

中華民國第 52 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 物理科

030102

『打』『混』摸魚

～探討打彈珠遊戲的混沌(Chaos)行為

學校名稱：彰化縣立陽明國民中學

作者：	指導老師：
國二 張育禎	蔡名峯
國一 吳孟庭	韓顏吉
國二 鄭博元	

關鍵詞：混沌、彈珠檯、蝴蝶效應

摘要

使用小白板、強力磁鐵及壓克力方盒自行設計彈珠檯。目的是：用幾乎相同的初始條件，卻得到寬廣的滾珠機率分佈來顯示混沌的存在。實驗結果：(一) 對一次碰撞情形而言，滾珠撞擊撞針前速度越快，反彈後落點分佈會有朝兩側偏移的現象；(二) 滾珠在撞擊前的 x 方向的小偏差，會使撞擊後最終落點位置產生極大差異；(三) 提高多次碰撞機會，但因撞針的排列是有規律的，使得落點分佈也具有規律，且排列密度越高，碰撞次數越多，分佈就越趨於一致，但前提是滾珠軌跡沒有被撞針侷限(排列密度中例外)。總之，滾珠碰撞後的落點雖無法預測，但經由多次實驗發現，滾珠落點的機率分佈具規則性且其曲線會『收斂』，符合不規則中存在規律的特性。

壹、研究動機

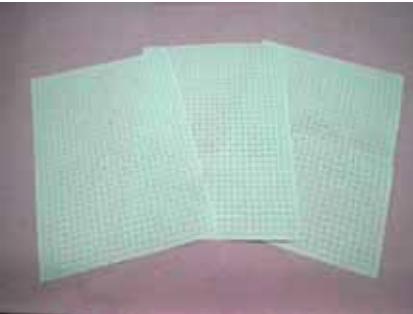
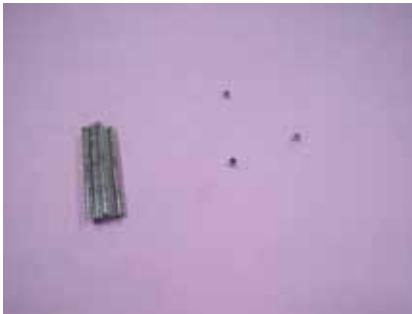
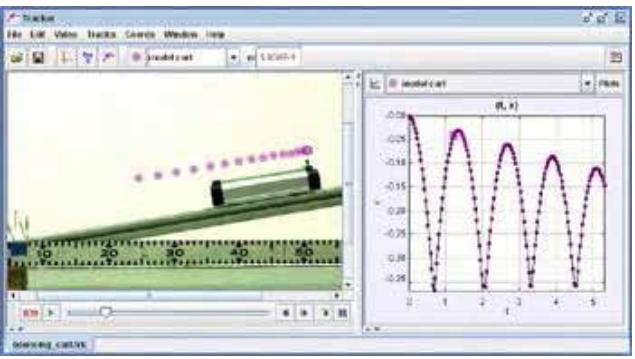
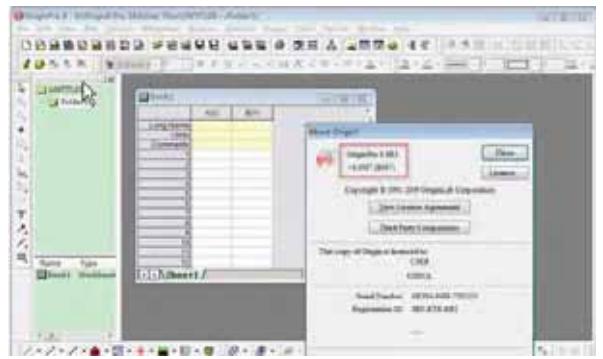
在觀念物理一書中提到關於混沌的理論，舉出當雪球滾下坡道時，如果坡道上有許多小石子，則即使每次開始滾動的位置皆相同，但雪球受到小的影響後，其最終位置將會有極大的差異。我們對於這樣的現象感到有趣，便找了許多資料，然而發現關於這方面的實驗證據並不多，因此想針對此一主題來做研究；後來在逛夜市時無意中發現，傳統打彈珠遊戲的情形跟書上所提到的例子非常類似，所以我們便想利用打彈珠遊戲去嘗試了解此混沌現象，期望能找出一些美妙的規律，並實際體驗書中提到的理論：**系統的變化看似毫無規則，但實際上是有跡可循的。**

貳、研究目的

為了要利用實物來更具體了解混沌理論，我們自行設計了由強力磁鐵及壓克力方盒所組成的小型彈珠檯，並利用此裝置探討下列問題：

- 一、固定彈珠檯之傾斜度，探討滾珠出發點距撞針距離對滾珠落點分佈之影響。
- 二、在不同滾珠出發點與撞針之距離下，探討彈珠檯傾斜度對滾珠落點分佈之影響。
- 三、探討撞針的不同排列情形對滾珠落點分佈之影響。
- 四、改變撞針直徑，探討撞針大小對滾珠落點分佈之影響。
- 五、以黑珠取代 BB 彈，探討滾珠大小，對滾珠落點分佈之影響。
- 六、固定撞針排列形狀(三角形)，改變撞針排列密度，探討對滾珠落點分佈之影響。
- 七、在陣型實驗中，僅移動第一支撞針位置(小偏差)，探討此動作對落點分佈之影響。

參、研究器材

		
圖 1 方格紙 (充當座標，並固定撞針位置)	圖 2 水平儀 (確認水平)	圖 3 強力磁鐵 (撞針) 4mm、5mm、6mm、10mm
		
圖 4 黑珠 (滾珠)	圖 5 BB 彈 (滾珠)6mm	圖 6 磁鐵條(滾珠軌道)
		
圖 7 小白板 (彈珠檯主體)	圖 8 直尺(滾珠落下控制閘門)	圖 9 壓克力方格(滾珠落點)
		
圖 10 物理動態軌跡模擬軟體 tracker	圖 11 Origin pro8	

肆、研究過程與方法

一、研究原理

(一) 什麼是混沌(What is CHAOS ?)

1、差之毫厘，失之千里。

一個小小初始條件的改變，卻可以嚴重影響系統長期的大變化。(Just a small change in the initial conditions can drastically change the long-term behavior of a system.)

2、對初始條件的敏感性。

對科學基本理念來說，「如果你正在計算檯面上的一顆撞球，就不用去理會室外一片樹葉的掉落。也就是說：很輕微的影響可以被忽略，事物進行總會殊途同歸；任意的小干擾，並不致於強烈影響它的後果。」

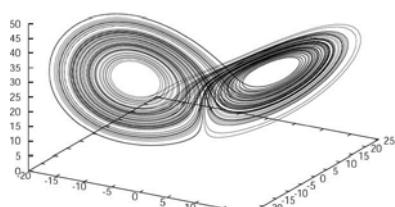
但是混沌現象所指的是「一點點的初始條件改變，就會造成事件往後行為的大大不同。」這就是「對於初始條件的敏感性」。

3、蝴蝶效應(Butterfly Effect)

一隻在巴西的蝴蝶鼓翅飛翔，會在德州誘發一場龍捲風嗎？這是描述混沌效應最有名的一個名詞。六零年代麻省理工學院的氣象學家兼數學家勞倫茲(Edward Lorenz)教授，選擇了十幾條顯示出溫度、壓力、風速等氣象數值的方程式，在他自己的電腦裡創造了袖珍玩具般的天氣。有一天，發現僅是千分之一以下的誤差，對電腦裡的天氣來說，剛開始仍是幾乎相同的兩個個案，但經過數個月後，其差異越來越大，終至面目全非的地步。

勞倫茲說：「人們常覺得氣象的長期預報能行得通的其中一個理由，是有些真實的物理現象我們可以預測得很好，例如日蝕、月蝕和海水潮汐。一般人認為，我們既然能夠在

“.lorenz_lorenz_attractor”



數月以前就把潮汐預報得很好，那為什麼天氣的誤報卻屢見不鮮呢？僅僅是另一套流體系統，規則的複雜也大同小異，然而卻讓我開始理解，任何沒有遵守週期性規矩的系統皆難以預測。」

圖 12 為著名的「勞倫茲吸子」(Lorenz attractor)，它顯示雖然數據表面上看來一團混亂，但仍有精緻且規律的結構。此圖中顯示，三項變數的值可對應到三度空間的某定點，且當系統演進，該點會隨之平滑地移動，也就是說若系統永遠不重覆自己，則軌跡必須永遠不相互碰觸，且無止休的打圈子。雖然不重覆，但是軌跡會一直像是繞著這兩個圈圈一樣，就像是行為被一個圈圈吸過去，所以我們稱其為「勞倫茲吸子」。

4、不規則之中仍存在秩序

混沌系統看似雜亂，但其中仍存在規律性以及秩序。例如地球每天的天氣，存在於一個變化無窮的不可預報系統中一般，而氣候卻又呈現年復一年相當程度的規律性。數值只有在某些範圍內起落，但絕不超過固定的範圍。如果我們能掌握控制混沌系統的那隻手，我們是可以對長期的行為做出有效預測的。

5、混沌理論

混沌在學術上是指雜亂無章的現象，一個確定的系統本因隨機性而產生複雜不規則的狀態，研究此一現象的方法就叫混沌理論。混沌有幾種特質：非線性的、複雜型態的、耗散結構的、循環對稱、對初始狀態具高敏感度。

前面我們提到勞倫茲對於天氣現象的發現。根據勞倫茲的方程式，所有解都是不穩定且幾乎都是無週期性的；而任何一個無週期性的系統，都應該是不可預報的 (unpredictability)。系統不會回到原來的狀態，所以也不會重複表現與過去一樣的狀態。雖然氣候可能顯現出大致類似的週期性，這些現象又決定了天氣，它不會回到完全相同的情況，但可能有有限度的類似。

6、混沌理論的重要性

混沌理論不只是一門數學的分支，它還可以擴展影響應用到許多層面，像是氣象系統、股票市場、生物數量的變化、大自然的圖像結構……等等。混沌理論彰顯了細微變化與隨機事件的重要性，並且對於現象之預測持保留態度，也讓我們了解非線性的系統僅能有限掌握。

(節錄自 A Brief Introduction of Chaos 混沌之簡介 交大應數 96 級 張永潔)

二、研究方法

根據研究目的我們自製了簡便的打彈珠檯，研究滾珠經過碰撞後的落點分佈情形；並利用動態軌跡分析軟體，來分析滾珠碰撞後的軌跡變化。

(一) 自製打彈珠檯

- 1、利用小白板當作彈珠檯之主體，並利用強力磁鐵充當撞針，以 BB 彈及黑珠取代彈珠，這樣的設計可以輕易更換撞針的排列方式，以符合實驗的需求。
- 2、列印大小 $1\text{cm} \times 1\text{cm}$ 的方格紙，貼附於小白板上，方便觀察，並確立座標系統。而為了更精準的擺放撞針，因此也將擺放位置繪於方格紙上。
- 3、用壓克力板製成彈珠台的底盒，並連上長條磁鐵，放置於彈珠檯底部，收集滾珠，且可以自由拆卸，非常方便。
- 4、為了控制滾珠穩地落下，使用磁鐵條來充當滾珠之軌道，並以直尺來當控制閘門，以降低每次的滾珠落下時，受到人為因素的影響。

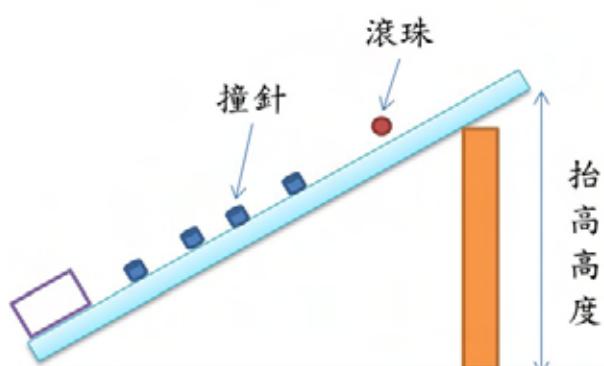
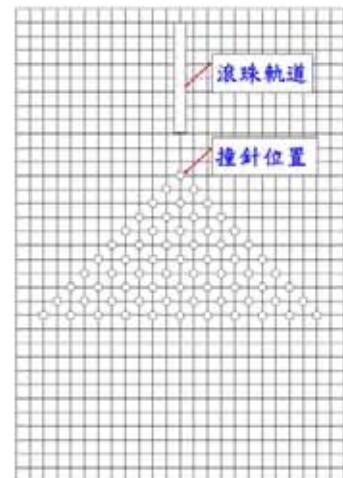


圖 13 實驗裝置示意圖(側視圖)

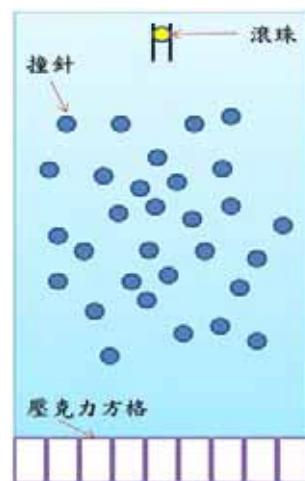
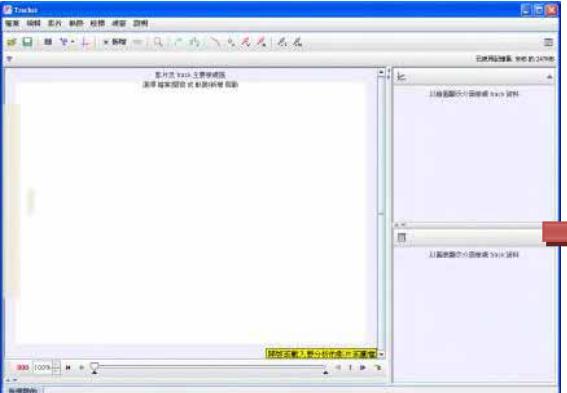
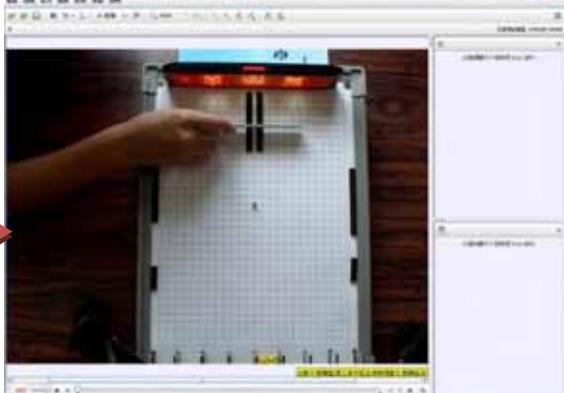
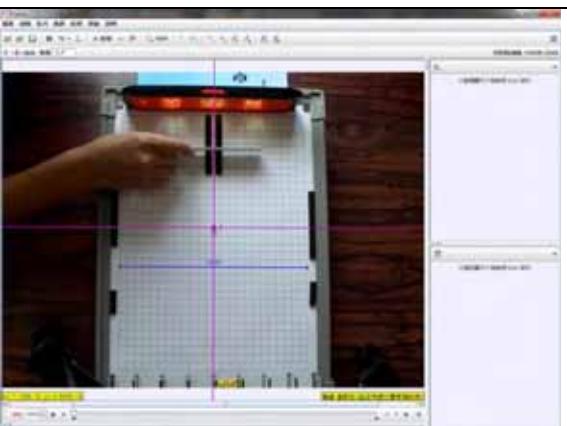
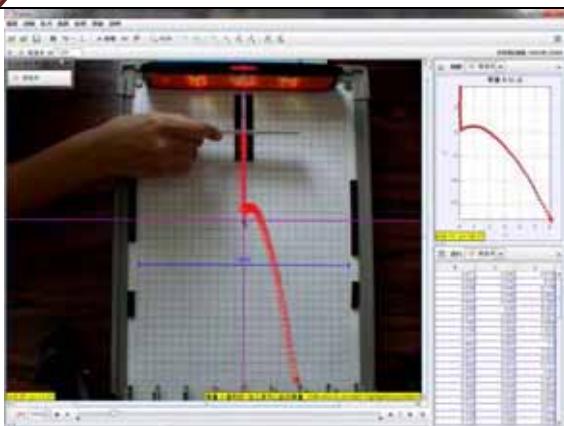


圖 14 實驗裝置示意圖(正視圖)

(二) 物理動態軌跡分析

tracker 物理動態軌跡分析軟體([免費](#))功能非常強大，只要隨著影片的播放將 BB 彈標記出來，便可以很輕鬆的了解 BB 彈的運動情形，舉凡速度、加速度、速度分量、位移、位移分量、角速度、角加速度……等皆可以分析出來。說明利用此技術來分析滾珠碰撞撞針後的運動情形。

	
啟動 Tracker 程式	載入所拍攝之影片
	
設定比例尺，及座標軸	追蹤 BB 彈的軌跡

(三) 重複實驗次數要多少才足夠？

本實驗是在隨機系統中尋找它的規律，那要如何找到其規律呢？實驗要進行幾次呢？在此利用『收斂』的概念，我們以重複實驗 25 次當成最小的機率分佈，依次增為 50 次、75 次、100 次、125 次，甚至更多，由此可得出機率分佈隨著實驗次數增加而變化之情形，而當實驗次數增加，但機率分佈曲線無明顯變化時，就代表已經『收斂』，表示實驗次數以足夠。我們以此概念來解決要實驗幾次才足夠的困擾。

三、實驗步驟

根據研究目的，我們的實驗步驟分別敘述如下：

(一) 固定彈珠檯之傾斜度，探討滾珠出發點距撞針距離對滾珠落點分佈之影響。

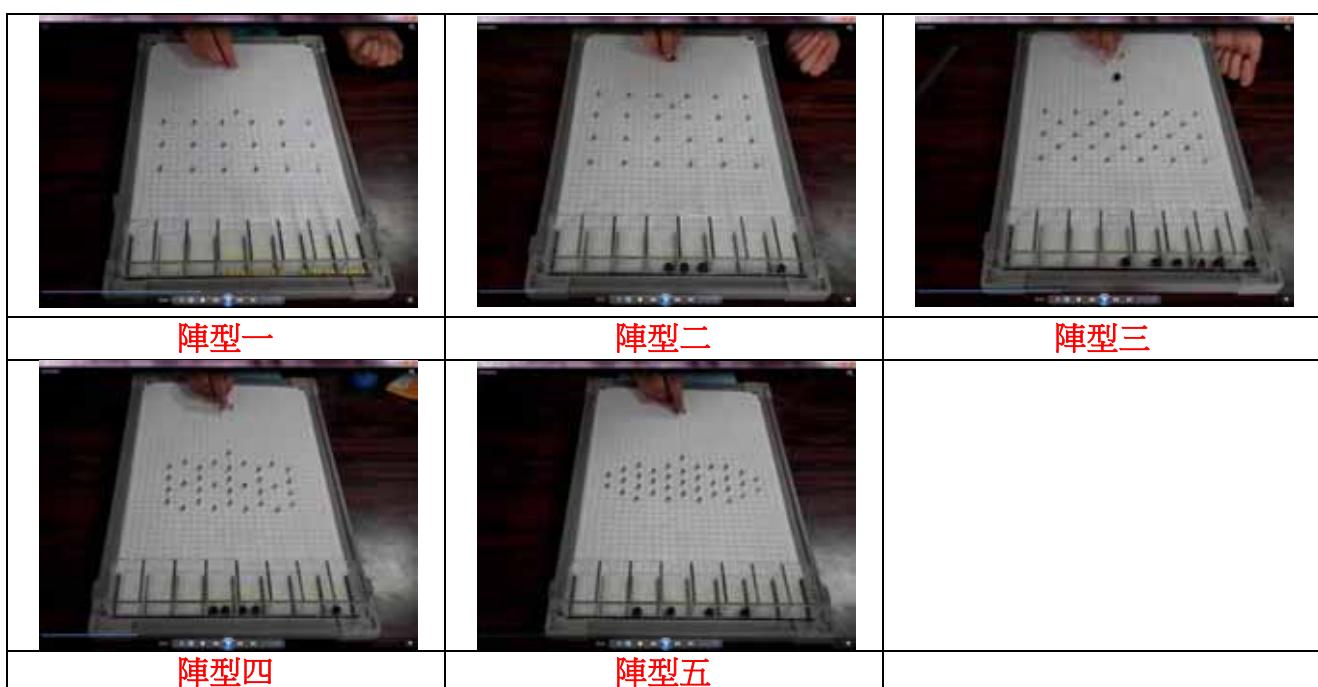
- 1、固定彈珠檯抬高的高度 5.00cm，BB 彈出發點距白板上緣 5.00cm，且置中對齊，並使用水平儀確認裝置是否達到水平。
- 2、先單純滾落 10 顆 BB 彈，來確認裝置是否確實達到水平。
- 3、將撞針吸附距出發點 6.00cm 處，並黏上滾珠落點收集的壓克力盒，並標示 1~8 的數字。
- 4、將 BB 彈由出發點自由滾落，撞擊撞針並反彈後，掉落於底部的壓克力蒐集盒，紀錄 BB 彈之落點
- 5、BB 彈落下過程以攝影機拍攝，並用 tracker 程式分析其軌跡。
- 6、持續重複實驗，並以 Excel 作紀錄，直到分佈曲線收斂為止。
- 7、將撞針距出發點距離改為 8.00cm、10.00cm、12.00cm，重新實驗。

