

# 中華民國第 51 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

高職組 機械科

最佳團隊合作獎

090901

原木之舞

學校名稱：高雄市立中正高級工業職業學校

作者：  職一 吳政岳  職一 王智鈿  職一 蕭崇宇	指導老師：  蔡智凱
---	------------------

關鍵詞：柏拉圖多面體、對偶體、干涉・間隙

## 壹、摘要

點跟點移動產生線、線跟線移動產生面、面跟面移動產生體。我們把柏拉圖多面體的點、線、面換一種方式來表達出不同的幾何性質，並使用木棒來架構另一個全新的多面體。用點線交換以及拼合產生規律的美感；如蜂窩、原子排列等等。

在製作模型時、為求詳盡以及徹底了解多面體，在實驗過程中也包含定理的證明與電腦作圖。

## 貳、研究動機

最初以為多面體跟我們沒什麼關係，而是只會出現在數學課本裡枯燥乏味的東西，但有次在百貨公司看到可做出多種不同形狀的玩具，其中排成柏拉圖多面體模樣的玩具吸引了我們的目光。原來多面體可以這麼有趣，於是我們查了有關多面體的資料才發現多面體不只是數學、玩具更是古人研究的智慧結晶，同時也對多面體產生了濃厚的興趣，因此我們以多面體當成科展的主題。

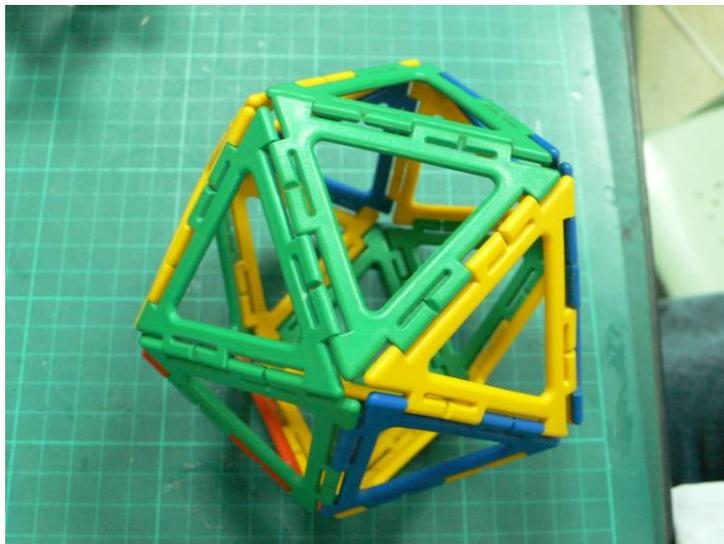


圖 1 有趣的益智玩具

## 參、研究目的

- 一、研究正多面體所帶來的變化，並以運算來製作模型。
- 二、把具有規律性的正多面體加以利用，發展出具藝術與工業價值的結構。
- 三、了解對偶體，並運用其概念製作出模型。
- 四、製作有正多面體性質的扭曲多面體。

## 肆、研究設備及器材

### 一、使用工具

1. 直立式銑床
2. 游標卡尺
3. 量角規
4. 可拉式圓鋸機
5. 銑刀( $\Phi 24, \Phi 12, \Phi 8, \Phi 4$ )

### 二、電腦輔助軟體

1. Autodesk AutoCAD 2008
2. Microsoft Word 2007
3. Microsoft PowerPoint 2007

### 三、使用材料

1. 方型飛機木
2. 圓棒型實木(長 90cm, 直徑分別為( $\Phi 12, \Phi 10, \Phi 8, \Phi 6$  四種))
3. 模型用模造紙、馬糞紙(厚 1mm, 2mm)
4. 樹脂
5. 墊圈
6. 棉繩
7. 橡皮筋



直立式銑床

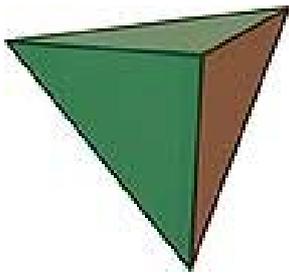
## 伍、研究過程及方法

### 一、 事前準備：

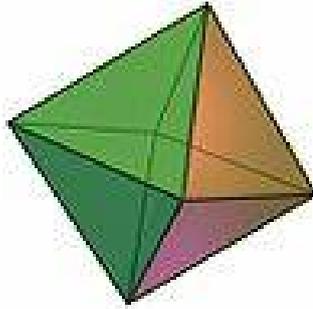
#### (一) 柏拉圖多面體的探討與分析

柏拉圖多面體是以四個或四個以上的正多邊形組合而成的一個立體形狀。以下為此分析：

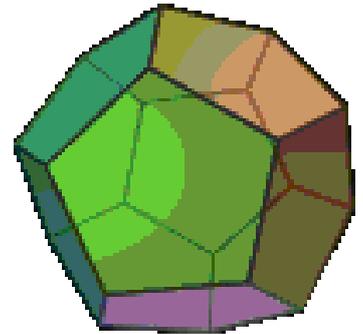
1. 柏拉圖多面體（Regular Polyhedron），即一般所稱之正多面體。
2. 構成的必要條件：每一面須以正多邊形組合而成、各個頂角皆相等、每一條的菱邊都相等。而存在的柏拉圖多面體只有五種，為正四面體、正方體、正八面體、正十二面體、正二十面體。



