中華民國第51屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

最佳(鄉土)教材獎

080415

三階魔方一筆畫
—三階立方體中的漢米頓路徑

學校名稱：彰化縣員林鎮僑信國民小學

作者：	指導老師：
小六 詹壹荃 小六 黃裕彰	林朝炘

關鍵詞：漢米頓路徑、三階立方體、一筆畫

三階魔方一筆畫

三階立方體中的漢米頓路徑

摘要

市面上有一種黑白三階方塊益智玩具，由黑白相間的方塊以一條繩子串起，透過特定的折法可以堆疊成三階立方，那麼，三階立方中有幾種一筆畫漢米頓路徑？本組透過分析平面方格中的漢米頓路徑，擴充討論三階立方體的漢米頓路徑。在無序狀態下，將旋轉與鏡射路經視為同一路徑，本組依循一定的邏輯分類，求得三階立方漢米頓路徑共 1449 種，若考慮立方體三視圖為同一路徑，則漢米頓路徑應該只有 483 種；經隨機抽樣檢驗，483 種路徑還原後並沒有完全涵蓋在 1449 種中，因此三階立方體中的漢米頓路徑至少大於 483 種。另外，平面化的三階立方，將 27 個節點間以特定 54 條路徑相連，將來可以電腦模擬找出答案。

壹、 研究動機

在某次考試的偶然中，我們遇到一題怪異的題目，題目要求我們算出：3x3 的平面方格有幾種「一筆畫完」的方式？加上我們在網路上找到有關萊昂哈德 • 歐拉的柯尼斯堡七橋問題，我們對於這種無法透過計算的數學問題產生興趣。此外，市面上有一種黑白三階方塊益智玩具(圖 1-1)，它是由黑白相間的方塊以一條繩子串起，透過特定的折法可以堆疊成三階立方(圖 1-2)，這其實也算是一筆畫問題的變形，我們想知道有多少種方法可以一筆畫畫完三階立方？

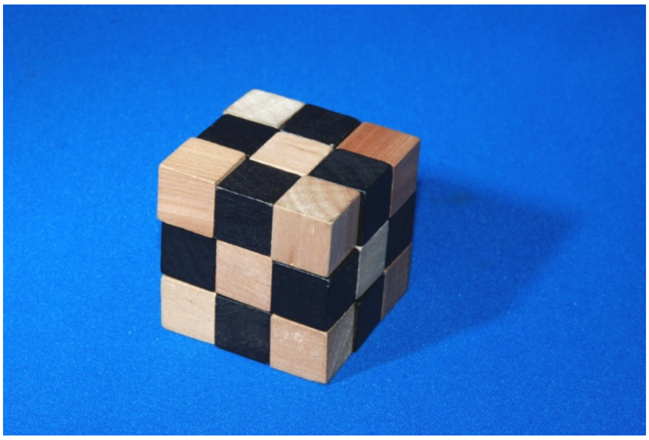


圖 1-1、黑白相間三階方塊益智玩具

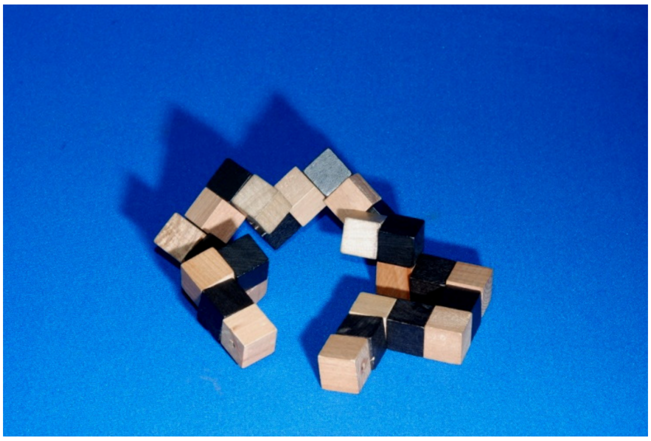


圖 1-2、黑白相間的方塊以一條繩子串起

貳、研究目的

一、透過平面 2X2、3X3、4X4 方陣，找出一筆畫的路徑
二、從平面擴展到三階立方

參、研究材料

紙、筆、黑白相間三階方塊益智玩具

肆、研究過程

一、文獻探討

關於一筆畫問題由來已久，最著名的要算是歐拉圈了，當時東普魯士柯尼斯堡（今日俄羅斯加里寧格勒）市區跨普列戈利亞河兩岸，河中心有兩個小島。小島與河的兩岸有七條橋連接。在所有橋都只能走一遍的前提下，如何才能把這個地方所有的橋都走遍？當地居民請教了數學家昂哈德 • 歐拉，經歐拉研究後，提出所謂的歐拉圈(一筆描繪)：給定一個圖形，要以一筆畫的方式將此圖描繪完成，圖形中，每一條線必定要經過，**線不可重複，但是點可以重複**(圖 4-1)。若是此圖形中不但滿足前面所述，且**起點與終點相同**，則此圖形稱為「歐拉圖」或是「**歐拉圈**」。(圖 4-2)

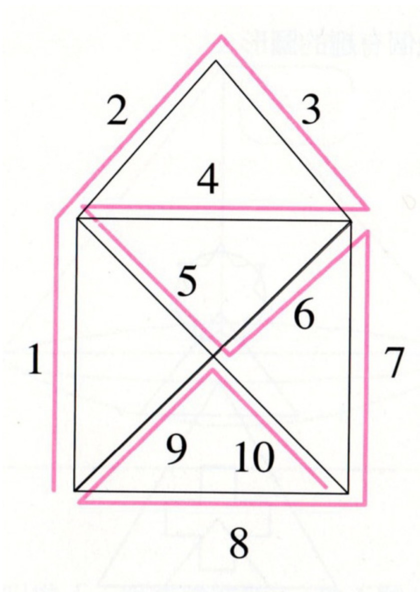


圖 4-1

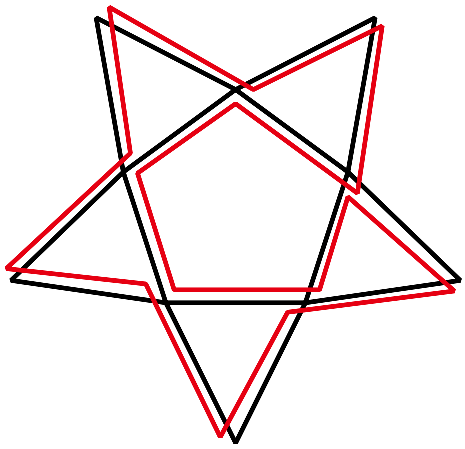


圖 4-2、歐拉圈

另外一種一筆畫問題，給定一個圖形中(圖 4-3)，能夠找到**有一個路徑過所有的點**，但是**點不可以重複經過**，而最後**再回到原點**，構成一個圈型，稱為「**漢米頓圈**」(圖 4-4)。

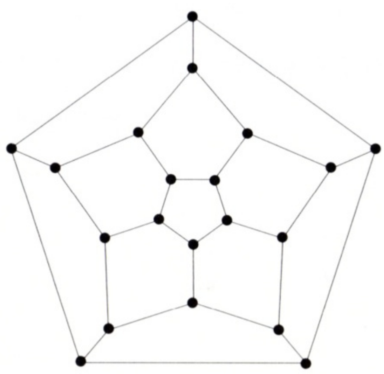


圖 4-3

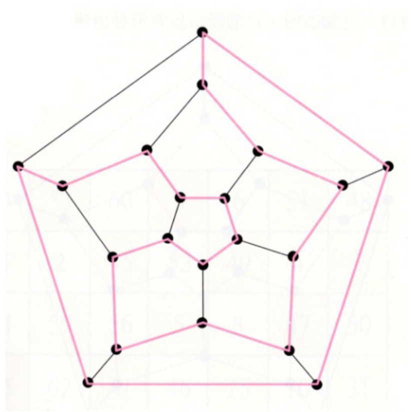


圖 4-4、漢米頓圈

若是在圖形中(圖 4-5)，**不指定起點與終點須在同一點上**，找到有一個路徑過所有的點，但是點不可以重複經過，這可以視為漢米頓圈的變形，稱之為「**漢米頓路徑**」(圖 4-6)

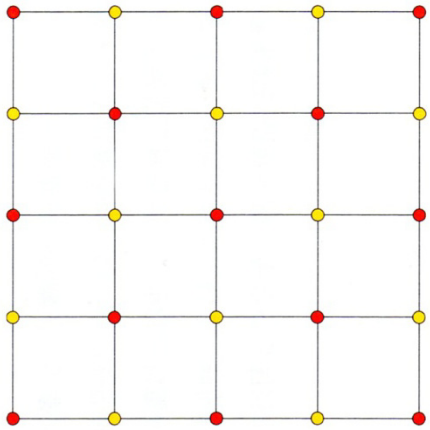


圖 4-5

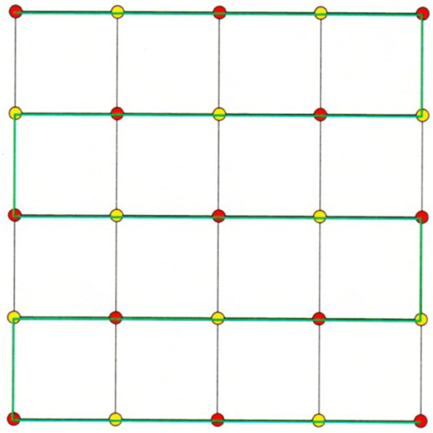


圖 4-6、漢米頓路徑，起點與終點不同

二、研究方法

本組想要找出市面上由一條黑白方塊折疊而成的「黑白相間三階方塊益智玩具」，除了該玩具的唯一折疊法外，是否能設計其他種三階立方益智方塊折疊法？研究其他摺疊法，相當於在 **3X3X3 立方體中找尋一筆畫的漢米頓路徑**。

在找尋 3X3X3 立方體一筆畫路徑前，**先找尋平面上的漢米頓路徑**，再擴充成三階立方，其概念為分層完成 3X3 棋盤方格的漢米頓路徑，在上下相連接三層(１°→２°→３°)(圖 4-7)；但在立方體中，未必需要依照１°→２°→３°順序完成漢米頓路徑，也可能是１°→２°→３°→２°→３°→２°→３°→２°→１°等路徑(圖 4-8)。即：

（一）先了解平面方格一筆畫路徑，再擴展到三階立方…………………………研究二

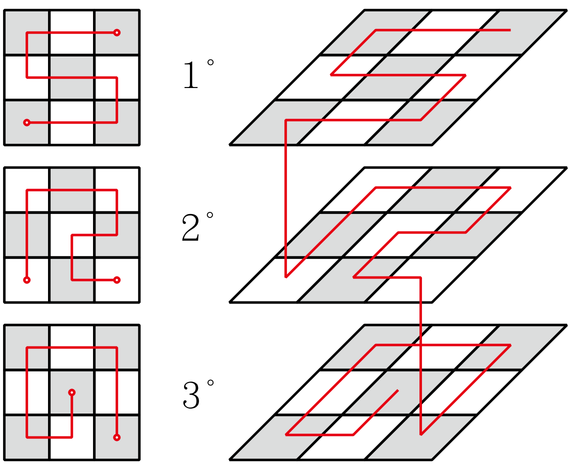


圖 4-7、依照１°→２°→３°順序完成三階立方體的漢米頓路徑

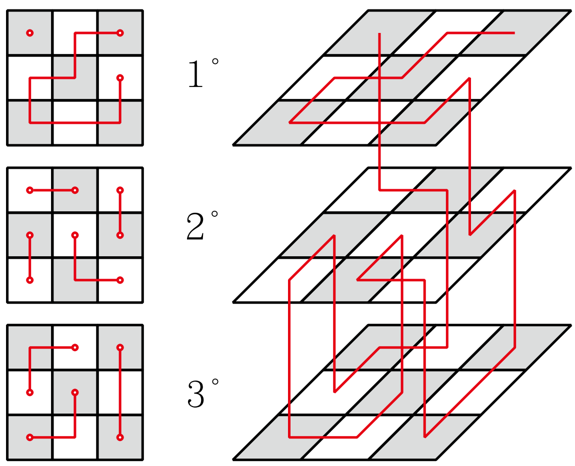


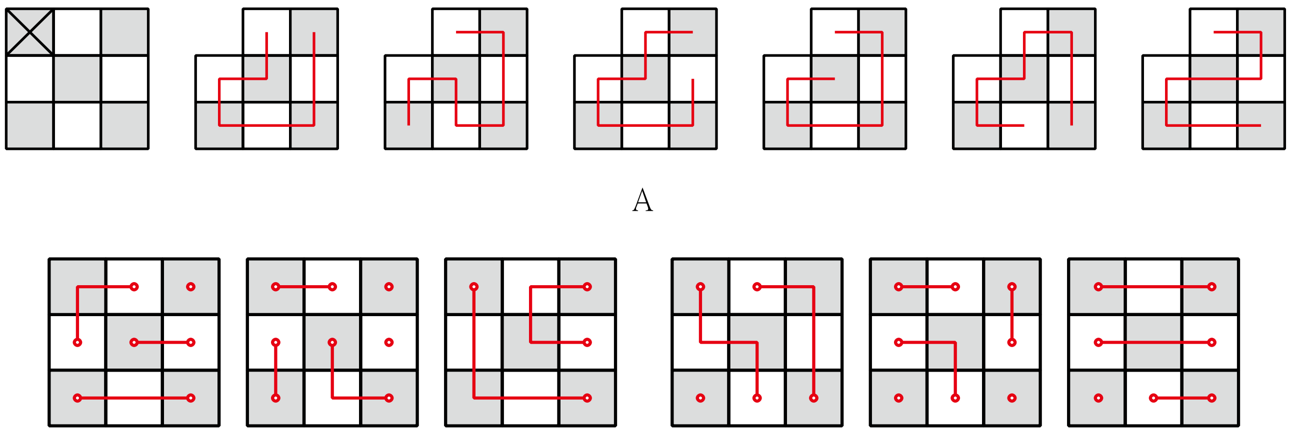
圖 4-8、依照１°→２°→３°→２°→３°→２°→３°→２°→１°順序完成三階立方體的漢米頓路徑