(二) 在不同滾珠出發點與撞針之距離下，探討彈珠檯傾斜度對滾珠落點分佈之影響。

- 1、將彈珠檯一端抬高高度 h 改為 7.00、9.00、11.00cm，並重複實驗(一)。

(三) 探討撞針的不同排列情形對滾珠落點分佈之影響。

- 1、固定彈珠檯一端抬高高度 5.00cm，BB 彈出發點距白板上緣 5.00cm，且置中對齊。
- 2、將撞針吸附於距出發點 10.00cm 處，此為 BB 彈第一次碰撞處。
- 3、排列下圖中之五種陣型，觀察不同排列方式，對 BB 彈落點分佈之影響。



(四) 改變撞針直徑，探討撞針大小對滾珠落點分佈之影響。

改以直徑較大的的撞針重複實驗(一)~(三)。

(五) 以黑珠取代 BB 彈，探討滾珠大小，對滾珠落點分佈之影響。

1、改以較大黑珠取代 BB 彈，重複實驗(一)~(四)。

2、同樣拍攝影片，分析黑珠運動軌跡。

(六) 固定撞針排列形狀(三角形)，改變撞針排列密度及形狀大小，探討對滾珠落點分佈之影響。

1、改以三角形陣型排列並對照二項式彈珠台機率情形。(如圖 15)

2、實驗初始條件與實驗(一)相同，將實驗裝置設定好。

3、固定撞針排列密度，排列層數依序為 5、7、9、11 排，記錄滾珠碰撞後落點分佈。

4、固定撞針排列的三角陣型大小，改變其排列密度記錄滾珠碰撞後落點分佈。

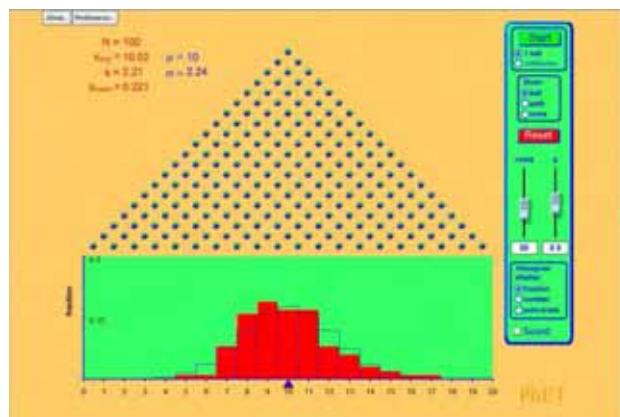


圖 15 二項式彈珠台機率程式使用及彈珠落點分佈情形。

(七) 在陣型實驗中，僅移動第一支撞針位置(小偏差)，探討此動作對 BB 彈落點分佈之影響。

1、延續實驗(六)的實驗方法。

2、將第一根撞針向右偏移 0.5mm，記錄滾珠碰撞後落點分佈。(撞針直徑 5mm)

3、將第一根撞針向左偏移 0.5mm，記錄滾珠碰撞後落點分佈。(撞針直徑 5mm)

(其餘撞針位置不變)

代號說明：

h：彈珠檯一端抬高高度(在斜面長固定下，可以視為彈珠檯傾斜情形)。

d：彈珠出發點距第一次撞擊撞針之距離。

撞針規格有直徑 4mm、5mm、6mm、10mm 四種，若無特別註明則撞針直徑為 5mm。

滾珠有 BB 彈及黑球兩種規格，若無特別註明則滾珠為 BB 彈。

伍、研究結果與討論

根據不同的研究目的及實驗步驟，我們將各種情形之數據之分別敘述如下：

一、固定彈珠檯之傾斜，探討滾珠出發點距撞針距離對滾珠落點分佈之影響。

固定彈珠檯傾斜度，改變滾珠出發點與撞針之距離，利用「收斂」的概念，多次實驗，找出 BB 彈落點之規律，並拍攝影片，且利用物理動態軌跡程式 tracker，分析運動情形。接著改變彈珠檯傾斜度，觀察滾珠落點分佈。其結果如圖 16 所示。

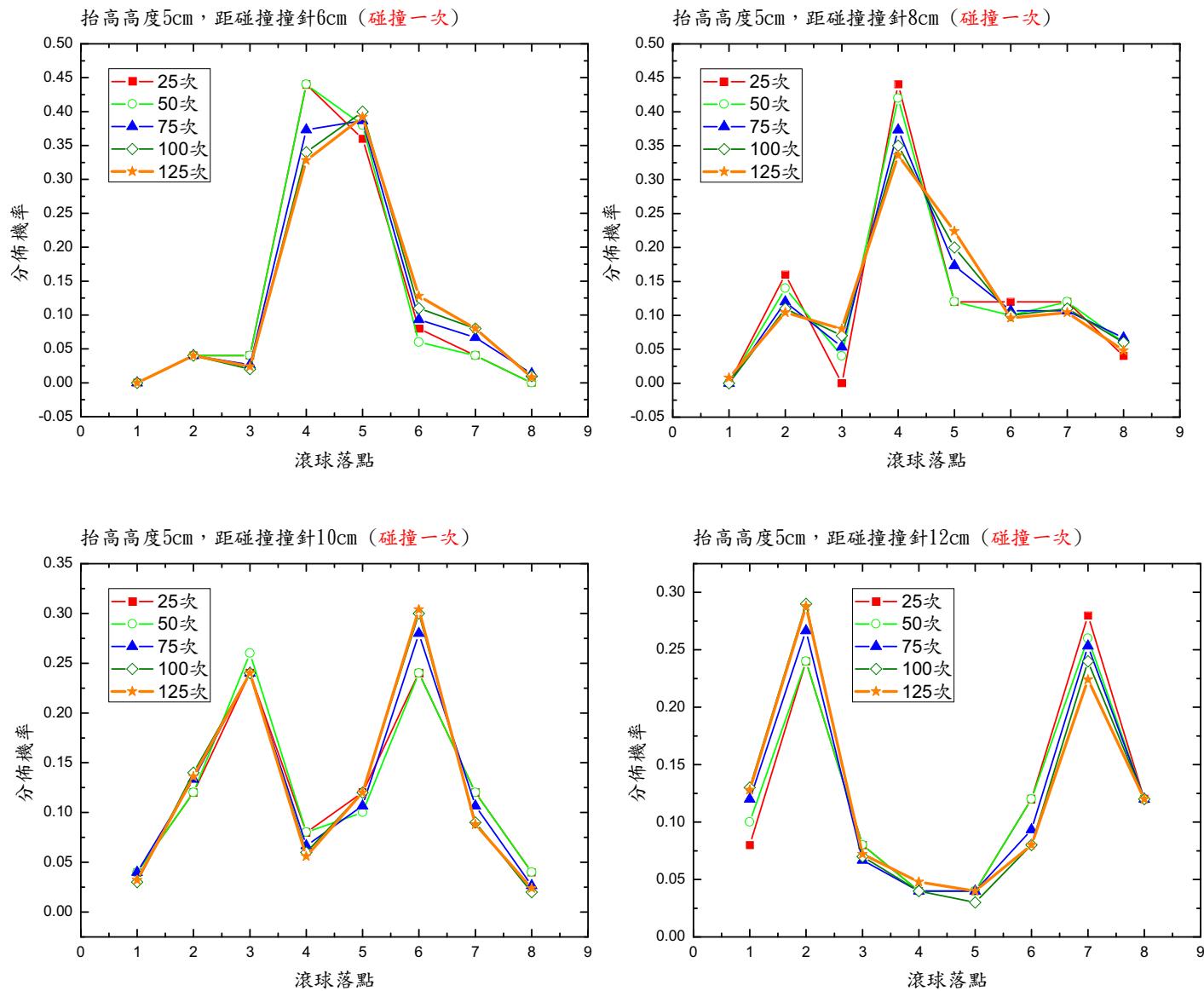


圖 16 固定彈珠檯抬高高度 5cm，滾珠出發點距撞針距離不同時之落點分佈圖。

討論：

- 1、本實驗中發現 BB 彈的落點分佈，容易受到第一次碰撞後，反彈的角度影響，所以如果在落下時有點小偏差，便會造成 BB 彈的落點無法預測，符合混沌現象的條件—「一點點的初始條件差異，會造成事件往後行為的大大不同。」
- 2、此實驗中分析 BB 彈撞擊撞針後反彈的落點分佈，每重複 25 次實驗為一單位，依次 25、50、75.....分析其落點分佈曲線，直到曲線變動極小為止，也就是達到收斂。而本組發現雖然無法預測每一次 BB 彈的落點，但最終卻可找出其分佈的規律。
- 3、由圖 16 結果得知，當 BB 彈出發點距碰撞撞針越近時，分佈會有明顯中央對稱之情形，我們認為滾珠落下時，其下滑速度愈來愈快，因此碰撞後反彈速度越快，滾珠的落點分佈便會隨著出發點距撞針距離越遠，而有朝兩側分佈之情形。其理由見下之分析：

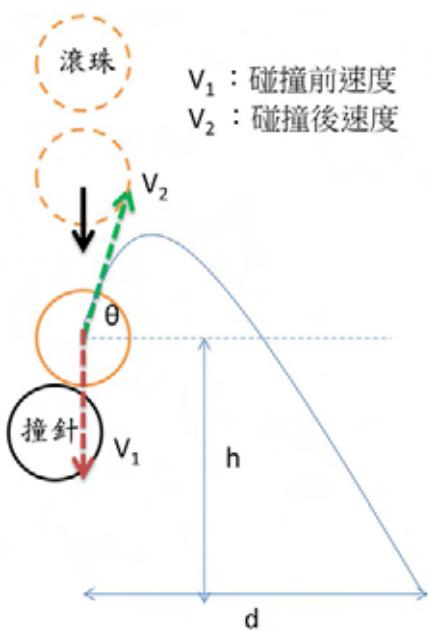


圖 17 滾珠撞擊撞針反彈的運動情形示意圖。

利用簡單拋體運動來解釋反彈後速度越快，偏離撞針之距離就越遠。

$$h = -V_2 \sin \theta t + \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow t = \frac{V_2 \sin \theta + \sqrt{V_2^2 \sin^2 \theta + 2ah}}{a}$$

$$d = V_2 \cos \theta \times t \rightarrow d = V_2 \cos \theta \times \left[\frac{V_2 \sin \theta + \sqrt{V_2^2 \sin^2 \theta + 2ah}}{a} \right]$$

若 V_2 方向朝下，則

$$d = V_2 \cos \theta \times \left[\frac{-V_2 \sin \theta + \sqrt{V_2^2 \sin^2 \theta + 2ah}}{a} \right]$$

其中 a 為下滑加速度， d 為偏離撞針之水平距離， h 為落下的垂直位移，為一定值。

由推導的最後結果得知當反彈後速度越大時，偏離撞針之水平距離 d 就越大。再來由基本能量觀念及碰撞理論得知，碰撞前 V_1 速度越快，則反彈的 V_2 也越快。

由前之討論發現，既然碰撞前的速度會影響落點分佈，因此為了更精確觀察滾珠撞擊撞針後之運動軌跡，我們利用 tracker 程式來了解滾珠撞擊撞針後的運動情形。

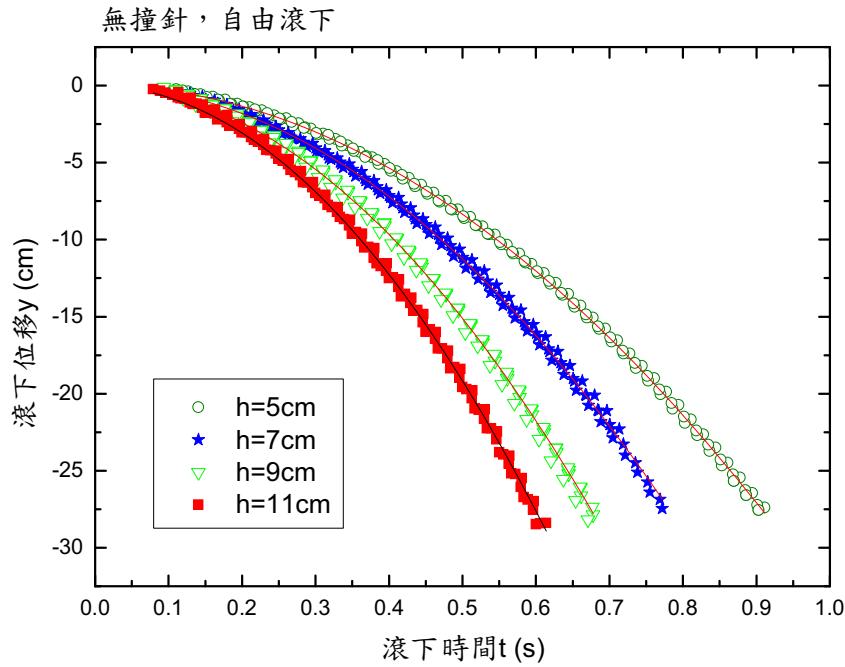


圖 18 改變彈珠檯傾斜度(藉由抬高彈珠檯的一端來控制), BB 彈滾下位移 y 與時間關係圖。

因為座標軸的設定關係，其位移是負的，且由圖 18 的運動軌跡分析後得知，在 y 方向為等加速度運動。

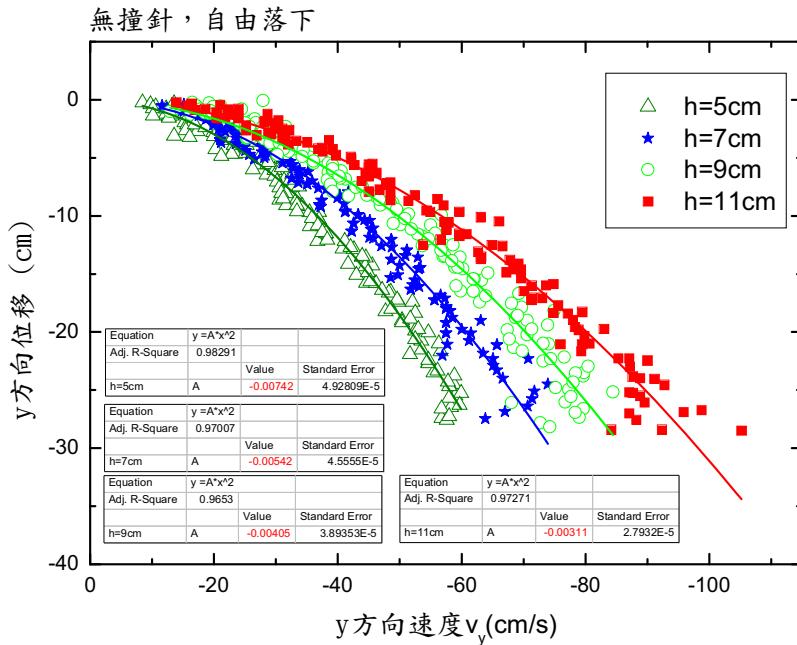


圖 19 BB 彈滾下位移 y 與 y 方向速度時間關係圖。

由圖 19 可以發現位移 y 與 y 方向速度平方成正比，滾下越遠，速度越快。

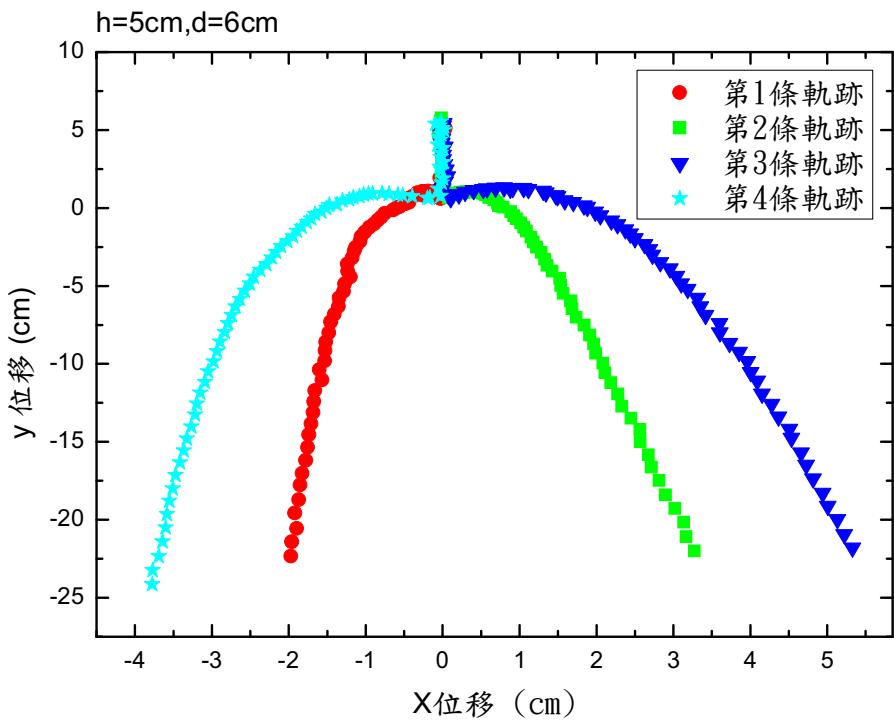


圖 20 彈珠檯一端抬高高度=5cm，出發點距撞針距離 $d=6\text{cm}$ ，BB 彈滾下碰撞後之軌跡。

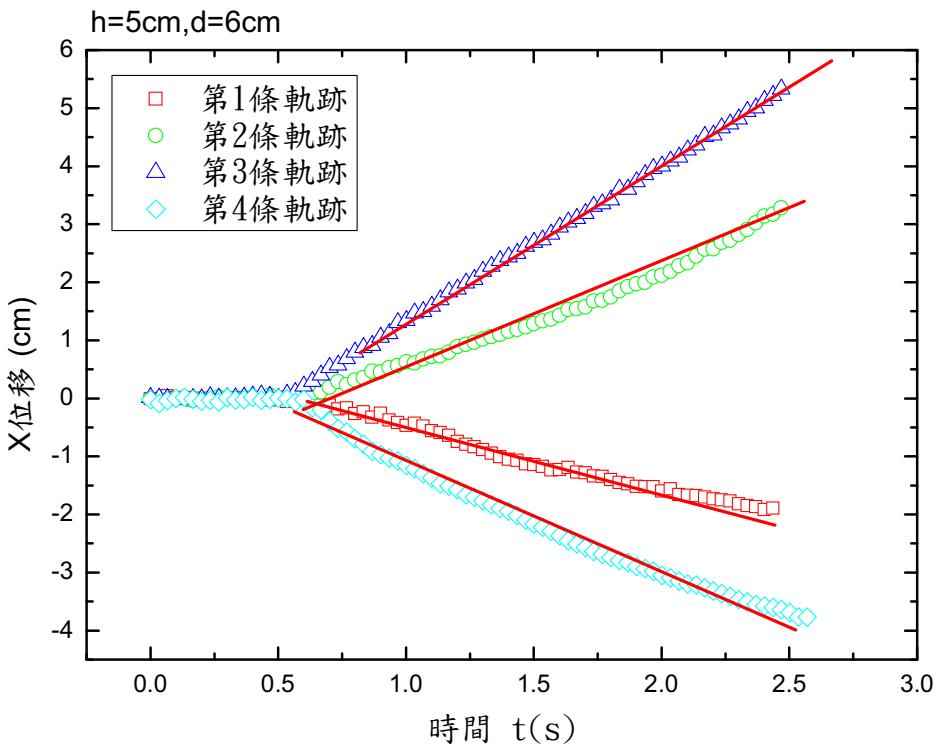
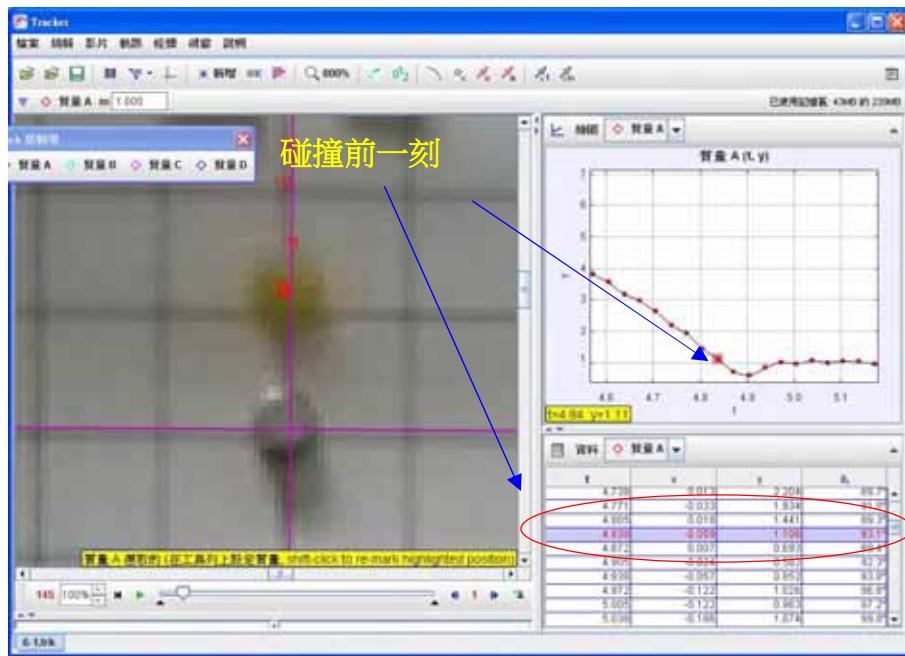


