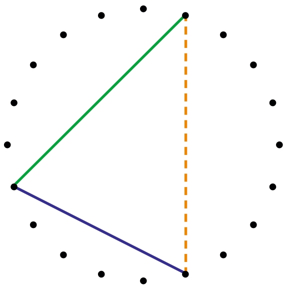
令 A(n) 表畫 n 條線段能產生最多的單色三角形之潛在線數

我們發現 $A(n) = C_2^n = \dfrac{n(n-1)}{2}$

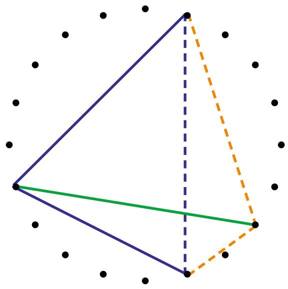
證明：



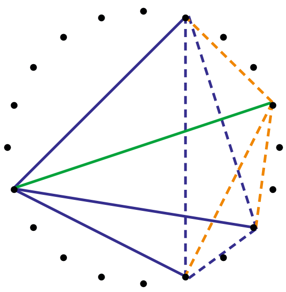
$A(1) = 0$



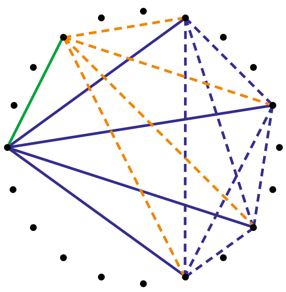
$A(2) = 1 = C_2^2$



$A(3) = 3 = C_2^3$



$A(4) = 6 = C_2^4$



$A(5) = 10 = C_2^5$

備註：綠色表該圖新增之線段。

橘色表因新增線段所產生的單色（紫色）三角形之潛在線數。

所以，$A(n) = C_2^n = \dfrac{n\cdot(n-1)}{2\cdot 1} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

（二）探討畫 n 條線段能產生最多的單色四邊形之潛在線數的規律性：

令 B(n) 表畫 n 條線段能產生最多的單色四邊形之潛在線數

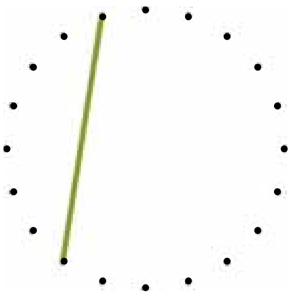
我們發現，當 $n = 3k，3k+1，3k+2$ 時，

得 $B(3k) = 3k^2 - 3$　　$k > 1$

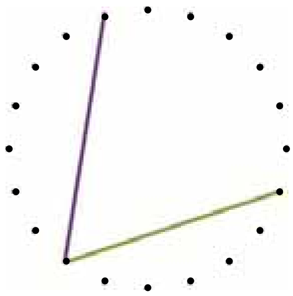
$B(3k+1) = 3k^2 + 2k - 3$　　$k > 0$　　$k \in N$