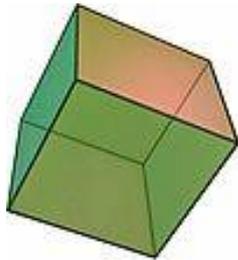
正四面體



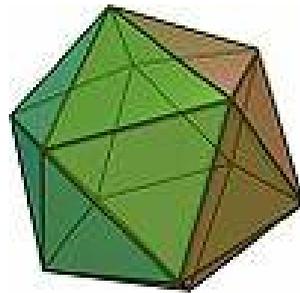
正八面體



正十二面體



正方體



正二十面體

3. 證明：我們可以使用歐拉定理證明目前僅有五種正多面體，證明如下：

面的數目(F)+頂點的數目(V)=邊的數目(E)+2

$$F+V=E+2 \dots\dots\dots(1)$$

設每個頂點和其他R個邊相連，且每個面是正N邊形組成。由此可知：

$$(a)MR= 2E \quad (b)FN=2E$$

把(a)與(b)代入歐拉定理( $F+V=E+2$ )

$$\Rightarrow \frac{1}{N} + \frac{1}{R} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E} \text{-----(1)}$$

由於 $E$ 是正整數，因此 $\frac{1}{E} > 0 \Rightarrow \frac{1}{N} + \frac{1}{R} > \frac{1}{2}$ ----- (2)

由(2)可以知道 $N, R$ 不能同時大於3，否則(2)將會不成立。

另外， $R$ 與 $N$ 的意義(正多面體頂點處的邊數以及正多邊形的邊數)得知

$R \geq 3, N \geq 3$ 所以 $R$ 或 $N$ 其中一個必須等於3

當 $N=3$ 的時候， $\frac{1}{R} > \frac{1}{6} \Rightarrow R=3, 4, 5$

同理 $R=3$ 的時候 $N=3, 4, 5$

故只有五種可能：

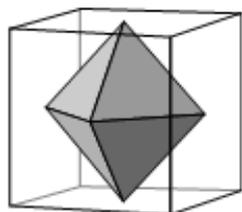
(R, N)	類型
(3, 3)	正四面體
(4, 3)	正六面體
(3, 4)	正八面體
(5, 3)	正十二面體
(3, 5)	正二十面體

從上表可知，只有以上五格是有合理的解。因此，只存在五種正多面體。

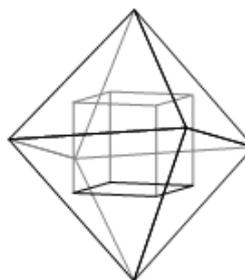
正多面體	各面之正多邊形	面數	稜數	頂點數	各頂點稜數
正四面體	正三角形	4	6	4	3
正六面體	正四邊形	6	12	8	3
正八面體	正三角形	8	12	6	4
正十二面體	正五邊形	12	30	20	3
正二十面體	正三角形	20	30	12	5

#### 4.主要特性：

對偶性：對偶多面體亦稱共軛多面體(Conjugate polyhedron)。如果有兩個多面體，並且其中的一個正多面體的頂點數和面數等於另一個正多面體的頂點數和面數，則稱此兩個多面體稱為共軛多面體(Conjugate polyhedron)。



正六面體對偶體



正八面體對偶體

#### 5.相關數值：

備註： $\alpha$  為邊長

名稱	每個面之面積	內切圓球半徑	外接圓半徑	體積
正四面體	$\frac{1}{4}\alpha^2\sqrt{3}$	$\frac{1}{12}\alpha\sqrt{6}$	$\frac{1}{4}\alpha\sqrt{6}$	$\frac{1}{12}\alpha^3\sqrt{2}$
正立方體	$\alpha^2$	$\frac{1}{2}\alpha$	$\frac{1}{2}\alpha\sqrt{3}$	$\alpha^3$
正八面體	$\frac{1}{4}\alpha^2\sqrt{3}$	$\frac{1}{6}\alpha\sqrt{6}$	$\frac{1}{2}\alpha\sqrt{2}$	$\frac{1}{3}\alpha^3\sqrt{2}$
正十二面體	$\frac{1}{4}\alpha^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{1}{25}\alpha\sqrt{250+110\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}\alpha(\sqrt{15}+\sqrt{3})$	$\frac{1}{4}\alpha^3(15+7\sqrt{5})$
正二十面體	$\frac{1}{4}\alpha^2\sqrt{3}$	$\frac{1}{12}\alpha\sqrt{42+18\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}\alpha\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{5}{12}\alpha^3(3+\sqrt{5})$

