

# 中華民國第 52 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

國中組 物理科

佳作

030114

疊疊高升—骰子爬升的因素探討

學校名稱：臺北市立石牌國民中學

作者： 國二 陳鎮宇	指導老師： 辜志成 黃泰日
---------------	---------------------

關鍵詞：向心力、摩擦力、轉速

# 疊疊高升—骰子爬升的因素探討

## 摘 要

這項研究是延續國小時參加全國科展作品「『粒粒』皆辛苦」的創作，不僅將成功疊出骰子塔的步驟簡化，更進一步的探討出疊成骰子塔的順序性，並藉由實際教導同學，記錄每一位初學者對於學習疊出骰子塔技巧的過程，也做為我研究的分析數據。

為了更客觀的探究骰子爬升及堆疊的物理原理，我設計並製作一部可調整轉速的儀器，精準探討轉速（或頻率）與杯子傾斜角度、旋轉半徑、骰子顆數、骰子質量以及摩擦力有何關聯性。進而算出摩擦係數，合理解釋了骰子爬升與下滑所需的轉速與理論值之間的差異，更推導出利用摩擦力修正後的轉速，可準確求得骰子在不同傾斜角度、旋轉半徑下爬升或下滑的轉速，讓「賭神」的祕技重新賦予科學的生命。

## 壹、研究動機

最近，報紙上又傳出破金氏世界紀錄的消息。大陸福建秦皇島有位骰子塔王，可以徒手用細細長長的管子，將三十三顆骰子疊起來，打破了三十二顆骰子的紀錄！

從小，我就看過電影中「賭神」表演此項技巧，對於這種如藝術般疊骰子塔的方法，讓我深感著迷。我認為此與圓周運動的向心力有關，想藉由這次研究，找出疊骰子塔的方法，並設計儀器來模擬疊出骰子塔的整個過程，找出其所運用的科學原理。

## 貳、研究目的

### A. 根據個人實作經驗與體會，設計以下方法探討是否普遍適用於一般人：

- 一、找出最有效的方法在三十秒內成功疊出骰子塔。
- 二、以五分鐘為目標教會初學者疊出骰子塔。
- 三、研究杯子滑行角度是否影響受測者疊出骰子塔。
- 四、研究收骰子的順序是否影響疊出骰子塔的順序性。

### B. 建立理論模型，假設骰子爬升（或下滑）的原因，是由於手搖晃杯子時，造成之離心力與重力的互相抗衡而引起，從而設計以下實驗步驟，一一探討各個變因：

- 五、探討骰子爬升（或下滑）時，轉速與杯子傾斜角度的關係。
- 六、探討骰子爬升（或下滑）時，轉速與旋轉半徑的關係。
- 七、探討骰子爬升（或下滑）時，轉速與骰子顆數的關係。
- 八、探討骰子爬升（或下滑）時，轉速與骰子質量的關係。
- 九、探討骰子爬升（或下滑）時，轉動頻率與半徑的關係。
- 十、探討摩擦力對骰子爬升（或下滑）的影響。

## 參、研究設備及器材

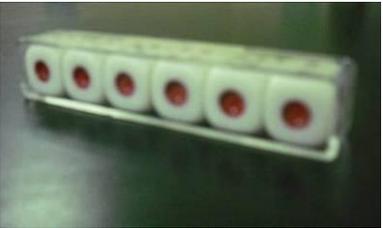
### 一、工具：

#### (一) 骰子：

1. 邊長為 0.93 公分、2.08 公分（標示為 A、B、C、E 四種）的骰子，以下稱為小骰子、大骰子。如圖 1、2。
2. 邊長為 1.42 公分的骰子，教學用。如圖 3。
3. 用木條、鋁塊自製邊長為 1.8 公分的骰子，以下稱為木製骰子、塑膠製骰子、鋁製骰子。如圖 4、5、6。

#### (二) 杯子：

1. 杯口直徑 7.25 公分、高度 10.39 公分的杯子，實驗用。如圖 7。
2. 杯口直徑 6.34 公分、高度 8.66 公分的杯子，教學用。如圖 8。

		
圖 1 小骰子	圖 2 大骰子	圖 3 教學用骰子
		
圖 4 木製骰子	圖 5 塑膠製骰子	圖 6 鋁製骰子
		
圖 7 實驗用杯子	圖 8 教學用杯子	

(三) 儀器製作所需工具：

手拉坏機器、測速顯示器、感應器、強力磁鐵、木板、杯子、鑽孔機、C 型夾、螺絲釘、螺絲帽、L 型固定片、連接型固定片、測量角度儀器（量角器、棉繩、銅球）、傾斜儀。



圖 9 L 型固定片、連接型固定片



圖 10 杯子



圖 11 C 型夾



圖 12 測速顯示器、感應器、強力磁鐵

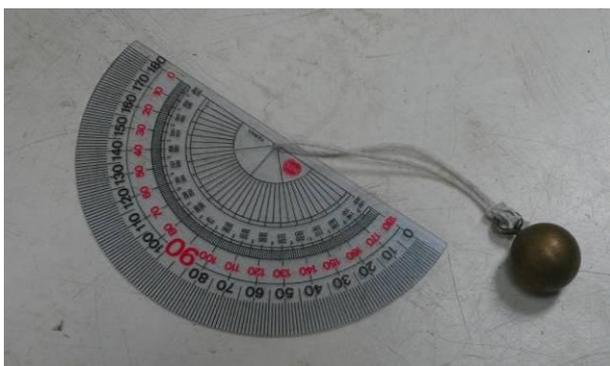


圖 13 測量角度儀器



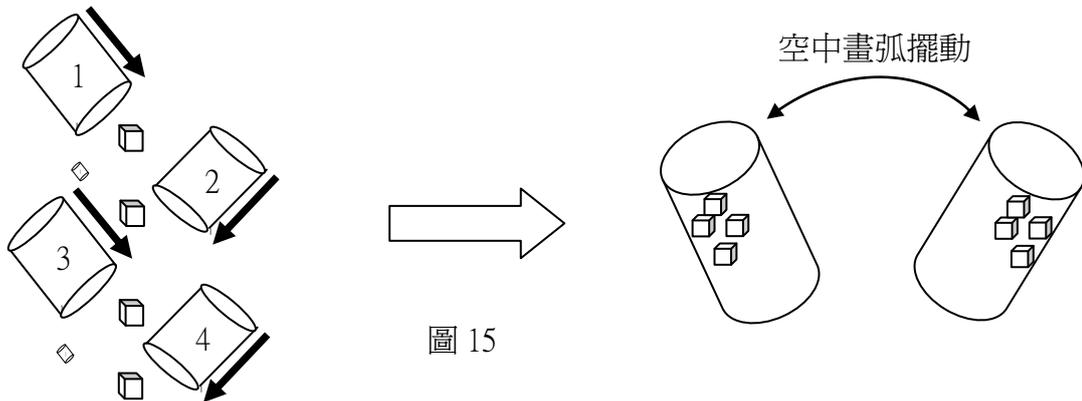
圖 14 傾斜儀

## 肆、研究過程或方法

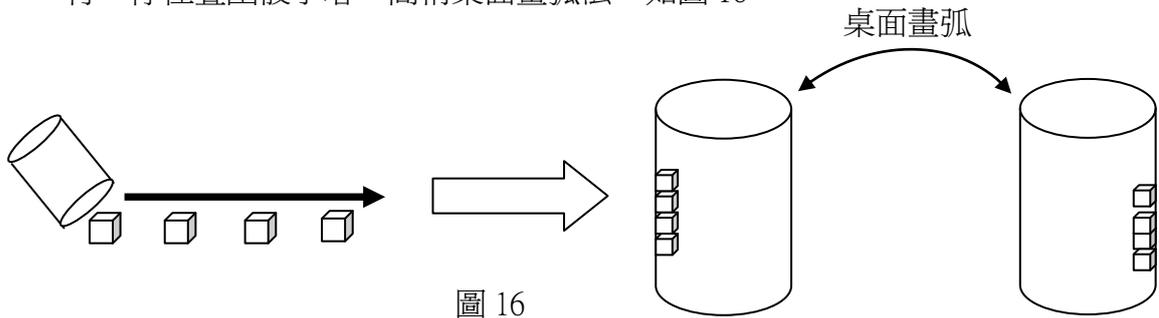
### 一、疊出骰子塔：

#### (一) 學習如何疊出骰子塔

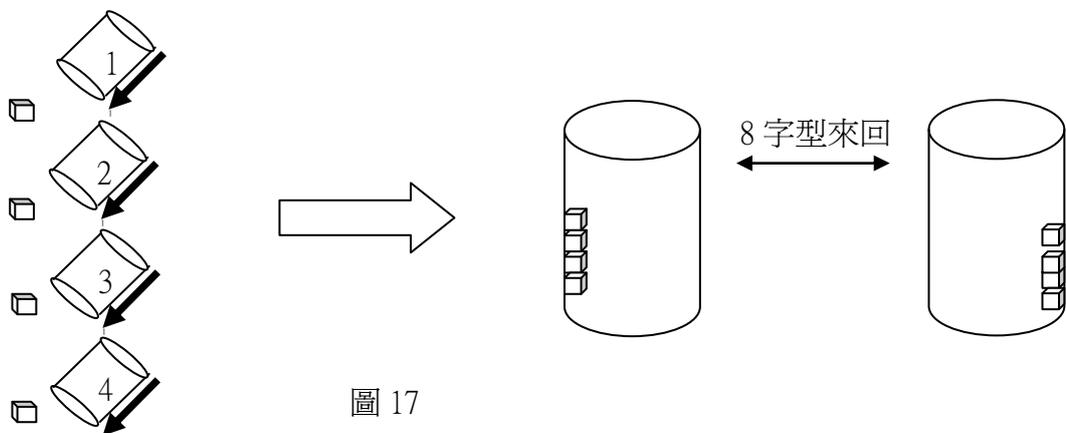
1. 研究全國科展資料「『粒粒』皆辛苦」以及網路上的 youtube 影片。
2. 我研究出三種疊出骰子塔的方法，並比較此三種方法的成功率，由以下圖例說明。
  - (1)將骰子排成一直排，藉由蛇行般的收骰子後，在空中進行畫弧的方式擺動，最後在桌面上滑行時，停住疊出骰子塔，簡稱蛇形擺動法，如圖 15。