$B(3k+2) = 3k^2 + 4k - 2$　　$k > 0$

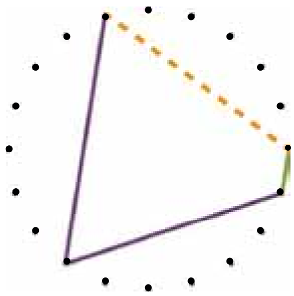
證明：



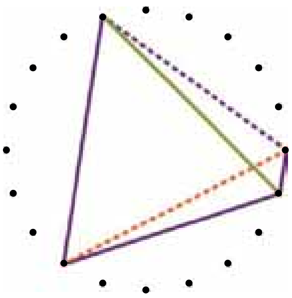
B (1) = 0



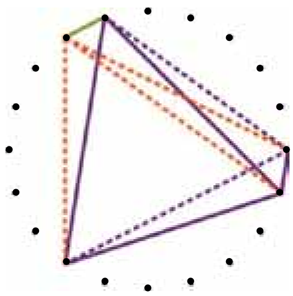
B (2) = 0



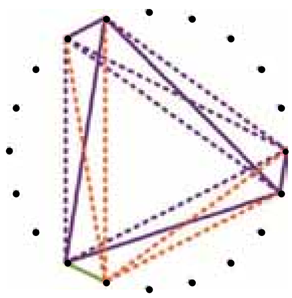
B (3) = 1



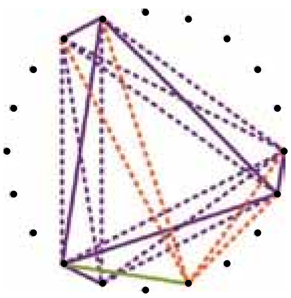
B (4) = 2



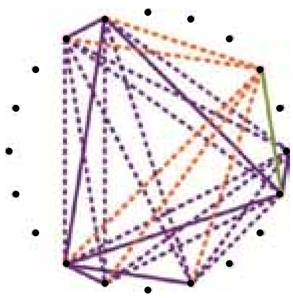
B (5) = 5



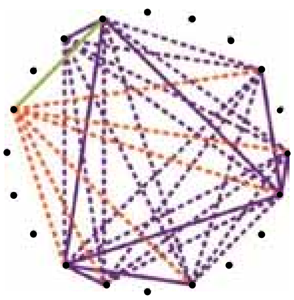
B (6) = 9



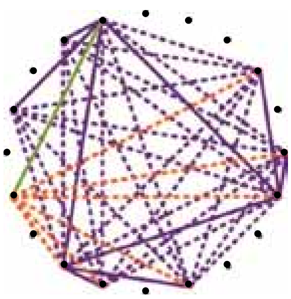
B (7) = 13



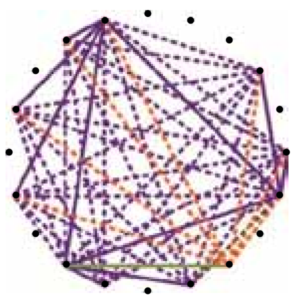
B (8) = 18



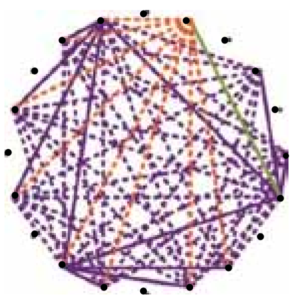
B (9) = 24



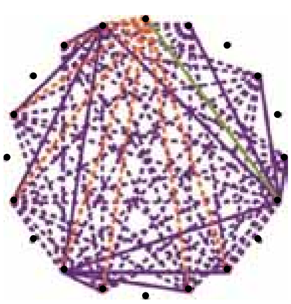
B (10) =30



B (11) = 37



B (12) = 45



B (13) = 53

備註：綠色表該圖新增之線段。

橘色表因新增線段所產生的單色（紫色）四邊形之潛在線數。

$F(n) = B(n) - B(n-1)$

$F(2) = B(2) - B(1) = 0$

$F(3) = B(3) - B(2) = 1$

$F(4) = B(4) - B(3) = 1$

$F(5) = B(5) - B(4) = 3$

$F(6) = B(6) - B(5) = 4$

$F(7) = B(7) - B(6) = 4$

$F(8) = B(8) - B(7) = 5$

$F(9) = B(9) - B(8) = 6$

$F(10) = B(10) - B(9) = 6$

$F(11) = B(11) - B(10) = 7$

$F(12) = B(12) - B(11) = 8$

$F(13) = B(13) - B(12) = 8$

$F(14) = B(14) - B(13) = 9$

………

我們觀察到 B (4) = 2 時，三條線圍成一個三角形，而以此三角形的 3 個頂點輪流連線，可產生最多的潛在線數。

我們進而發現，B(n) 之新增潛在線數即為此圖形頂點數 (n)，扣除新增線段頭尾 2 個頂點，及與新增線段共有同一頂點、但非中心三角形邊的線段之另一端頂點（因為從同一頂點連出，只會形成三角形，不會形成四邊形，故不予計算）。