#### (二) 材料選用

1. 圓棒：本次我們選用的材料為木材，選用的理由是由於在模型的製作使用

紙，因為考慮到紙的強度所以不能用太重的材質，不然容易壓壞模型：另一方面木材也比金屬便宜、也更好加工，尺寸是依據一開始塑膠模型不斷的試驗所尋找出來的。

2. 橡皮筋：在一開始放入圓棒時由於尚未卡住因此很容易掉落，所以使用橡皮筋來暫時固定。一開始有嘗試使用棉線，但棉線缺乏彈性需要綁緊才能固定圓棒，因此為了方便操作與容易拆卸、我們選擇使用橡皮筋。
3. 模型：使用紙模型有成本低與容易製作的好處，而且這個實驗需要把模型破壞、取出成品所以很適合使用紙當材料

## 二、 正多面體的作圖法

### (一) 正四面體電腦繪圖

#### 1.先畫出展開圖(如下圖1)

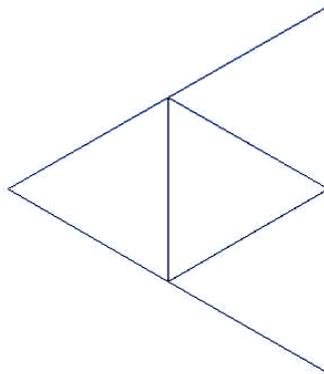


圖 1

#### 2.以相接角形之邊長中點畫圓垂直此平面、半徑設為三角形的高(如下圖 2)

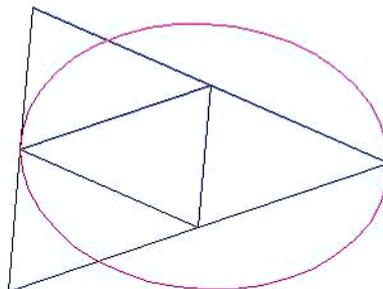


圖 2

#### 3.步驟2於另一三角形上，這時兩圓會產生兩交點、兩交點皆為正四面體的頂點(見圖3)

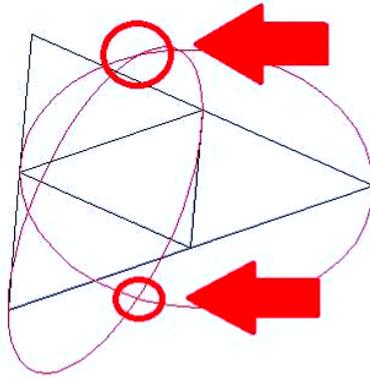


圖 3

4.然後以三角形邊長中點為基準點、參考角度設為三角形邊長中點與頂點旋轉(見圖 4)

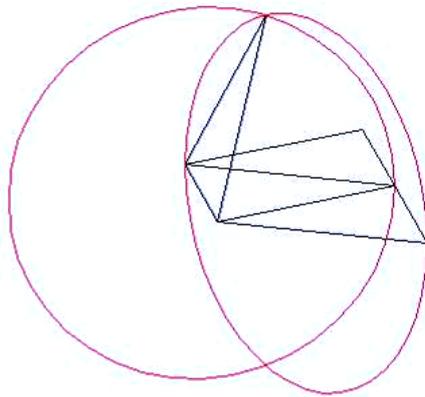


圖 4

5.重複步驟 4 於各個三角形後及完成(見圖 5)

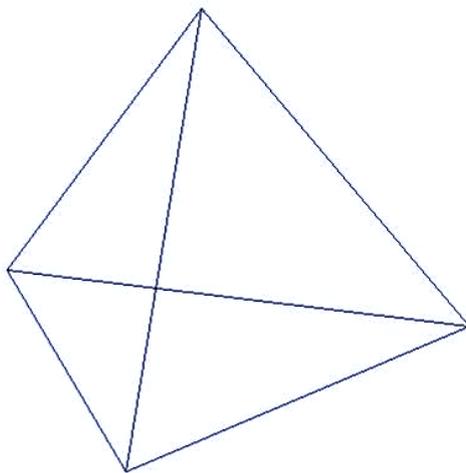


圖 5

(二) 正二十面體電腦繪圖

1. 先畫出正五邊形、之後以其邊長畫相鄰正三角形(見圖 6)

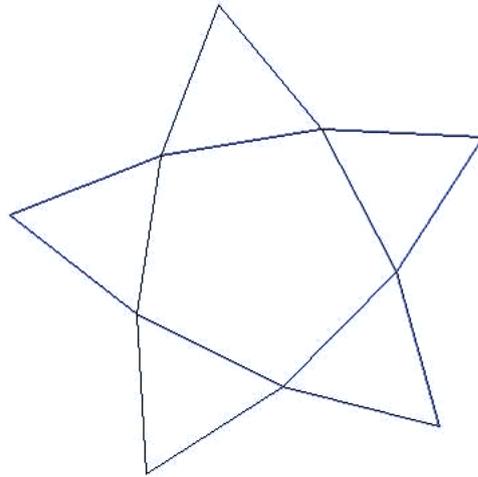


圖 6

2. 以三角形邊長中點畫圓垂直此平面、半徑為三角形的高(見圖 7)