- (2)將骰子排成一橫排，一次將所有骰子收進杯子後，直接在桌面上以畫弧的方式滑行，停住疊出骰子塔，簡稱桌面畫弧法，如圖 16。



- (3)將骰子排成一直排，每次以同方向收完骰子後，直接在桌面上以八字型的方式來回滑行，停柱疊出骰子塔，簡稱八字來回法，如圖 17。



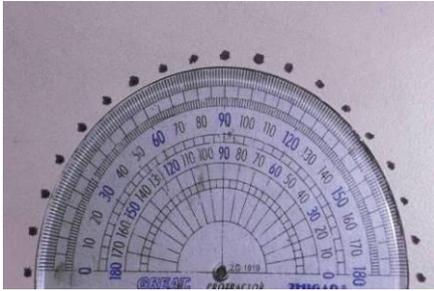
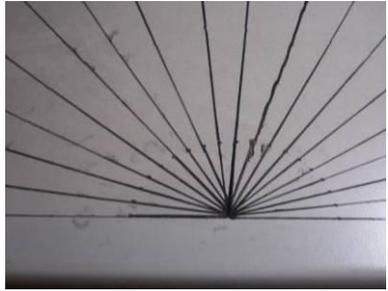
(二) 教導初學者疊出骰子塔

1. 請初學者分別嘗試三種疊出骰子塔的方法。
2. 當初學者以兩顆骰子兩次疊出骰子塔後，停止計時。

(三) 研究杯子滑行圓弧角是否影響受測者疊出骰子塔

1. 準備好實驗桌面：

- (1)先在桌面上標示一個中心點。如圖 18。
- (2)使用量角器，以中心點為中心，每十度標示一個點，共 19 個點。如圖 19。
- (3)使用長尺，以中心點連結每個點，畫出長 30 公分的直線。如圖 20。
- (4)使用繩子與鉛筆，將每一條線連接起來，畫出一個半徑為 30 公分的半圓弧線。如圖 21、圖 22。
- (5)再用麥克筆將鉛筆線描一次。如圖 23。

		
圖 18 標示中心點	圖 19 以量角器畫 19 個點	圖 20 畫出長 30 公分的線
		
圖 21 繩子、鉛筆、麥克筆	圖 22 鉛筆畫線	圖 23 麥克筆畫線

2. 記錄受測者在桌面畫弧法中，分別滑行各種角度，成功疊出骰子塔的時間，無法疊出骰子塔以 X 表示。

(四) 研究收骰子的順序是否影響疊出骰子塔的順序性

1. 設計實驗過程：

- (1)以計時器計時，先實驗十分鐘，並記錄實驗結果。
- (2)以計時器計時，休息五分鐘。
- (3)以計時器計時，再實驗十分鐘，並記錄實驗結果。

2. 定義實驗結果紀錄：

- (1)A→B 表示骰子 A 在骰子塔上方；B 在骰子塔下方。
- (2)A→B→C 表示骰子塔的骰子由上到下排序為 A、B、C。
- (3)A→B→C→E 表示骰子塔的骰子由上到下排序為 A、B、C、E，圖 24。

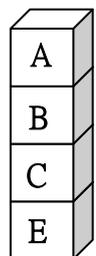


圖 24

## 二、儀器設計與製作

(一)將木板用鑽孔機鑽孔，如圖 25。

(二)用燒紅的鑽子在杯子適當的高度鑽兩個孔，如圖 26。

(三)將 L 型固定片、連接型固定片和杯子用螺絲釘、螺絲帽固定在木板上，如圖 27。

(四)將連接杯子的木板用兩個 C 型夾固定在手拉坯機器的轉盤上，並將強力磁鐵垂直固定在 C 型夾下緣，調整強力磁鐵與感應器的距離在 0.5 公分內，如圖 28。

(五)調整杯子的傾斜角度，並用自製傾斜儀測量之，如圖 29。

(六)將相機固定在另一塊木板上，用兩個 C 型夾將木板固定在轉盤的另一側，並將測速顯示器固定在杯子附近，以能拍攝清晰及安全為原則。如圖 30。



圖 25 木板鑽孔



圖 26 杯子鑽孔



圖 27 固定杯子在木板上



圖 28 固定感應器、強力磁鐵



圖 29 測量杯子傾斜角度



圖 30 固定相機、測速顯示器

### 三、測速感應器使用方法

#### (一) 原理說明：

此測速器是從爸爸的自行車拆下來使用的，測速顯示器要輸入輪框周長，藉由強力磁鐵和感應器作感應，即可從測速顯示器上得知自己的行車速度。

#### (二) 將測速器安裝在儀器上：

1. 測量杯緣處的旋轉半徑（以 20 公分為例），如圖 31。
2. 算出圓周長= $2 \times 3.14 \times 20 = 125.6$  公分。
3. 以螺絲起子的尖端按一下測速顯示器背面的 AC 鈕，開啓設定，如圖 32。
4. 利用測速顯示器正面左、右兩側按鈕，輸入圓周長為 1256 毫米（以毫米為單位），如圖 33。
5. 以螺絲起子的尖端按一下測速顯示器背面的 SET 鈕，完成設定，如圖 34。



圖 31 半徑長度 20 公分



圖 32 按一下右側的 AC 鈕



圖 33 輸入 1256 毫米



圖 34 按一下左側的 SET 鈕

### 四、探討不同因素對骰子爬升（或下滑）的影響

- (一)分別改變杯子的傾斜角度、旋轉半徑、骰子顆數或骰子質量等變因。
- (二)啓動電源，慢慢增加轉速，當骰子向上爬升時，記錄此轉速。
- (三)當骰子在杯子頂部時，再慢慢降低轉速，至骰子下滑時，記錄此轉速。
- (四)探討轉速與傾斜角度、旋轉半徑、骰子顆數或骰子質量等變因的關係。
- (五)將轉速換算為頻率，並探討頻率與旋轉半徑的關係。
- (六)分析摩擦力對骰子爬升（或下滑）造成的影響，並算出摩擦係數。
- (七)精準推導出骰子爬升（或下滑）時所需的轉速。

## 伍、研究結果

### 一、找出最有效的方法在三十秒內成功疊出骰子塔

我比較了三種疊出骰子塔的方法，進行多次實驗，找出成功率最高的方法，如表 1 所示：

表 1

實驗方法	實驗過程	成功次數	失敗次數	成功率
方法一：蛇行擺動法		25	37	40.3%
方法二：桌面畫弧法		74	11	87.1%
方法三：八字來回法		89	62	58.9%

(一)由表 1 可得知：

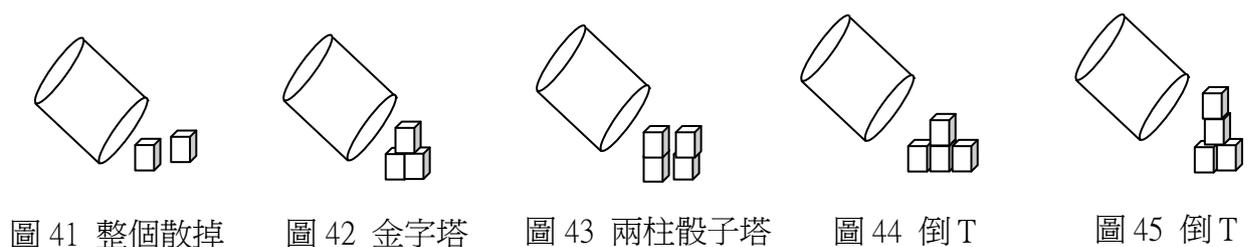
方法二，桌面畫弧法為成功率最高的方法，最容易疊出骰子塔。

(二)進行桌面畫弧法時，應注意下列事項（請參考圖 35～圖 40）

- 1.拿杯子時，拇指和中指、無名指、小拇指分別握住杯身的兩側，並將食指扣在杯底。
- 2.杯子進行滑行時，要稍微打開杯口內側，這樣骰子較容易爬升，疊出骰子塔。



(三)失敗的骰子塔示意圖（請參考圖 41～圖 45）



## 二、以五分鐘為目標教會初學者疊出骰子塔

爲了了解桌面畫弧法是不是真的非常容易疊出骰子塔，因此我請了一些初學者來做實驗以我所研究出的三種方式疊出骰子塔，並紀錄疊出骰子塔所花的時間，如表 2 所示：

表 2

初學者	完成時間(秒)		
	方法一：蛇行擺動法	方法二：桌面畫弧法	方法三：八字來回法
陳※宇	293 秒	245 秒	347 秒
汪※緯	308 秒	193 秒	259 秒
郭※興	355 秒	261 秒	317 秒
陳※宏	291 秒	238 秒	325 秒
王◎瑜	287 秒	225 秒	301 秒
吳◎琪	349 秒	268 秒	284 秒
曹◎媛	431 秒	250 秒	342 秒