圖 21 BB 彈滾下，時間與 x 方向位移之關係圖。

由圖 21 可知碰撞後，x 方向的運動為等速直線運動，代表在 x 方向受到外力影響幾乎很小。

找出碰撞前，滾珠偏離 y 軸之位移 Δx ，以了解碰撞前的偏差，對最終落點位置之影響。



而為了了解碰撞後落點分佈變化，與碰撞後變化之關係，找出落點分佈與 θ 角之關聯。

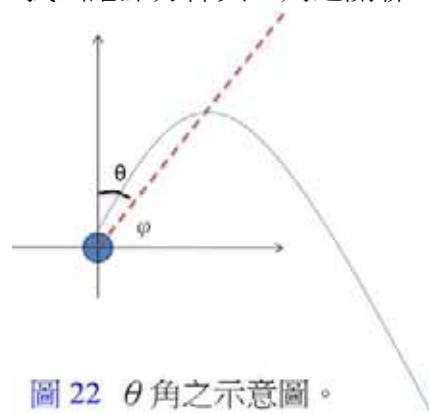
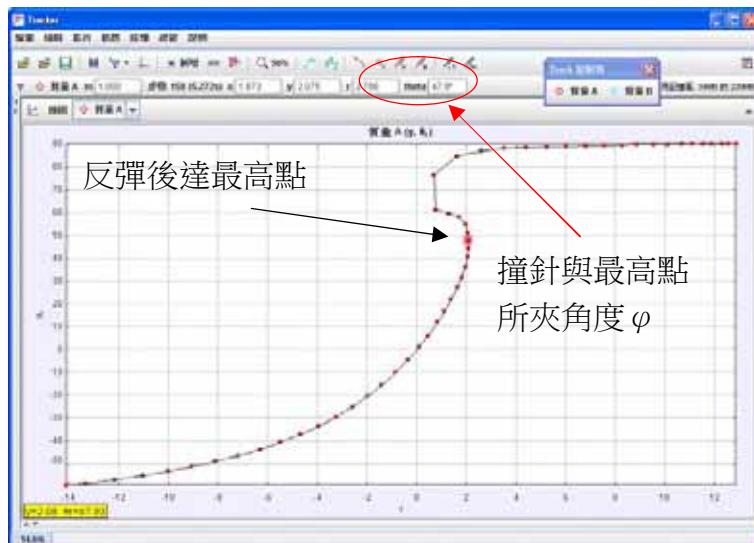


圖 22 θ 角之示意圖。

在不同傾斜度下，利用拍攝影片紀錄落點，並利用程式分析出 θ 角，找出落點和 θ 角之關係，另外也分析撞擊前 x 方向的偏差對落點位置之影響，結果如下頁，[圖 22-1 及 22-2 所示](#)：(數據列於附錄最後一頁)

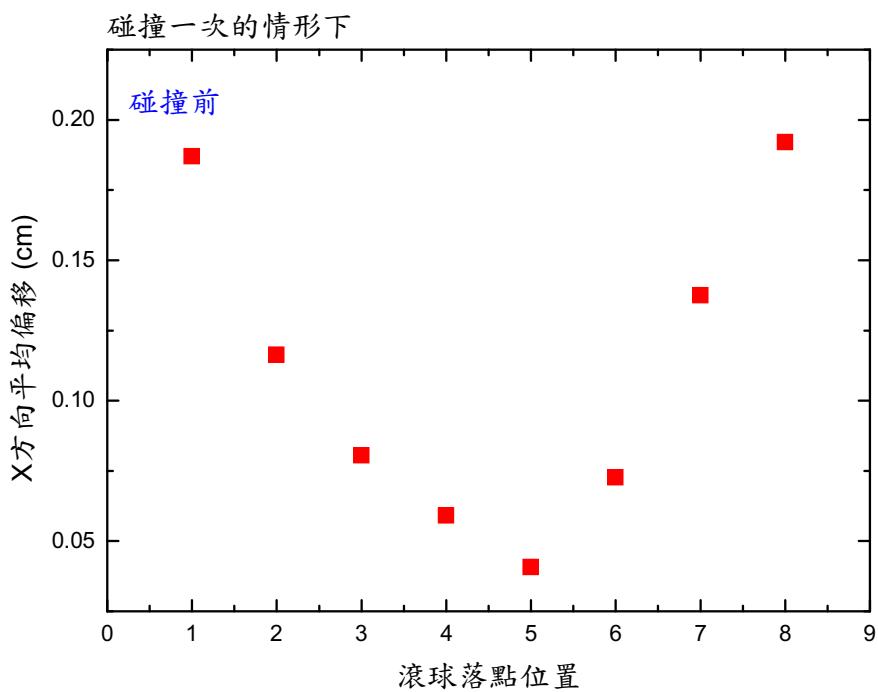


圖 22-1 碰撞前 x 方向偏移與滾珠落點位置關係圖。

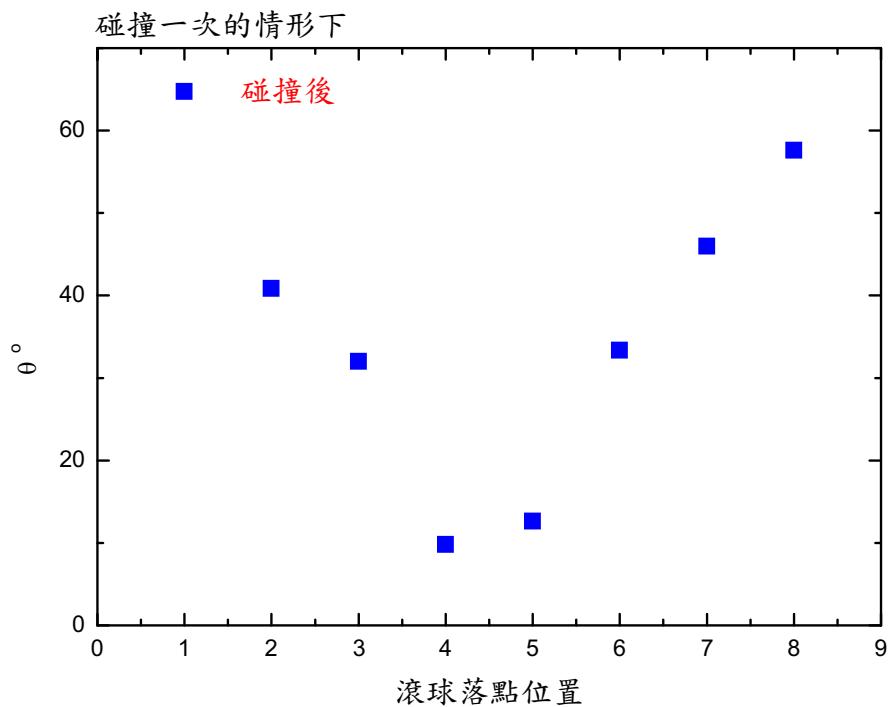


圖 22-2 碰撞後 θ 角與滾珠落點位置關係圖。

討論：

1、由 x-t 圖(圖 21)及 y-t 圖(圖 18)

發現在 x 方向的運動是直線運動，這是因為在 x 方向的運動不受外力運動，而在 y 方向的運動則受下滑力影響，其軌跡曲線為二次函數曲線。

2、而由 v-y 圖(圖 19)可以得知整

個碰撞過程的運動速度情形，隨著落下距離越長，其運動速度越快，代表出發點距撞針距離 d 越長，碰撞時的速度越快。

3、由圖 19 可以分析出彈珠檯抬高高度與 y 方向加速度之關係，如圖 23 所示，發現加速度與抬高之高度 h 成正比，代表彈珠檯越傾斜，BB 彈滾落的加速度越大，速度也越快。

4、經由分析 θ 角(與落點位置之關係(如圖 22-2 所示)，得知碰撞後 θ 角的變化，是可以預測落點的，隨著 θ 角越大，其落點位置變越會偏向兩側，但是在單一碰撞事件，依舊無法從碰撞前的狀態來預測碰撞後的變化。

5、嘗試分析碰撞前在 x 方向的偏移是否會造成滾點位置的變化，由前之數據統計當碰撞前 x 方向的偏移量越大，其同樣的落點位置也會偏向兩側(如圖 22-2 所示)，這也恰好印證觀念物理一書中提到當雪球滾下坡道時，如果坡道上有許多小石子，則即使每次開始滾動的位置皆相同，但雪球受到小的影響後，其最終位

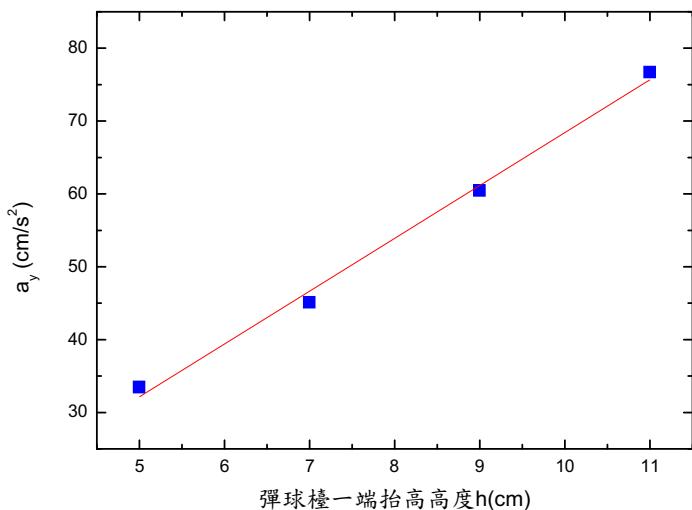


圖 23 彈珠檯一端抬高高度 h 與 y 方向加速度之關係圖。

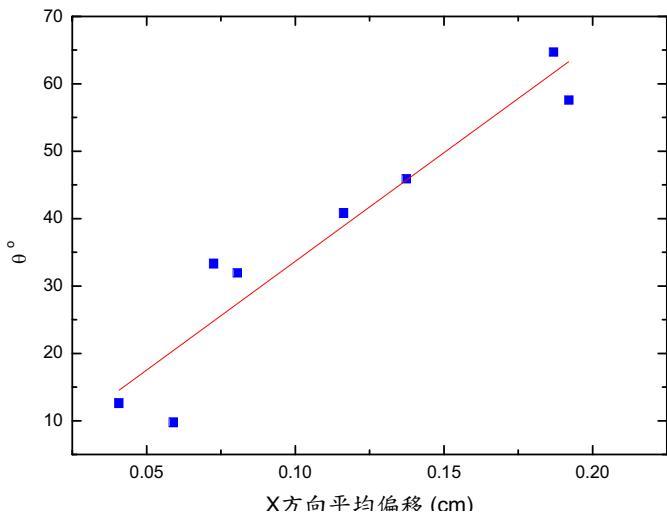


圖 23-1 碰撞前 x 方向位移與碰撞後 θ 角之關係圖。

置將會有極大的差異，這是因為只要在撞擊前產生極微小的偏差，則撞擊後的落點位置便會非常不一樣。另外，碰撞前後的變化也是有關聯性的，如圖 23-1 所示。

二、在不同滾珠出發點與撞針之距離下，探討彈珠檯傾斜度對滾珠落點分佈之影響。

改變彈珠檯抬高高度，觀察 BB 彈的分佈情形是否受到影響。因為篇幅的關係，不再將每次收斂情形繪出，而是將不同條件下最後機率分佈情形加以整理。(其它圖形詳見附錄)

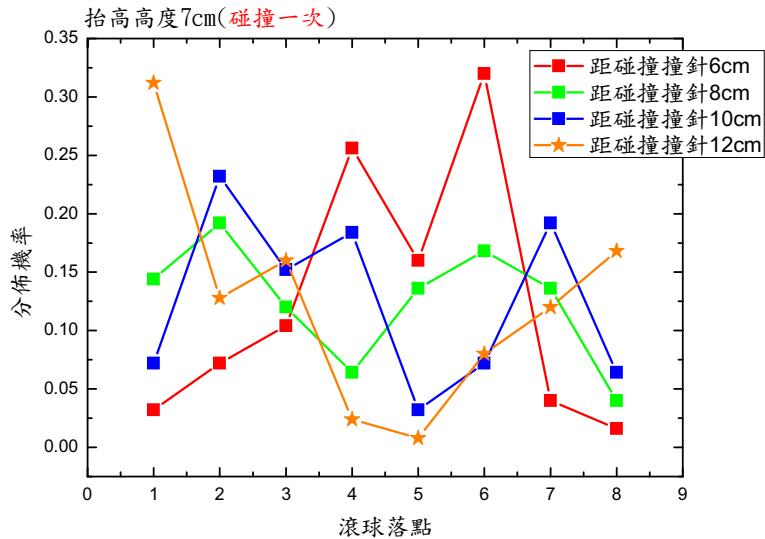


圖 24 固定彈珠檯一端抬高高度 7cm，滾珠出發點距碰撞撞針之不同距離，對滾珠(BB 彈)之落點分佈圖。

由圖 24 中可知發現滾珠出發點距撞針距離越長時，落點分佈會逐漸偏向兩側之情形。

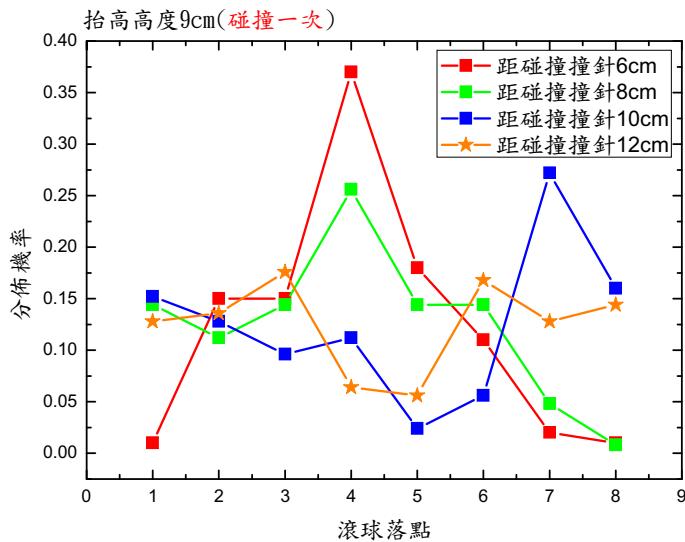


圖 25 固定彈珠檯一端抬高高度 9cm，滾珠出發點距碰撞撞針之不同距離，對滾珠(BB 彈)之落點分佈圖。

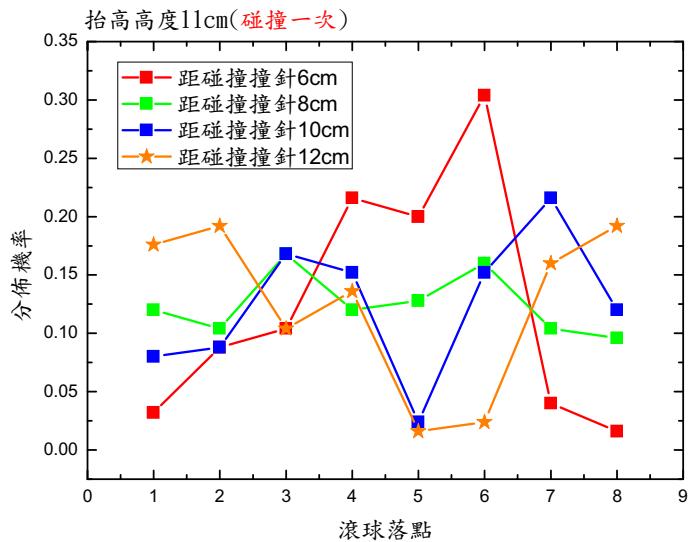


圖 26 固定彈珠檯一端抬高高度 11cm，滾珠出發點距碰撞撞針之不同距離，對滾珠(BB 彈)之落點分佈圖。

討論：

- 1、抬高彈珠檯一端高度，觀察 BB 彈落點分佈，發現抬高彈珠檯，BB 彈落點分佈仍有規律，且依然會「收斂」，但是隨傾斜度提高，BB 彈之落點便不易集中到中央區域，而是落點分佈漸漸偏離中線，如前之討論，在撞擊撞針前之速度越快，反彈後速度較大，則偏離距離較遠，因此落點分佈就不會集中在落點 4、5，而是分佈在兩側或是偏向一側。
- 2、由此實驗可知，BB 彈落點分佈與其碰撞前速度大小有極大之關係，雖然每次碰撞的接觸點都不盡相同，且反彈的角度也無法預測，但是碰撞前的速度會使的落點分佈機率呈現出規律性。
- 3、由前述之實驗得知，BB 彈一次碰撞後的落點明顯與撞擊前之速度有關，混沌的性質不易突顯，因此接下來的實驗將增加撞針數目，提高碰撞次數，使混沌的效應放大。

三、改變撞針排列情形，探討撞針的不同排列情形對滾珠落點分佈之影響。

在彈珠檯上以陣型一到陣型五的方式排列撞針，觀察 BB 彈撞擊撞針後落點分佈情形，及撞擊次數。其實驗結果見圖 27 所示

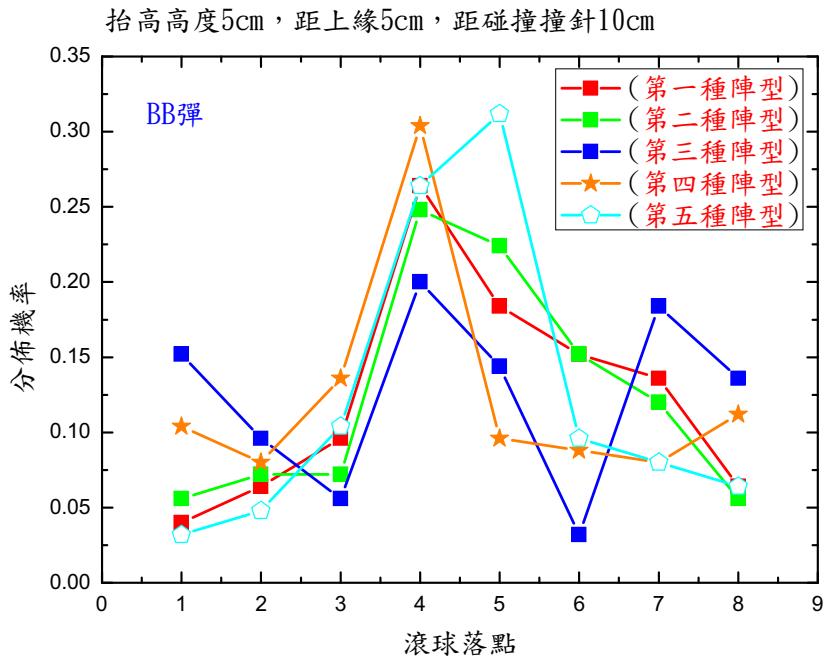


圖 27 BB 彈撞擊不同陣型後，所造成的落點分佈情形。

討論：

- 由實驗結果發現增加撞針數量，BB 彈的碰撞次數有增加之情形，其落點之分佈結果並不會比一次碰撞還要凌亂，且落點分佈曲線也會收斂，這是因為撞針的排列是有序的，因此多次碰撞後其落點分佈也仍舊有規律。
- 仔細觀察整個碰撞過程後發現，與碰撞一次的結果比較起來，陣型四、五的 BB 彈落點分佈有向中間集中的趨勢發生，觀察拍攝影片後得知可能情形如圖 28 所示：BB 彈如果只碰撞一次則分佈會較集中於兩側，或偏向某一側，但若是多次碰撞，便容易有向右彈再向左彈，如此左右交替的碰撞。則落點較易向中央集中。