如前所述，為產生最多的潛在線數，新增線段是按照中心三角形的 3 個頂點輪流連線，遞迴不斷，因此我們推論出與新增線段共有同一頂點、但非中心三角形邊數之公式為：

〔$\frac{n}{3}$〕－ 1（n 不能整除 3）　　有〔$\frac{n}{3}$〕－ 1 個頂點

$\frac{n}{3}$ － 2（n 能整除 3）　　有 $\frac{n}{3}$ － 2 個頂點

因此，B(n) 之新增潛在線數為：n －（〔$\frac{n}{3}$〕－ 1）－ 2（n 不能整除 3)

＝ n －〔$\frac{n}{3}$〕－ 1

或：n －（$\frac{n}{3}$－ 2）－ 2（n 能整除 3)

＝ n － $\frac{n}{3}$

$\therefore F(3k) = 3k - \dfrac{3k}{3} = 2k \qquad k>1$

$\therefore F(3k+1) = 3k+1-\left[\dfrac{3k+1}{3}\right]-1 = 3k-k = 2k \qquad k>1 \quad k\in N$

$\therefore F(3k+2) = 3k+2-\left[\dfrac{3k+2}{3}\right]-1 = 3k-k+1 = 2k+1 \quad k>0$

B(n) = B(n － 1) ＋ F(n)~ 公式 (α)

求 B(n) 之過程如下：

F(4) = B(4) － B(3)

F(5) = B(5) － B(4)

F(6) = B(6) － B(5)

：

：

F(3k － 2) = B(3k － 2) － B(3k － 3)

F(3k － 1) = B(3k － 1) － B(3k － 2)

＋ F(3k) = B(3k) － B(3k － 1)

F(4) ＋ F(5) ＋ F(6) ＋……＋ F(3k － 2) ＋ F(3k － 1) ＋ F(3k) ＝ B(3k) – B(3)

$$
\begin{aligned}
\therefore B(3k) &= B(3)+F(4)+F(5)+F(6)+\cdots+F(3k-2)+F(3k-1)+F(3k) \\
&= 1+(1+3+4)+\cdots+[2(k-2)+2(k-2)+1+2(k-1)]+[2(k-1)+2(k-1)+1+2k] \\
&= 9+\cdots+(6k-9)+(6k-3) \\
&= \sum_{n=2}^{k}(6n-3) \\
&= \sum_{n=2}^{k}(6n-3)+\sum_{n=1}^{1}(6n-3)-\sum_{n=1}^{1}(6n-3) \\
&= \sum_{n=1}^{k}(6n-3)-3 \\
&= 6\sum_{n=1}^{k}n-3k-3 \\
&= 6\frac{k(k+1)}{2}-3k-3 \\
&= 3k^2-3 \sim \text{公式}(\beta)
\end{aligned}
$$

由公式 (α)、公式 (β)

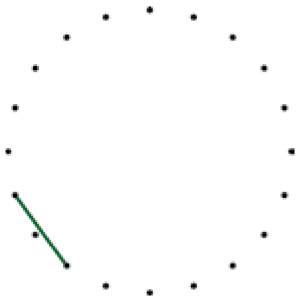
我們發現

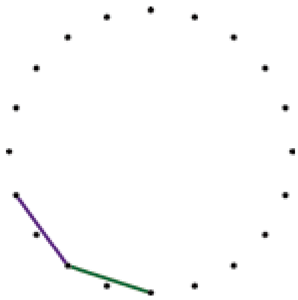
$$
\begin{aligned}
B(3k+1) &= B(3k)+F(3k+1) \\
&= 3k^2-3+2k \\
&= 3k^2+2k-3
\end{aligned}
$$