由表 2 可以得知

1. 對於所有初學者來講，使用桌面畫弧法最容易疊出骰子塔。
2. 所有初學者皆有辦法在五分鐘內，以桌面畫弧法成功疊出骰子塔。

### 三、研究杯子滑行角度是否影響受測者疊出骰子塔

此為受測者使用桌面畫弧法，以不同的滑行角度疊出骰子塔，來由實驗結果可以發現，杯子的滑行角度會影響到受測者疊出骰子塔，以下由表 3 說明：

表 3

受測者	不同滑行角度下的完成時間（秒）									習慣角度
	20 度	40 度	60 度	80 度	100 度	120 度	140 度	160 度	180 度	
陳※宇	X	X	X	X	27 秒	12 秒	9 秒	22 秒	16 秒	130 度
馬※哲	X	X	X	58 秒	14 秒	11 秒	41 秒	9 秒	12 秒	160 度
王◎瑜	X	X	X	41 秒	13 秒	7 秒	10 秒	9 秒	42 秒	130 度
吳◎琪	X	X	X	69 秒	21 秒	9 秒	17 秒	15 秒	23 秒	120 度
曹◎媛	X	X	X	X	41 秒	37 秒	29 秒	16 秒	11 秒	170 度

由表 3 可以得知：

1. 滑行角度越小，越難成功疊出骰子塔，圓弧 60 度角以下皆無法疊出骰子塔。
2. 受測者的習慣滑行角度皆大於圓弧角 90 度角，滑行角度較大，有利於骰子更容易疊成骰子塔。

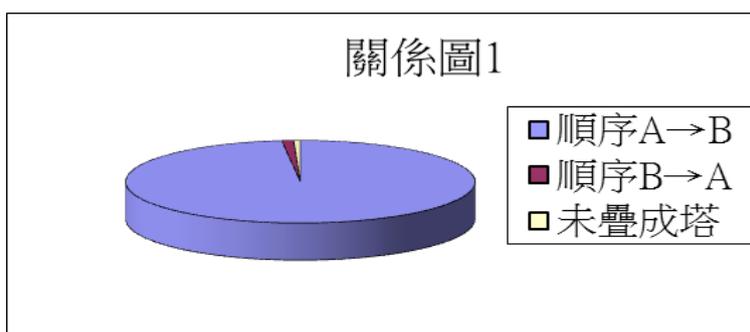
### 四、研究收骰子的順序是否影響疊出骰子塔的順序性

(一)大顆骰子兩顆（骰子 A 先進入杯口，再收骰子 B）（表 4、關係圖 1）

表 4

實驗過程 疊塔情況	第一輪次數	第二輪次數	總計次數	百分率
A→B	168 次	184 次	352 次	98.3%
B→A	3 次	1 次	4 次	1.1%
未疊出骰子塔	1 次	1 次	2 次	0.6%

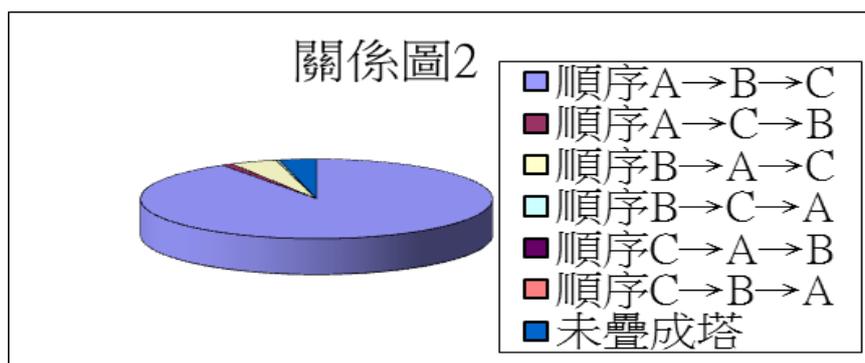
（※註：A→B 表示由上而下的順序，也就是骰子 A 在上方，骰子 B 在下方。）



(二)大顆骰子三顆（骰子 A 先進入杯口、再收骰子 B，最後收骰子 C）（表 5、關係圖 2）

表 5

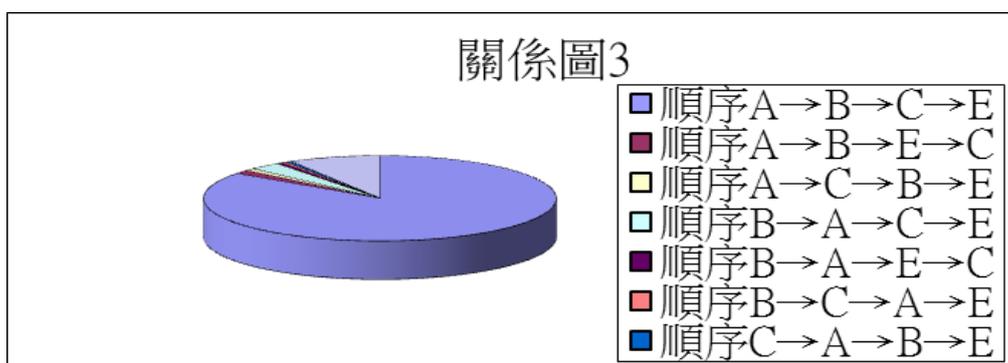
實驗過程 疊塔情況	第一輪次數	第二輪次數	總計次數	百分率
A→B→C	117 次	136 次	253 次	91.0%
其他結果	6 次	10 次	16 次	5.6%
未疊出骰子塔	5 次	4 次	9 次	3.4%



(三)大顆骰子四顆（骰子 A 先進入杯口、依序收骰子 B、C、E）（表 6、關係圖 3）

表 6

實驗過程 疊塔情況	第一輪次數	第二輪次數	總計次數	百分率
A→B→C→E	78 次	96 次	174 次	84.9%
其他結果	7 次	7 次	14 次	6.7%
未疊出骰子塔	10 次	7 次	17 次	8.4%



由以上的表格、關係圖可得知：

先收的骰子會在骰子塔的上方；後收的骰子會在骰子塔的下方。

## 五、探討骰子爬升（或下滑）時，轉速與杯子傾斜角度的關係

(一) 測量骰子爬升與下滑時的轉動速率（如表 7、表 8）

1. 我將儀器旋轉的速度慢慢增加，當骰子開始爬升時，記錄此轉速，下表為三次實驗求取平均值的實驗結果。

表 7

轉速 (m/sec) 半徑 (cm) 角度 (度)	30 公分 骰子爬升	25 公分 骰子爬升	20 公分 骰子爬升	15 公分 骰子爬升
55 度	2.53	2.42	2.03	1.81
60 度	2.89	2.78	2.42	2.17
65 度	3.33	3.11	2.83	2.56
70 度	4.14	3.75	3.50	3.14
75 度	5.47	5.22	5.00	4.44

2. 骰子全部上升到杯子頂部後，我再將儀器的旋轉速度調小，直到骰子下滑時，記錄此轉速，下表為三次實驗求取平均值的實驗結果。

表 8

轉速 (m/sec) 半徑 (cm) 角度 (度)	30 公分 骰子下滑	25 公分 骰子下滑	20 公分 骰子下滑	15 公分 骰子下滑
55 度	1.89	1.72	1.58	1.44
60 度	2.01	1.81	1.68	1.53
65 度	2.09	1.95	1.83	1.58
70 度	2.25	2.08	1.99	1.75
75 度	2.46	2.32	2.13	1.92

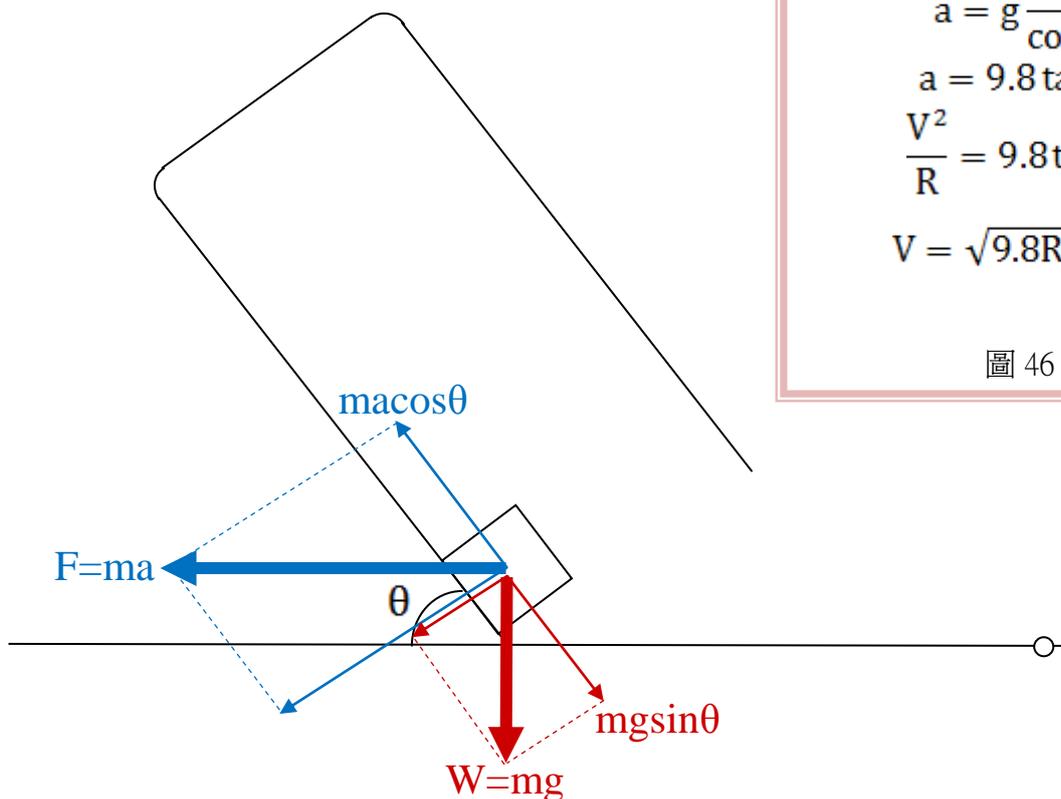
(二) 推導骰子爬升（或下滑）時，所需轉動速率的理論值

1. 骰子受力示意圖如下，以及轉動速率的理論值推算，如圖 46。

2. 例如：杯子的傾斜角度為 60 度，旋轉半徑為 20 公分

將  $\theta$  代入 60 度，R 代入 0.2 公尺。

算出轉動速率為每秒 1.84 公尺



假設在沒有摩擦力的情況下：

$$ma \cos \theta = mg \sin \theta$$

$$a = g \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$a = 9.8 \tan \theta$$