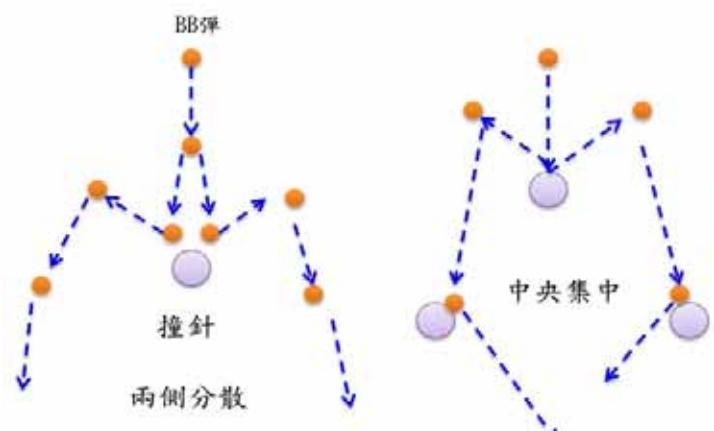


圖 28 BB 彈碰撞一次及多次碰撞之走向圖。

四、改變撞針直徑，探討撞針大小對滾珠落點分佈之影響。

改變撞針直徑 4mm、5mm、6mm、10mm，來進行一次碰撞之實驗來了解撞針大小對滾珠落點分佈之影響，其結果見圖 29~32 所示。

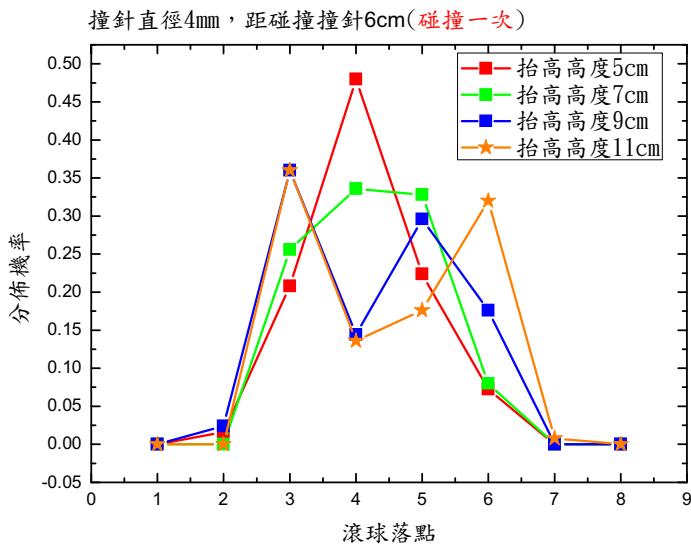


圖 29 撞針直徑 4mm，BB 彈撞擊後，不同傾斜度所造成的落點分佈情形。

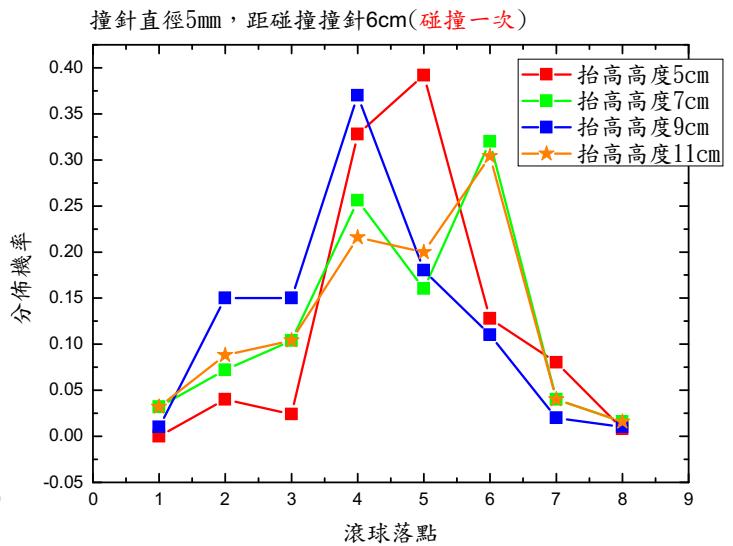


圖 30 撞針直徑 5mm，BB 彈撞擊後，不同傾斜度所造成的落點分佈情形。

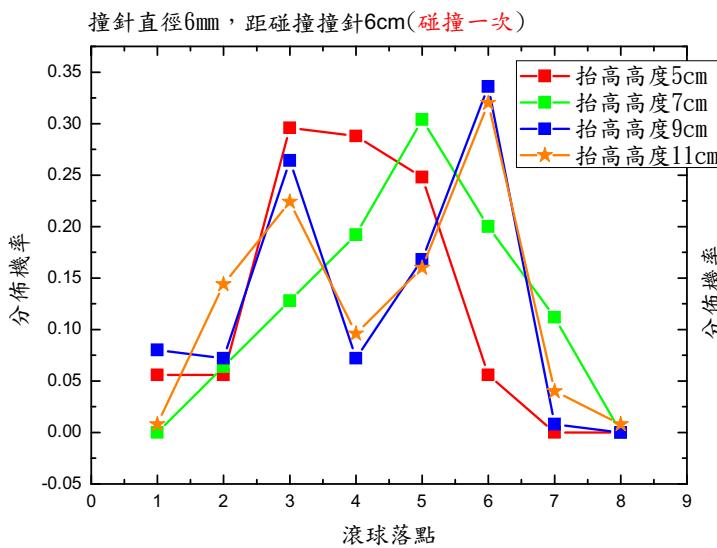


圖 31 撞針直徑 6mm，BB 彈撞擊後，不同傾斜度所造成的落點分佈情形。

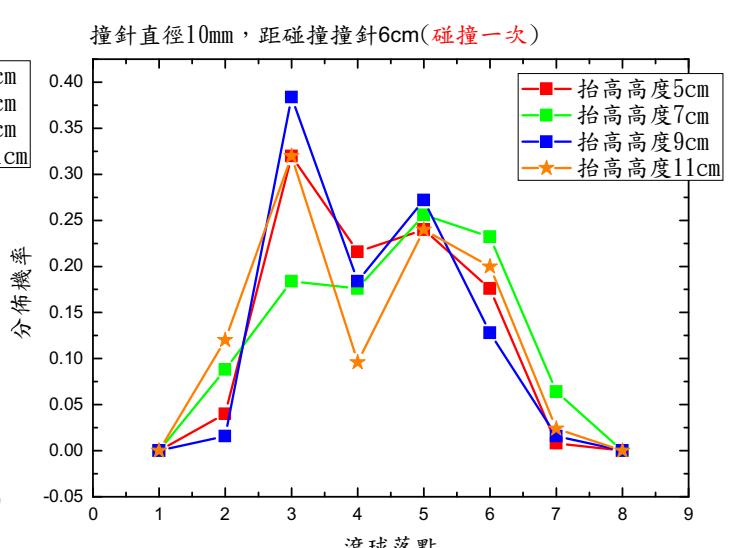


圖 32 撞針直徑 10mm，BB 彈撞擊後，不同傾斜度所造成的落點分佈情形。

將上述之實驗結果重新整理作圖，在固定彈珠檯傾斜度下，針對不同直徑之撞針對落點分佈情形來作圖，得到圖 33、34。

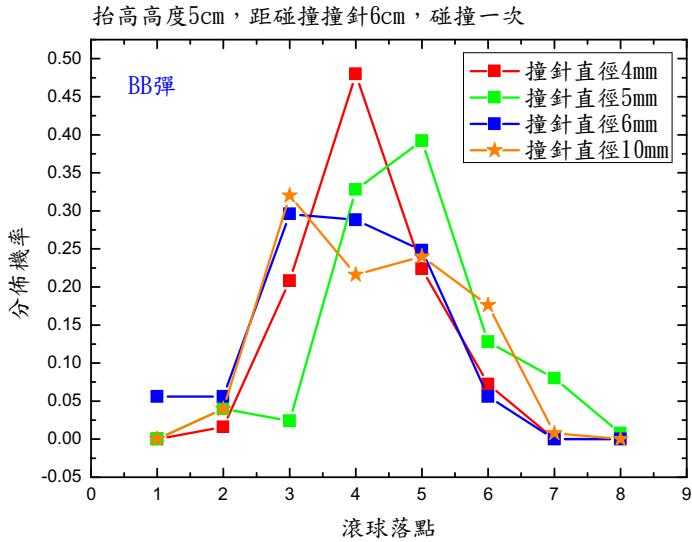


圖 33 固定傾斜度(抬高 5cm), BB 彈撞擊不同直徑撞針所造成的落點分佈情形。

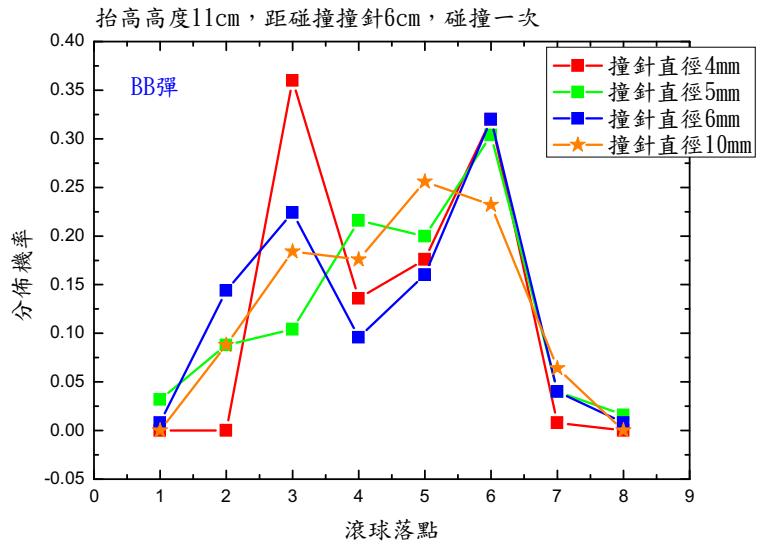


圖 34 固定傾斜度(抬高 11cm), BB 彈撞擊不同直徑撞針所造成的落點分佈情形。

討論：

- 由圖 29~32 發現在固定撞針大小的情況下，傾斜度越大，落點分佈仍舊有向兩側分佈之情形。
- 由圖 33、34 觀察到在固定彈珠檯傾斜度下，撞針直徑越大，其落點分佈反而比較平均，這與我們的認知相違背，照理撞針直徑越大，碰撞的角度變化較小，落點分佈應該比較集中，後來重新檢視實驗發現，撞擊直徑 10mm 的撞針在反彈角度較小時，易有二次碰撞的情形，因此造成分佈較平均的情形，而直徑 6mm 的撞針則是在傾斜度較小時，軌跡偏移較小時，易發生二次碰撞。
- 此外本組認為，每增加一次碰撞，混沌的效應變會更加強，因此分佈會朝向更平均。所以以後的實驗將增加撞針數目，以提高碰撞次數，使混沌的效應更明顯。

五、以黑珠取代 BB 彈，探討滾珠大小，對滾珠落點分佈之影響。

其實驗結果見圖 35~38 所示。

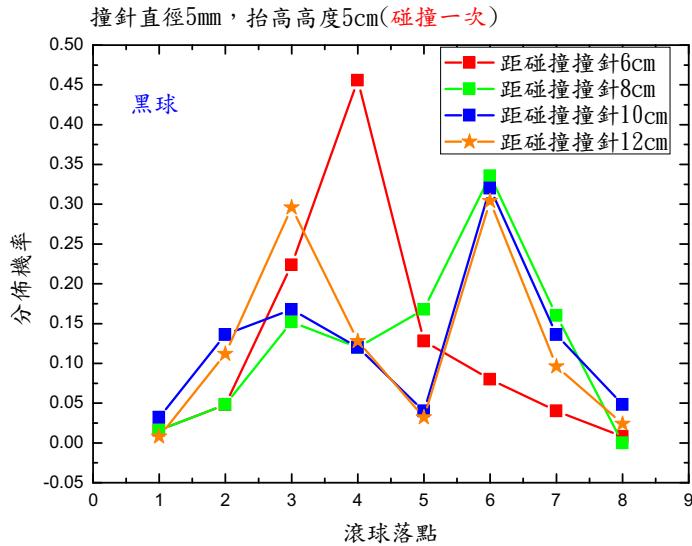


圖 35 固定彈珠檻一端抬高高度 5cm，滾珠(黑珠)出發點距碰撞撞針之不同距離，對滾珠之落點分佈圖。

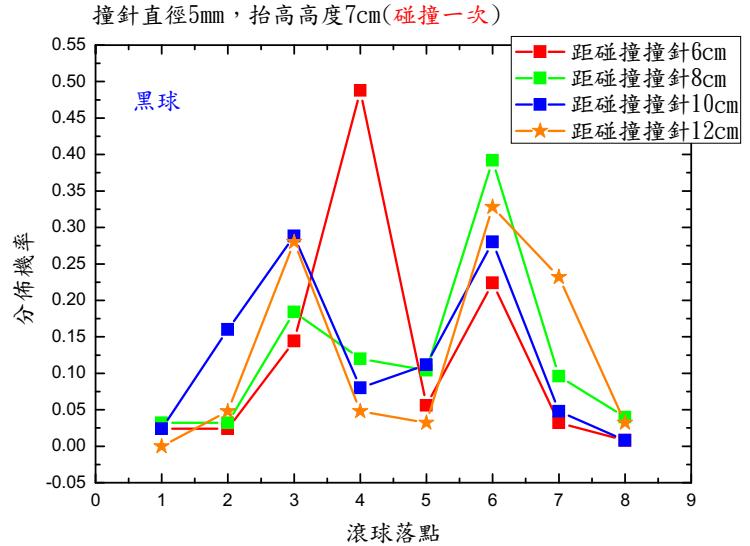


圖 36 固定彈珠檻一端抬高高度 7cm，滾珠(黑珠)出發點距碰撞撞針之不同距離，對滾珠之落點分佈圖。

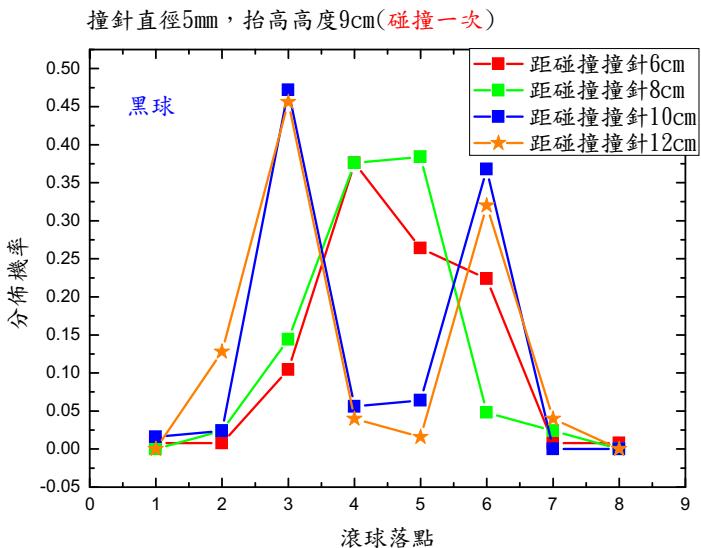


圖 37 固定彈珠檻一端抬高高度 9cm，滾珠(黑珠)出發點距碰撞撞針之不同距離，對滾珠之落點分佈圖。

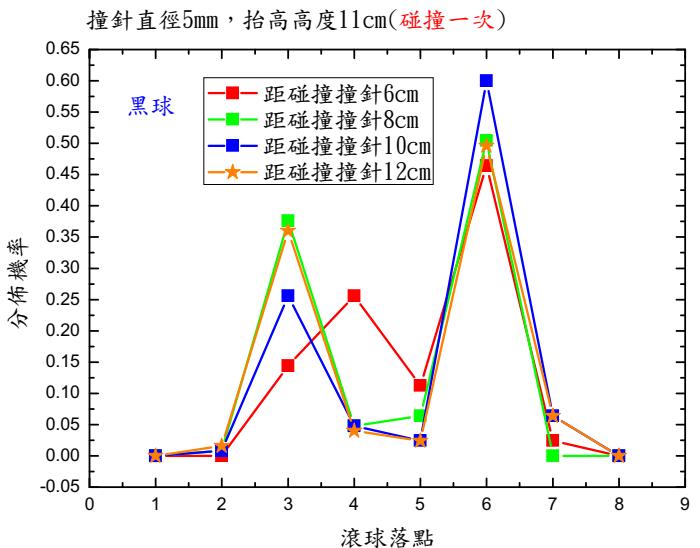


圖 38 固定彈珠檻一端抬高高度 11cm，滾珠(黑珠)出發點距碰撞撞針之不同距離，對滾珠之落點分佈圖。

由圖 35~38 可知，黑珠出發點距撞針較近時，落點分佈是呈現中央集中情形，而距撞針較遠時則呈現雙峰之情形，且分佈情形比使用 BB 但還來的有序。

黑珠受一~五種陣型的影響，所形成之落點分布情形。

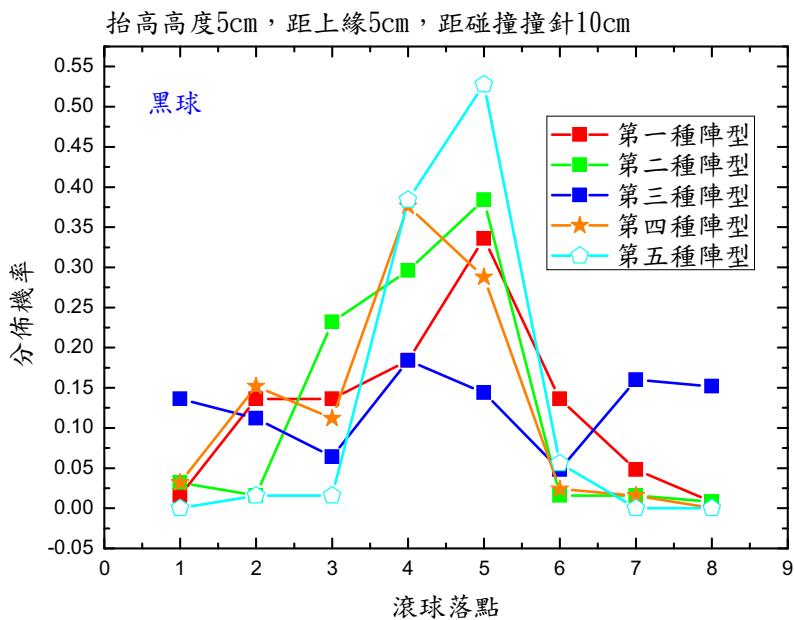


圖 39 黑珠撞擊不同陣型後，所造成的落點分佈情形。

一、二、四、五陣型會有中央集中的情形，而第三種陣型則較為平均。分佈情形與使用 BB 彈當滾珠的分佈結果一致。

討論：

1、以黑珠取代 BB 彈，重複 BB 彈一次碰撞的實驗，其落點分佈機率曲線，仍舊有收斂的現象，而且發現黑珠的分佈有呈現雙峰的現象。本組認為黑珠撞到撞針時，反彈角度不如 BB 彈來的大，所以落點大多落在 3、4、5、6 號，可由圖 35~38 知看出。而又如圖 40 所示，假設落下時，BB 彈和黑珠的微小偏移量 x 相同，但是反彈後，BB 彈的角度改變反而比較大，所以黑珠碰撞後反彈角度較小，落點也就多在 2、3、6、7 兩格，且隨黑珠撞擊撞針前之速度越快，此現象越明顯。

2、碰撞前的速度仍舊影響其落點分佈，碰撞前速度越快，落點分布變越趨於兩側，現象非常明顯。

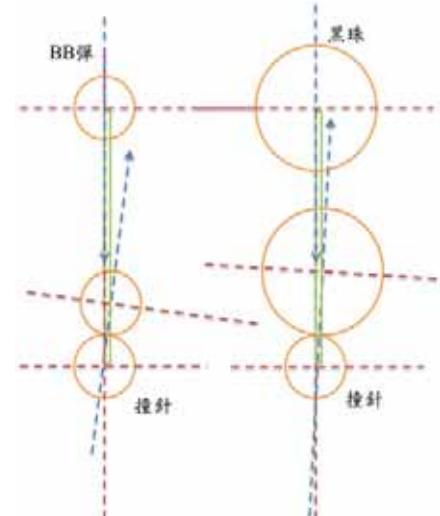


圖 40 BB 彈及黑珠偏移固定大小時，碰撞後的偏移情形。

3、改以黑珠來探討撞針排列陣型對其落點分佈影響，結果發陣型一、二、四、五都有明顯的中央集中的趨勢，但是陣型三則落點分佈較平均，觀察影片發現陣型三的排列會形成向左右兩側偏的通道，如圖 41 所示，因此不會產生中央集中的現象。

4、實驗發現，黑珠比 BB 彈的落點分佈還來的穩定，本組推測是因黑珠質量較大，不易受到外界的影響而變化。

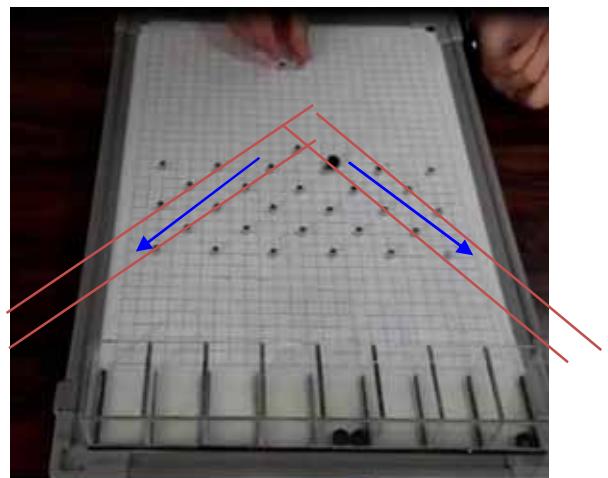


圖 41 黑珠在陣型三碰撞的走勢示意圖。

六、固定撞針排列形狀(三角形)，改變撞針排列密度，探討對滾珠落點分佈之影響。

改以三角陣型來做實驗，改變撞針排列密度，如表 1 所示，探討撞針排列密度對撞針落點分佈機率之影響，並改變撞針直徑大小、彈珠檯傾斜度及排列的層數等變因。其實驗結果見圖 42~47 所示。

表 1 撞針排列密度列表

高密度撞針排列，其密度為每平方公分有 6.6 個撞針。	中密度撞針排列，其密度為每平方公分有 3.6 個撞針。	低密度撞針排列，其密度為每平方公分有 2.1 個撞針。

採用 BB 彈，高密度層層排列撞針，觀察隨著撞針排列層數增加，滾珠落點之分佈情形。其結果見圖 42 所示。

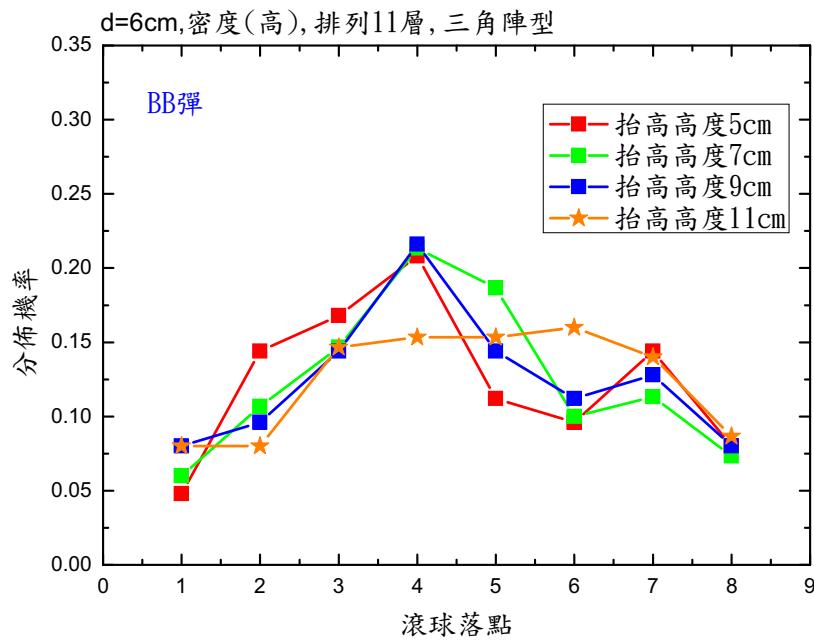


圖 42 撞針排列密度高，排列 11 層時，不同傾斜度的 BB 彈落點之分佈圖。
由圖 42 可知撞針排列密度較高，層數為 11 時，其落點分佈機率將越趨於平均。