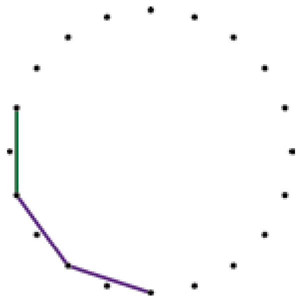
$$
\begin{aligned}
B(3k+2) &= B(3k+1) + F(3k+2) \\
&= 3k^2 + 2k - 3 + 2k + 1 \\
&= 3k^2 + 4k - 2
\end{aligned}
$$

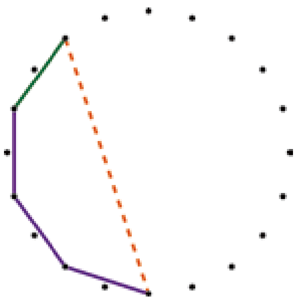
(三) 探討畫 n 條線段能產生最多的單色五邊形之潛在線數的規律性：

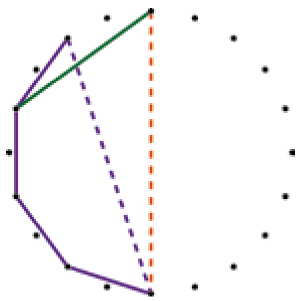
令 C(n) 表畫 n 條線段能產生最多的單色五邊形之潛在線數

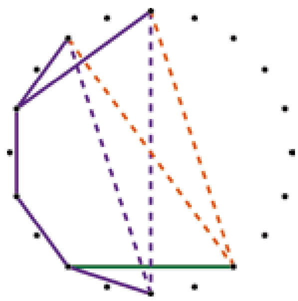

$C(1) = 0$

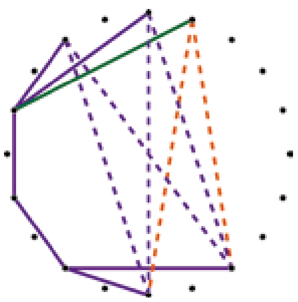

$C(2) = 0$

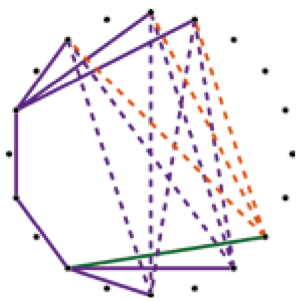

$C(3) = 0$

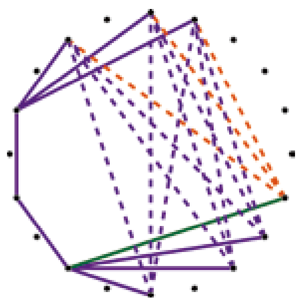

$C(4) = 1$

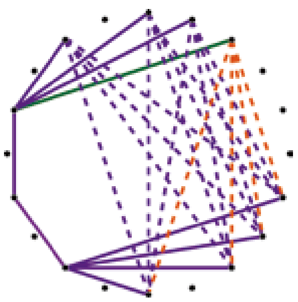

$C(5) = 2$


$C(6) = 4$


$C(7) = 6$


$C(8) = 9$


$C(9) = 12$


$C(10) = 16$

備註：綠色表該圖新增之線段。

橘色表因新增線段所產生的單色（紫色）五邊形之潛在線數。

令 $N = 5$, 推得 $C(n)$ 之公式如下：

當 $n < N - 1 \quad C(n) = 0$

$n \geqq N - 1$ 　令 $k \geqq 0$ 　k 為 0 或正整數

證明：

1. n 為偶數時

$$C(4) - C(2) = 1 \to 2\times 0 + 1$$
$$C(6) - C(4) = 3 \to 2\times 1 + 1$$
$$C(8) - C(6) = 5 \to 2\times 2 + 1$$
$$C(10) - C(8) = 7 \to 2\times 3 + 1$$
$$\vdots$$
$$+)\ C(2k + 4) - C(2k + 2) = 2k + 1$$