在第一種模式中，分別在各層完成３Ｘ３方格的漢米頓路徑，再依序連接其他層３Ｘ３方格，此種模式中兩層間連接點必須為可行的起點及終點，如圖 4-7 所示，第一層(１ﾟ)的終點即為第二層的起點，第二層(２ﾟ)的終點為第三層的起點；因此，我們**必須先了解３Ｘ３方格的所有一筆畫漢米頓路徑**，則：

（二）棋盤方格中的漢米頓路徑有哪些？··**研究一**

在第二種模式中(圖 4-8)，不須依序完成三層祺盤方格，在立體空間中，可任意上下經過各層方格，只要方格不重複，並且可以一筆畫連接。仔細觀察發現，已經過的方格自該層抹去，剩餘的即為**缺損棋盤方格**：

1. 若剩餘的方格為相連偶數，一定可以找到一筆畫路徑，且不限起始點（圖 4-9A）。
2. 若剩餘的方格為相連奇數，則無一筆畫路徑，但可透過上下相連兩層達到一筆畫路徑
3. 若剩餘的方格為不相連奇數或偶數，則無一筆畫路徑，但可透過上下相連兩層達到一筆畫路徑



A

B C

圖 4-9、缺損方格中的漢米頓路徑

將棋盤方格依照西洋棋盤黑白相間方式填色，可以協助找尋漢米頓路徑，即使在缺損棋盤方格中，依據剩餘的方格黑、白個數，可以輕易判斷是否具有一筆畫路徑。如圖 4-9 中，缺損方格中有四塊黑、四塊白相連方格，依據黑→白→黑→白→……黑→白，一定可以找到一筆畫路徑；但棋盤方格未缺損前，黑方格五塊，白方格四塊，則一筆畫順序必為黑方格起始，黑方格結束，所經路徑黑白相間。

為了研究棋盤方格中的所有漢米頓路徑，光是填入黑與白，在找尋過程中無法分類檢查，因此我們**<u>設計出利用邊、角、中央等不同位置做為起點與終點的分類方法</u>**，藉此尋找棋盤方格中的所有可能路徑，如圖 4-10 所示，３Ｘ３棋盤方格中，以黑白兩色填入相鄰方格中，再將方格分類，則可以確定一件事情，從邊起始的方格絕對找不出一筆畫的路徑，因為３Ｘ３棋盤方格為奇數，所以**一筆畫路徑只能是從角落或中央方格出發(黑格子)，角落或是中央方格(黑格子)結束**。

依據這兩個原則，３Ｘ３棋盤方格中的漢米頓路徑，必定可以分成圖 4-11 中的三大類，意即：「角－角」或「角－中」；如圖 4-11 所示，Ｓ點出發，只會在Ａ、Ｂ、Ｂ’、Ｃ結束，而結束點與起點亦可互換（**無序**），而Ｓ→Ｂ’的狀況可以由Ｓ→Ｂ旋轉得到，所以在３Ｘ３棋盤方格中，**將鏡射、旋轉與無序視為同一種情況，則３Ｘ３棋盤方格中的漢米頓路徑，起始點必定為圖 4-11 中的三類。我們以此法探索２Ｘ２、３Ｘ３、４Ｘ４棋盤方格中的漢米頓路徑有哪些？（研究一）**

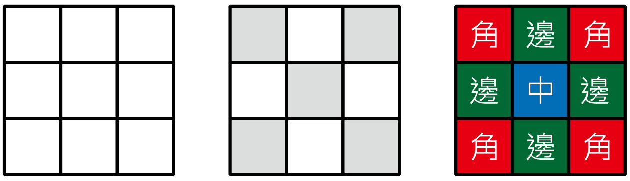


圖 4-10、解決３Ｘ３棋盤方格漢米頓路徑策略

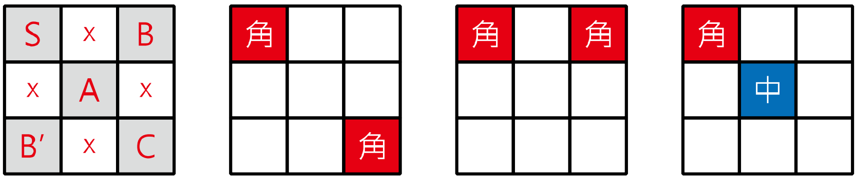


圖 4-11、３Ｘ３棋盤方格尋找漢米頓路徑分類法

４Ｘ４棋盤方格依照３Ｘ３棋盤方格尋找一筆畫漢米頓的策略，先將棋盤方格區分為**角塊、邊塊、中央塊**三種（圖 4-12）。而４Ｘ４棋盤方格為偶數，所以在「角－角」類別中，不會有從角塊起到斜對角塊結束的情況，而且在此類別中Ｓ→Ａ與Ｓ→Ａ’是旋轉的結果，視為同一類（圖 4-13A）。因此，根據偶數棋盤方格中，黑格起，白格結束的原則，在**無序**狀態下，將**鏡射**視為同一類型(圖 4-13E 中的Ｂ與Ｂ’)，則依照本組的方法，可以將４Ｘ４棋盤方格所有的漢米頓路徑，依據起點與終點分成十大類（圖 4-13）。