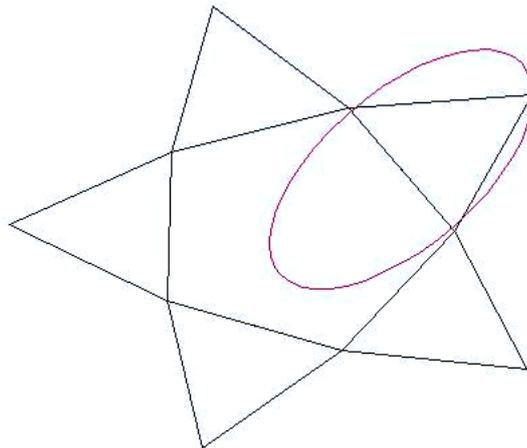


圖 7.

3. 重複步驟二於另一三角形上，這時兩圓產生兩交點、兩角點皆為正二十面體頂點之一(見圖 8)

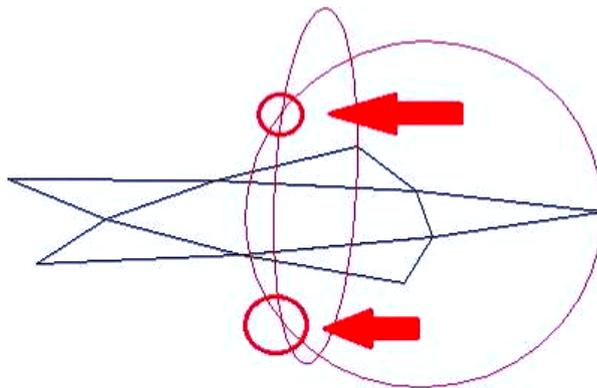


圖 8

4. 然後以三角形邊長中點為基準點、參考角度設為三角形邊長中點與頂點旋轉(見圖 9)

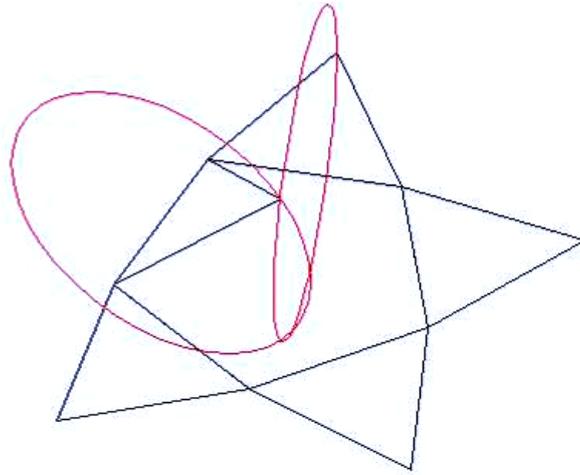


圖 9

5. 重複步驟 4 到每一個三角形(見圖 10)

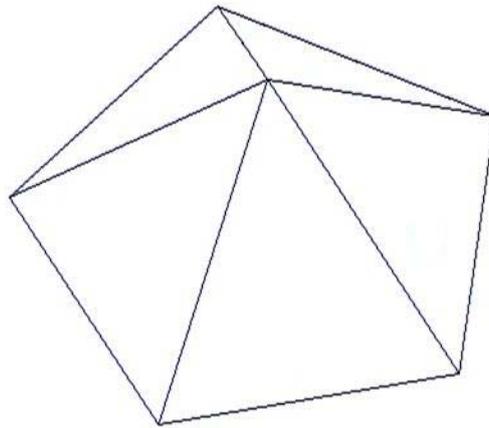


圖 10

複製數個步驟 5 所完成的物件，接著使用對齊(align)、使得邊與邊相接直到整個正二十面體完成(見圖 11)

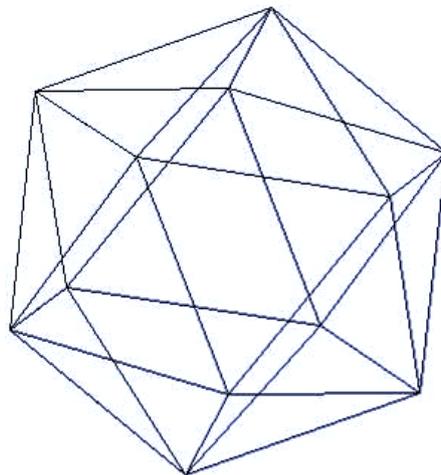


圖 11  
10

(三) 正十二面體電腦繪圖

1. 先畫出三個相接的五邊形(見圖12)