$$C(\underbrace{2k + 5 - 1}_{\downarrow\ N}) - C(2) = \frac{(2k+1+1)(k+1)}{2}$$

$$C(N + 2k - 1) = (k + 1)^2 = k^2 + 2k - 1$$

2. n 為奇數時

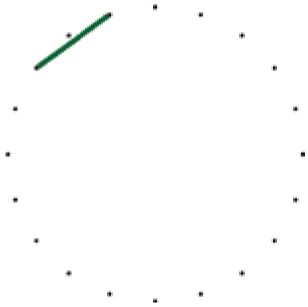
$$C(5) - C(3) = 2 \to 2\times 0 + 2$$
$$C(7) - C(5) = 4 \to 2\times 1 + 2$$
$$C(9) - C(7) = 6 \to 2\times 2 + 2$$
$$C(11) - C(9) = 8 \to 2\times 3 + 2$$
$$\vdots$$
$$+)\ C(2k + 5) - C(2k + 3) = 2k + 2$$

$$C(2k + \underbrace{5}_{\downarrow\ N}) - C(3) = 2 + 4 + 6\cdots\cdots 2k + 2$$

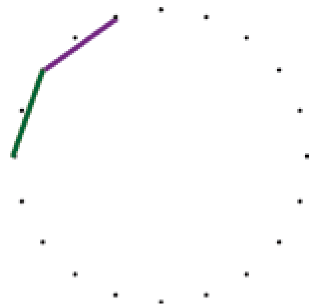
$$C(2k + N) = 2\,(1 + 2 + 3\cdots\cdots + k + 1)$$
$$= 2 \times \frac{(k+2)(k+1)}{2}$$
$$= k^2 + 3k + 2$$