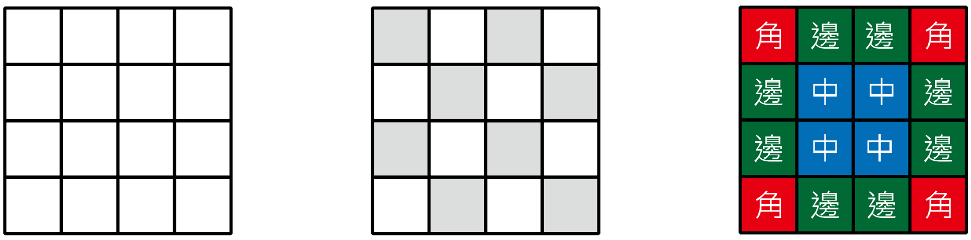


圖 4-12、解決４Ｘ４棋盤方格漢米頓路徑策略

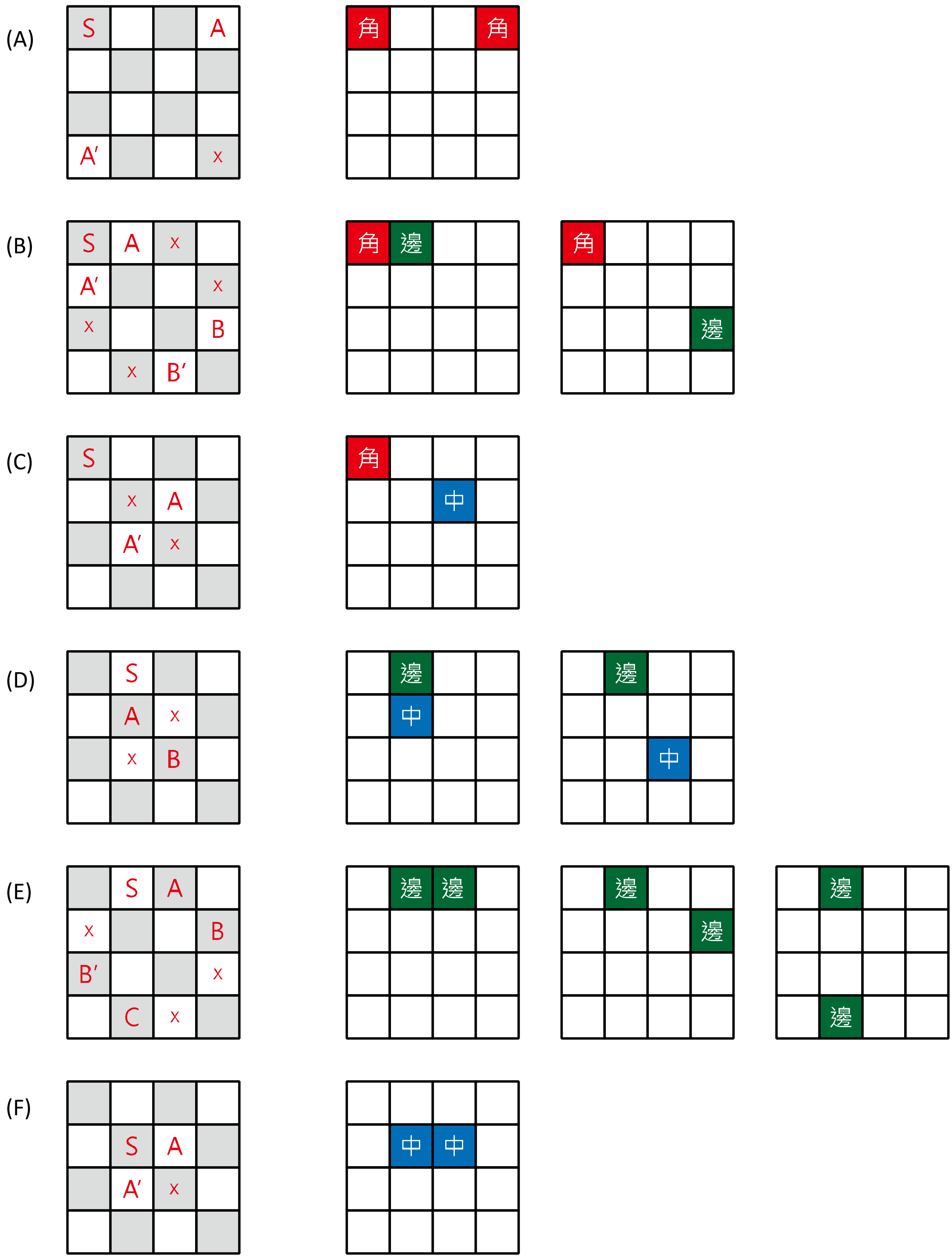


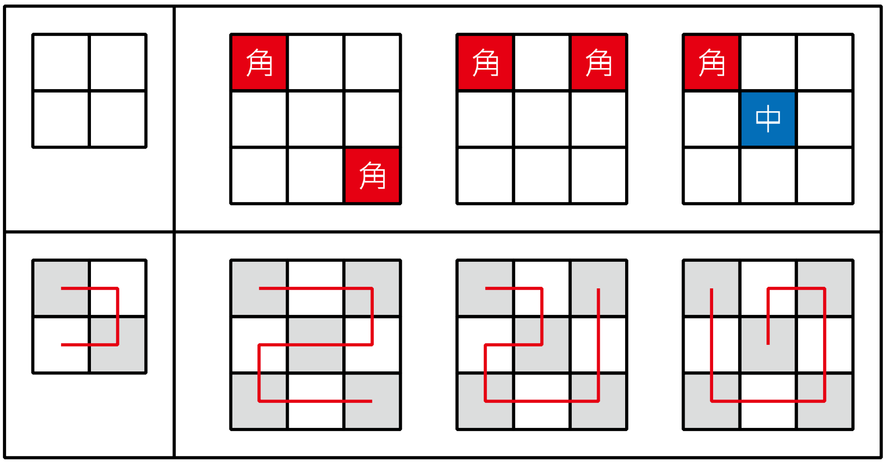
圖 4-13、４Ｘ４棋盤方格尋找漢米頓路徑分類法

伍、結果

一、平面棋盤方格中的漢米頓路徑有哪些？

（一）２Ｘ２、３Ｘ３棋盤方格中的漢米頓路徑：

表 5-1、２Ｘ２、３Ｘ３棋盤方格中的漢米頓路徑

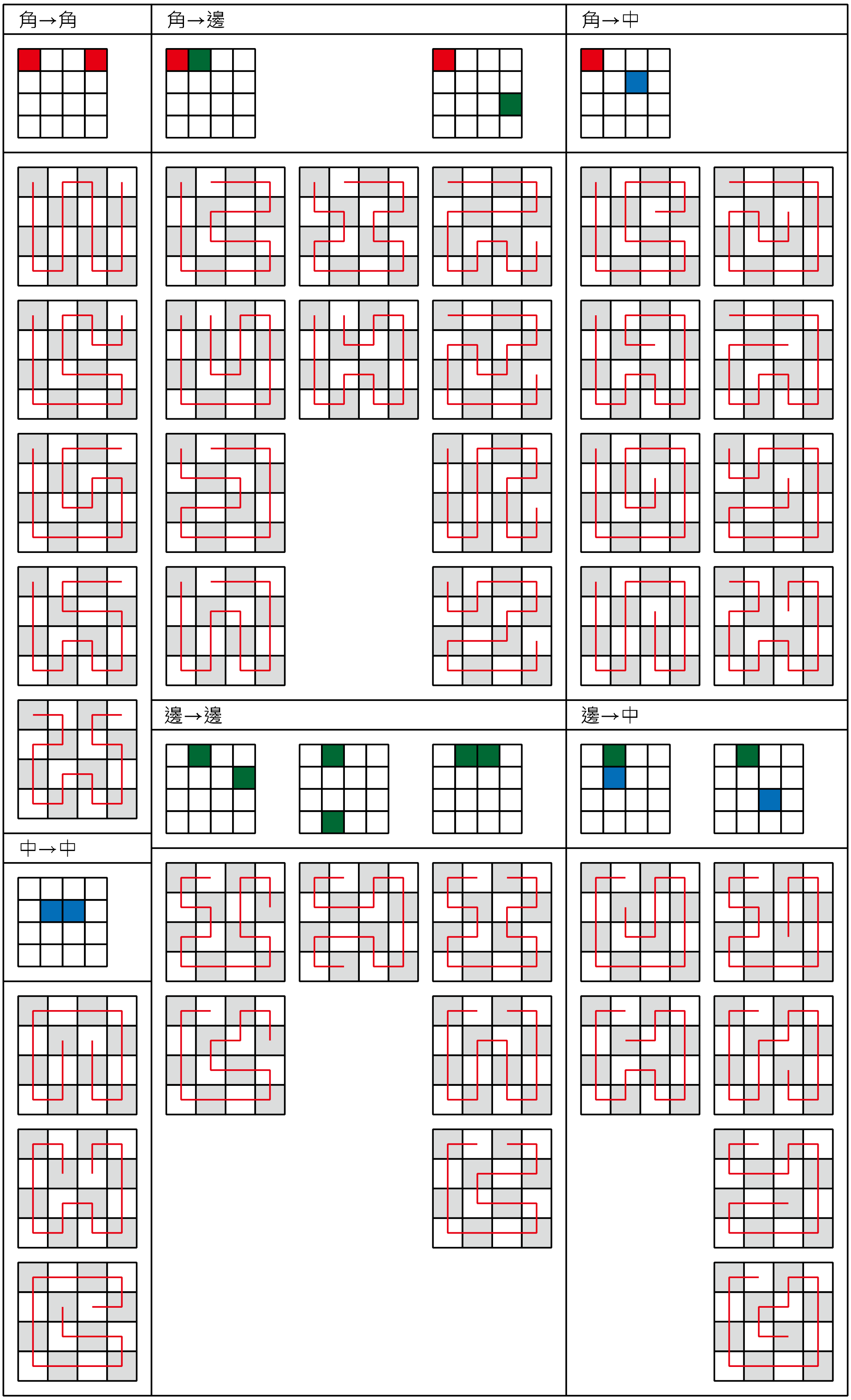


根據本組的分類方法，在３Ｘ３棋盤方格中，在無序狀態下，將旋轉與鏡射路經視為同一路徑，則所有漢米頓路徑共有三種，其中角格出發角格結束的有兩種，角－中的只有一種。

（二）４Ｘ４棋盤方格中的漢米頓路徑：

使用本組分類方法，在無序狀態下，將旋轉與鏡射視為同一路徑，則４Ｘ４棋盤方格中所有的漢米頓路徑共有 38 種（表 5-2），其中若是起點與終點在相鄰格上，則其漢米頓路徑亦為**漢米頓圈**（表 5-2 中的角－邊、中－中、邊－邊、邊－中）。

表 5-2、 4 X 4 棋盤方格中的漢米頓路徑



二、平面方格擴展到三階立方一筆畫路徑：

（一）分層完成三階立方一筆畫路徑（$1^{\circ}\rightarrow2^{\circ}\rightarrow3^{\circ}$）：

分別在各層完成３Ｘ３方格的漢米頓路徑，再依序連接其他層３Ｘ３方格（圖 5-1），第一層(1°)的終點即為第二層的起點，第二層(2°)的終點為第三層的起點；根據研究一結果，３Ｘ３方格中依照起點與終點形式共有三種：「角－角」兩種與「角－中」一種。在平面上，「角→中」和「中→角」視為無序的同一類型，但在三階立方中需要考慮該層終點為下層起點，所以「角→中」和「中→角」分開討論，在不考慮單層鏡射情況下，以樹狀圖方法可以找出分層完成三階立方一筆畫路徑($1^{\circ}\rightarrow2^{\circ}\rightarrow3^{\circ}$)共有 24 種(圖 5-2)（附錄 9-1）。

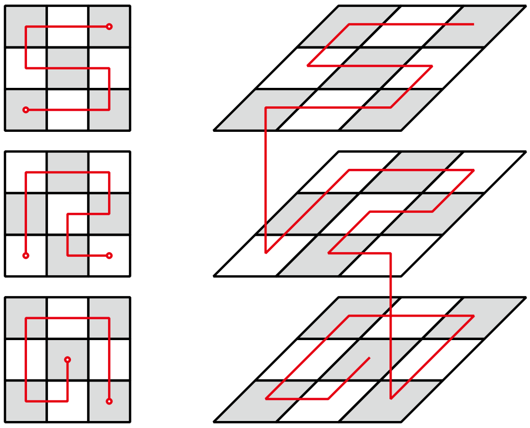