$$\frac{V^2}{R} = 9.8 \tan \theta$$

$$V = \sqrt{9.8R \tan \theta}$$

圖 46

3. 由以上式子推導出來的理論值，如表 9。

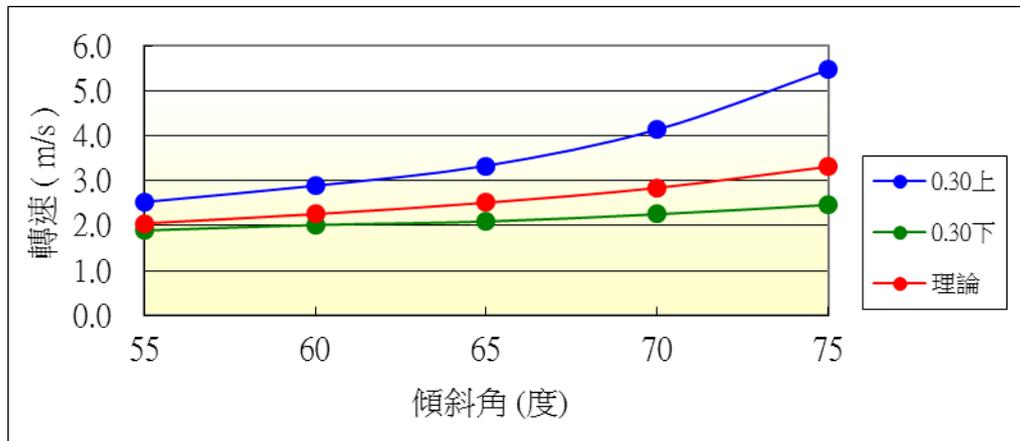
表 9

轉速 (m/sec)	半徑 (cm)	角度 (度)			
		30 公分	25 公分	20 公分	15 公分
55 度		2.05	1.87	1.67	1.45
60 度		2.26	2.06	1.84	1.60
65 度		2.51	2.29	2.05	1.78
70 度		2.84	2.59	2.32	2.01
75 度		3.31	3.02	2.70	2.34

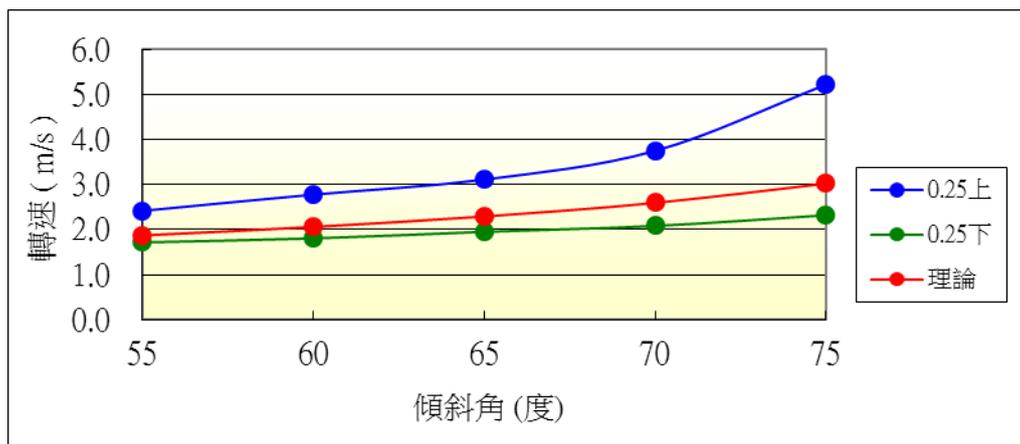
(三) 畫出轉速對傾斜角之關係圖：

1. 藍色線為骰子爬升所需的轉速
2. 紅色線為理論值的轉速
3. 綠色線為骰子下滑所需的轉速

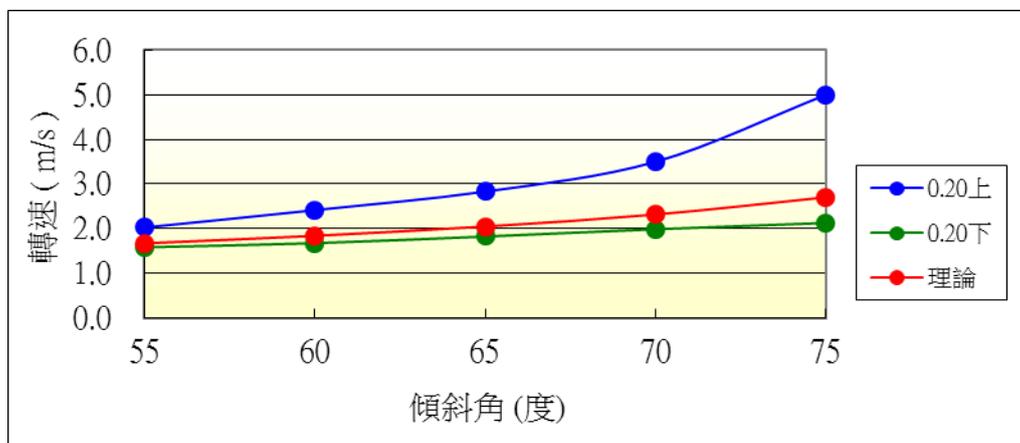
(A) 固定半徑為 30 cm (0.3 m)



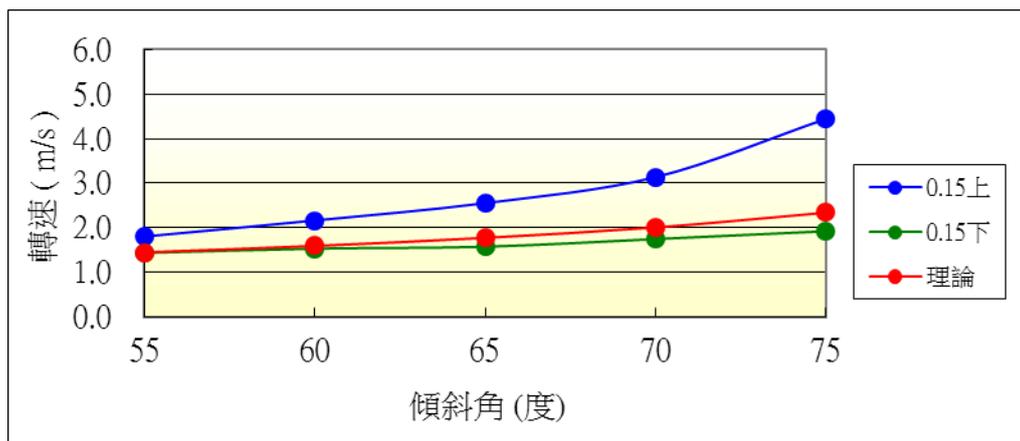
(B) 固定半徑為 25 cm (0.25 m)



(C) 固定半徑為 20 cm (0.2 m)



(D)固定半徑為 15 cm (0.15 m)



(四) 由以上圖表，可以得知：

1. 當半徑相同時，隨著傾斜角度變大，所需的轉速越大。
2. 骰子爬升時，摩擦力為阻力，因此所需的轉速大於理論值；骰子下滑時，摩擦力使骰子不易移動，因此所需的轉速小於理論值，理論值位在兩者之間。
3. 杯子傾斜角越大，圖形的斜率越陡，表示轉速的增加量越明顯，且偏離理論值越多。

## 六、探討骰子爬升（或下滑）時，轉速與旋轉半徑的關係

(一) 實驗值表格：

表 10

轉速 (m/sec) 半徑 (cm) \ 角度 (度)	55 度 骰子爬升	60 度 骰子爬升	65 度 骰子爬升	70 度 骰子爬升	75 度 骰子爬升
30 公分	2.53	2.89	3.33	4.14	5.47
25 公分	2.42	2.78	3.11	3.75	5.22
20 公分	2.03	2.42	2.83	3.50	5.00
15 公分	1.81	2.17	2.56	3.14	4.44

表 11

轉速 (m/sec) 半徑 (cm) \ 角度 (度)	55 度 骰子下滑	60 度 骰子下滑	65 度 骰子下滑	70 度 骰子下滑	75 度 骰子下滑
30 公分	1.89	2.01	2.09	2.25	2.46
25 公分	1.72	1.81	1.95	2.08	2.32
20 公分	1.58	1.68	1.83	1.99	2.13
15 公分	1.44	1.53	1.58	1.75	1.92