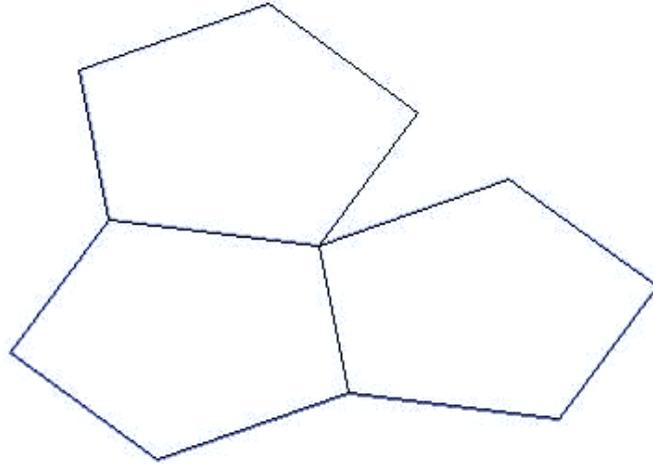


圖 12

2. 連接對應的點(見圖13)

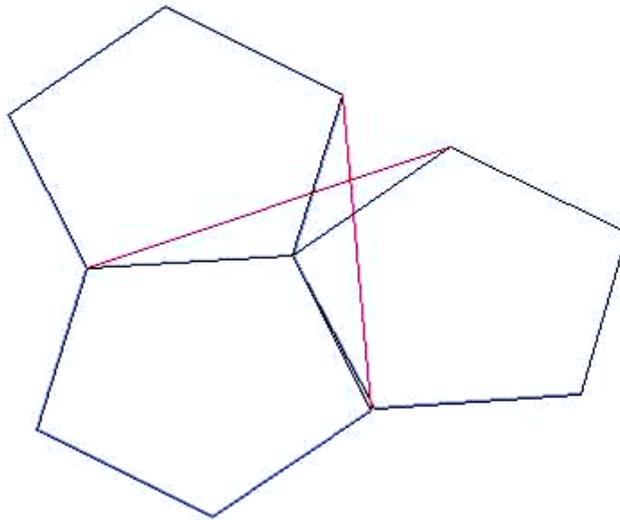


圖 13

3. 驟二所畫的輔助線中點為圓心、線長的一半為半徑畫圓(見圖 14)

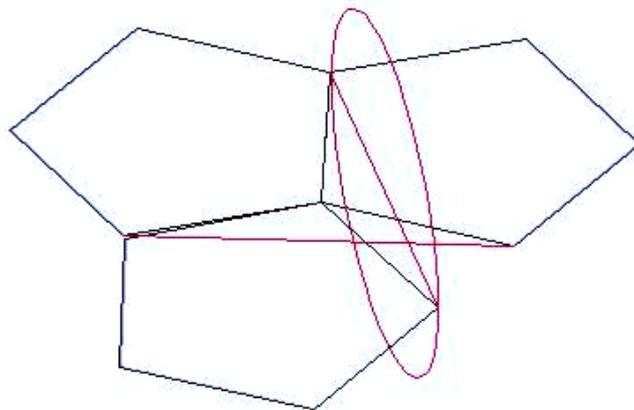


圖 14

4.重複步驟 3 於另一條輔助線上、這時產生兩交點，這兩交點為正十二邊形之頂點(見圖 15)

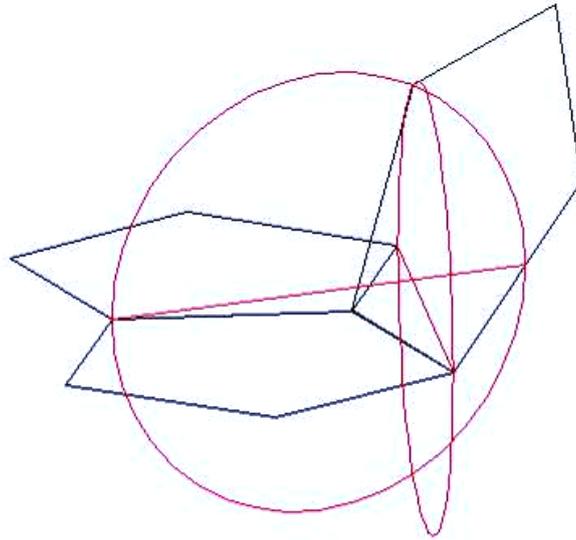


圖 15

5.先找出五邊形之外接圓圓心，然後使用陣列中心點為外接圓圓心、選取正五邊形項目總數 5、佈滿角度 360 度。在此步驟中需注意 Z 軸的方向要與五邊形垂直(見圖 16)