圖 5-1、三階立方中分層完成一筆畫路徑（$1^{\circ}\rightarrow2^{\circ}\rightarrow3^{\circ}$)其中一種情況

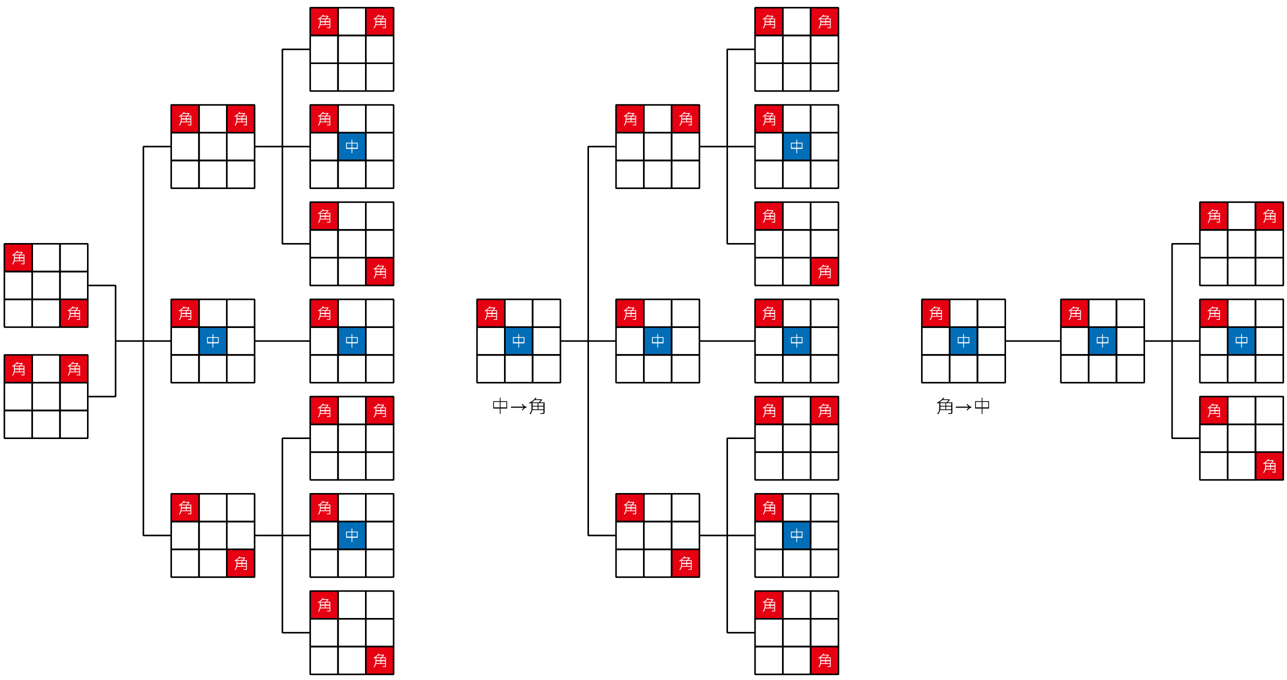


圖 5-2、三階立方中分層完成（$1^{\circ}\rightarrow2^{\circ}\rightarrow3^{\circ}$）一筆畫路徑的可能性樹狀圖

（二）經過一、二層，完成第三層後回到第二層、第一層完成三階立方一筆畫路徑（1° →2°→3°→2°→1°）：

3 X 3 棋盤方格若是缺損其中一格，只要**缺損的部分是角格或中央格**，則一定有一筆畫的漢米頓路徑(表 5-3)。若三階立方漢米頓路徑起點在第一層，直接穿過第二層，達到第三層，路徑走完第三層後，再回到第二層，走完第二層後再回到第一層完成漢米頓路徑（圖 5-3）；此法當路徑穿越一、二兩層到達第三層後，第二、三兩層成為缺損一格的棋盤方格，此時無論缺損方格中漢米頓路徑的起始點在哪，皆可找到一筆畫路徑，據此法可以找到共 38 種三階立方漢米頓路徑（附錄 9-2）。

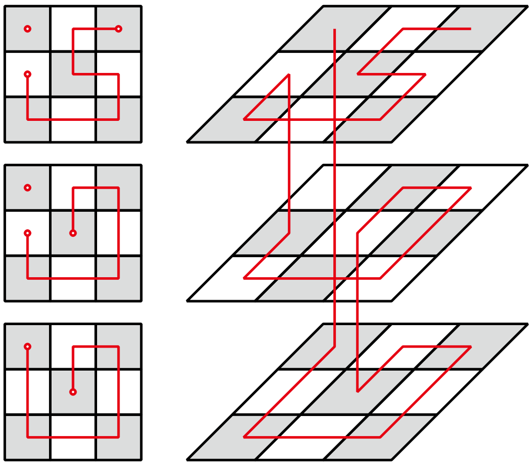
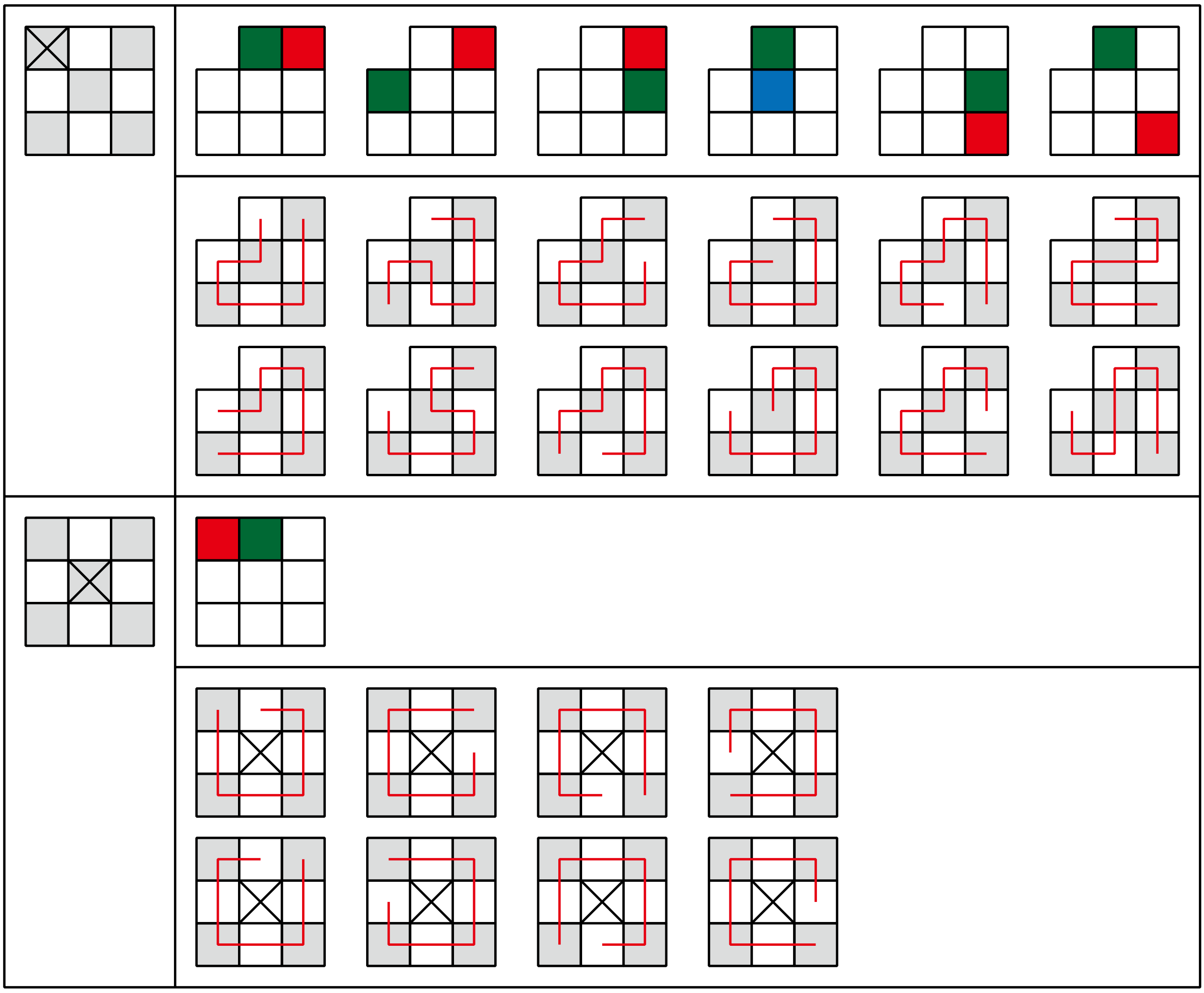


圖 5-3、三階立方中分層完成一筆畫路徑（1°→2°→3°→2°→1°）其中一種情況

表 5-3、缺損一格後的 3 X 3 棋盤方格之漢米頓路徑



（三）經過一、二層，完成第三層後，再第一層及第二層間往返的三階立方一筆畫路徑（$1^\circ \to 2^\circ \to 3^\circ \to 2^\circ \to 1^\circ \to 2^\circ \to 1^\circ \cdots$）：

經過一、二層，完成第三層後，在第一層及第二層間往返的三階立方一筆畫路徑，共計 1223 種（附錄 9-3），其中包含：

1. 第一、二層皆經過一格，到第 三層完成後，再回到第一、二層往返直至完成漢米頓路徑。（圖 5-3）
2. 第一層經過一格，第二層分別經過三格、五格、七格，再到第三層完成後，再回到第一、二層往返直至完成漢米頓路徑。（圖 5-4）
3. 第一、二層分別經過 $(9-n)$ 且 $n \in N$ 格，後到達第三層，完成第三格一筆畫路徑後回到第一、二層往返直至完成漢米頓路徑。