(二) 理論值表格：

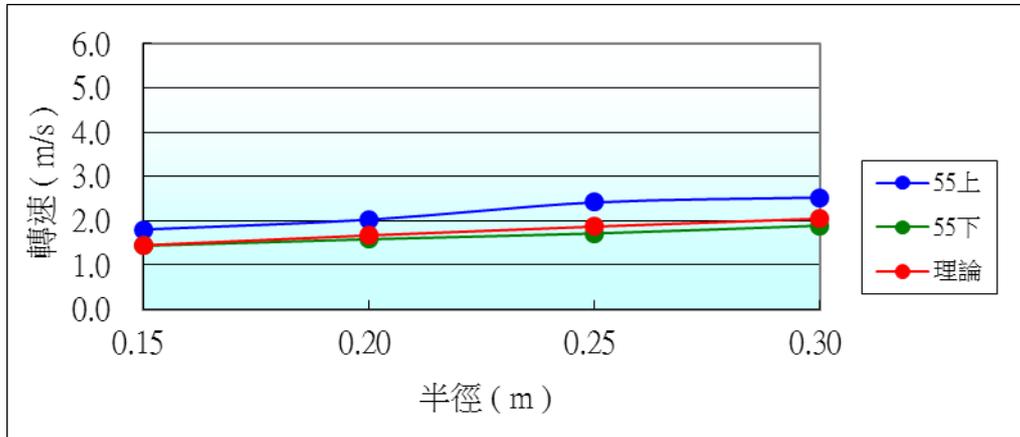
表 12

轉速 (m/sec) 半徑 (cm) \ 角度 (度)	55 度	60 度	65 度	70 度	75 度
30 公分	2.05	2.26	2.51	2.84	3.31
25 公分	1.87	2.06	2.29	2.59	3.02
20 公分	1.67	1.84	2.05	2.32	2.70
15 公分	1.45	1.60	1.87	2.01	2.34

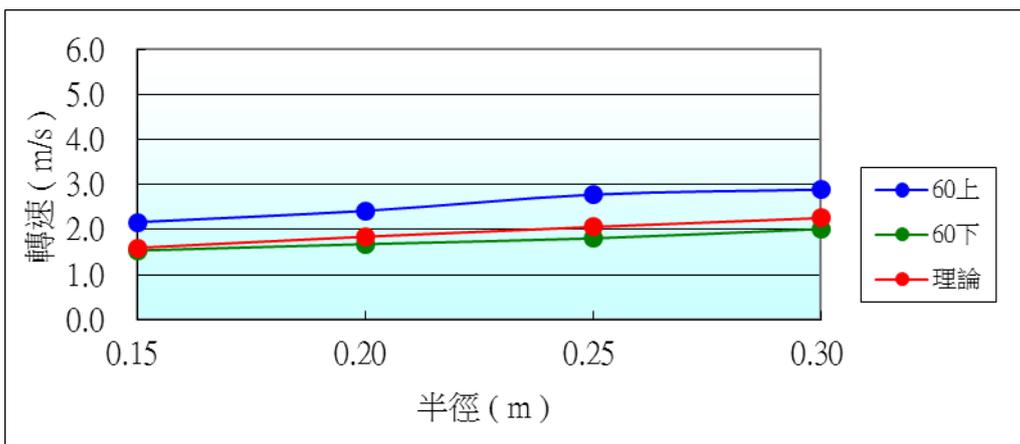
(二) 畫出轉速對半徑之關係圖：

1. 藍色線為骰子爬升所需的轉速
2. 紅色線為理論值的轉速
3. 綠色線為骰子下滑所需的轉速

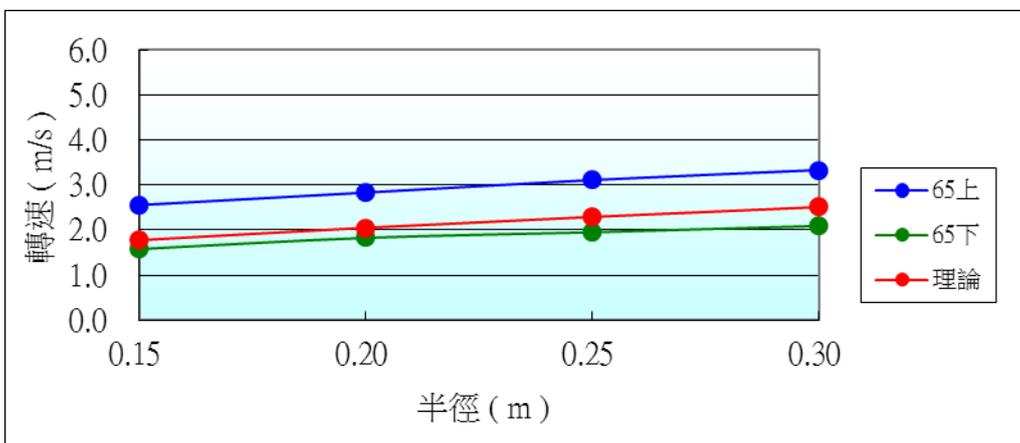
(A) 固定傾斜角度為 55 度



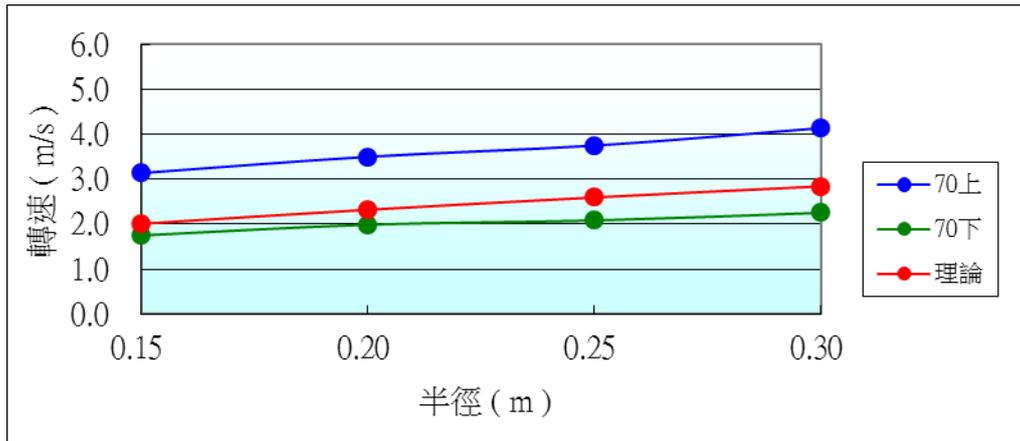
(B) 固定傾斜角度 60 度



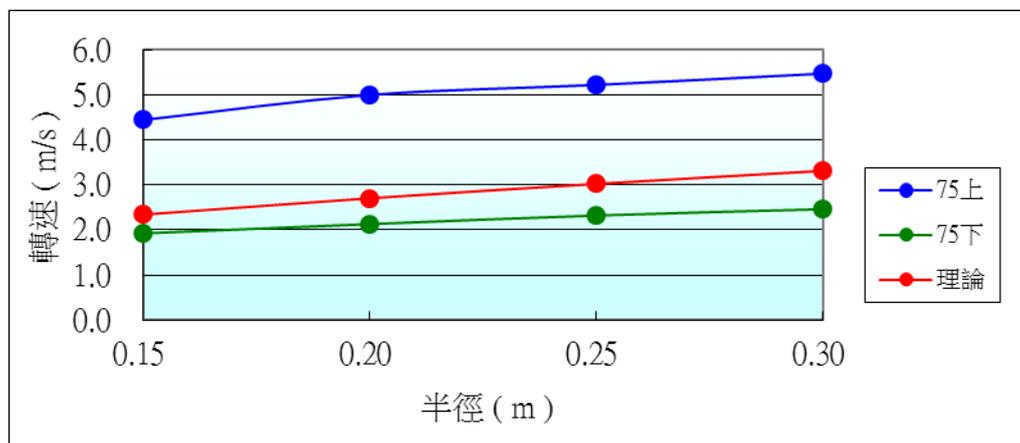
(C) 固定傾斜角度 65 度



(D)固定傾斜角度 70 度



(E)固定傾斜角度為 75 度



(三) 由以上圖表，可以得知：

1. 當傾斜角度不變時，隨著半徑變長，所需的轉速增加。
2. 理論值落在骰子爬升及下滑所需的轉速之間。
3. 半徑越小，圖形的斜率越陡，表示轉速的變化量越明顯。

## 七、探討骰子爬升（或下滑）時，轉速與骰子顆數的關係

表 13

實驗次數 骰子顆數	骰子爬升 實驗 1	骰子爬升 實驗 2	骰子爬升 實驗 3	平均值
兩顆骰子	2.78	2.77	2.78	2.78
三顆骰子	2.77	2.79	2.79	2.78
四顆骰子	2.78	2.79	2.79	2.79

表 14

實驗次數 骰子顆數	骰子下滑 實驗 1	骰子下滑 實驗 2	骰子下滑 實驗 3	平均值
兩顆骰子	1.44	1.45	1.43	1.44
三顆骰子	1.44	1.45	1.45	1.45
四顆骰子	1.43	1.46	1.46	1.44

表 13、表 14 為傾斜角度 60 度、旋轉半徑 25 公分時，不同數量的骰子爬升及下滑時所測轉速之三次實驗結果。由此兩表可以得知：**骰子顆數與轉速並沒有明顯關係**，所以不論幾顆骰子，爬升或下滑所需的轉速皆沒有太大變化。

## 八、探討骰子爬升（或下滑）時，轉速與骰子質量的關係

表 15

實驗次數 骰子種類	骰子爬升 實驗 1	骰子爬升 實驗 2	骰子爬升 實驗 3	平均值
木製骰子	2.78	2.77	2.78	2.78
塑膠製骰子	2.77	2.79	2.79	2.78
鋁製骰子	2.78	2.79	2.79	2.79

表 16

實驗次數 骰子種類	骰子下滑 實驗 1	骰子下滑 實驗 2	骰子下滑 實驗 3	平均值
木製骰子	1.44	1.43	1.43	1.43
塑膠製骰子	1.44	1.45	1.44	1.44
鋁製骰子	1.45	1.44	1.44	1.44