在固定排列密度下，觀察隨著撞針排列層數增加，滾珠落點之分佈情形

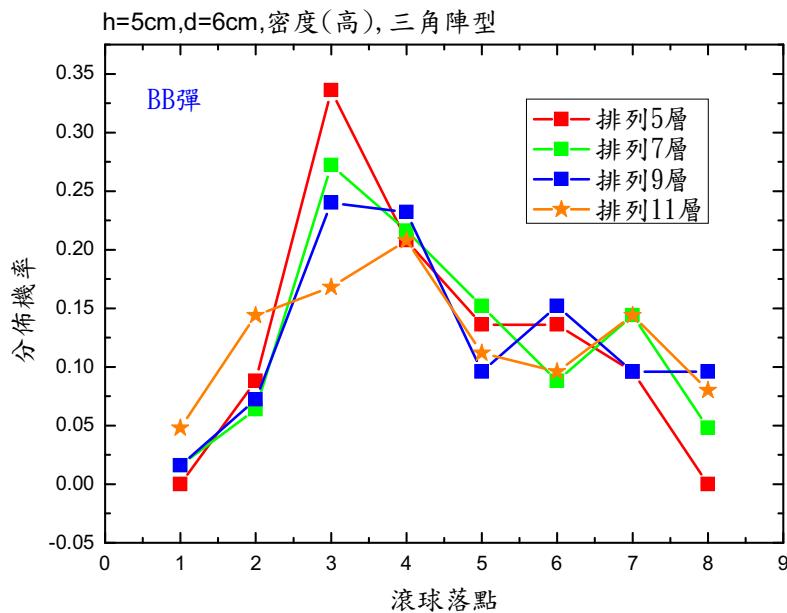


圖 43 固定傾斜度及撞針排列密度，排列層數對 BB 彈落點之分佈圖。
由圖 43 可知撞針排列的層數為越多時時，其落點分佈機率將越趨於平均。

改以不同密度的撞針排列陣型，其密度大小見表一所列，分別為每平方公分 6.6、3.6、2.1 個撞針，觀察在不同的排列密度下，滾珠落點之分佈情形。

以下固定抬高彈珠檯一端為 5cm

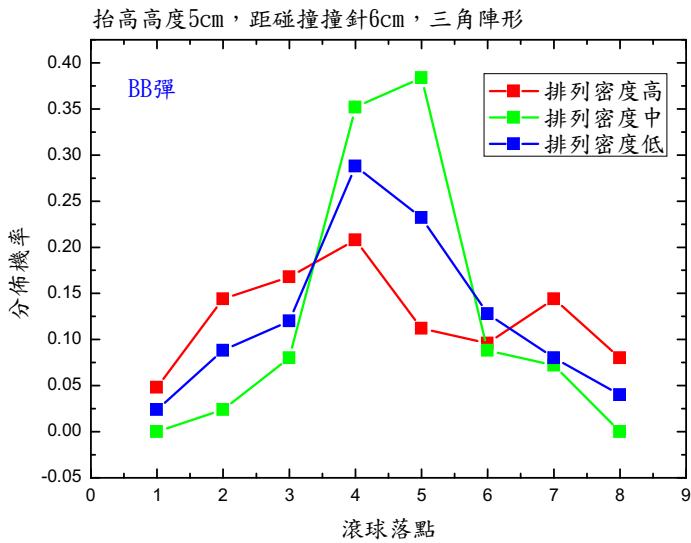


圖 44 固定傾斜度，撞針直徑 5mm，不同排列密度對 BB 彈落點影響之分佈圖。

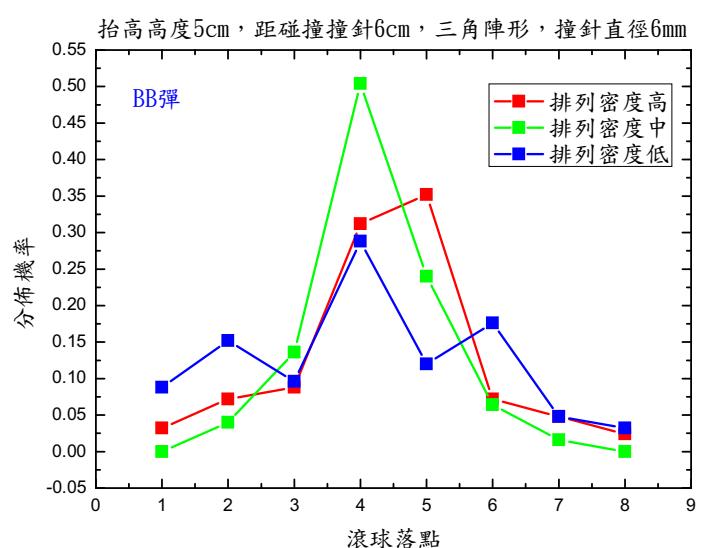


圖 45 固定傾斜度，撞針直徑 6mm，不同排列密度對 BB 彈落點影響之分佈圖。

以下固定抬高彈珠檯一端為 11cm

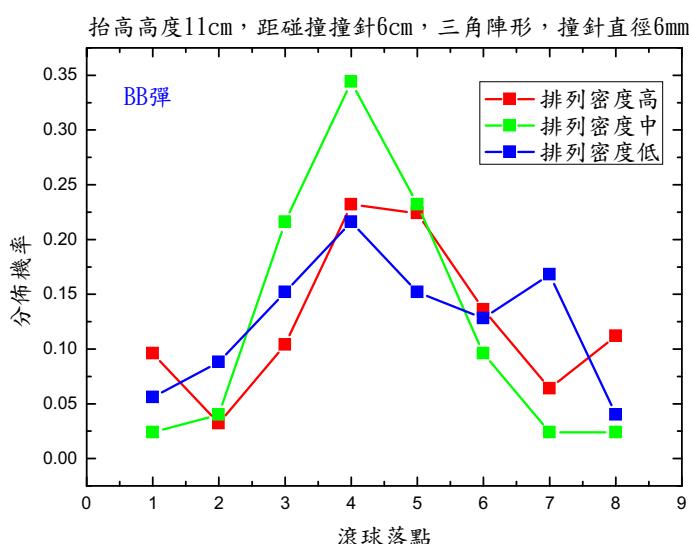


圖 46 固定傾斜度，撞針直徑 5mm，不同排列密度對 BB 彈落點影響之分佈圖。

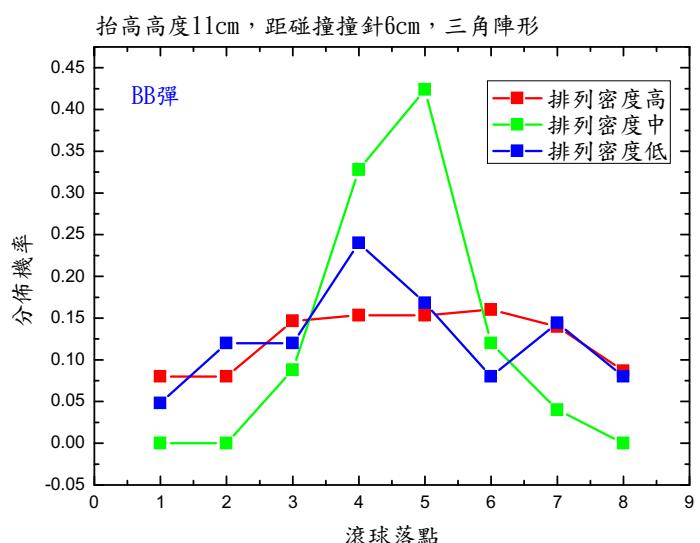


圖 47 固定傾斜度，撞針直徑 5mm，不同排列密度對 BB 彈落點影響之分佈圖。

說明 由圖 44~47 可看出，因彈珠檯較為傾斜，因此碰撞前速度較快，其落點分佈機率較平均的情形，以高密度最明顯，而中密度最差。但是在撞針直徑較小時則分佈便會趨於集中。

討論:

1、由圖 45~47 實驗結果發現，告密度排列，落點分佈有越平均之情形，因為碰撞次數本組認為陣型排列較密，撞擊後反彈的 x 方向位移會大於撞針間距，因此如圖 48 所示，在第一次碰撞後會有多種進入陣型的可能發生，因此導致最終落點分佈是呈現較平均之分佈。

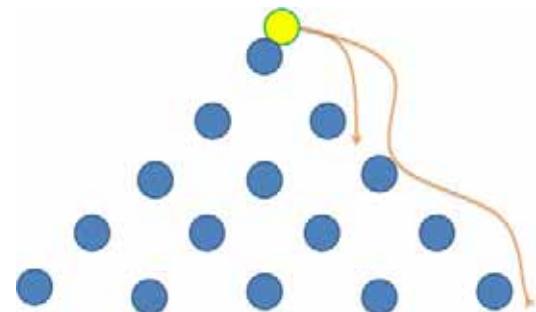


圖 48 高密度排列陣型，BB 彈碰撞情形示意圖

2、而改以不同排列密度來進行實驗，發現中密度的撞針排列方式無所形成之落點並無平均之情形，本組認為撞針之間距造成第二次碰撞時受到侷限，因此才會有中央集中之情形，如圖 49 所示。而低密度因為分佈較鬆散，無侷限之情形，因此分佈也較平均。

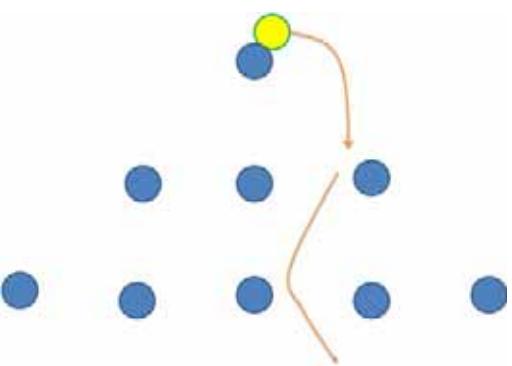


圖 49 中密度排列陣型，BB 彈碰撞情形示意圖

3、最後可以得知，當撞針排列越多，造成其碰撞越多時，其落點分佈也較為平均，但前提是 BB 彈的軌跡是不能被侷限的。同樣我們也發現，碰撞次數越多，混沌效應也越大，則彈珠落下後，落在每個方格的機率將趨於一致。這樣可以建議夜市打彈珠的老闆，利用撞針排列方式來控制彈珠落點分佈，或者是玩小鋼珠中獎的機率。

七、在陣型實驗中，僅移動第一支撞針位置(小偏差)，探討此動作對 BB 彈落點分佈之影響。

為了驗證混沌理論中常提到的蝴蝶效應現象，本組在三角陣型實驗中，將第一次碰撞的撞針向左或向右移動 0.5mm(撞針直徑為 5mm)，其餘撞針位置不變，觀察滾珠落點之分佈。其結果見圖 50 及圖 51 所示。

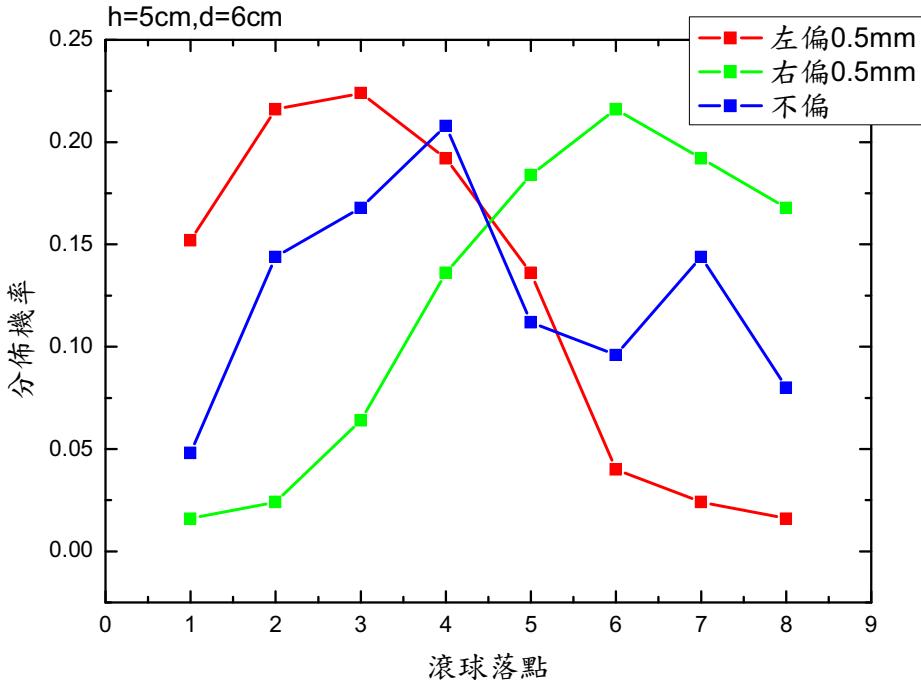


圖 50 抬高高度 5cm，第一次碰撞撞針偏移情形對 BB 彈落點影響之分佈圖。

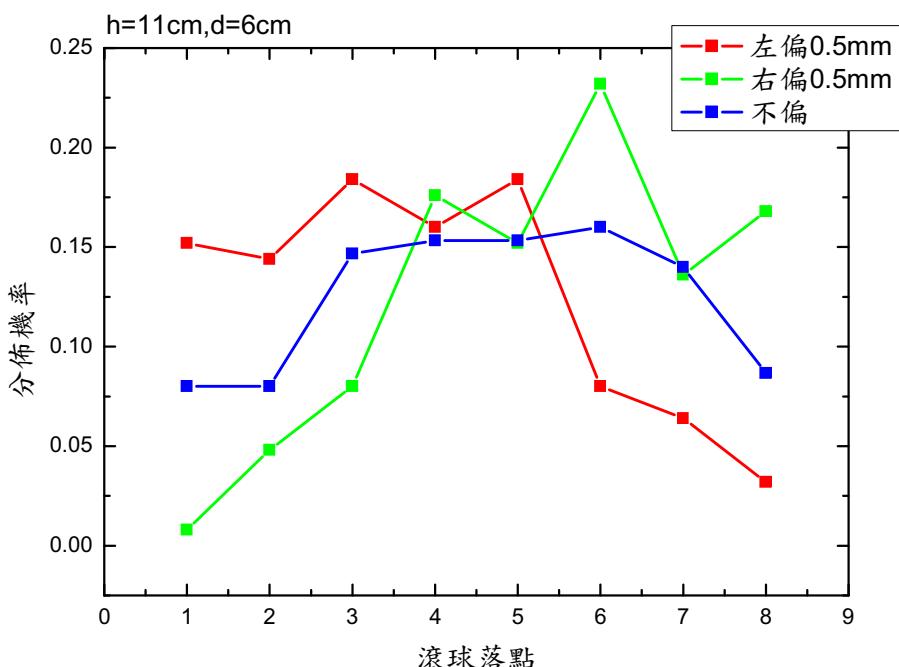


圖 51 抬高高度 11cm，第一次碰撞撞針偏移情形對 BB 彈落點影響之分佈圖。

討論:

- 1、由圖 50、51 發現撞針偏移，相對的落點分佈也會跟著偏移。
- 2、雖然落點分佈有跟著偏移，但是經由陣型作用，仍是朝著使整個分佈趨於平均來進行，所以可以看到分佈偏向一側，但落點分佈的機率在此側也會較平均，且另一側接近中央的落點也會有不少彈珠落下。

陸、結論

根據實驗數據與討論，我們可得到以下幾點結論：

- 一、BB 彈落下的落點是不易預測的，因為在滾落的過程中可能會有小偏差，使得碰撞到撞針時，反彈角度改變，導致最後之落點差異極大，而在滾珠的滾落過程中，我們是無法去消弭這小偏差，但是多次實驗後發現，其落點分佈卻是有跡可循的，這正符合混沌現象所提到的不規則之中仍存在秩序性。而實驗中分析 BB 彈撞擊撞針後反彈的落點分佈，直到曲線變動極小為止，也就是達到收斂。而本組發現雖然無法預測每一次 BB 彈的落點，但最終卻可找出其分佈的規律。
- 二、我們認為滾珠落下時，其下滑速度愈來越快，因此碰撞後反彈速度越快，其落點分佈會由中央對稱，向兩側分佈，形成雙峰分佈，這是因為碰撞前速度越快，反彈後落點分佈會有朝兩側擴散的現象。
- 三、在滾珠自由滾下的過程中，符合牛頓的運動定律， x 方向的運動是直線運動，這是因為在 x 方向的運動不受外力運動，而在 y 方向的運動則受下滑力影響，其軌跡曲線為二次函數曲線。
- 四、經由分析反彈後最高點與撞針連線與 y 軸夾角 θ 角與落點分佈之關係，得知碰撞後 θ 角的變化，是可以預測落點的，但是在單一碰撞事件，依舊無法從碰撞前的狀態來預測碰撞後的變化。
- 五、因此改以滾珠撞擊前的 x 方向偏差來預測落點，發現此偏差與碰撞後落點位置有極大相關，偏差越大，落點位置越趨於兩側。
- 六、以 BB 彈作為滾珠，且改變撞針排列方式(5 種陣型)，其落點分佈情形仍具有規律，且會收斂。這乃是因為撞針的排列是有規律的，因此碰撞後的落點分布也是有規律性的。
- 七、在一次碰撞的情形下，固定傾斜度，撞針直徑越大，其落點分佈反而比較平均，這與我們的認知相違背，照理撞針直徑越大，碰撞的角度變化較小，落點分佈應該比較集中，後來重新檢視實驗發現，撞擊直徑 10mm 的撞針在反彈角度較小時，易有重複碰撞的情形(往上彈後，因為反彈角度小，會有重新撞擊撞針的情形)，因此造成分佈較平均的情形，每增加一次碰撞，混沌的效應便會更加強，因此分佈會朝向更平均。
- 八、以黑珠作為滾珠，其體積較大，碰撞後反彈角度較小，所以黑珠碰撞後的落點分佈會落

在中線的兩側，且呈雙峰分佈(大都落在 3、6 兩格或 2、7 兩格)，當落下速度越快時，雙峰分佈情形就越明顯。且發現黑珠比 BB 彈的落點分佈還來的穩定，本組推測是因黑珠質量較大，不易受到外界的影響而變化。

九、實驗發現，排列陣型層數越多，落點分佈有趨於平均之情形，因為碰撞次數較多的緣故，但前提是 BB 彈的軌跡是不能被侷限的。同樣我們也發現，碰撞次數越多，混沌效應也越大，則彈珠落下後，落在每個方格的機率將趨於一致。這樣可以建議夜市打彈珠的老闆，利用撞針排列方式來控制彈珠落點分佈，或者是玩小鋼珠中獎的機率。

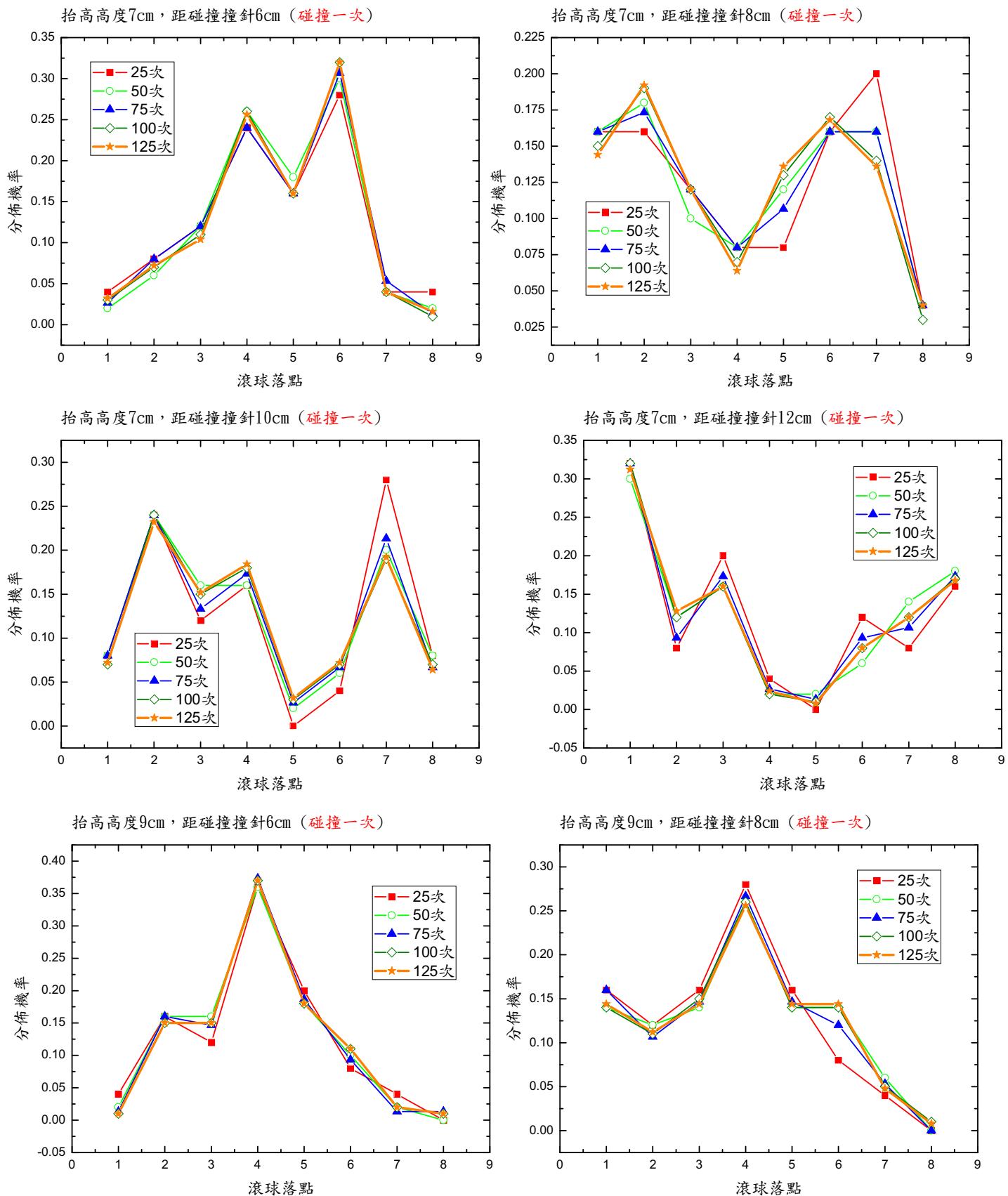
十、改以不同排列密度來進行實驗，發現高密度及低密度的排列方式，滾珠的落點分佈會趨於平均，但中密度的撞針排列方式則無此情形(其分佈會有中央集中之情形)，本組認為撞針之間距造成第二次碰撞時受到侷限，因此才會有中央集中的現象。因此提高碰撞次數會使機率分佈趨於一致，但前提式排列方式不能刻意去侷限滾珠的軌跡。