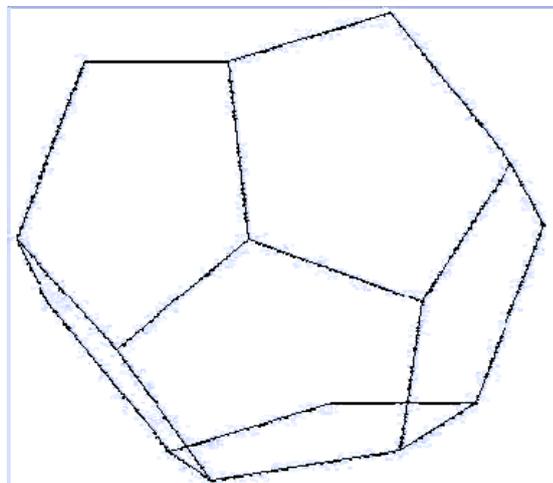


圖 16

### 3. 複製步驟 6 的物件、使用對齊即完成(見圖 17)

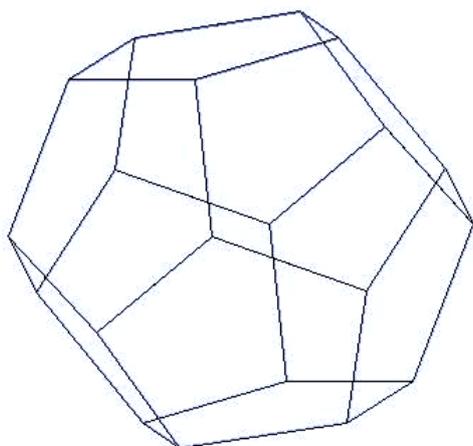


圖 17

## 三、紙模型製作

### (一)、紙的選用：

由於需要固定木棒，紙的選用極為重要，需要比一般紙更為堅固，才可承受木棒與木棒間干涉所產生的力，這次我們選用厚紙板來當作模型的基礎。

### (二)、展開圖的製作：

因為厚紙板影印費用比一般的紙高出許多，基於成本考量，我們使用另一種方式，影印於一般的白紙上，在把展開圖黏在厚紙板，這樣可省不少的成本。

(三)、內孔的製作：切割後的紙模型依照我們一開始所使用的塑膠模型為依據，把內孔所切割出來。

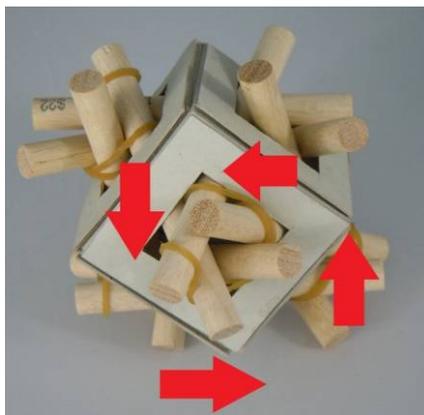


#### 四、 模型製作

我們所使用的圓棒為零售品、購買單位以公尺計價，買回來後使用圓鋸，鋸成我們想要的長度。

(一) 一開始先使用橡皮筋把套住圓棒，主要目的是要讓圓棒不容易掉落。

(二) 接著依照放入的圓棒數與多面體插入內孔，要注意螺旋方向須一致



(在這裡用正六面體當範本)

(三) 接著塗上白膠使棍棒黏牢。在黏的過程中盡量避免黏到橡皮筋，如果不小心黏到在後面拆開的步驟會更麻煩。



(四) 等到白膠乾了之後破壞紙模型，在破壞的時候需要注意以下事項:

1. 白膠的黏性不如強力膠強、所以要小心的拆，特別注意當白膠黏到紙模型時須慢慢的拉開不可用力扯，不然會造成木棒掉落。
2. 最好使用美工刀或小型剪刀，因為一般的剪刀較大，在處理正十二

面體、二十面體時特別容易碰到圓棒，使得模型變形甚至造成圓棒掉落。

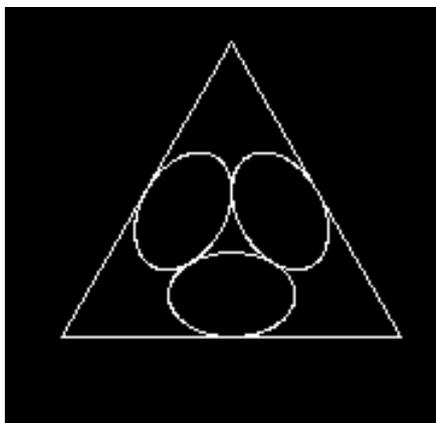
3. 在使用美工刀的時候要注意不行把模型底部當作支點，否則底部的木棒容易變形。
4. 若不小心黏到橡皮筋要小心的用刀子切斷，否則硬拉會扯下白膠，導致結構不穩固。