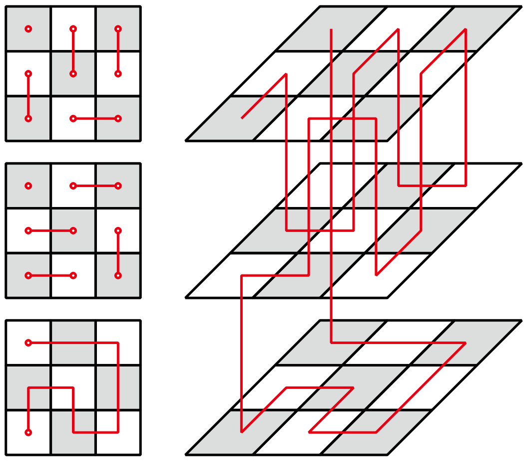


圖 5-3、三階立方中分層完成一筆畫路徑（$1^\circ \to 2^\circ \to 3^\circ \to 2^\circ \to 1^\circ \to 2^\circ \to 1^\circ \to 2^\circ \to 1^\circ$）其中一種情況

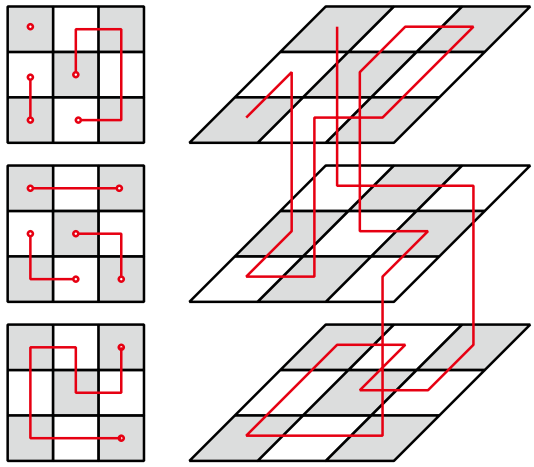


圖 5-4、三階立方中分層完成一筆畫路徑（$1^\circ \to 2^\circ (3) \to 3^\circ \to 2^\circ \to 1^\circ \to 2^\circ \to 1^\circ$）其中一種情況

（四）隨機穿越三層往返的三階立方一筆畫路徑（$1^\circ \to 2^\circ \to 3^\circ \to 2^\circ \to 3^\circ \to 2^\circ \to 1^\circ \cdots$）

若隨機穿越三層往返，直到完成一筆畫路徑（圖 5-5），其中包含各層剩餘方格為 $(9-n)$ 且 $n \in N$ 格，但隨機往返三層間，本組找出 164 種（附錄 9-4）

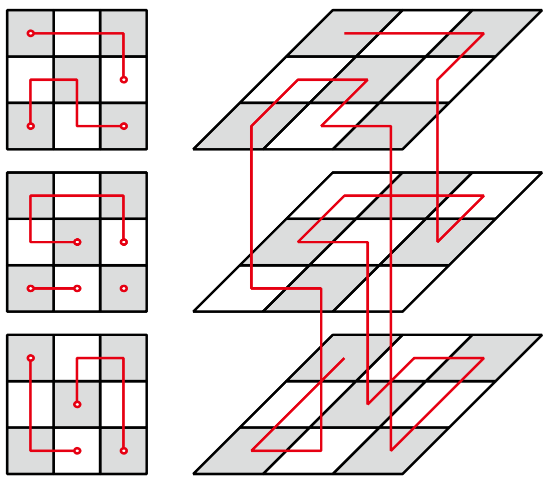


圖 5-5、隨機穿越三層往返的三階立方一筆畫路徑（$1^\circ \to 2^\circ \to 3^\circ \to 2^\circ \to 1^\circ \to 2^\circ \to 3^\circ$）其中一種情況

陸、討論

根據本組分類方法所得三階立方共 1449 種，但三階立方具有**三組對面**，因此當找出一種三階立方一筆畫路徑同時，從**前視**及**側視**可以找到另外兩種一筆畫路徑(圖 6-1)，故三階立方一筆畫路徑事實上應該為 1449/3=483 種，但是經過隨機抽樣檢查結果顯示，我們所找尋的三階立方一筆畫路徑中，還原成立體圖再換一個角度看時，並非每一個方向所找到的三階立方一筆畫路徑都與原來所找的重複，因此原本所找到的 1449 種並沒有涵蓋全部一筆畫路徑。再者，根據我們找尋的方法中，一筆畫路徑起始點與終點也未涵蓋所有可能性，所以我們合理相信三階立方中的一筆畫漢米頓路徑至少有 483 種以上。

此外，本組經過討論，將三階立方透視圖平面化，重新繪製成平面圖形(圖 6-2)，則在該圖形中的漢米頓路徑，即為三階立方的漢米頓路徑。

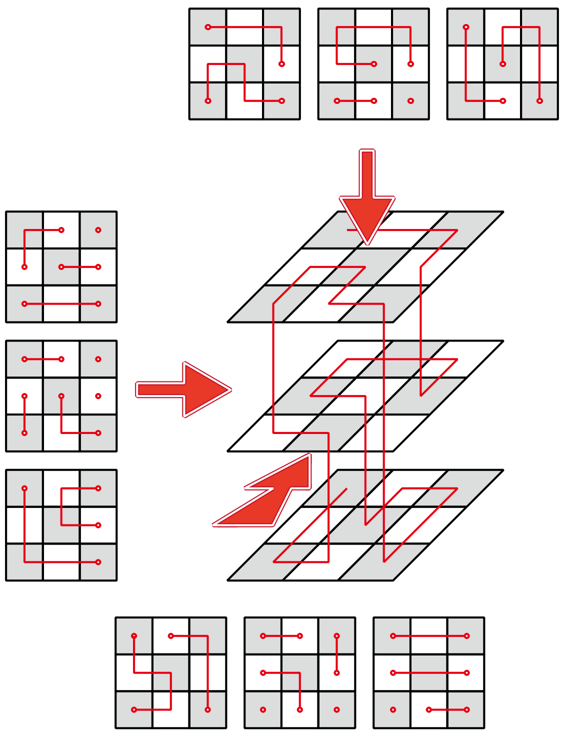


圖 6-1、三階立方以不同面向觀察，可以找到三種一筆畫漢米頓路徑

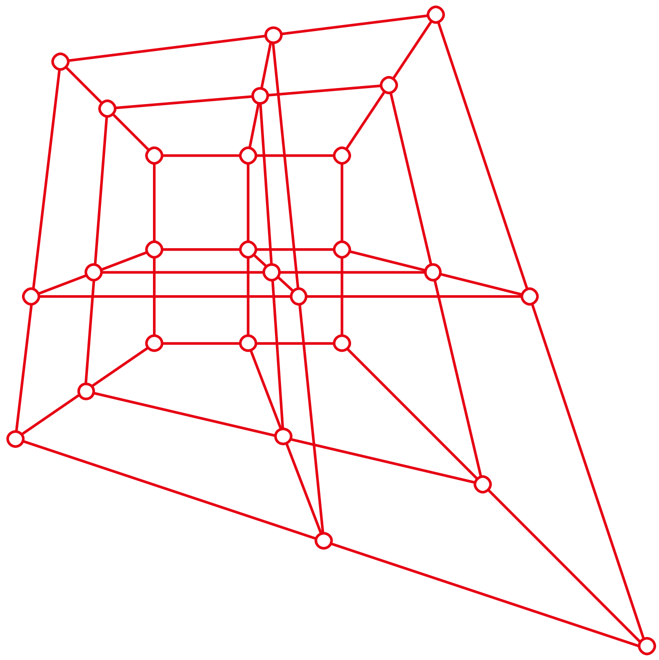
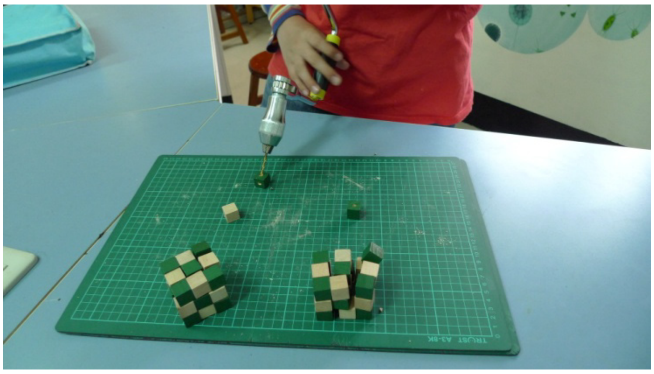


圖 6-2、將三階立方以透視圖平面化，繪製成平面圖形，可以此圖形檢視漢米頓路徑

雖然本組研究無法將三階立方所有的漢米頓路徑完整找出，但透過三視圖檢驗以及平面化的方法，可將問題依循一定的邏輯歸類，尤其是平面化的三階立方(圖 6-2)，27 個節點間以特定 54 條路徑相連，或許將來有後進可以以電腦程式分析，找出確實的答案。

此外，根據我們所得的三階立方一筆畫漢米頓路徑，本組改良了市面所售的三階方塊玩具，試著製作其他漢米頓路徑(圖 6-3、6-4)。



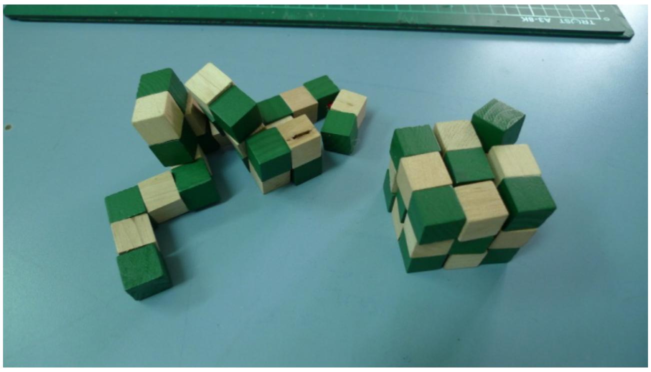


圖 6-3、以本組所得漢米頓路徑自製三階方塊　圖 6-4、自製玩具成品

柒、結論

一、根據本組的分類方法，在３Ｘ３棋盤方格中，在無序狀態下，將旋轉與鏡射路經視為同一路徑，則所有漢米頓路徑共有三種，其中角格出發角格結束的有兩種，角－中的只有一種。４Ｘ４棋盤方格中所有的漢米頓路徑共有 38 種。

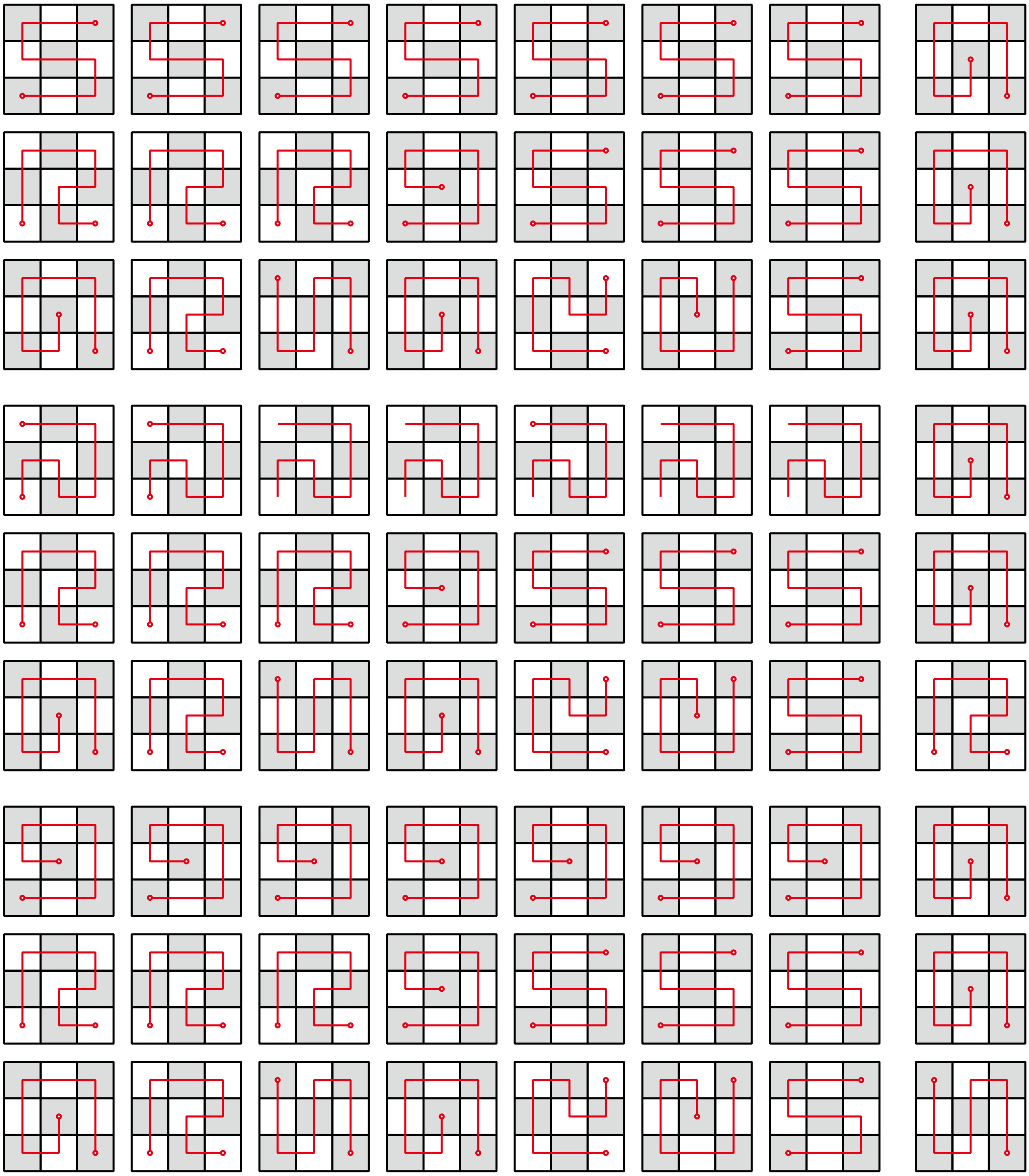
二、本組分類方法所得三階立方共 1449 種，分層完成三階立方一筆畫路徑有 24 種；經過一、二層，完成第三層後回到第二層、第一層完成三階立方一筆畫路徑有 38 種；經過一、二層，完成第三層後，再第一層及第二層間往返的三階立方一筆畫路徑有 1223 種；隨機穿越三層往返的三階立方一筆畫路徑有 164 種。