（木製骰子平均質量 3.65 g，塑膠製骰子平均質量 8.33 g，鋁製骰子平均質量 17.98 g）

表 15、表 16 為傾斜角度 60 度、旋轉半徑 25 公分時，不同質量的骰子爬升及下滑時所測轉速之三次實驗結果。由此兩表可以得知：**骰子質量與轉速並沒有明顯關係**，所以不論骰子輕重，爬升或下滑所需的轉速皆沒有太大變化。

（此與理論相符，因為質量  $m$  會在導出式子的過程中消掉，並不影響轉速。）

## 九、探討骰子爬升（或下滑）時，轉動頻率與半徑的關係

(一) 將轉速轉換為轉動頻率的推導式子，如圖 47。

1. 例如：半徑為 30 公分，傾斜角為 55 度時，骰子爬升時的轉速為每秒 2.53 公尺。
2. 將 V 代入 2.53 公尺 / 秒，R 代入 0.3 公尺。
3. 算出頻率為 1.34 赫茲。

$$V = \frac{2\pi R}{T}$$

$$T = \frac{2\pi R}{V}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{V}{2\pi R}$$

圖 47

(二) 由以上轉換式推導出來的實驗值，如表 17、表 18。

表 17

頻率 (赫茲) 半徑 (cm)	角度 (度)	55 度 骰子爬升	60 度 骰子爬升	65 度 骰子爬升	70 度 骰子爬升	75 度 骰子爬升
30 公分		1.34	1.53	1.77	2.20	2.90
25 公分		1.54	1.77	1.98	2.39	3.32
20 公分		1.61	1.92	2.25	2.79	3.98
15 公分		1.92	2.30	2.71	3.33	4.72

表 18

頻率 (赫茲) 半徑 (cm)	角度 (度)	55 度 骰子下滑	60 度 骰子下滑	65 度 骰子下滑	70 度 骰子下滑	75 度 骰子下滑
30 公分		0.81	0.88	0.94	1.05	1.18
25 公分		0.85	0.92	1.03	1.13	1.31
20 公分		0.93	1.02	1.15	1.30	1.46
15 公分		1.03	1.15	1.24	1.44	1.68

(三) 由以上轉換式推導出來的理論值，如表 19。

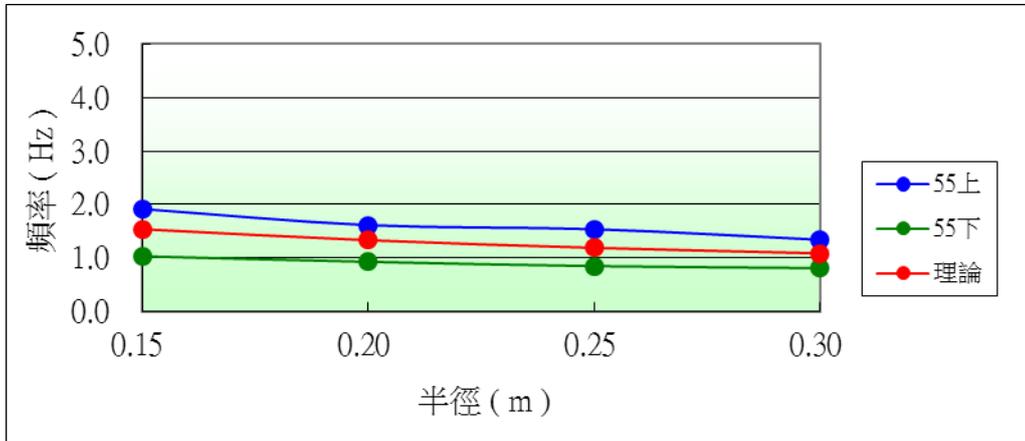
表 19

頻率 (赫茲) 半徑 (cm)	角度 (度)	55 度	60 度	65 度	70 度	75 度
30 公分		1.09	1.20	1.33	1.51	1.76
25 公分		1.19	1.31	1.46	1.65	1.93
20 公分		1.33	1.47	1.63	1.85	2.15
15 公分		1.54	1.69	1.88	2.13	2.49