(五) 完成。



#### 五、最佳內孔的計算

我們先提出一個假設圓棒會在各個面平面上相切，所以當圓棒旋轉時，會呈現一個橢圓，這時它的長軸不變、短軸變成  $(\cos \text{兩面角} \times \text{圓棒的直徑})$ 。之後依照這個式子所製作出的模型為錯誤的，這表示我們的假設是錯誤的，因此經由觀察發現圓棒的相切點並不會在三角形平面上，而在平面上方，因為我們的角度經過扭曲而忽略了傾斜角，所以我們經由電腦輔助程式以及模型測試而得知， $[(\cos \text{兩面角} + \sin \text{傾斜角}) \times \text{圓棒的直徑}]$  才是我們所需的答案。



← 此為假設相切狀態，每個橢圓接

與其他橢圓相切，並與外三角形相接。

## 六、螺旋角計算

經由觀察八面體，我們發現它的邊延伸後會構成一個扭曲的截半立方體，再正更進一步的觀察截半立方體，因此我們想出了一個計算一個傾斜角度的計算方法。

首先我們先使用電腦繪圖軟體畫出的立體圖來做更精確的觀察邊固定長為 63mm，發現其中有一個結構為正三角形的扭曲，所以我們把這個物件分離出來計算。從此視圖(圖 18)測量出傾斜角度為  $8.064^\circ$ 。所以正八面體螺旋角為  $45^\circ$  偏轉  $8^\circ$ 。

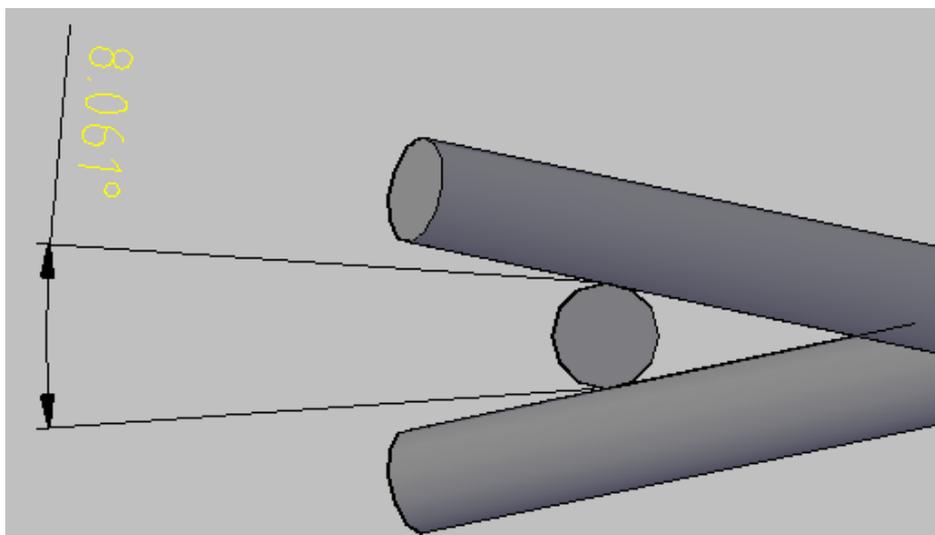


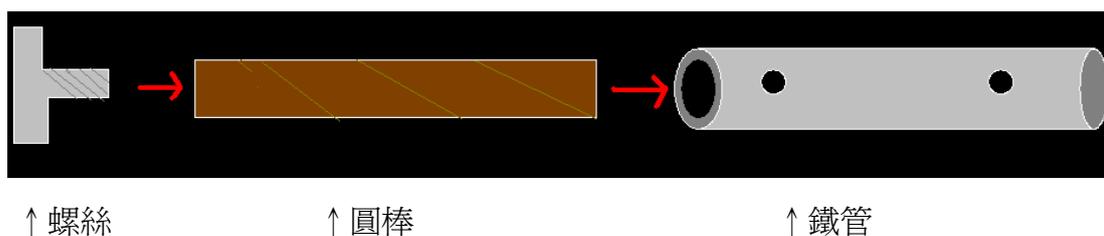
圖 18

## 七、夾具的概念與製作

做出的成品，因為有複斜角的關係，所以製作較困難，而我們想到製作夾具，讓製作過程更加快速簡便。

首先要製作出一個空心管，它的直徑要比木棒大  $0.13\text{mm}$ ，而材質我們選用鐵製，使用 CNC 加工複斜角，如此加工出來的成品就更為精確。

在夾具的使用上只需要固定圓管就可以只用鑽床加工，因為刀具與維修上 CNC 的費用高上許多，且技術需求較高。



## 陸、研究結果



正二十面體之一



正六面體



正四面體



正八面體



正二十面體之二

在多面體中我們選擇了最容易製作與計算角度的正多面體，但是在不經意的情況下出現了截半立方體，截半立方體是由扭曲正八面體的邊與邊相切點轉換成頂點。截半立方體是混合立方體，是由正八面體混合成的半正多面體，這是一個創新的多面體結構，在幾何性質上還有很大的發展空間。