十一、為了驗證混沌理論中常提到的蝴蝶效應現象，本組在三角陣型實驗中，將第一次碰撞的撞針稍微移動，發現雖然落點分佈有跟著偏移，但是經由陣型作用，仍是朝著使整個分佈趨於平均來進行，也就是說雖然刻意使滾珠朝向某一側分佈，但是多次碰撞後，會使落點的分佈機率趨於一致。即在此種情形下並無明顯的蝴蝶效應現象。

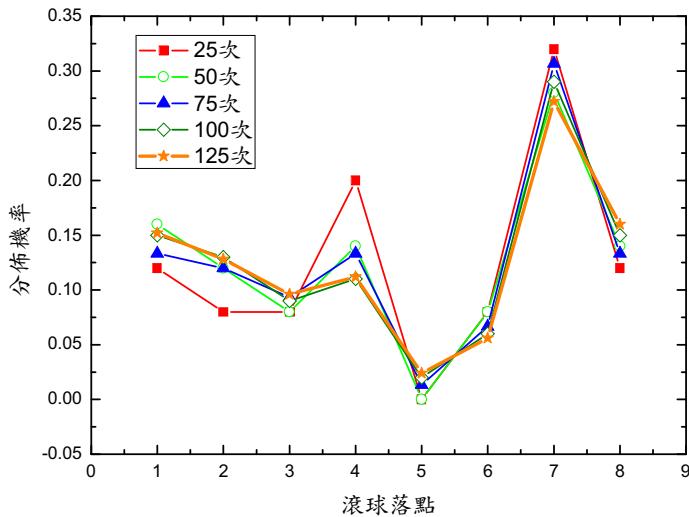
柒、參考資料

- 一、施佑蓉等，2009，”線線危機--矩形截點數之探討”，中華民國第 49 屆中小學科展國小組數學科，國立臺灣科學教育館，台北。
- 二、江文楷等，2003，”歐姆~這真是太神奇了！—探討電子在導線中運動的情形”，中華民國第 43 屆中小學科展國中組物理科，國立臺灣科學教育館，台北。
- 三、張崇賢等，1982，”傳統的吃角子老虎--滾彈珠的研究”，中華民國第 22 屆中小學科展國小組數學科，國立臺灣科學教育館，台北。
- 四、章學元等，2006，”同步現象的研究”，2006 年台灣國際科展物理科，國立臺灣科學教育館，台北。