(四) 探討畫 n 條線段能產生最多的單色六邊形之潛在線數的規律性：

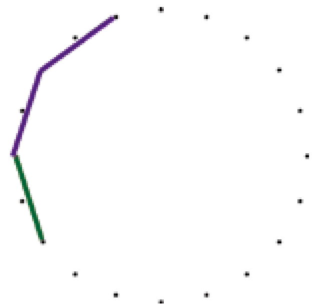
令 $D(n)$ 表畫 n 條線段能產生最多的單色六邊形之潛在線數



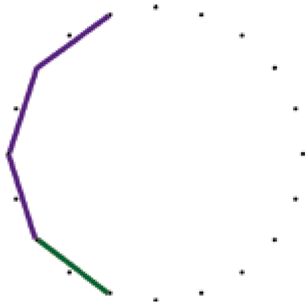
$D(1)=0$



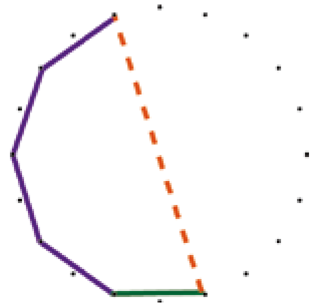
$D(2)=0$



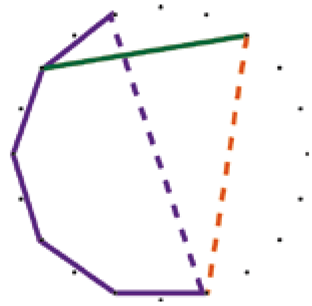
$D(3)=0$



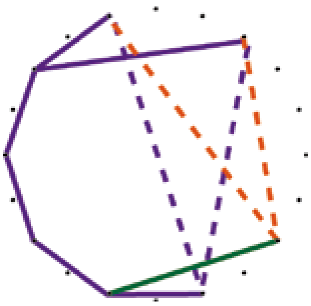
$D(4)=0$



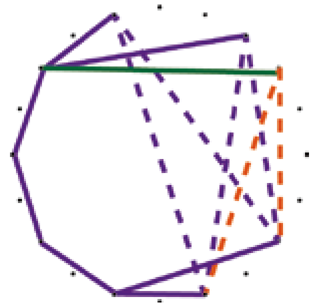
$D(5)=1$



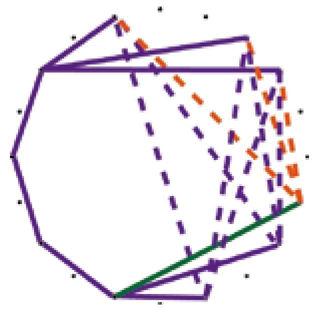
$D(6)=2$



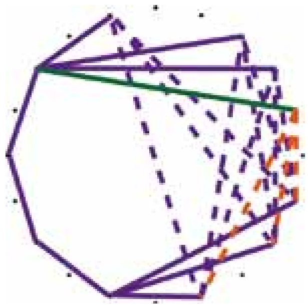
$D(7)=4$



$D(8)=6$



$D(9)=9$



$D(10)=12$

備註：綠色表該圖新增之線段。

橘色表因新增線段所產生的單色（紫色）六邊形之潛在線數。

令 $N=6$, 推得 $D(n)$ 之公式如下：

當 $n<N-1$　$D(n)=0$

$n \geqq N-1$　令 $k \geqq 0$　k 為 0 或正整數

證明 ：

1. n 為偶數時

$D(6)-D(4)=2 \rightarrow 2\times0+2$

$D(8)-D(6)=4 \rightarrow 2\times1+2$

$D(10)-D(8)=6 \rightarrow 2\times2+2$

:

:

$+)\ D(2k+6)-D(2k+4)=2k+2$

$D(2k+6)-D(4)=2+4+6+\cdots+2k+2$

$\downarrow$

N

$D(N+2k)=2(1+2+3+\cdots+k+1)$

$D(N+2k)=2\times\dfrac{(k+2)(k+1)}{2}$

$=k^2+3k+2$

2. n 為奇數時

$D(5)-D(3)=1 \rightarrow 2\times0+1$

$D(7)-D(5)=3 \rightarrow 2\times1+1$

$D(9)-D(7)=5 \rightarrow 2\times2+1$

:

:

$+)\ D(2k+5)-D(2k+3)=2k+1$

$D(2k+6-1)-D(3)=1+3+5+\cdots\cdots+2k+1$

$\downarrow$

N

$D(2k+N-1)=\dfrac{(2k+2)(k+1)}{2}$

$D(2k+N-1)=(k+1)^2=k^2+2k+1$

我們之後又畫了七邊形、八邊形、九邊形畫 n 條線段能產生最多的潛在線數，發現它們存在著遞迴關係，因此從 N － 1 條開始，皆遵循著 1、2、4、6、9、12……之規律，我們由此推導出 N ≧ 5 邊形之畫 n 條線段能產生最多的潛在線數公式：

1. $n<N-1$，$C(n)=0$

2. $n\geqq N-1$　令 $k\geqq 0$（k 為正整數或 0）

（1）$C(n)=C(N+2k-1)=k^2+2k+1$

（2）$C(n)=C(N+2k)=k^2+3k+2$

陸、結論

一、被指定不同圖形的雙方皆使用最優勢畫法且互相封閉時，得到以下結果：

甲指定的圖形	乙指定的圖形	雙方皆使用最優勢畫法且互相封閉時，具有必勝策略者	以潛在線數的多寡來作說明
一個藍色三角形	一個紅色三角形	甲	$C_2^3=3$　A(1)= 0　3 ＞ 0
一個藍色四邊形	一個紅色四邊形	甲	B(5)=5　B(2)= 0　5 ＞ 0
一個藍色四邊形	二個紅色三角形	甲	B(5)=5　$C_2^2=1$　5 ＞ 1
二個藍色三角形	一個紅色四邊形	乙	$C_2^3=3$（但 2 條已被乙封閉，實際只有 1 條）　B(4)= 2 1 ＜ 2
三個藍色三角形	二個紅色四邊形	乙	$C_2^4=6$（但有 4 條被乙封閉） B(6)= 9（但有 6 條被甲封閉） 2 ＜ 3
二個藍色四邊形	三個紅色三角形	甲	B(6)=9（但有 3 條被乙封閉） $C_2^2=1$　6 ＞ 1
一個藍色五邊形	一個紅色五邊形	甲	C(6) ＝ 4　C(3) ＝ 0　4 ＞ 0