由於前次所做的模型缺乏強度與計算導致無法量化數據來進行機械力學的計算，而這次我們所做的是把所有數據固定，以利進行其他實驗。在這種有無限組合方式的結構上，我們只能訂出一個最接近正多面體的數據來觀察它的性質。

正多邊形皆可以分刻成多個正三角形，而封閉三角形在機械力學上具有合力等於零的特性，所以我們使用木釘來讓整體構成一個封閉的多面體，而正多面體的性質使它的分力均勻，因此此結構能發揮材料最大的受力。

## 柒、討論

一、Q:如何將圓棒的長度、直徑與模型的開口大小做出組合？

A:在製作模型的過程中可能會因為圓棒過粗而導致模型形狀呈現不規則狀態，甚至可能成不了形。木棒的長度是由模型的兩開口距離決定(木棒長度>兩開口距離)這樣木棒才能架在模型上。木棒的直徑與模型開口大小成正比，但因紙模型已完成所以只能改變圓棒直徑。

二、Q:如何找出圓棒的最佳直徑？

A:將每種直徑的木棒個別插入模型中並找出最適切直徑，不過這還不是最佳直徑，因為市面上賣得圓棒直徑都只有 1mm 差距，為了找出最佳直徑可以將紙包住圓棒來調整直徑，這麼一來就可以解決找不到適合的圓棒的問題。

三、Q:所有開口處的圓棒都必須成順時針或逆時針嗎？

A: 是，因為若全部順時針或逆時針的方法呈現圓棒就會相互作用而變的比較牢固，並且為了將模型做的較規則所以圓棒必須成一致性。

四、Q:如何解決圓棒容易脫落的問題？

A:可以使用夾具來代替紙模型，解決白膠黏性不夠，以及紙模型拆開時常常碰到圓棒、造成模型扭曲的問題。

五、Q:如何確定我們的數據是正確的？

A:由於這個主題的相關資料很少，所以我們只能借由模型來驗證我們的假設是否正確。

六、Q:是否有其他圓棒的製作方式？

A:如果每一個圓棒都直接使用 CNC 鑽孔，雖然精密度較高但是相當的昂貴，因此使用夾具來固定角度，這樣就可以只用鑽床來加工

## 捌、結論

我們研究與觀察以及幾何空間的概念去探討柏拉圖多面體（regular polyhedron）的結構，我們發現了點、線、面之間的規則與變化，而我們加以善用變化，來製作別於一般的正多面體，來呈現出柏拉圖多面體的藝術。

以木棒為材料的製作模型的過程中，我們研究出如何剛好把木棒卡進紙模型中，其中木棒的直徑與扭曲的角度其製作的重點，因此採用作圖的方式來算出最佳直徑，以確保接下來實驗的準確性。而最後找出其對應的大小，而大小型成品的製作再以數學算出其關係式。算出各項所需的數值後，我們為了使製作更為方便，所以製作出了“夾具”，能達到更快速且更為經濟的作法。

成品的應用非常的廣泛，小的物件可以作為藝術品或者益智玩具出售，大則可以用在建築、利用其結構可發揮材料的最大受力，讓建築物上能有更為堅固以及空間上的利用能更為節省。目前建築上使用逐漸廣泛的桁架（truss）就與我們研究的結果大同小異，設計面積極具彈性，並可做無限度的伸延，未來對於太空建築上有莫大的幫助。然而現代建築物講求簡單的設計、運算、製作、結構、組裝，進一步的將所有零件標準化及量產化，大幅度的提高品質與降低成本，再使用具有韌性的材料；如鋼，就能有效提升建築物的耐震、耐撞擊。

## 玖、參考資料

1. 維基百科:正多面體。民 100，取自：  
<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AD%A3%E5%A4%9A%E9%9D%A2%E9%AB%94>
2. 陳冠良、陳家欣，多面體的等分割與翻轉。民100，取自：  
<http://www2.kuas.edu.tw/prof/cjh/2003puzzle/poco/01.html>
3. 王雪娥、陳進煌，電腦輔助圖 AutoCAD2004，初版，台北市龍江路76巷20號2樓，全華科技，93年5月
4. 正多面體展開圖，取自：  
<http://www.mathland.idv.tw/fun/poly.htm>
5. 多面體（無日期）。維基百科全書。民100，取自：  
<http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E5%A4%9A%E9%9D%A2%E4%BD%93&variant=zh-tw>
6. 國立台灣科學教育館歷屆作品說明書，有秩序的糾纏。民100，取自：  
<http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/50/pdf/090903.pdf>
7. 機械力學重點及公式總整理。佚名。民100，取自：  
<http://teacher.ksvs.kh.edu.tw/~t138/learn/engin/1.pdf>

## 【評語】 090901

本組隊員以柏拉圖多面體為幾何基礎，研發可以建構在其上之全新多面體組件。本組成員合力推導製作新多面體之數學模型，並齊力花時間構建許多件全新多面體，團體合作精神良好。本作品新多面體頗具藝術價值，但是工業價值尚待發掘和確認。