捌、參考資料

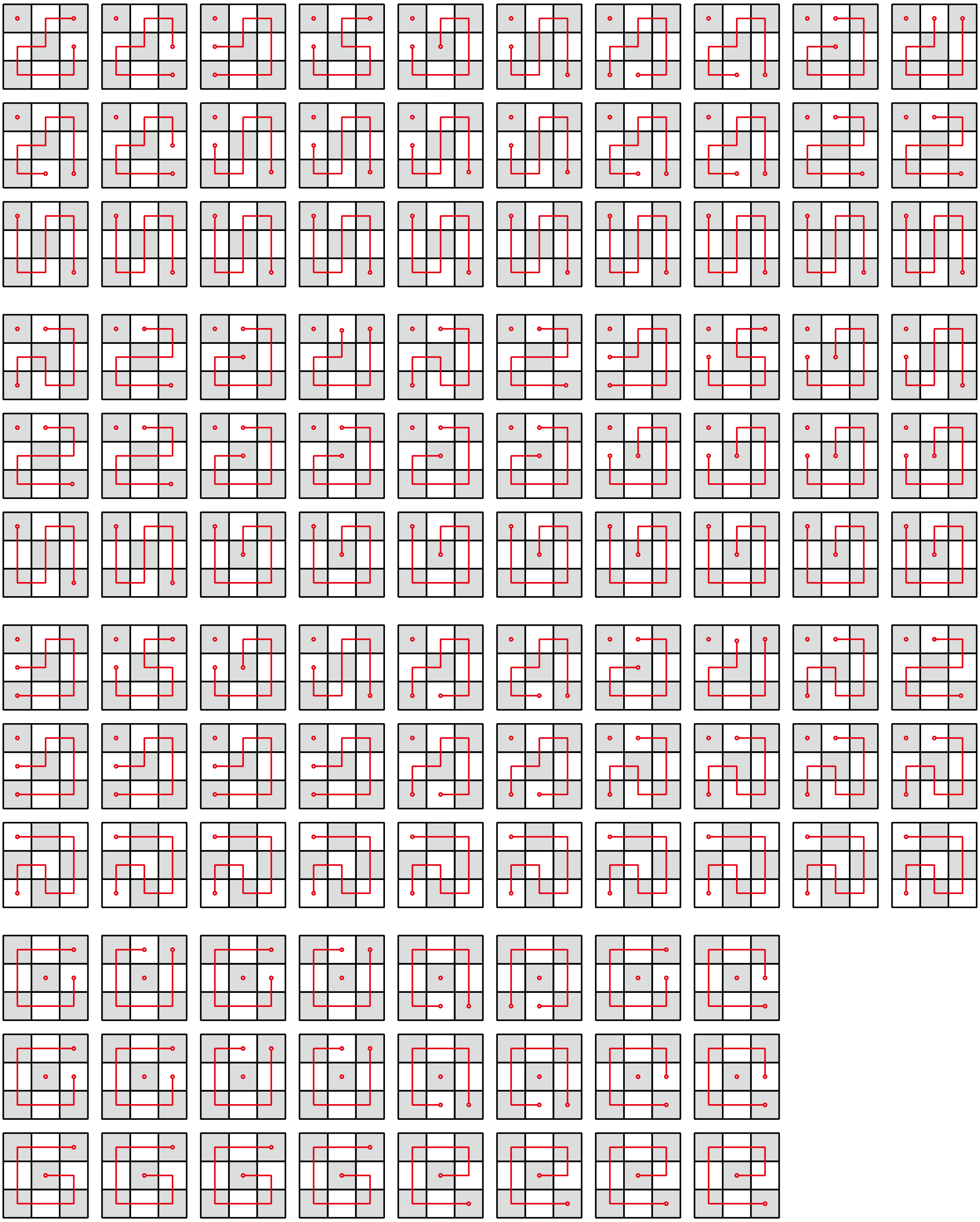
徐力行（2003）。沒有數字的數學。台北：天下遠見出版

玖、附錄

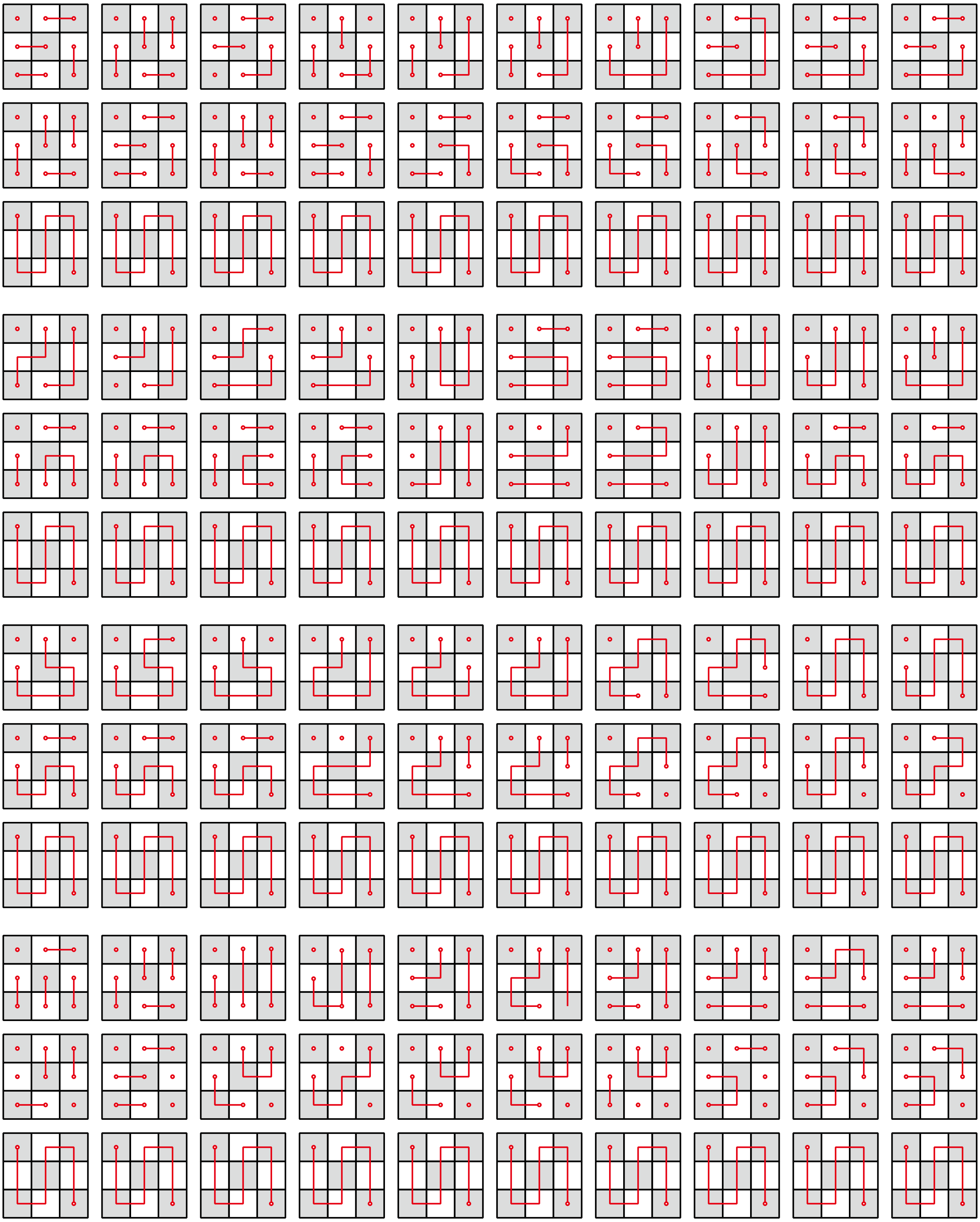
附錄 9-1、分層完成三階立方一筆畫路徑（1°→2°→3°）

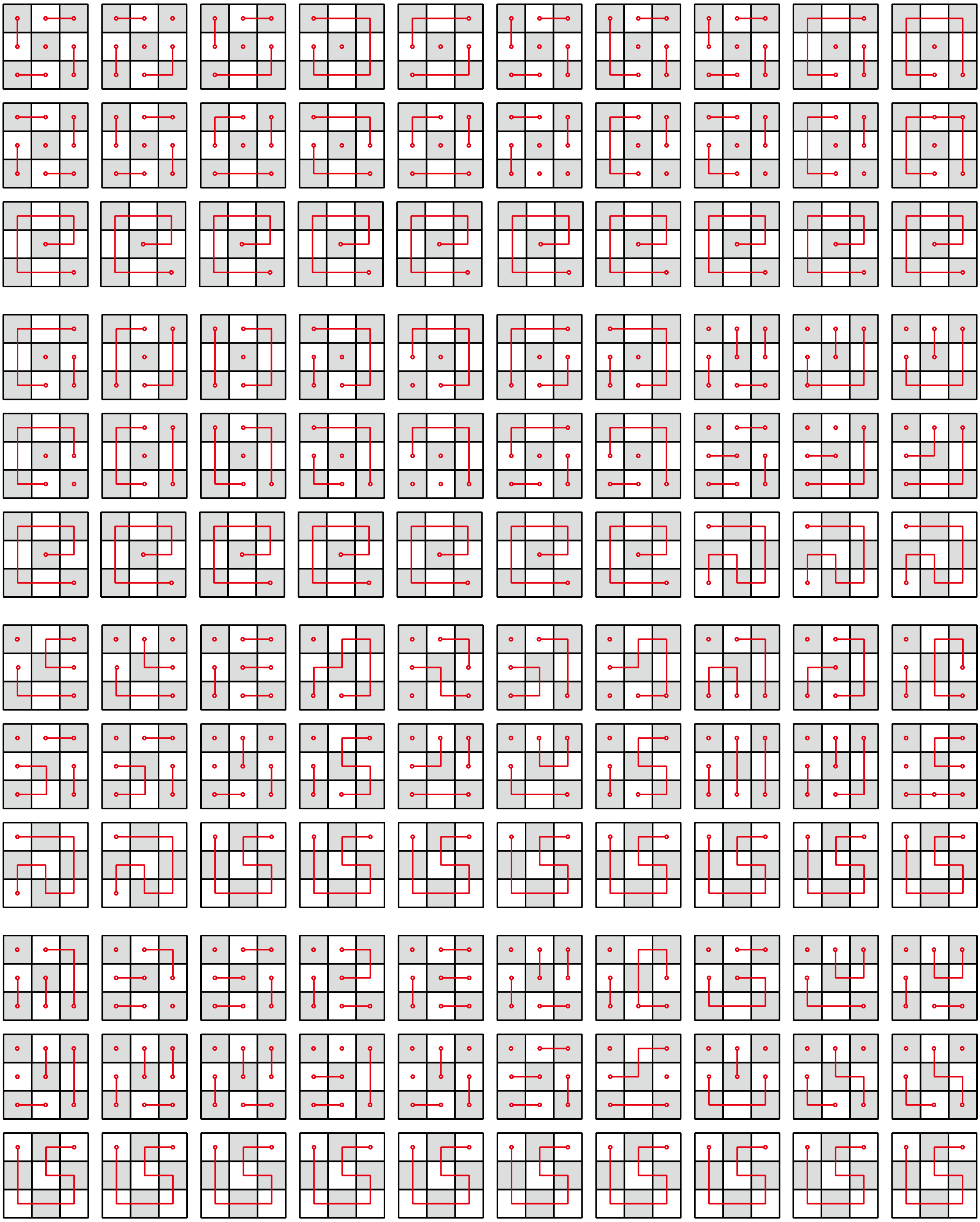


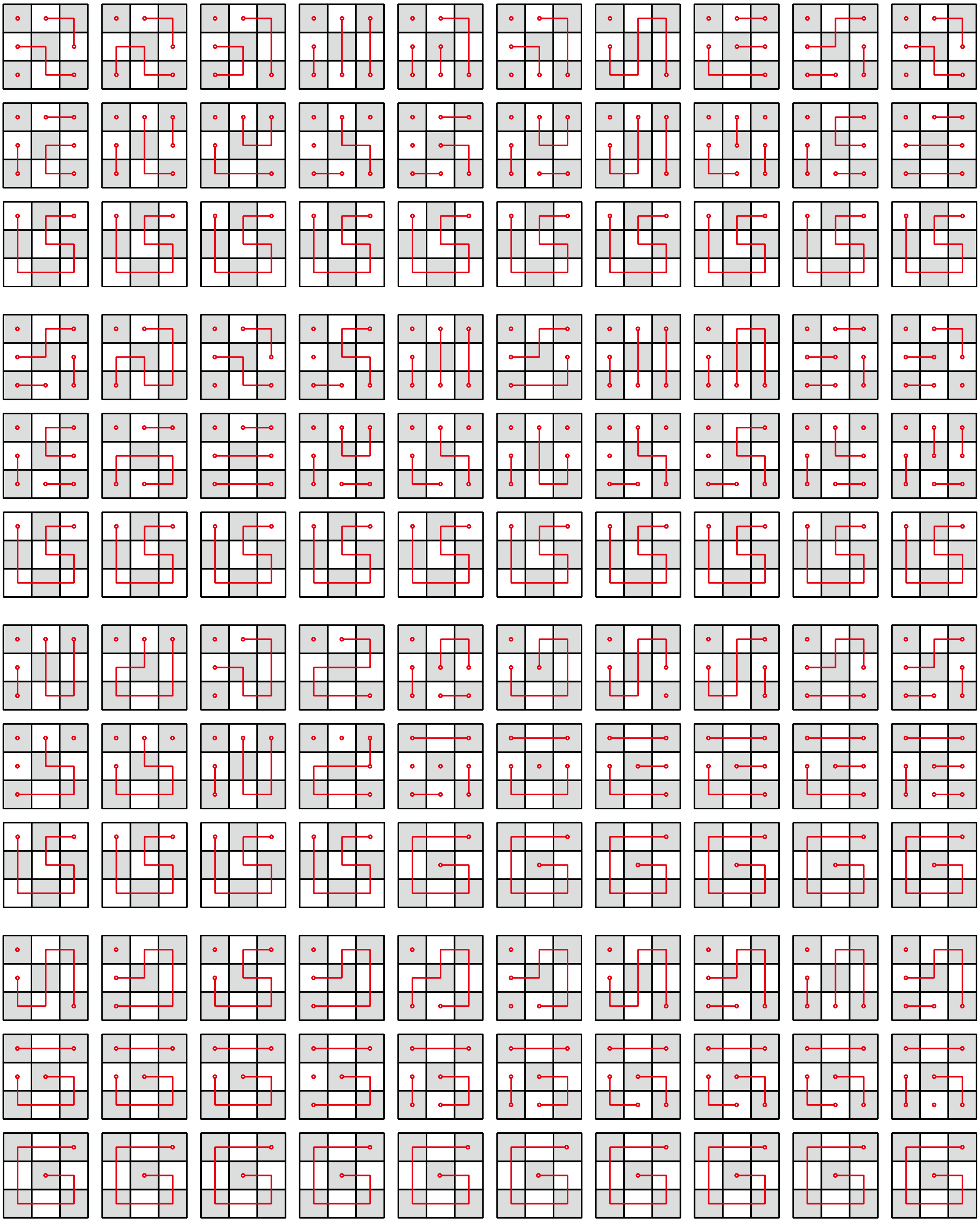
附錄 9-2、經過一、二層，完成第三層後回到第二層、第一層完成三階立方一筆畫路徑（1°→2°→3°→2°→1°）

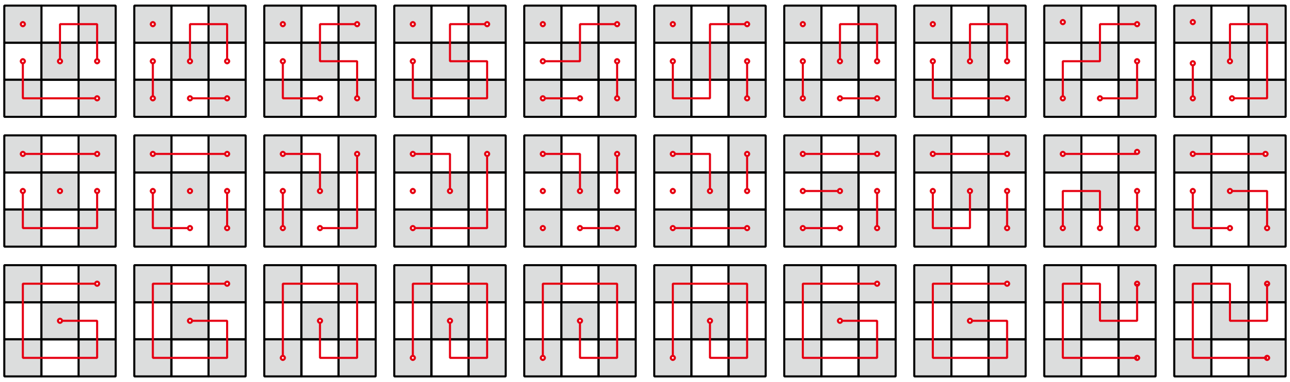


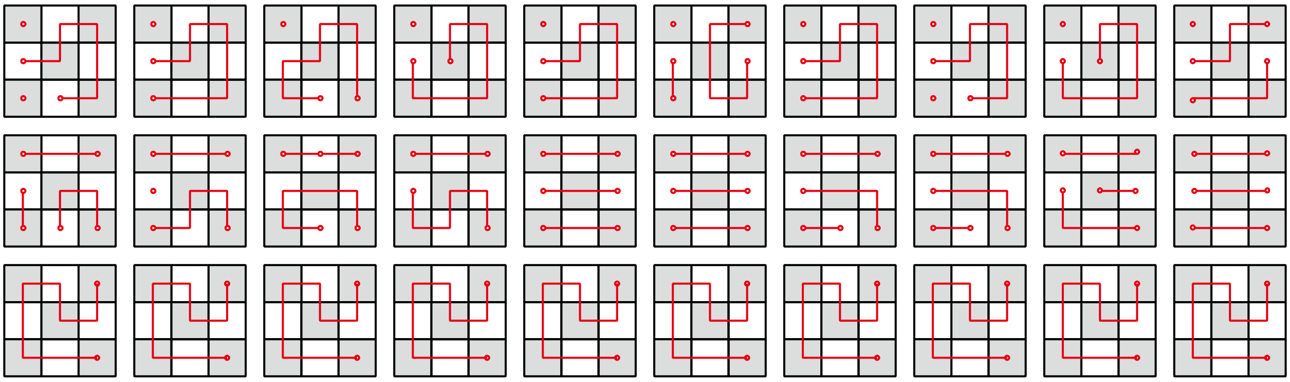
附錄 9-3、經過一、二層，完成第三層後，再第一層及第二層間往返的三階立方一筆畫路徑（1°→2°→3°→2°→1°→2°→1°…）部分