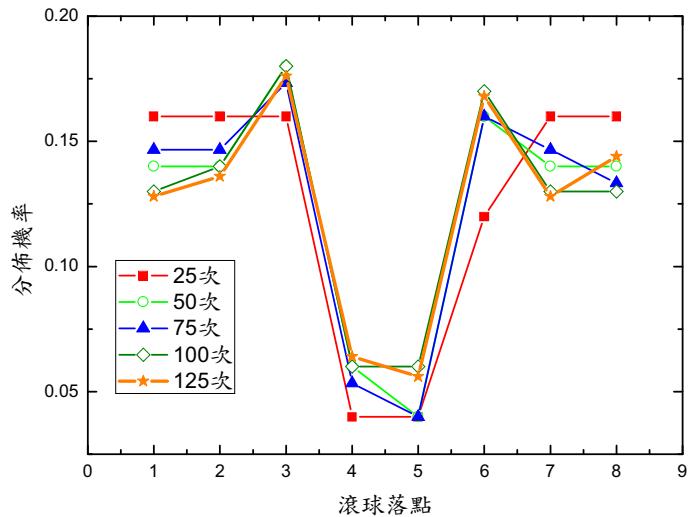
附錄



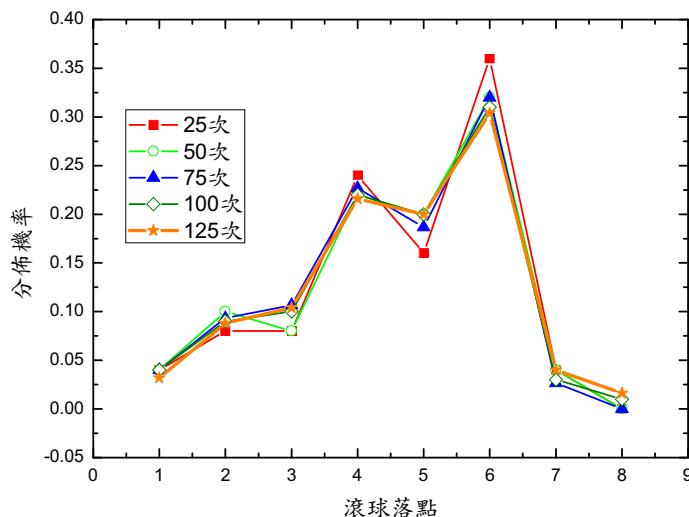
抬高高度9cm，距碰撞撞針10cm（碰撞一次）



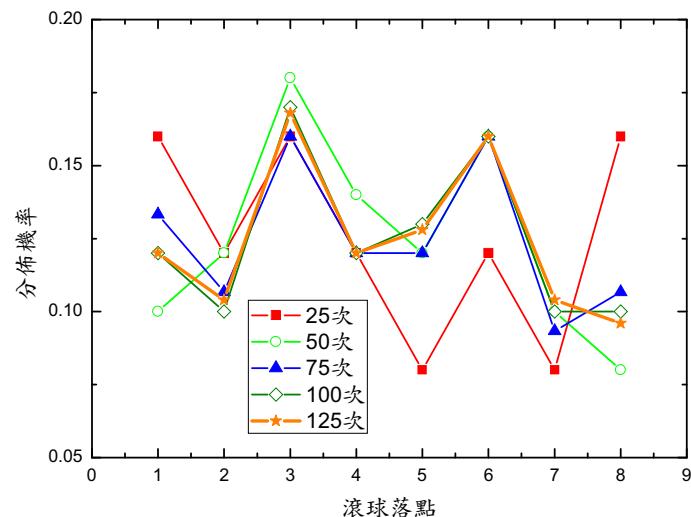
抬高高度9cm，距碰撞撞針12cm（碰撞一次）



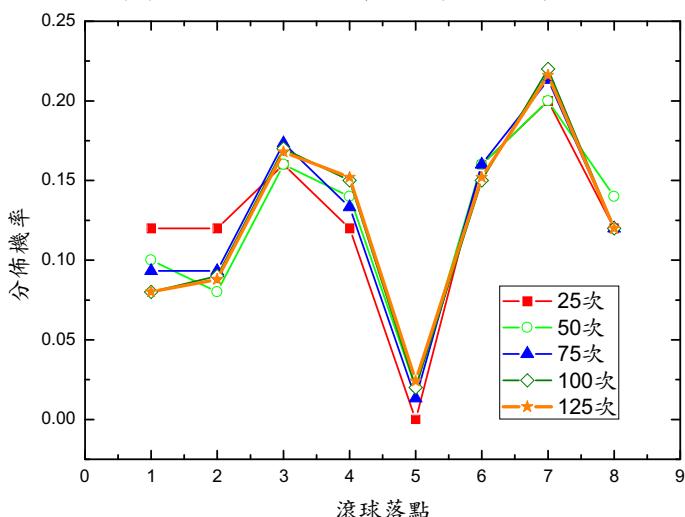
抬高高度11cm，距碰撞撞針6cm（碰撞一次）



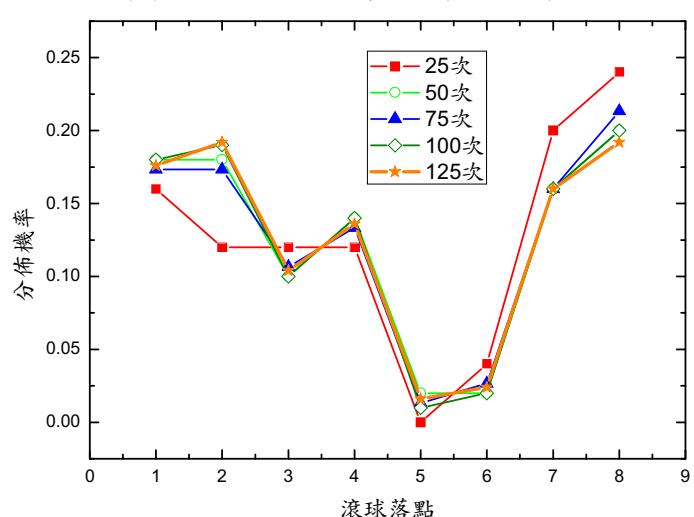
抬高高度11cm，距碰撞撞針8cm（碰撞一次）



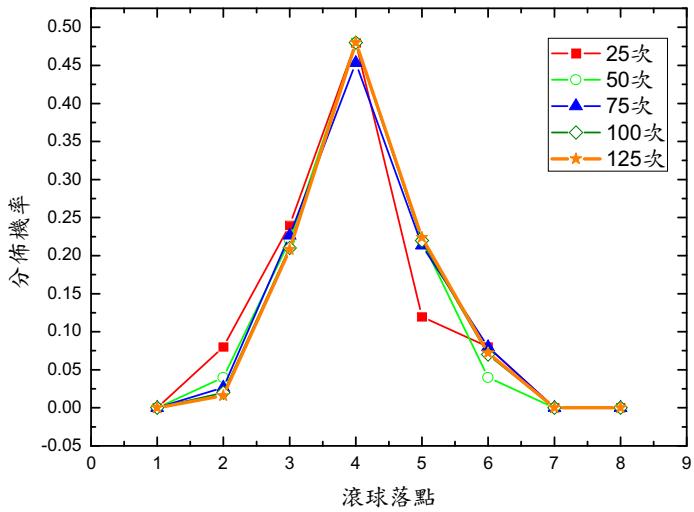
抬高高度11cm，距碰撞撞針10cm（碰撞一次）



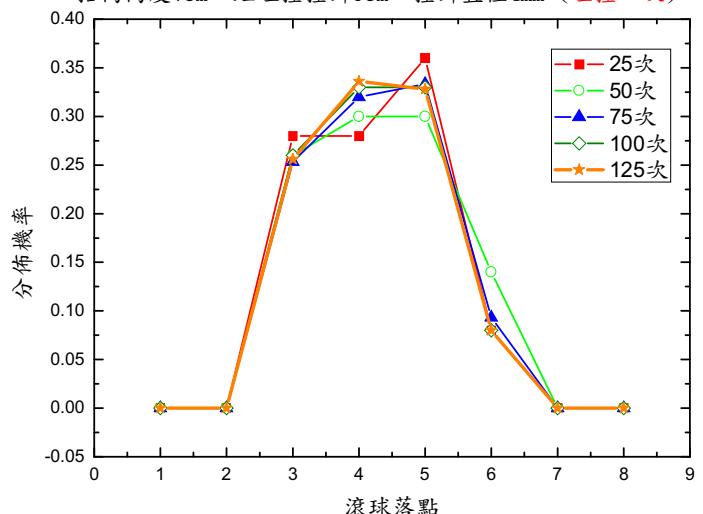
抬高高度11cm，距碰撞撞針12cm（碰撞一次）



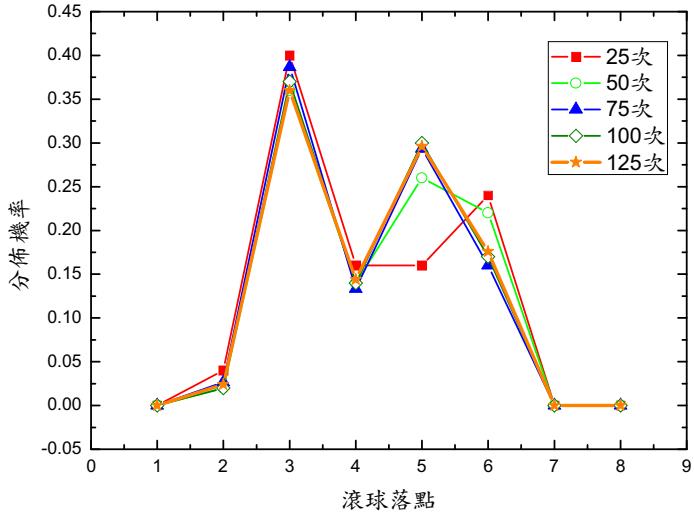
抬高高度5cm，距碰撞撞針6cm，撞針直徑4mm（碰撞一次）



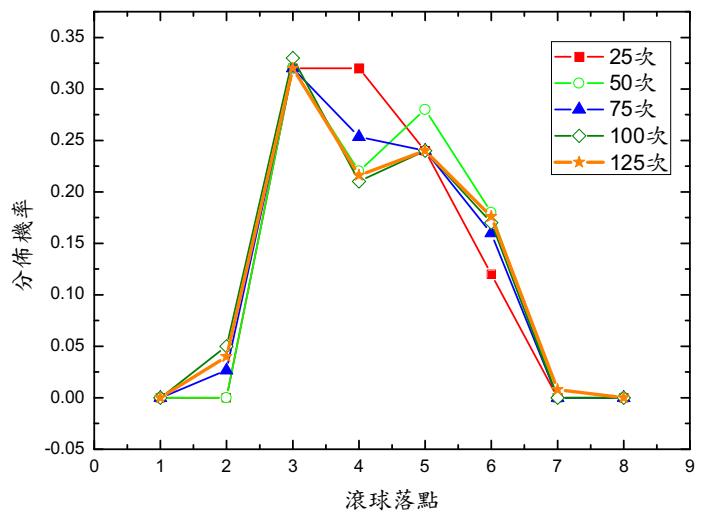
抬高高度7cm，距碰撞撞針6cm，撞針直徑4mm（碰撞一次）



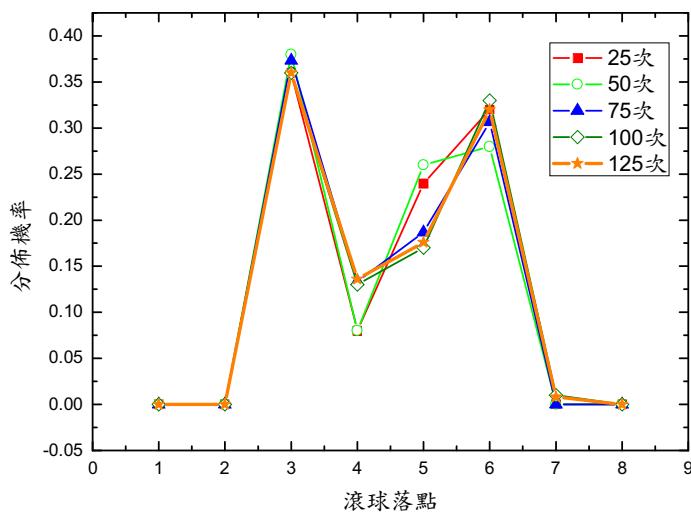
抬高高度9cm，距碰撞撞針6cm，撞針直徑4mm（碰撞一次）



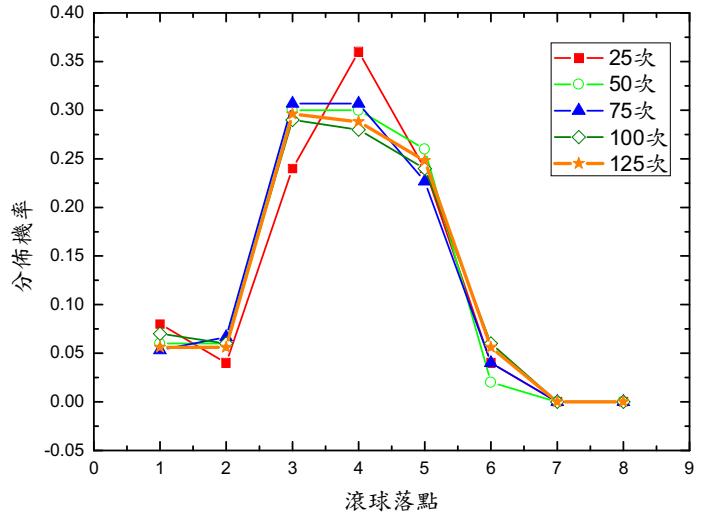
抬高高度5cm，距碰撞撞針6cm，撞針直徑10mm（碰撞一次）

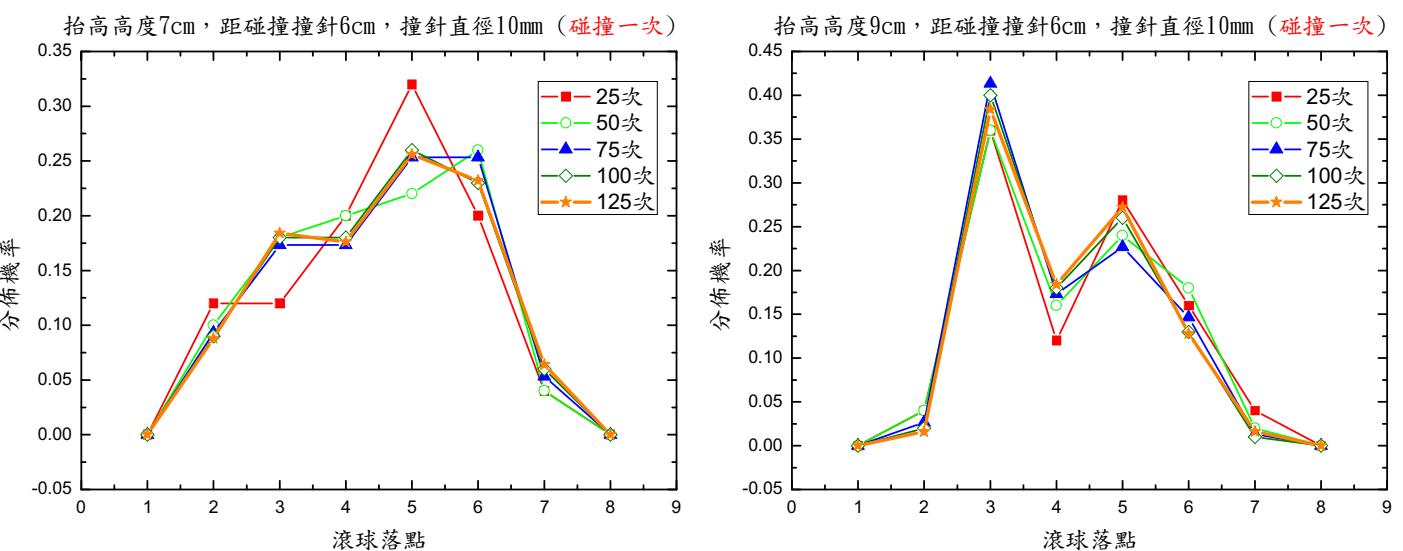
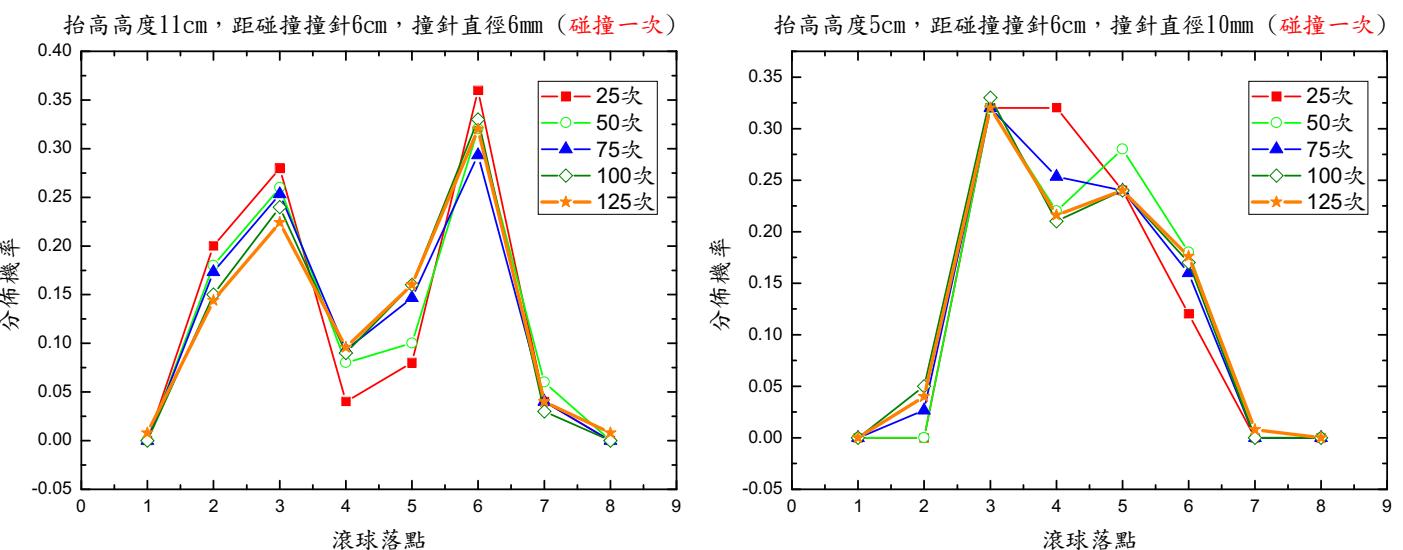
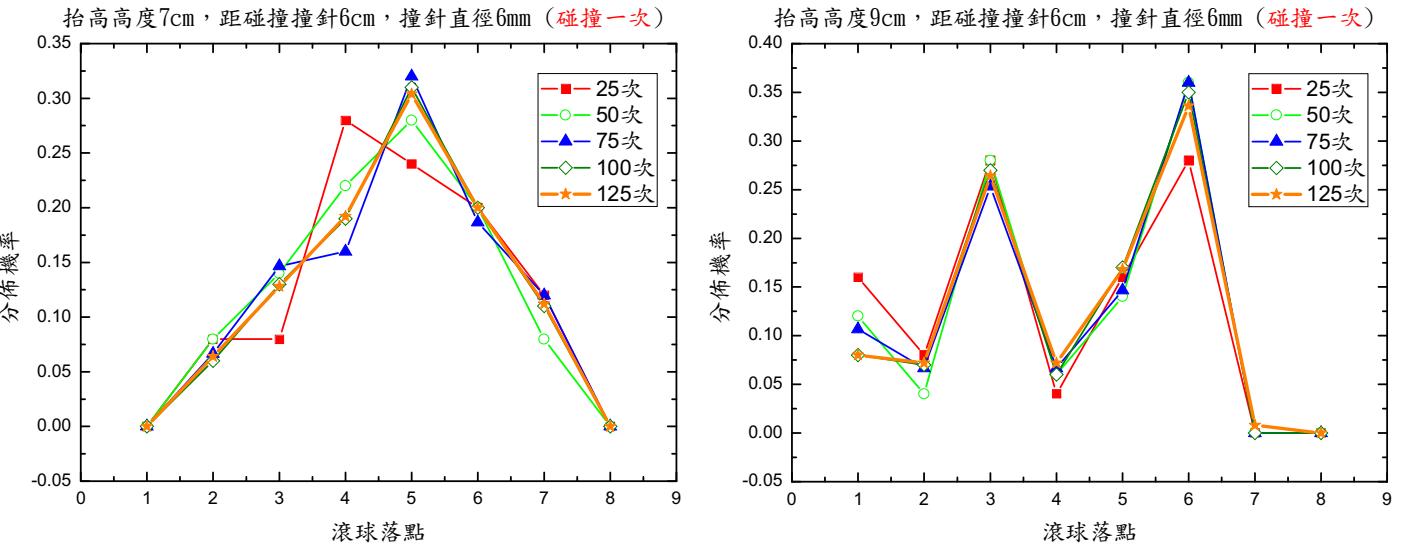
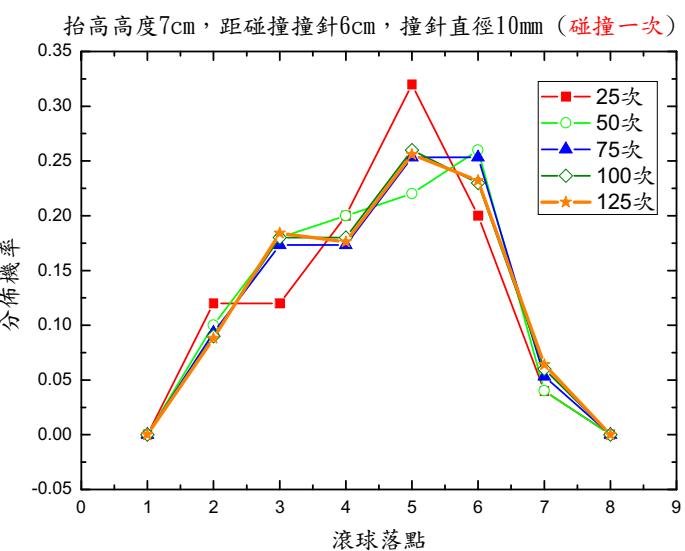
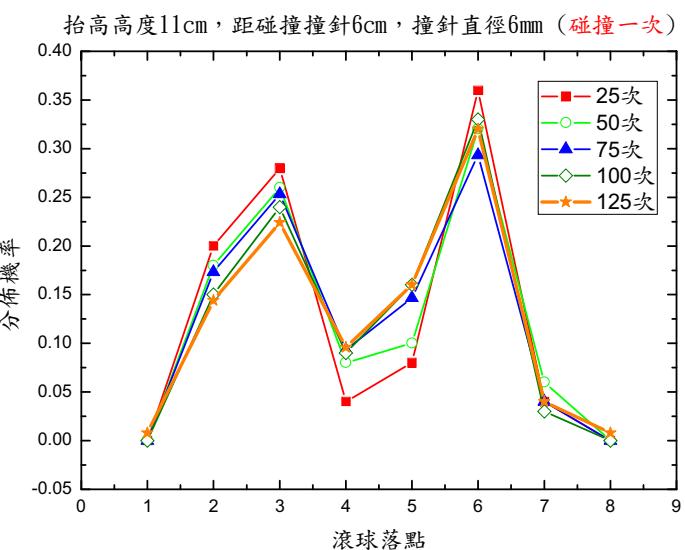
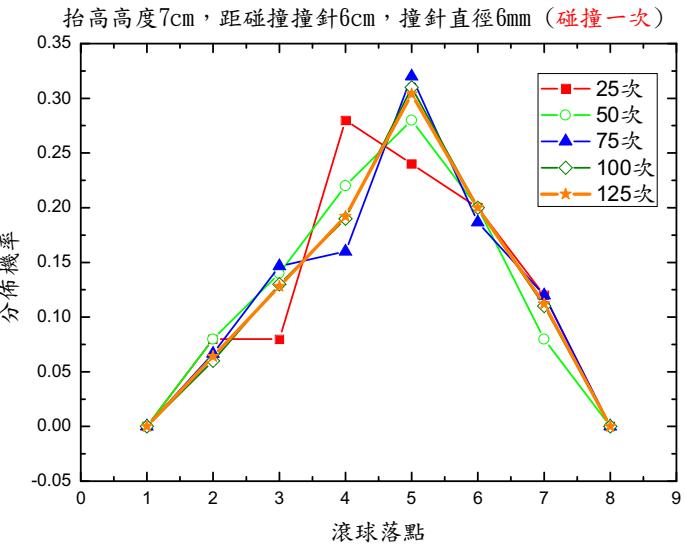


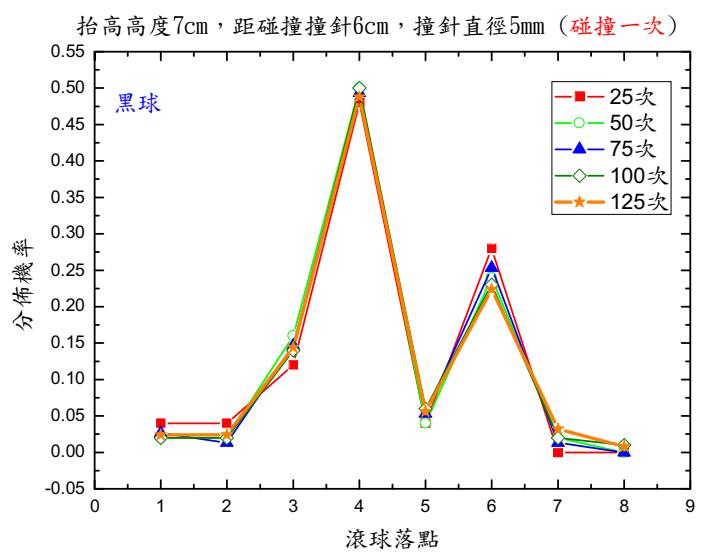
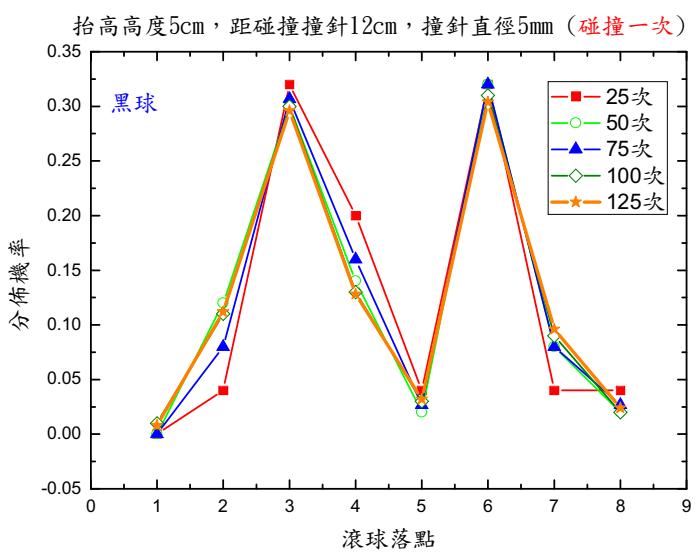
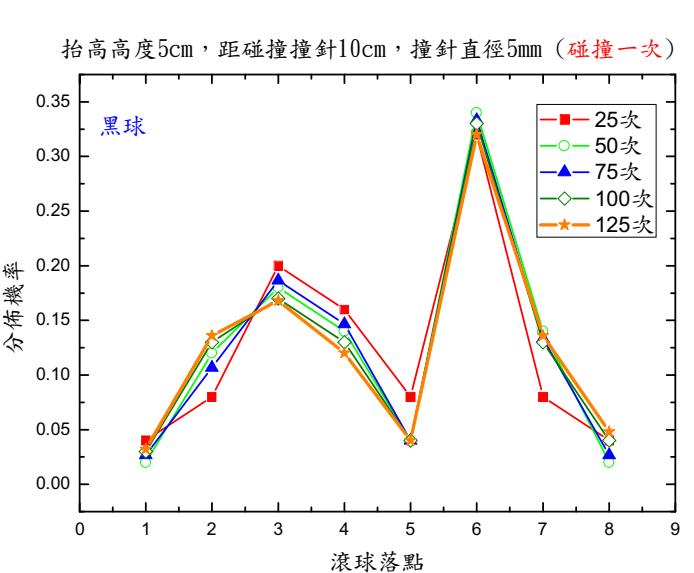
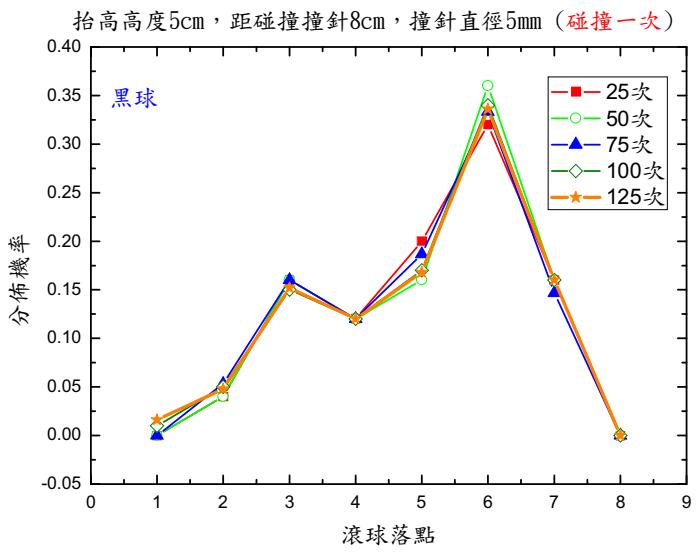
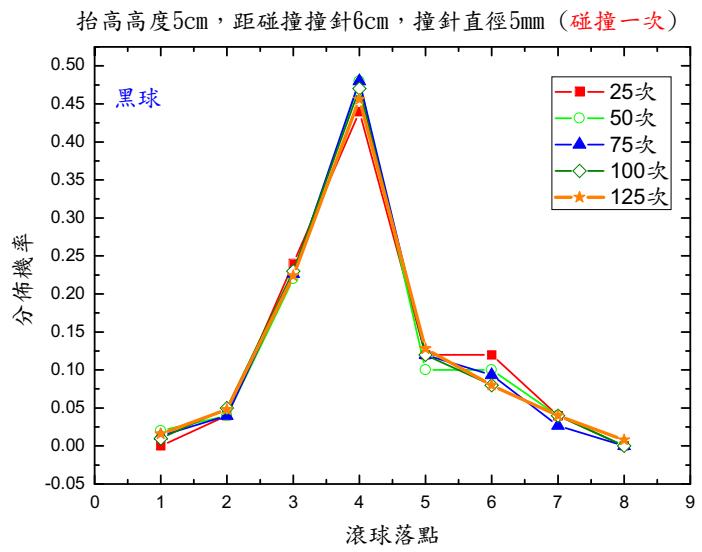
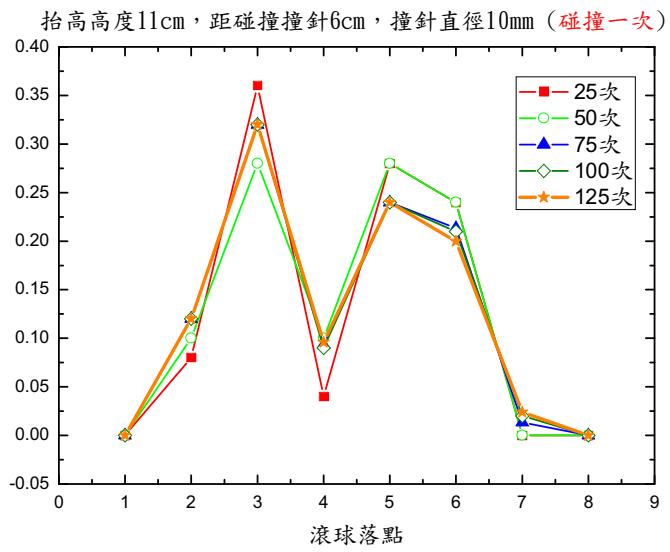
抬高高度11cm，距碰撞撞針6cm，撞針直徑4mm（碰撞一次）