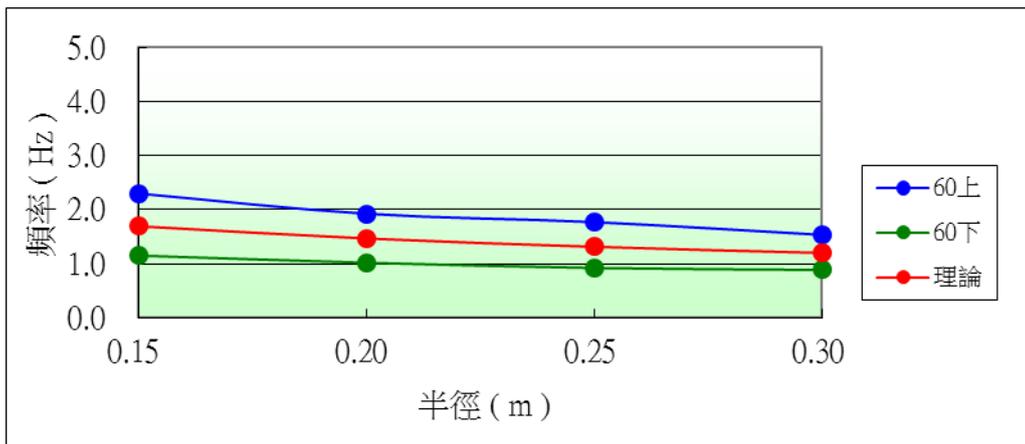
(四) 畫出頻率對半徑之關係圖：

1. 藍色線為骰子爬升所需的頻率
2. 紅色線為理論值的頻率
3. 綠色線為骰子下滑所需的頻率

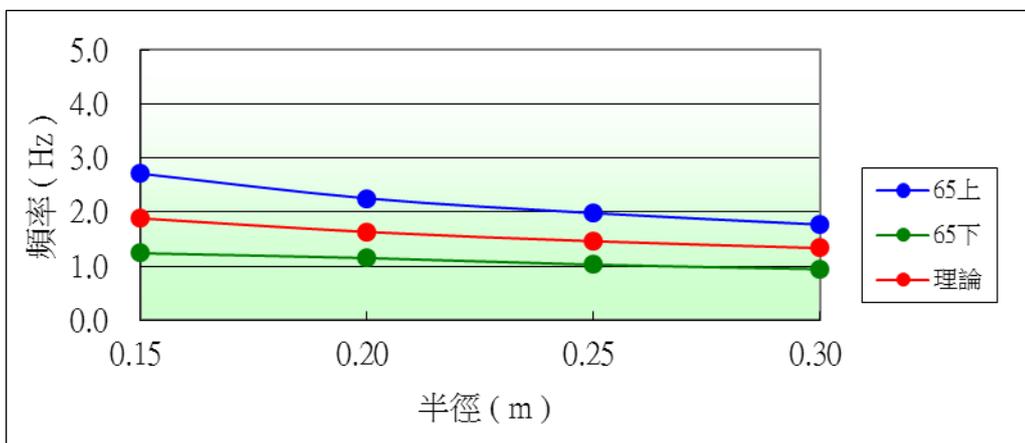
(A) 固定傾斜角度 55 度



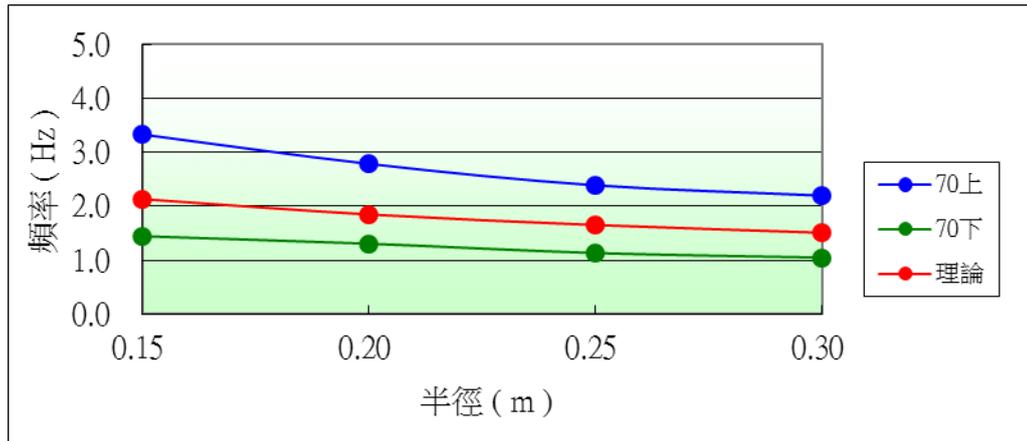
(B) 固定傾斜角度 60 度



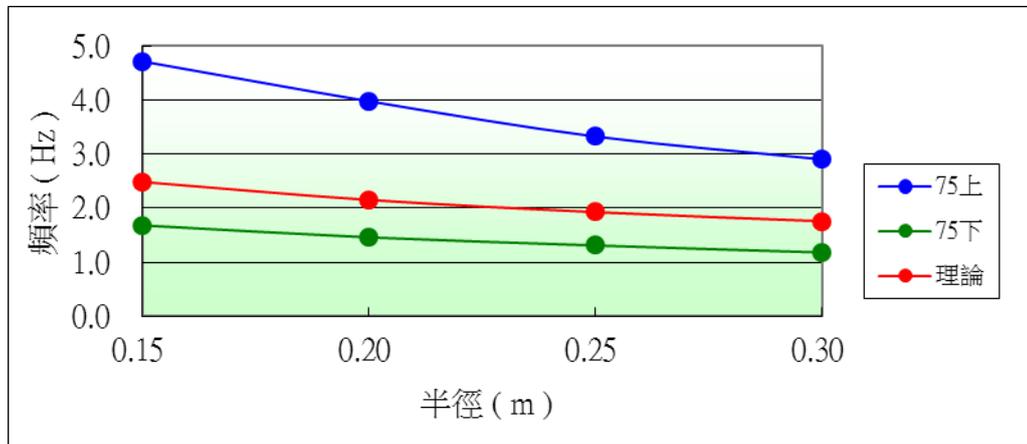
(C) 固定傾斜角度 65 度



(D)固定傾斜角度 70 度



(E)固定傾斜角度 75 度

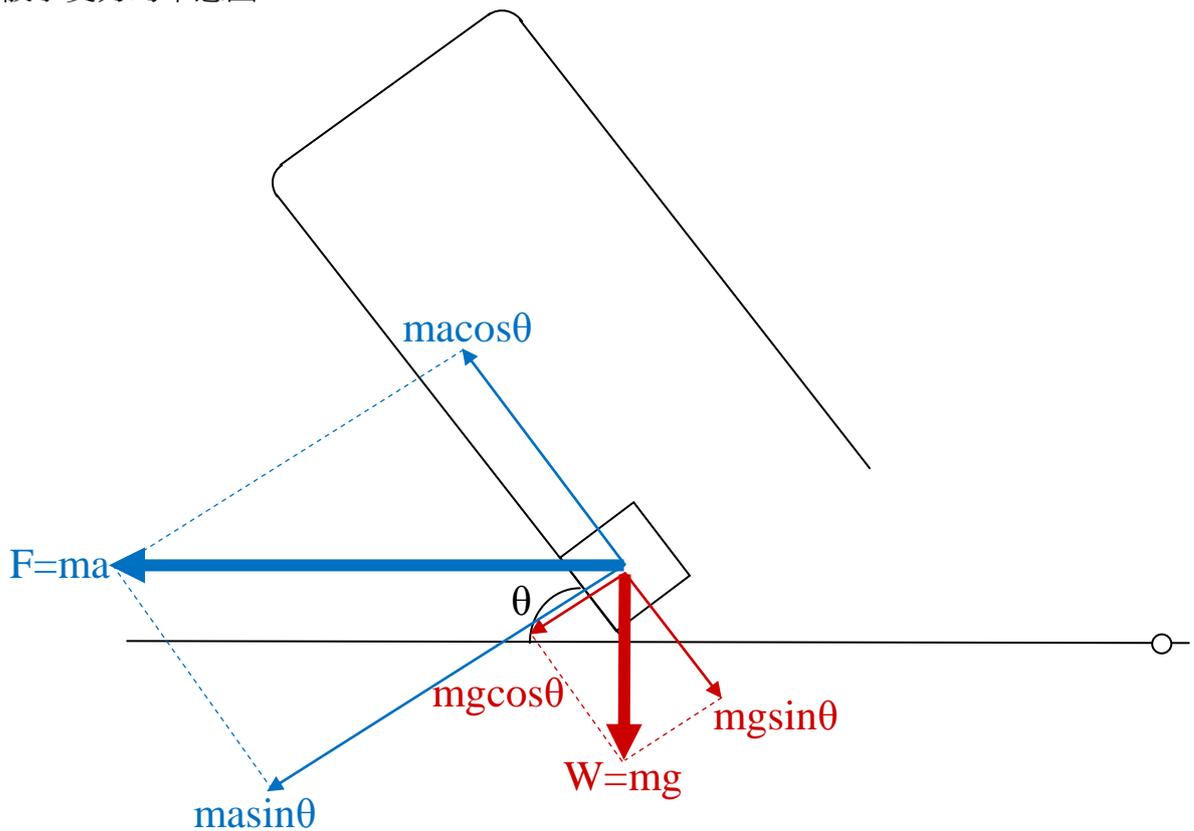


(五) 由以上圖表，可以得知：

1. 當杯子傾斜角度不變時，隨著半徑越長，所需的頻率下降。(但轉速卻是升高)
2. 理論值落在骰子爬升及下滑所需的頻率之間。
3. 半徑越小，圖形的斜率越陡，表示頻率的變化量越明顯，且爬升及下滑所需的頻率偏離理論值越多。

## 十、探討摩擦力對骰子爬升（或下滑）的影響

### (一) 骰子受力的示意圖



### (二) 摩擦係數推導

考慮摩擦力的情況下

骰子爬升：

$$ma \cos \theta = mg \sin \theta + (ma \sin \theta + mg \cos \theta) \mu$$

$$\mu = \frac{a \cos \theta - g \sin \theta}{a \sin \theta + g \cos \theta}$$

骰子下滑：

$$ma \cos \theta + (ma \sin \theta + mg \cos \theta) \mu = mg \sin \theta$$

$$\mu = \frac{g \sin \theta - a \cos \theta}{a \sin \theta + g \cos \theta}$$

註一：

$$a = \frac{v^2}{R}$$

註二：

$$N = ma \sin \theta + mg \cos \theta$$

(三) 舉例說明：

1. 如果傾斜角度為 55 度、半徑為 0.3 公尺，測速器測得轉速為 2.53 m/sec
2. 摩擦係數 ( $\mu$ ) 推導如下：

$$\mu = \frac{a \cos\theta - g \sin\theta}{a \sin\theta + g \cos\theta} = \frac{\frac{2.53^2}{0.3} \cos 55^\circ - 9.8 \sin 55^\circ}{\frac{2.53^2}{0.3} \sin 55^\circ + 9.8 \cos 55^\circ} \doteq 0.18$$

3. 以上述的方法，推導出各種情況下的摩擦係數，結果如下表 20：

表 20

摩擦 係數 角度 (度)	半徑 (cm)	30 公分		25 公分		20 公分		15 公分	
		骰子 爬升	骰子 下滑	骰子 爬升	骰子 下滑	骰子 爬升	骰子 下滑	骰子 爬升	骰子 下滑
55 度		0.18	0.18	0.22	0.21	0.17	0.21	0.19	0.20
60 度		0.19	0.20	0.22	0.23	0.20	0.22	0.22	0.20
65 度		0.18	0.24	0.19	0.23	0.20	0.21	0.22	0.24
70 度		0.18	0.24	0.18	0.24	0.19	0.19	0.20	0.21
75 度		0.17	0.24	0.17	0.22	0.19	0.21	0.19	0.19
平均		0.18	0.22	0.20	0.23	0.19	0.21	0.20	0.21
總平均		0.20							

(四) 由以上圖表，可以得知：

1. 由各次實驗數據推導出的摩擦係數，甚為接近，總平均值約為 0.20。
2. 將摩擦係數代入原來的式子，可精準的推算出骰子爬升或下滑時的轉速。

(1) 骰子爬升時：

$$ma \cos\theta = mg \sin\theta + (ma \sin\theta + mg \cos\theta) \times 0.2$$

$$a = g \times \frac{\sin\theta + 0.2 \cos\theta}{\cos\theta - 0.2 \sin\theta}$$

$$\frac{V^2}{R} = 9.8 \times \frac{\sin\theta + 0.2 \cos\theta}{\cos\theta - 0.2 \sin\theta}$$

$$V = \sqrt{9.8R \times \frac{\sin\theta + 0.2 \cos\theta}{\cos\theta - 0.2 \sin\theta}}$$

(2) 骰子下滑時：

$$ma \cos\theta + (ma \sin\theta + mg \cos\theta) \times 0.2 = mg \sin\theta$$

$$a = g \times \frac{\sin\theta - 0.2 \cos\theta}{\cos\theta + 0.2 \sin\theta}$$

$$\frac{V^2}{R} = 9.8 \times \frac{\sin\theta - 0.2 \cos\theta}{\cos\theta + 0.2 \sin\theta}$$

$$V = \sqrt{9.8R \times \frac{\sin\theta - 0.2 \cos\theta}{\cos\theta + 0.2 \sin\theta}}$$

3. 不同的杯子，接觸面粗糙程度不同，因此摩擦係數也不盡相同。可利用本實驗求出摩擦係數，代入以上的式子，就能非常方便地獲得在不同旋轉半徑及傾斜角之下，骰子爬升或下滑時所需的轉速。

## 陸、討論

### 一、從「電風扇馬達」到「手拉坯機器」

一開始，我把鎖上塑膠杯的木板固定在電風扇馬達的轉軸上，再連接可變電阻，做為可調整轉速的儀器，但因重心不平衡及馬力不足的問題而無法完成，這也讓我見識到質量不重的小塑膠杯竟有如此大的轉動慣量。原本考慮要買一個較大功率的馬達，後來因影片「第六感生死戀」而突發奇想，向學校商借手拉坯機器做為轉動儀器，不僅馬力大且穩定性高，轉速調控也非常符合我的需求。

### 二、自行車上的「感應測速器」

實驗中如何準確且方便的測量轉速，我思考了許多方法，包含利用攝影後分析畫格，但極為耗時。後來，我從爸爸的自行車上找到了感應測速器，藉此我能迅速準確地測到轉速，且這種測出轉速的方法，是一個很生活化的點子，非常有創意。

### 三、測量杯子傾斜角度—「傾斜儀」

為了測量杯子傾斜角度，我將量角器的圓心處鑽一個洞，穿過棉線，綁上重錘，自製一個傾斜角測量器。但沒想到，原來有「傾斜儀」這種專業儀器，可以幫我測量杯子的傾斜角度，雖然兩者的使用原理相同，但傾斜儀的測量比較簡單，也比較準確。