二、畫 n 條線段能產生最多的單色 n 邊形之潛在線數的規律性：

（一）N ＝ 3 邊形之畫 n 條線段能產生最多的單色三角形之潛在線數公式為：

$$A(n) = C_2^n = \frac{n(n-1)}{2}$$

（二）N ＝ 4 邊形畫 n 條線段能產生最多的單色四邊形之潛在線數公式為：

n ＝ 3k，3k ＋ 1，3k ＋ 2 時，

$B(3k) = 3k^2 - 3 \quad k > 1$

$B(3k+1) = 3k^2 + 2k - 3 \quad k > 0 \quad k \in N$

$B(3k+2) = 3k^2 + 4k - 2 \quad k > 0$

（三）N ≧ 5 邊形之畫 n 條線段能產生最多的潛在線數公式為：

1. $n < N - 1$，$C(n) = 0$
2. $n \geqq N - 1$　令 $k \geqq 0$（k 為正整數或 0）

（1）$C(n) = C(N + 2k - 1) = k^2 + 2k + 1$

（2）$C(n) = C(N + 2k) = k^2 + 3k + 2$

三、當甲畫單色 n 邊形，乙畫單色 n 邊形，雙方皆使用最優勢畫法，因甲先畫具有主控性，能較不受拘束地產生自己的潛在線，甲必勝，但當雙方畫不同邊形或較為複雜的狀況時，乙也有機會獲勝。

四、當凸 n 邊形的點數達一定程度後，甲乙雙方皆使用最優勢畫法時，是否從同一出發點連線，結果不受影響。

五、最優勢畫法為：

（一）使同色線段相連接於同一點。

（二）把對方線段阻隔在分散的地方。

（三）儘量讓自己的線段集中，較具有優勢。

（四）使同色線段連成封閉的多邊形，可產生最多的潛在線數。

柒、未來發展：

一、我們已證明了乙先連出一個紅色四邊形，必贏甲連二個藍色三角形，如果條件改為甲畫 a 個四邊形，乙畫 b 個三角形，若甲必勝，則 a、b 之關係為何呢？

二、未來我們也將探討甲畫 a 個藍色 n 邊形、乙畫 b 個紅色 m 邊形之輸贏，且其中 a、b、n、m 之關係為何？

三、如果再加入一位玩家，更讓人覺得很有挑戰性，所以我們也希望能再朝多色連線去研究。

捌、參考資料：

一、江世真等（2011）。翰林版國中數學課本第二冊。臺南市：翰林。

二、李明芳等（2011）。翰林版國中數學課本第四冊。臺南市：翰林。

三、繆友勇等（2011）。翰林版高中數學課本第二冊。臺南市：翰林。

四、張鎮華（2004）。幸福結局問題 --- 鴿籠原理與拉姆西定理。**數學傳播期刊**，28（2），28-42。

【評語】030401

1. 作者顯然費許多心力在這件作品上使得看似平淡無奇的問題有了不錯的深度。

2. 潛在線是整個問題的核心,應先加以介紹,遲至第 8 頁才出現,而第 5 頁、第 6 頁中已出現潛在線。

3. 這一類問題最大的困難是連線的方法數太多,如何善加分類,証明所立的結論已經涵蓋所有的可能,不要讓人有所疑惑,部分的証明應更加詳細,例如鴿籠原理的說明及應用 A(n)、B(n)、C(n)等等如何推導。