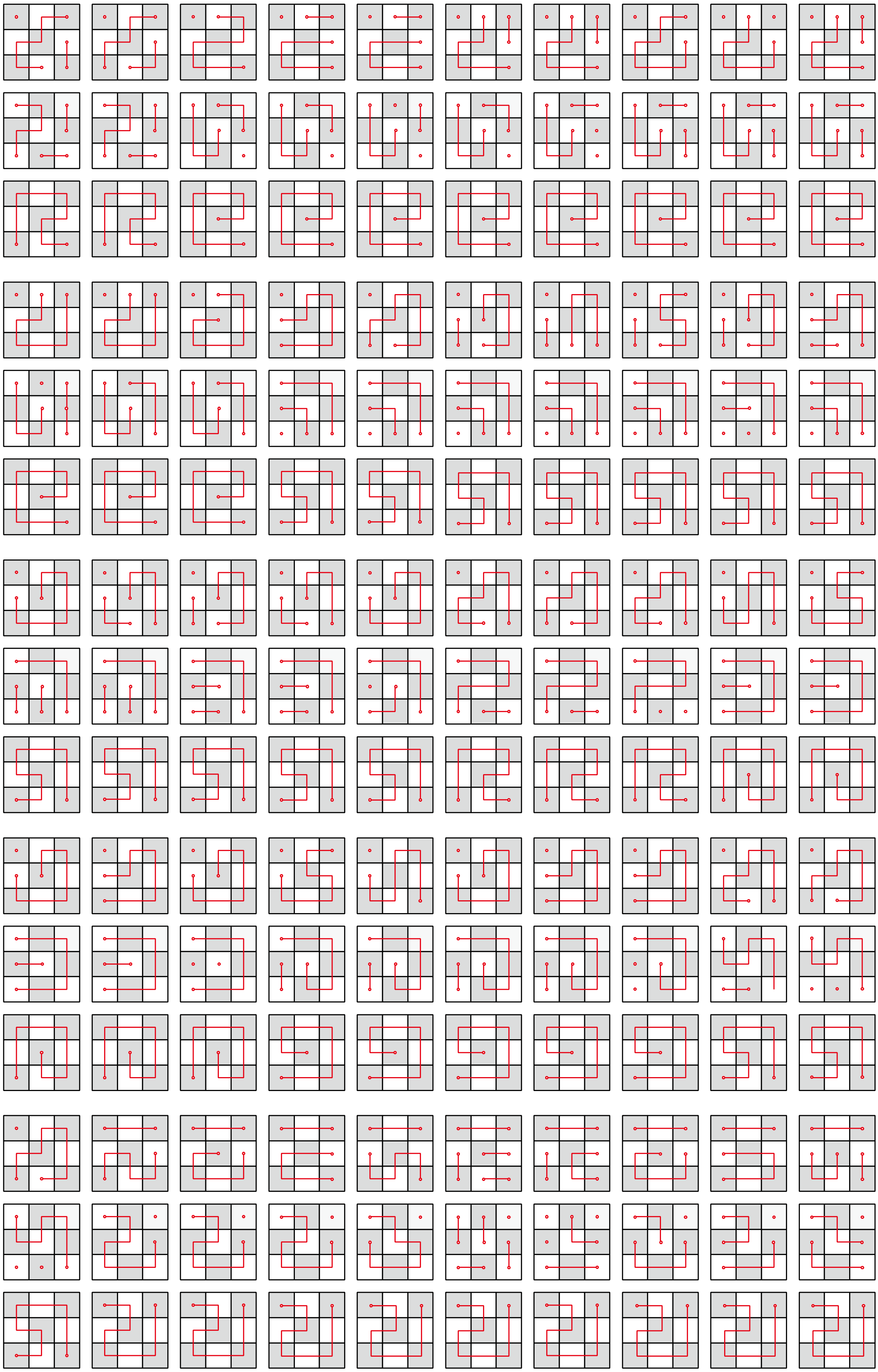


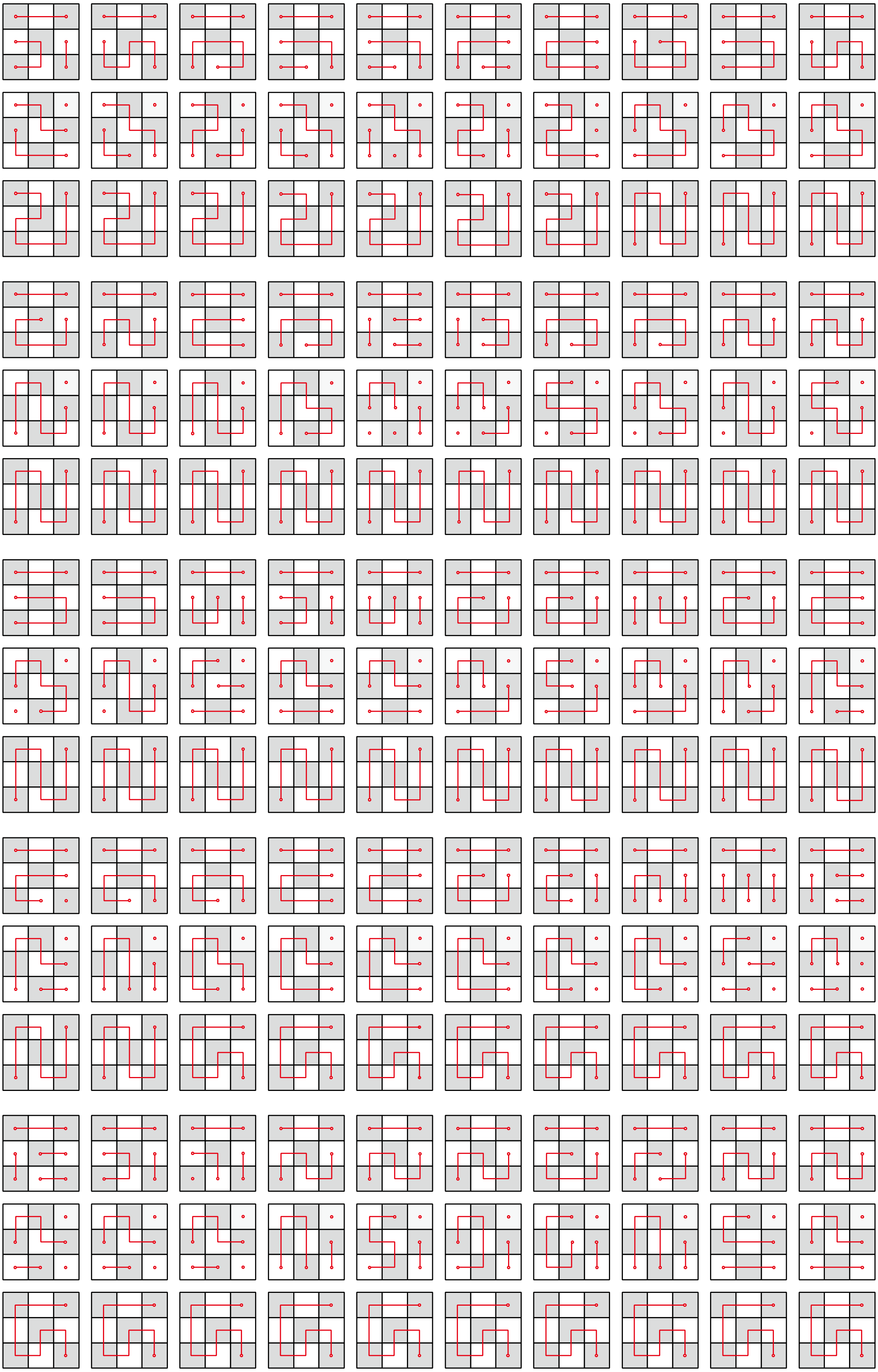


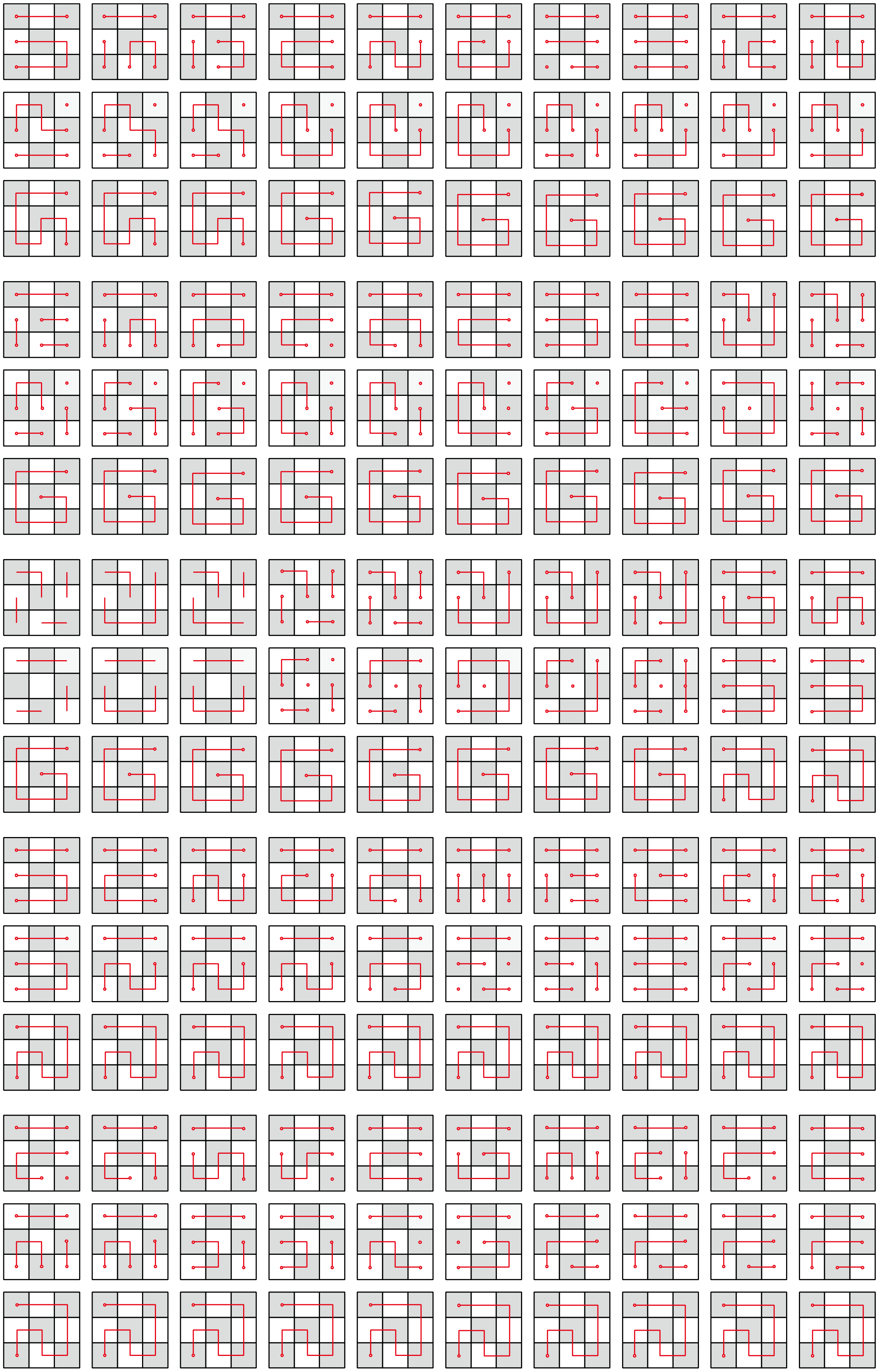


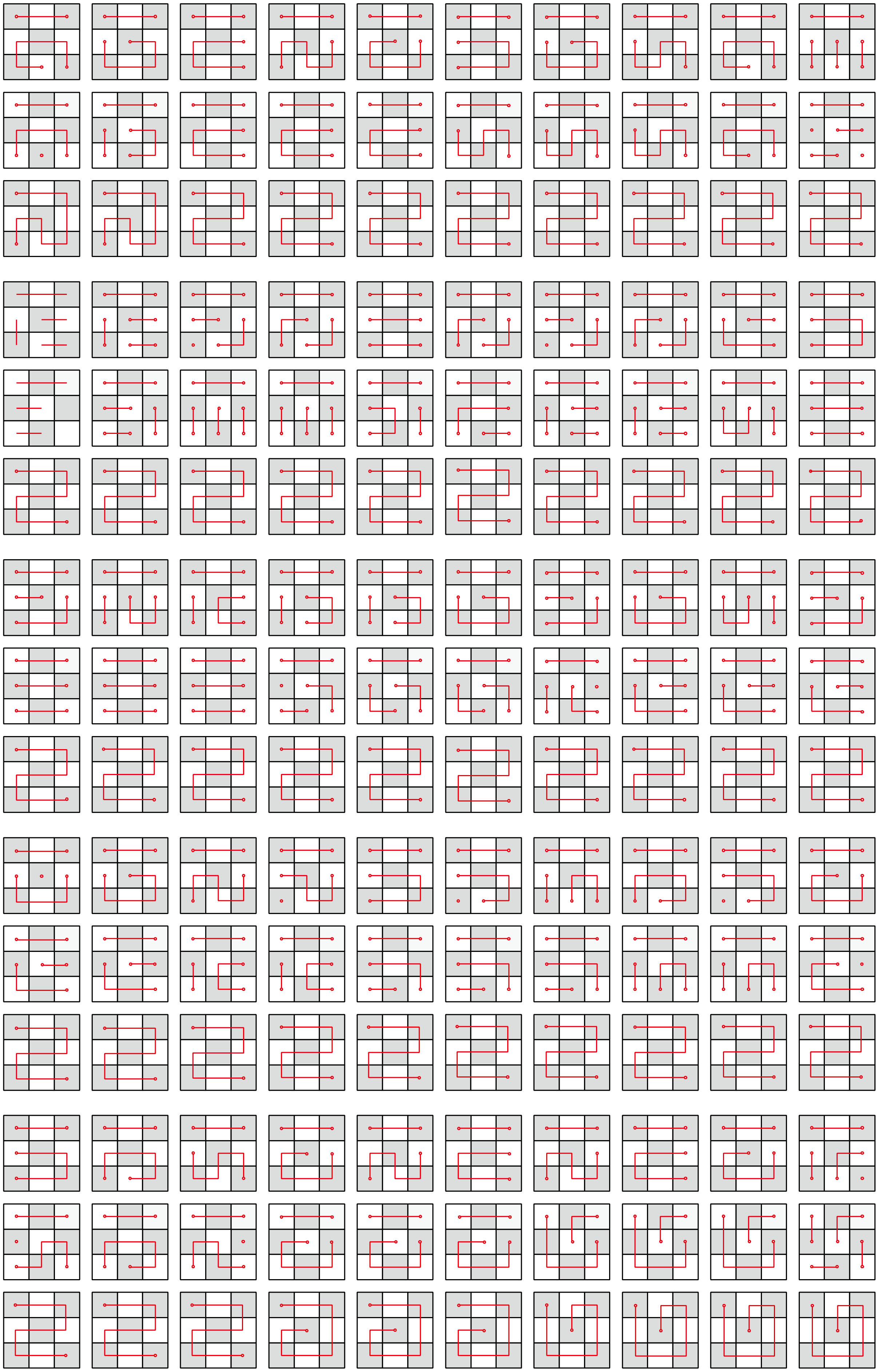




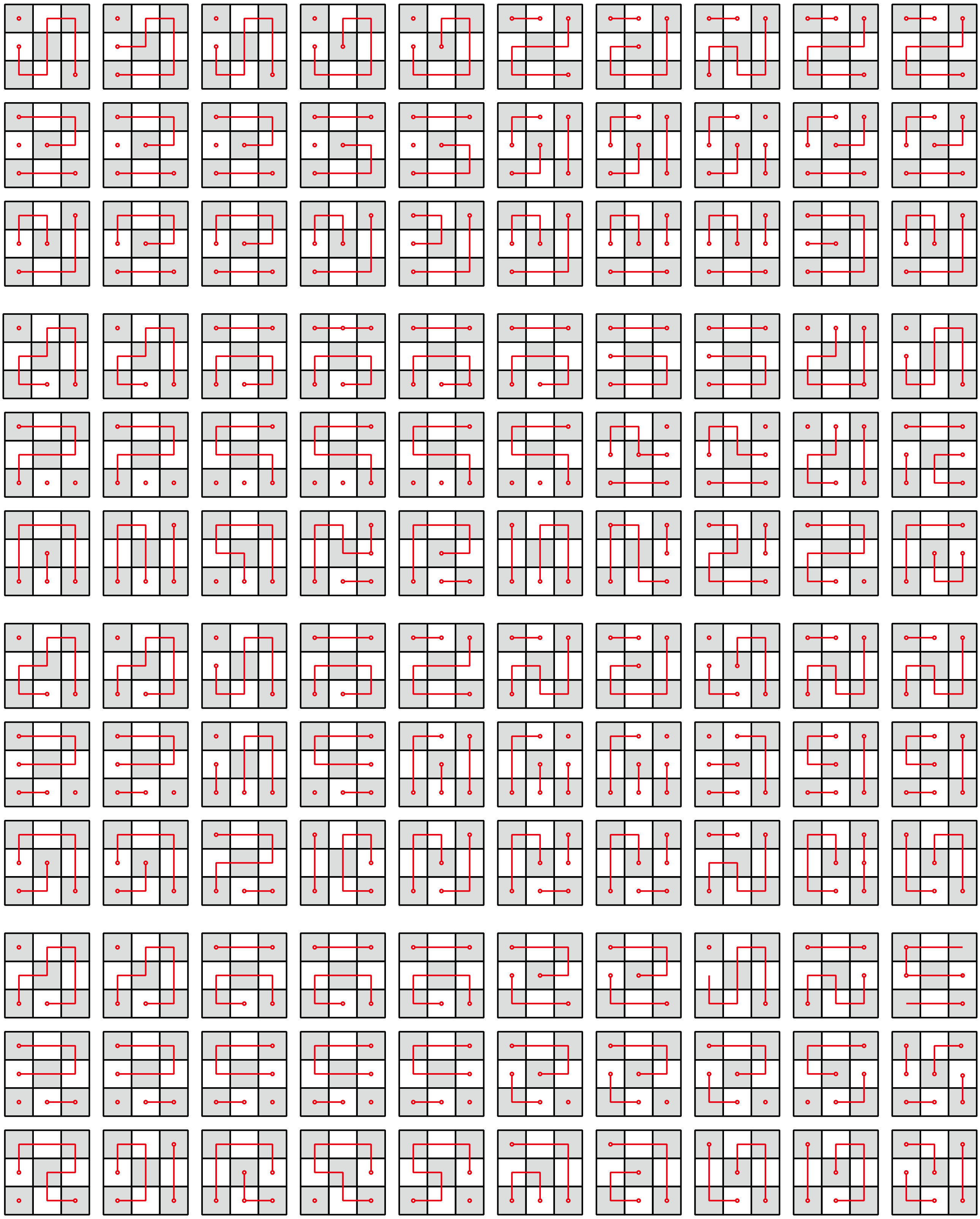


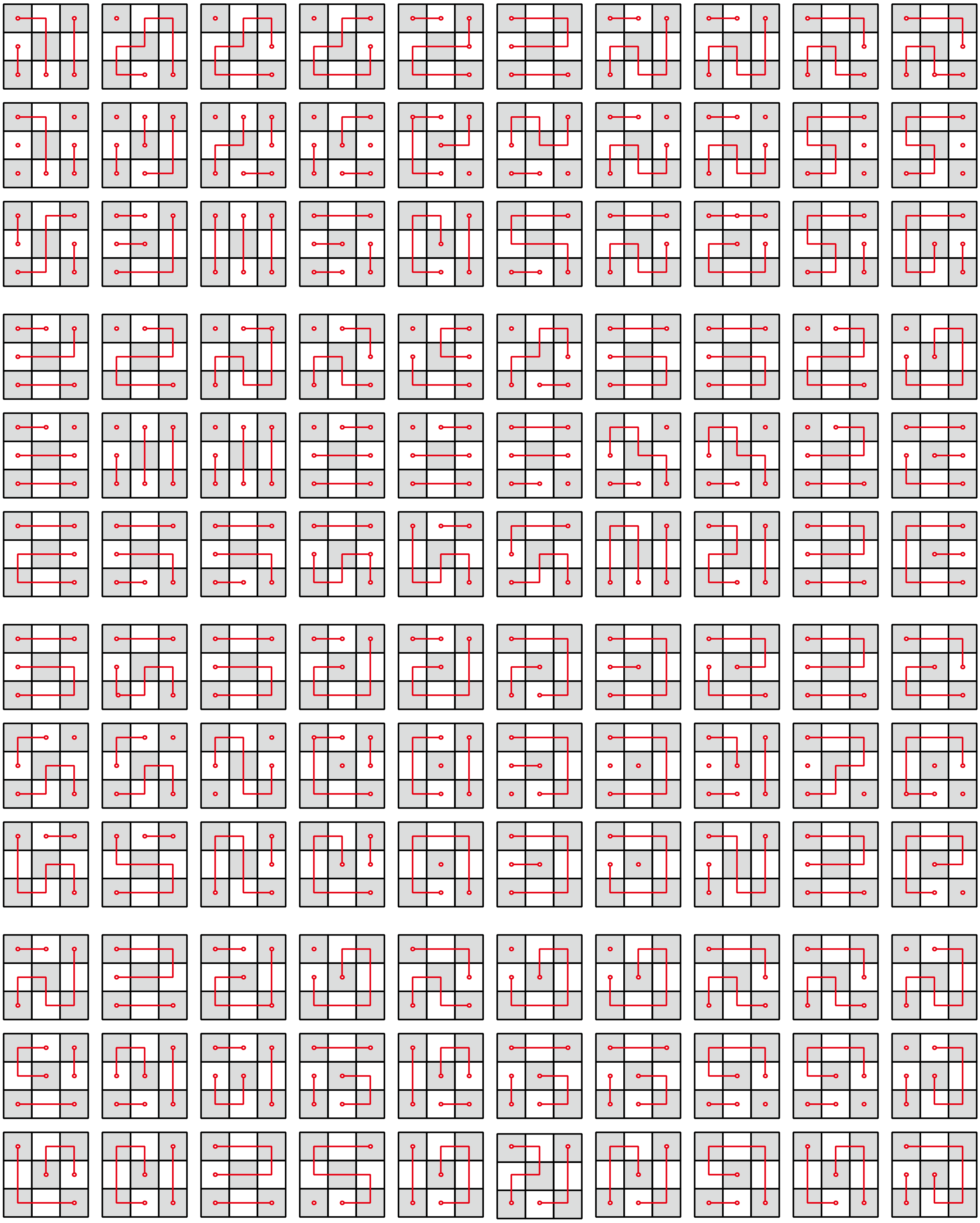


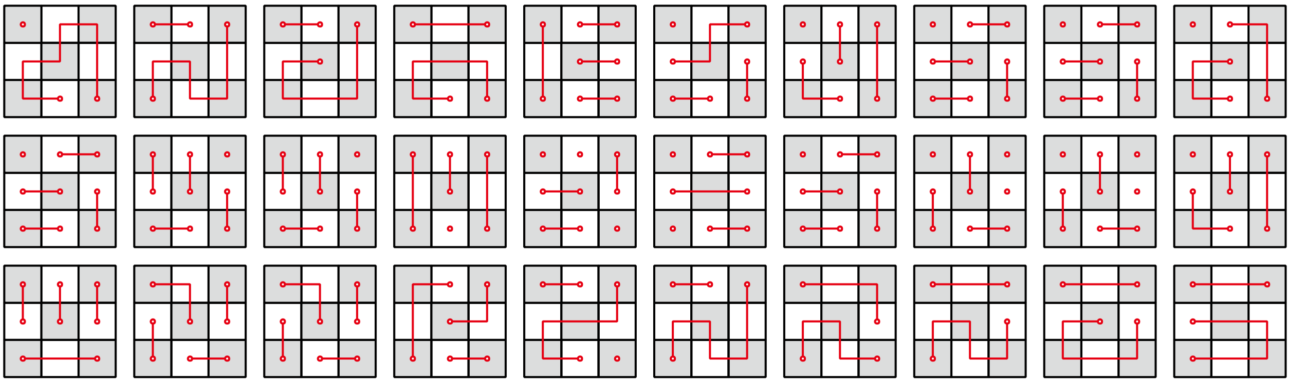
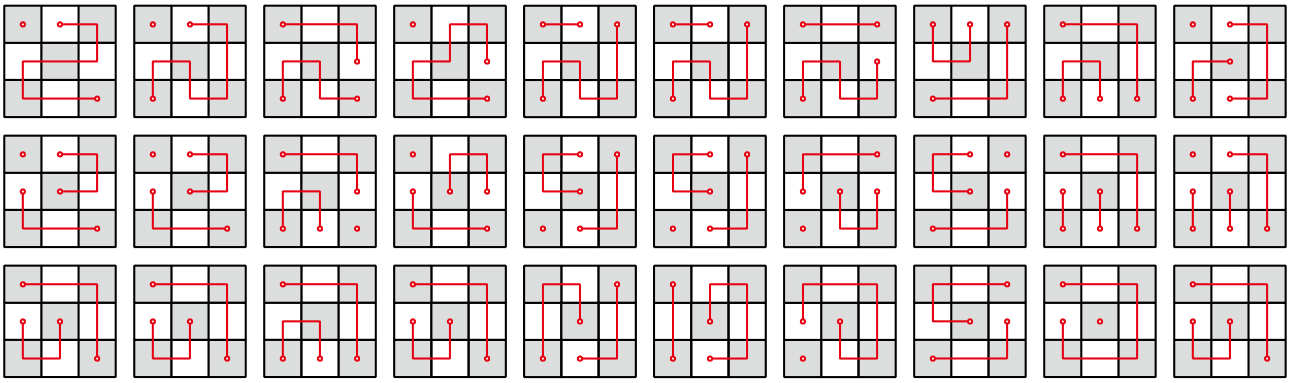