### 四、下滑的「摩擦係數」出了什麼問題？

計算摩擦係數時，我發現無論是何種傾斜角度或旋轉半徑，骰子爬升時所算出的摩擦係數極為一致（約在 0.20 附近），但骰子下滑時的摩擦係數則差異甚大，這讓我非常困擾。後來經過反覆思考與驗證之後，我發現實驗上的疏忽，因為杯子傾斜時，骰子在爬升與下滑的過程中，啟動時的半徑並不相同，如圖 48、圖 49 所示。因此，我重新修正骰子下滑時的旋轉半徑之後，所求得的摩擦係數相當接近，且與爬升時的摩擦係數都在 0.20 附近。

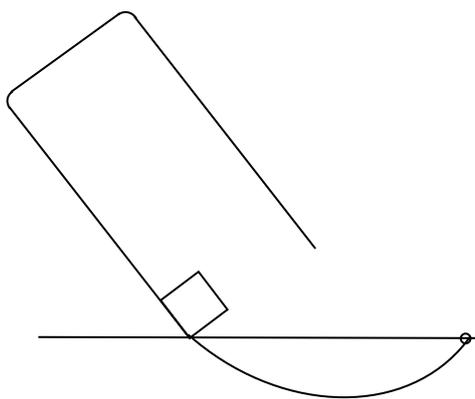


圖 48  
骰子爬升時的旋轉半徑

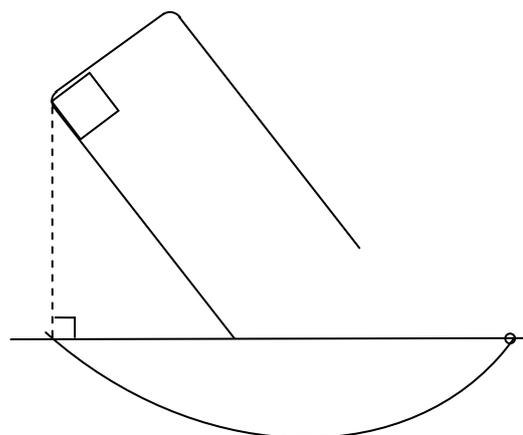


圖 49  
骰子下滑時的旋轉半徑

## 五、疊出骰子塔的影響—「離心位能」

爲什麼骰子在下滑的過程中，不是以水平並排的方式下滑（圖 50），而是以直立堆疊的方式（圖 51）下滑呢？這與骰子的**重力位能**、**離心位能**有相當大的關係。儀器在增加轉速時，只要大過於骰子爬升所需的轉速，骰子就能克服重力位能向上爬升，如果再繼續增加轉速，則因爲**杯壁有弧度**的緣故，此時骰子會從直立的方式變成水平並排的方式，這是因爲此時重力位能的增加量比離心位能的減小量還小，系統整體的能量還是下降的。若慢慢降低儀器的轉速，則骰子會從水平並排的方式先變回直立，再慢慢地下滑疊出骰子塔，其成因和上升時恰好顛倒，即重力位能的減小量比離心位能的增加量還大。因此**骰子在杯子內的排列方式，與重力位能、離心位能之間的競爭有重要的關係。**

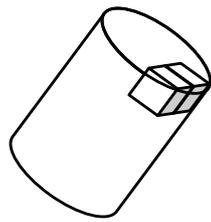


圖 50  
水平排列

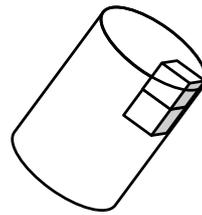


圖 51  
直立排列

## 六、圓杯與方杯的差別

爲了驗證疊出骰子塔確實與重力位能以及離心位能之間的競爭有關係，我將這個想法應用到圓杯與方杯來做比較。如果改用方型的杯子，有沒有辦法成功疊出骰子塔呢？經由實驗操作發現，當骰子爬升到方形杯子頂部時，若慢慢降低轉速，骰子不會由水平並排方式先變爲直立堆疊方式，而是直接下滑，因此無法疊出骰子塔。除非，我將骰子一直控制在直立堆疊的方式，否則無法成功疊出骰子塔。所以，**杯壁的圓弧造型創造了一個機會，使得重力位能以及離心位能可以藉由彼此之間的競爭關係而使下滑的骰子可以堆疊成塔。**

## 七、使用儀器打破金氏紀錄

從中國傳來骰子塔金氏紀錄被打破後，我非常想知道是否可以用儀器打破金氏紀錄。儀器的優點在於轉速強、穩定性高，不像人類的手會感到疲勞痠痛，但精巧性卻不如人類的手。實際操作後發現，骰子的確都可以在杯子內爬升，但要有序的排成一柱骰子塔，仍然很難達成，所以想要打破金氏紀錄，並非使用儀器就能簡單辦到，但不失爲一種理想。

## 八、手搖儀器設計

本實驗所設計的儀器，是以 360 度進行旋轉，但這樣的模擬仍與實際疊出骰子塔的過程有些差距。因此，我後來參考了手搖冰的原理，製作出一個簡易的手搖儀器模型，但因機械的堅固性以及安全性考量，現階段無法達到高轉速而讓骰子爬升，此想法仍在研究改進中。

## 柒、結論

### 一、找出最有效的方法在三十秒內成功疊出骰子塔

我研究出了三種疊出骰子塔的方法，實驗結果發現，桌面畫弧法是最容易的方法疊出骰子塔。要注意的是，在桌面畫圓弧角時，要稍微打開杯口內側，這樣骰子較容易爬升，也較容易疊出骰子塔。

### 二、以五分鐘為目標教會初學者疊出骰子塔

由這個實驗更能證明桌面畫弧法最容易疊出骰子塔，所有初學者皆有辦法在五分鐘內，以桌面畫弧法疊出骰子塔。

### 三、研究杯子滑行角度是否影響受測者疊出骰子塔

從實驗結果可以知道，若我改變桌面畫弧法的杯子滑行角度，所有的受測者，無法在六十度的圓弧角度內來回滑行疊出骰子塔，而滑行圓弧角度越小，越不容易成功疊出骰子塔。所有的受測者習慣滑行的角度皆大於 90 度角，因此在學習疊出骰子塔時，應該選擇較大較平滑的桌面，才有足夠的空間，疊出骰子塔。

### 四、研究收骰子的順序是否影響疊出骰子塔的順序性

我發現收骰子的順序的確與疊出骰子塔的順序有相關性，先收得骰子會在骰子塔的最上方，最後收得骰子會在骰子塔的最下方，但是卻也有少部份的情況會使得此順序弄反、打亂，只要杯口不要開得過大，就可以避免此事情的發生。

### 五、探討骰子爬升（或下滑）時，轉速與傾斜角度的關係

我發現當半徑相同時，隨著杯子傾斜角度越大，轉速也需要越大，理論值皆落在骰子爬升以及下滑所需的轉速之間，骰子爬升比骰子下滑所需的轉速變化來得明顯，特別是越大角度時，所需的轉速增加得非常的快。我認為，造成實驗數據與理論值之間的差異，是因為骰子與杯壁的摩擦力，使得要讓骰子爬升，比起理論值的轉速，還要來得高出一些。

### 六、探討骰子爬升（或下滑）時，轉速與半徑的關係

我發現當角度相同時，隨著半徑越大，轉速也需要越大，理論值皆落在骰子爬升以及下滑所需的轉速之間，但隨著半徑變大，轉速的增加量有逐漸遞減的趨勢。

### 七、探討骰子爬升（或下滑）時，轉速與骰子顆數的關係

我發現骰子顆數與轉速沒有明顯關係，不論骰子多寡，骰子爬升或是下滑所需的轉速皆差異不大。

## 八、探討骰子爬升（或下滑）時，轉速與骰子質量的關係

我發現骰子質量與轉速沒有明顯關係，不論骰子質量輕重，骰子爬升或是下滑所需的轉速皆差異不大。

## 九、探討骰子爬升（或下滑）時，轉動頻率與半徑的關係

我發現，雖然半徑越小，骰子爬升以及下滑所需的轉速下降，但轉動頻率卻是增加。因此，以人為的操作而言，要以較高的轉動頻率讓骰子爬升，是較不容易達成的事情（手會很酸，容易疲累）。

## 十、探討摩擦力對骰子移動的影響

由各次實驗數據推導出的摩擦係數，甚為接近（約在 0.20 附近），符合一定值。然而，不同的杯子，有不同的摩擦係數，可利用本實驗求出摩擦係數，代入推導出的式子。

(1) 骰子爬升時：

$$V = \sqrt{9.8R \times \frac{\sin\theta + 0.2 \cos\theta}{\cos\theta - 0.2 \sin\theta}}$$

(2) 骰子下滑時：

$$V = \sqrt{9.8R \times \frac{\sin\theta - 0.2 \cos\theta}{\cos\theta + 0.2 \sin\theta}}$$

就能方便地獲得在不同旋轉半徑及傾斜角之下，骰子爬升或下滑時所需的轉速。

## 捌、參考資料及其他

一、書籍：

1. 國中自然與生活科技課本（南一版，八年級下學期）
2. 國中自然與生活科技課本（南一版，九年級上學期）

二、影片：

秦皇島 90 后“骰子王”打破吉尼斯世界紀錄

<http://www.youtube.com/watch?v=oxrxvSQ3SzI>

三、文獻資料：

中華民國第 50 屆科展作品—『粒粒』皆辛苦

## 【評語】 030114

1. 本作品以骰子疊置之操作原理出發探討，並設計系統化實驗方法從事實驗探討。
2. 本實驗製作旋轉儀器及杯具，以錄影觀察骰子行為，該製作儀器具創意性。
3. 本實驗以物理模型從事分析實驗結果，建議可再具體定量分析，並配合模擬與歸納出一般性規則。