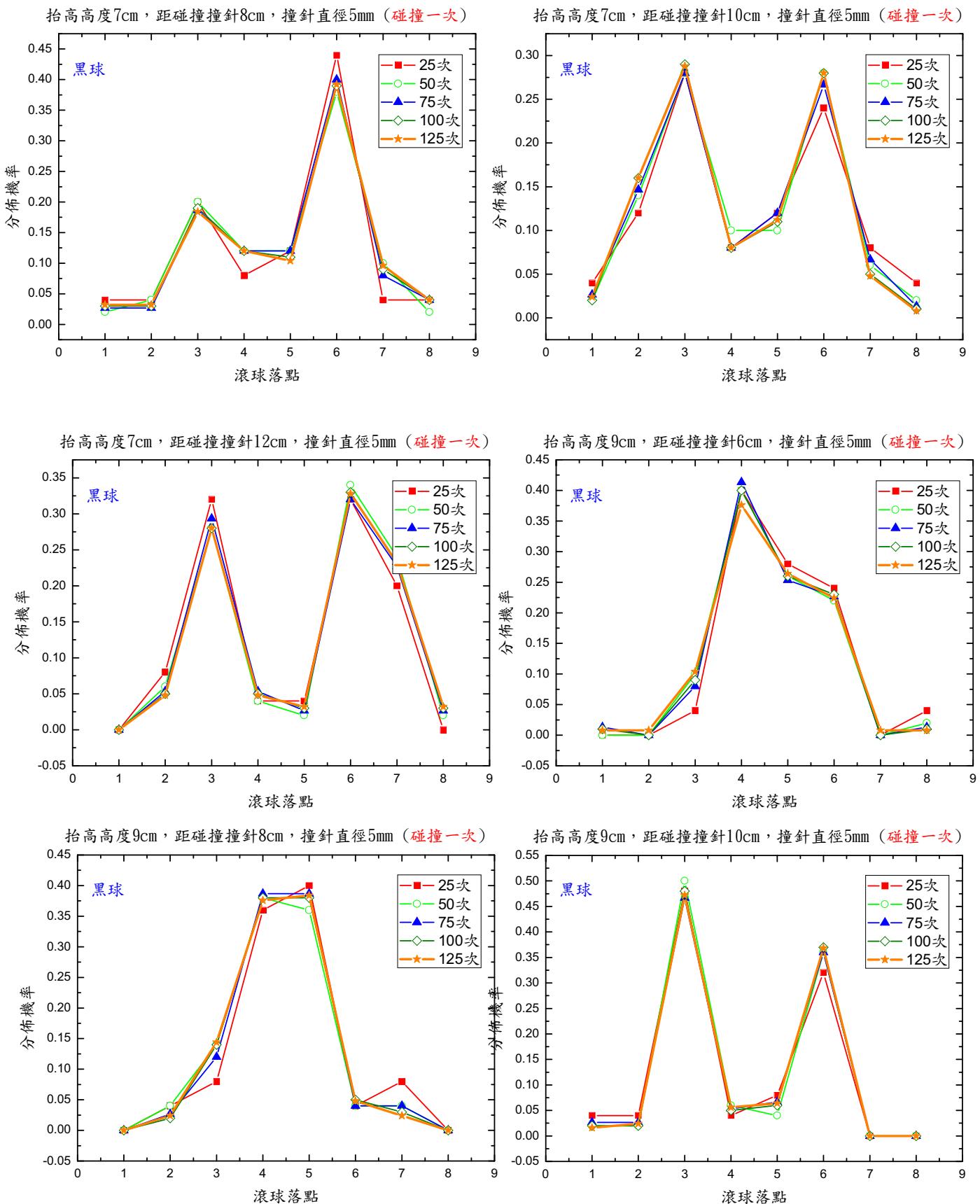


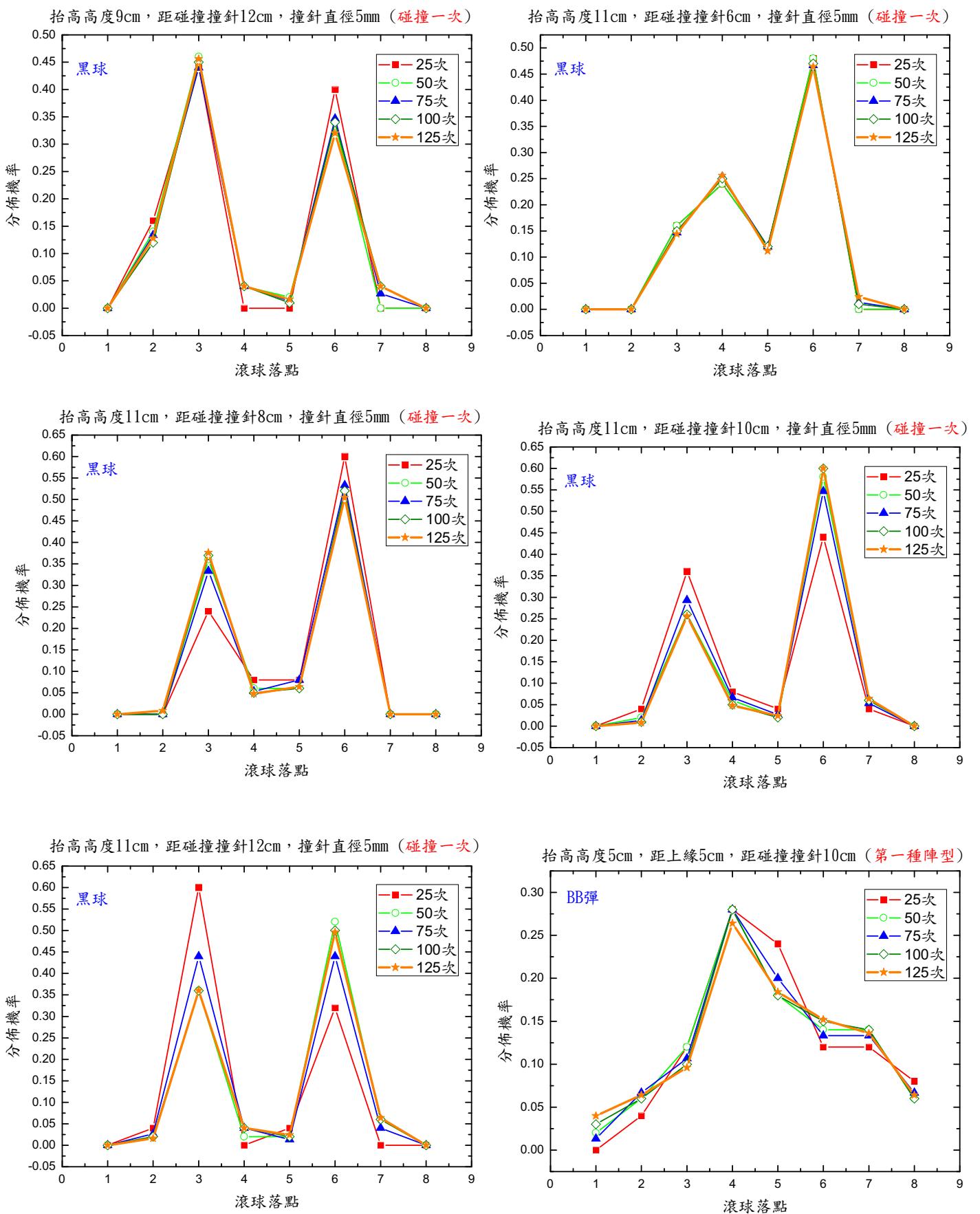
抬高高度5cm，距碰撞撞針6cm，撞針直徑6mm（碰撞一次）



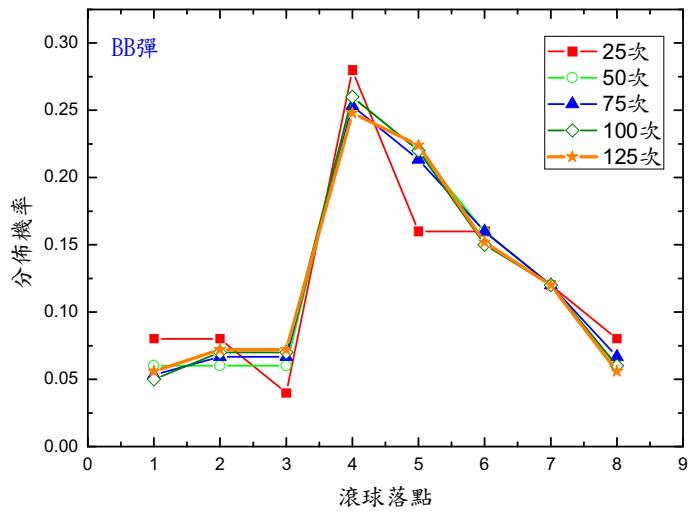




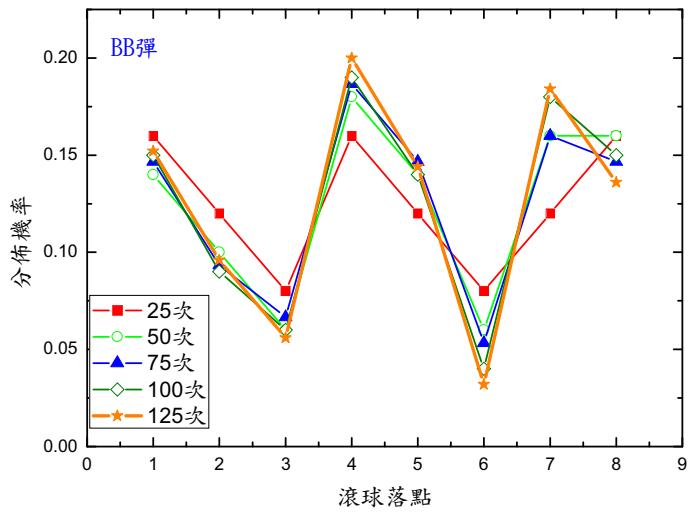




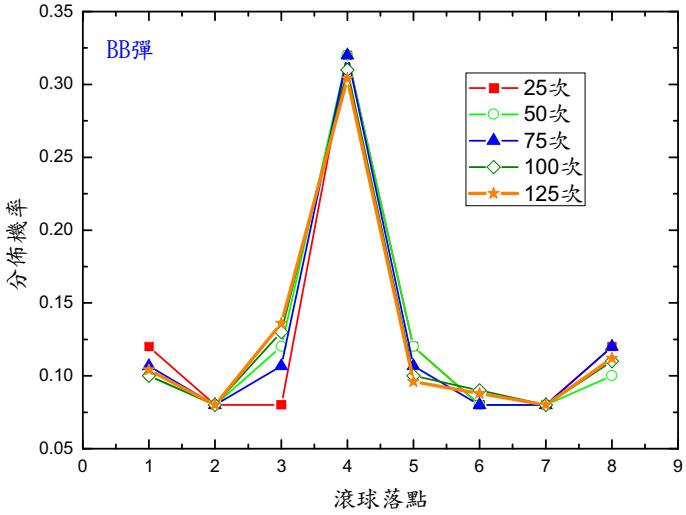
抬高高度5cm，距上緣5cm，距碰撞撞針10cm（第二種陣型）



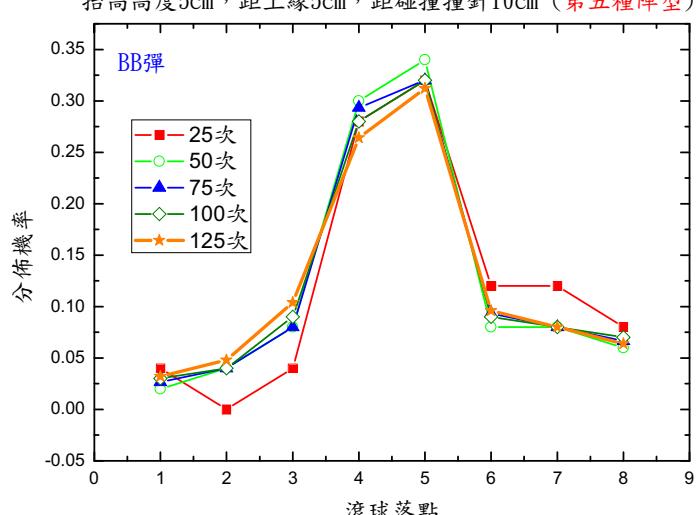
抬高高度5cm，距上緣5cm，距碰撞撞針10cm（第三種陣型）



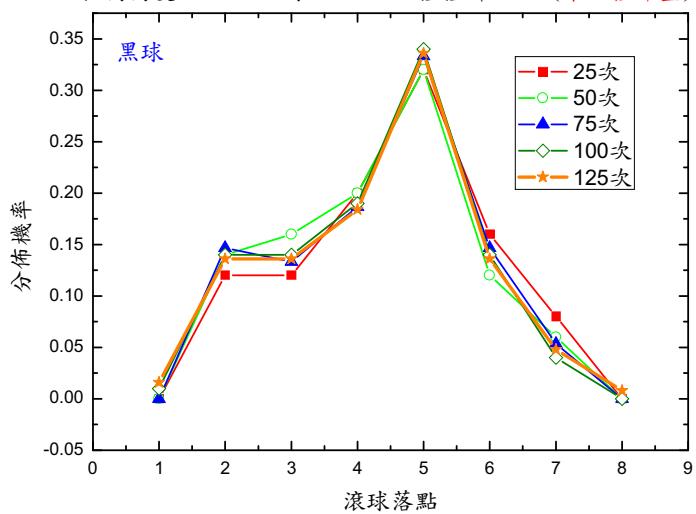
抬高高度5cm，距上緣5cm，距碰撞撞針10cm（第四種陣型）



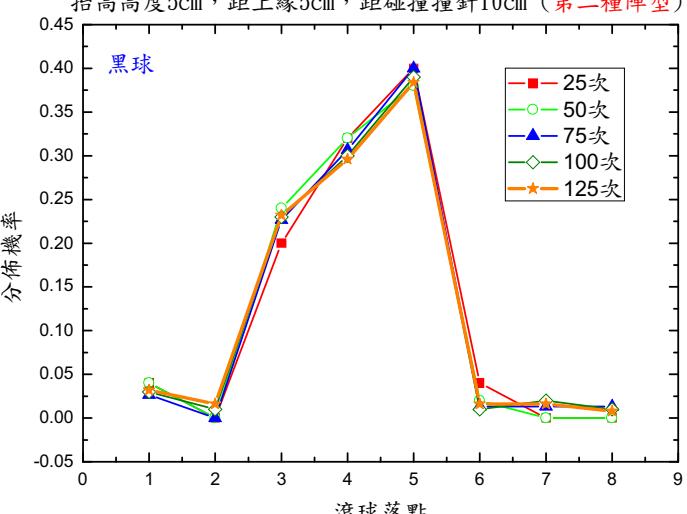
抬高高度5cm，距上緣5cm，距碰撞撞針10cm（第五種陣型）



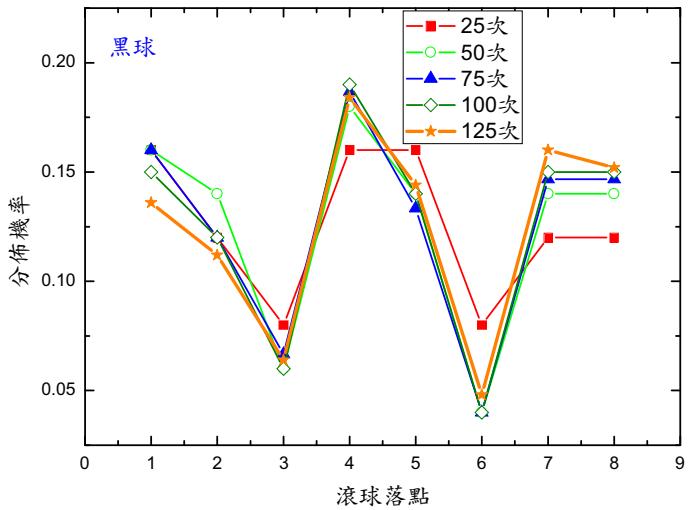
抬高高度5cm，距上緣5cm，距碰撞撞針10cm（第一種陣型）



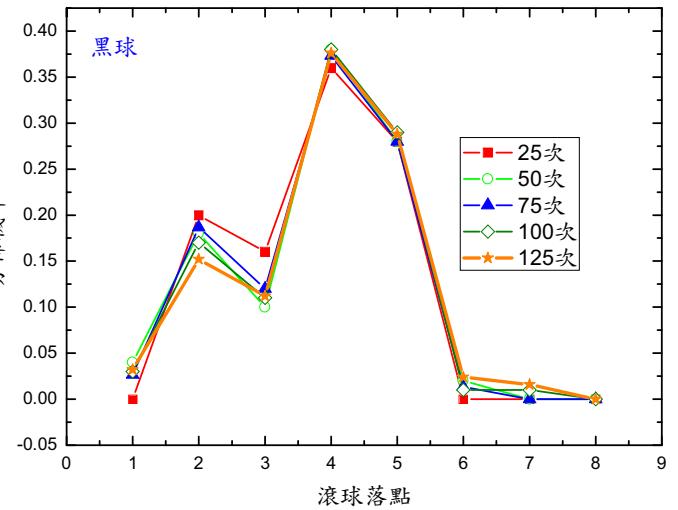
抬高高度5cm，距上緣5cm，距碰撞撞針10cm（第二種陣型）



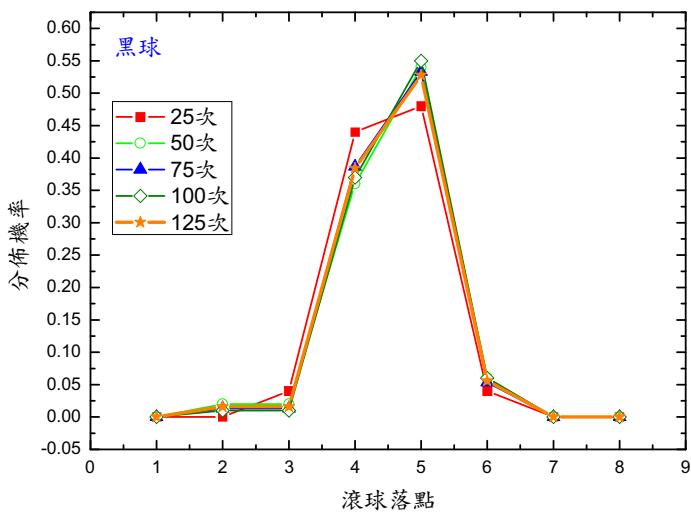
抬高高度5cm, 距上緣5cm, 距碰撞撞針10cm (第三種陣型)



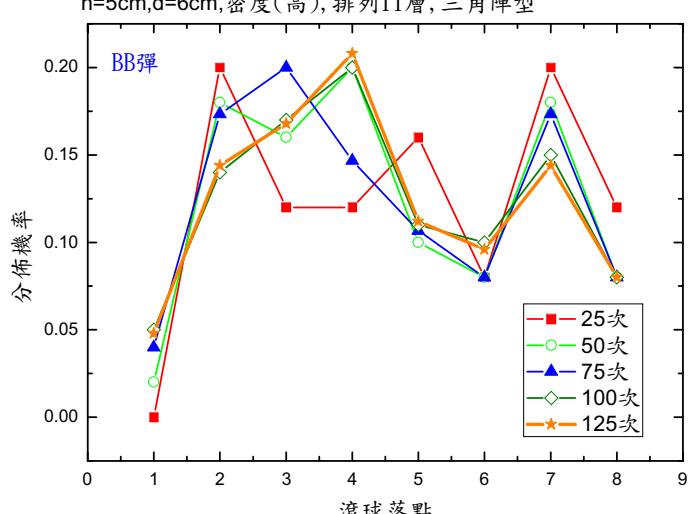
抬高高度5cm, 距上緣5cm, 距碰撞撞針10cm (第四種陣型)



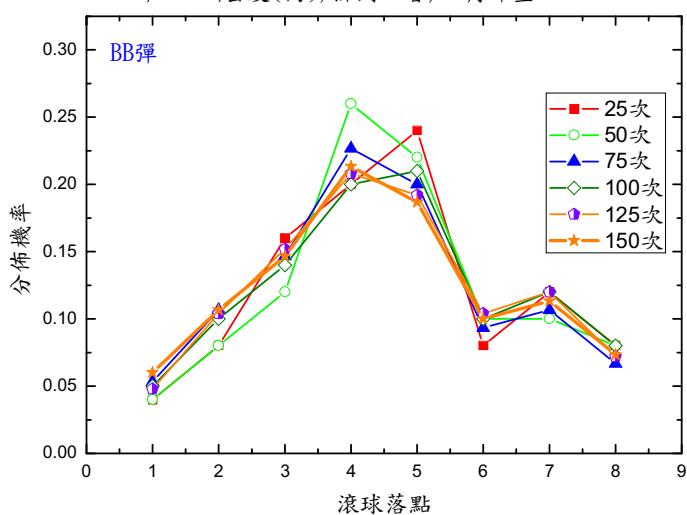
抬高高度5cm, 距上緣5cm, 距碰撞撞針10cm (第五種陣型)



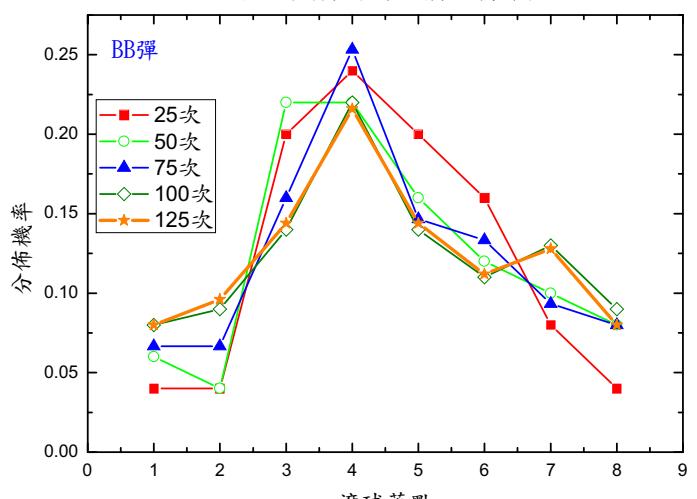
$h=5\text{cm}, d=6\text{cm}$, 密度(高), 排列11層, 三角陣型

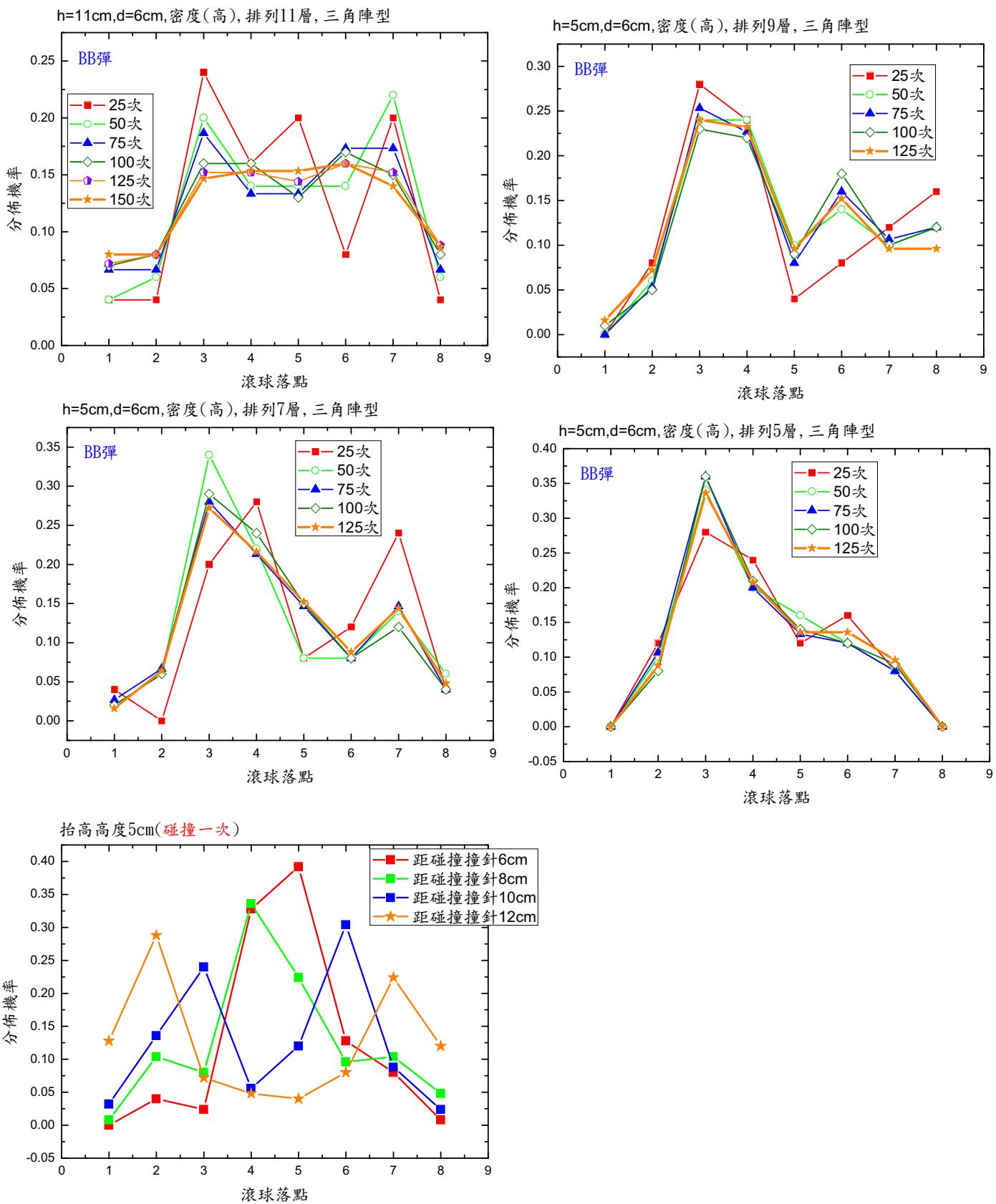


$h=7\text{cm}, d=6\text{cm}$, 密度(高), 排列11層, 三角陣型



$h=11\text{cm}, d=6\text{cm}$, 密度(高), 排列11層, 三角陣型





h=5cm

d		A	B	C	D
6cm	落點	4	5	6	3
	θ	9.8°	18.9°	31.2°	40.3°
	Δx	0.059	0.052	0.07	0.076
8cm	落點	2	6	6	6
	θ	48°	36.6°	37.6°	39.1°
	Δx	0.118	0.065	0.073	0.077
10cm	落點	6~7	7	8	X
	θ	34.6°	51.6°	54.7°	X
	Δx	0.113	0.189	0.214	
12cm	落點	6	8	1	7
	θ	23.4°	56.6°	64.7°	48.5°
	Δx	0.105	0.174	0.187	0.141

h=7cm

d		A	B	C	D
6cm	落點	3	5	X	X
	θ	37.7°	8.9°	X	X
	Δx	0.072	0.043		
8cm	落點	7	3	3	8
	θ	38.2°	37°	37.4°	57.8°
	Δx	0.107	0.112	0.09	0.184
10cm	落點	2	3	8	X
	θ	35°	9.9°	61.3°	X
	Δx	0.108	0.051	0.196	
12cm	落點	2	3	X	X
	θ	39.5°	32.1°	X	X
	Δx	0.123	0.106		

h=9cm

d		A	B	C	D
6cm	落點	6	5	7	X
	θ	33.7°	10.0°	54.3°	X
	Δx	0.059	0.027	0.177	
8cm	落點	7	7	6	X
	θ	45.4°	38.1°	35.4°	X
	Δx	0.117	0.102	0.07	
10cm	落點	7	3	X	X
	θ	45.5°	35.2°	X	X
	Δx	0.129	0.089		
12cm	落點	6	3	X	X
	θ	29.8°	26.2°	X	X
	Δx	0.062	0.048		

【評語】030102

1. 本研究能設計簡單易操作的裝置驗證理論讓實驗更有親和力。

若能使平台表面更均一，能減少改變量使變因更單純。建議秉持研究的精神，發掘生活中有趣的現象。