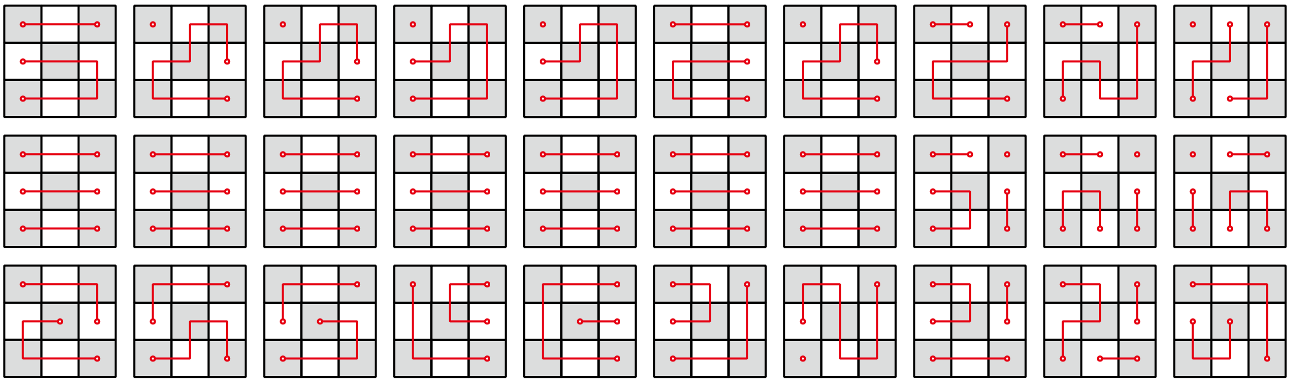
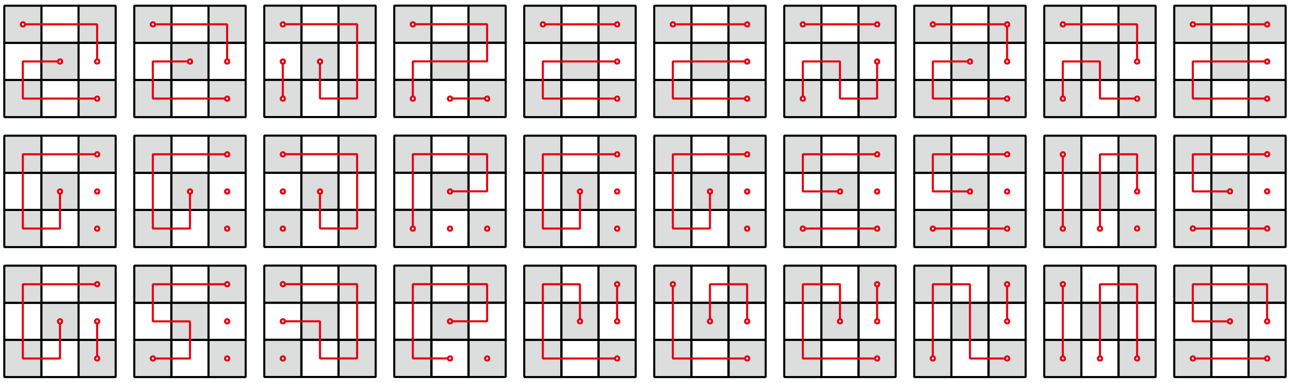


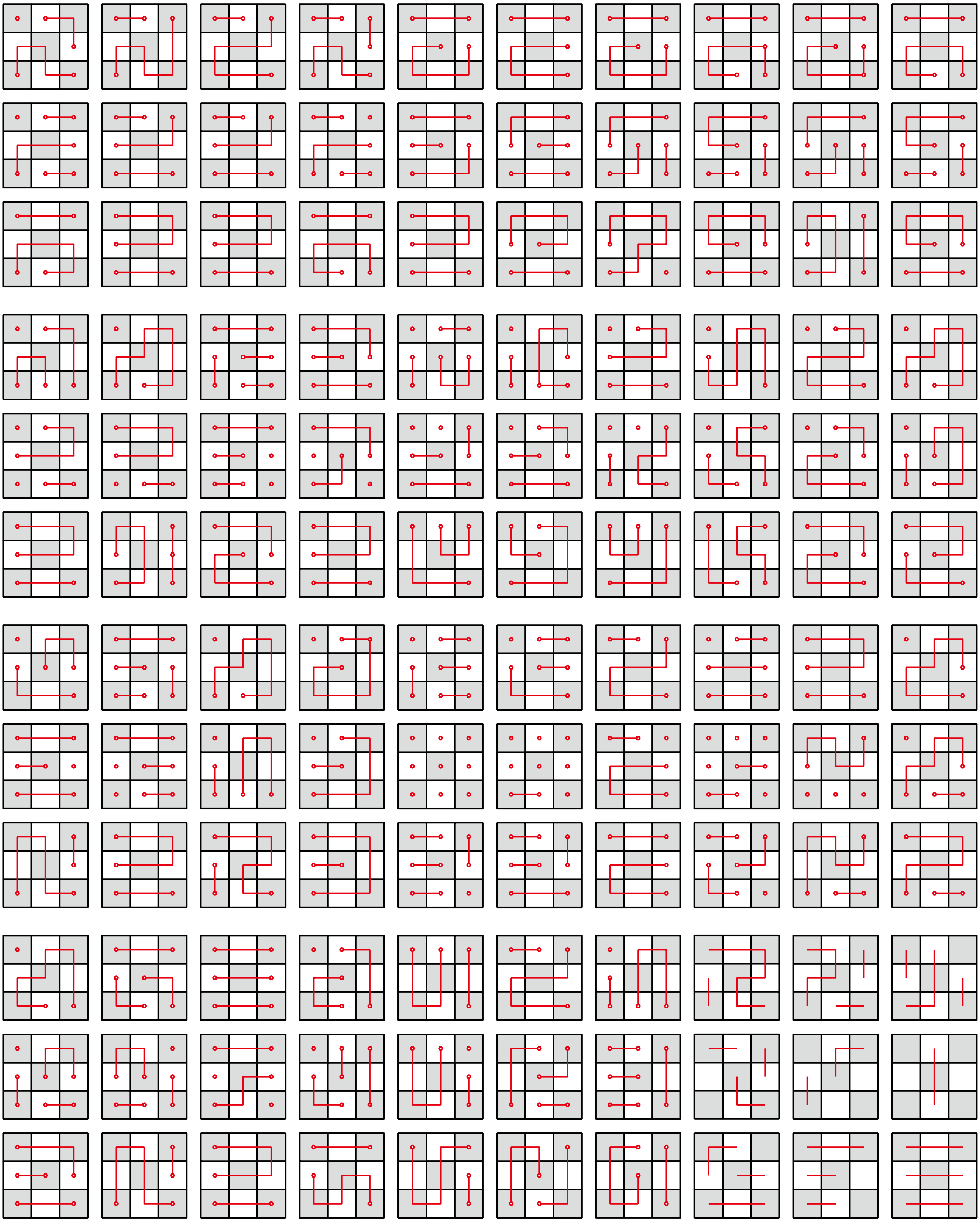


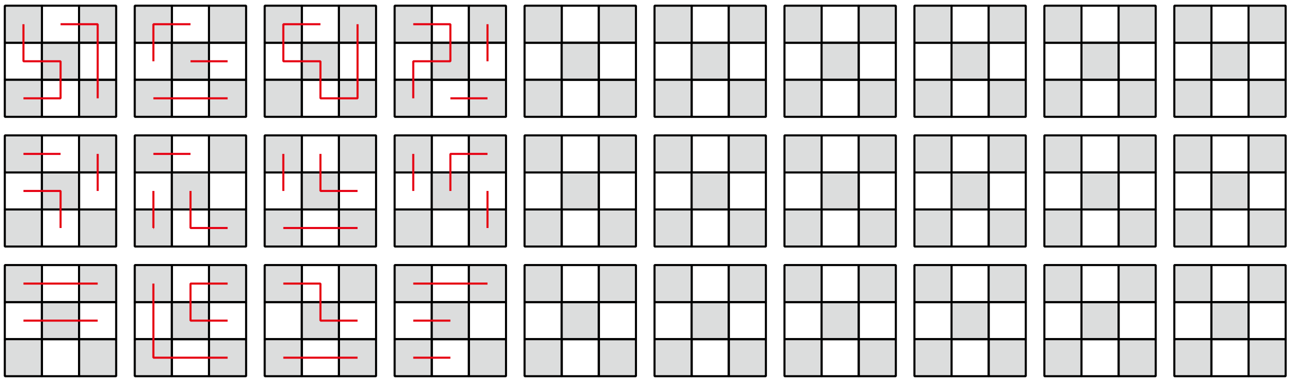
附錄 9-4、隨機穿越三層往返的三階立方一筆畫路徑(１°→２°→３°→２°→３°→２°→１°…)









【評語】080415

本研究嘗試透過平面方格中漢米頓路徑的分析，擴充討論三階立方體的漢米頓路徑，過程中就由系統的分類方法，逐步探尋，符合科學探究的精神，雖然研究結果尚未完備，卻也提供給對此主題有興趣者，一些討論與思考的空間，此外，若能輔以電腦軟體替代手做，將可提高研究效率豐富成果。