中華民國第51屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

第三名

080414

輪"翻"上陣—探究邏輯圈之數字謎

學校名稱：臺南市鹽水區鹽水國民小學

作者：	指導老師：
小六 鄭文蓉	何鳳珠
小五 陳冠崴	沈冠君
小五 陸品瑄	

關鍵詞：等差數列、邏輯圈、對稱性

摘　要

本研究起於網路教學網站（NLVM 的 Tessellations），在七個兩兩交集的圈內填入指定的 14 個數字，使每個圈內的三個數字和均相等，我們稱之爲數字邏輯圈。從基本的四~七圈我們一併探究其中奧秘，得知當數組呈現等差數列時，圈數和介在【$3n+\left\lceil \frac{5k-3}{2} \right\rceil \times d$ ～ $3n+\left\lfloor \frac{7k-3}{2} \right\rfloor \times d$】間，且有規律的以公差爲間隔出現，且排出的數組及排出的組數前後均具對稱性，更可運用此公式自由設定圈數和，求出可行的數組；或給定內外圈的數組，經雙向脈絡圖輕鬆解題。

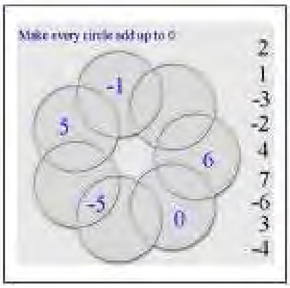
以原數組爲基模，可經由平移或轉化爲正負數、等差數列、小數及分數的過程，形成更多的數組，其組數及對應的位置均相同，可謂變化萬千；再搭配不同的提示位置，將解題的難易度分級，利用$\boxed{\text{各類題本}}\times\boxed{\text{提示個數}}\times\boxed{\text{提示位置}}\times\boxed{\text{提示盤轉動}}$之加乘效果呈現出眾多的題目製成數字邏輯推理盤，以爲此研究之具體成果。

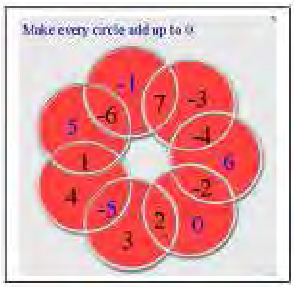
關鍵字詞：等差數列、邏輯圈、對稱性

輪”翻”上陣～探究邏輯圈之數字謎

壹、研究動機

在怎樣解題單元中，老師佈了一個看似簡單但卻讓我們想破頭的問題 ～在七個兩兩交集的圓圈內填入指定的 14 個數字，使得每個圓圈內的三個數字和均相等。好不容易在多次嘗試錯誤下找到了答案，一對照下發現：竟然有不同的答案，且同樣的七個數字擺在內圈重疊處，就出現兩種不同的解，是個值得深入探究的好題材！因此我們將圈數降到六圈、五圈，甚至四圈，試圖尋找規律或更快的解題方法。





貳、研究目的

一、 探討在不同的圈數及數字群組中可能排出的圈數和之範圍。

二、 探討數字群組在不同圈數中的排列規律。

三、 探討給予內外圈數字群組，如何有效判斷其是否為有效群組。

四、 探討不同的提示位置對成功解題難易度的影響。

參、實驗研究器材

數字棋、邏輯圈圖卡、計算機、電腦

肆、名詞定義

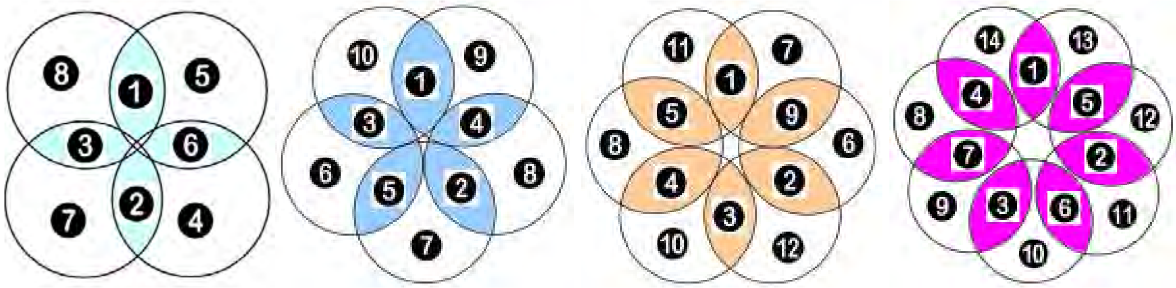
一、 數字邏輯圈：由數個圓環環相扣所形成的數字謎圈，且每個圓內的三個數字和皆相等。

二、 高斯符號：$\lceil X \rceil$ 為上高斯符號，表示不小於 X 之最小整數；$\lfloor X \rfloor$為下高斯符號，表示不大於 X 之最大整數。

三、 雙向脈絡圖：依外圈所需數字和，將內圈數字裡<u>唯一組合</u>進行配對連線所形成的圖示。

伍、研究歷程、討論與結果

本研究的數字邏輯圈是以圓圈兩兩重疊所形成的切割區塊來擺放數字，使其每個圈數的三個數字和皆相等，其模式如下：



活動一：探討在不同的圈數及數字群組中可能排出的圈數和之範圍。

給予一組數字群組，要將其數字放入各區塊中，使其圈數和皆相同，首要先得知道其所可能排出的圈數和是多少，因此本研究探討範圍以 4 圈～7 圈以主，設定的數字群組爲等差數列，探討可能形成的最小圈數和及最大圈數和，**並推衍到 k 圈將其公式化**。

【過程 1-1】四圈模式的數字邏輯圈可能排出的圈數和範圍

四圈共有 8 個數字，內圈（即交疊處）數字都重複了一次，所以運用下方算式即可推算出圈數和，因此我們設定幾種數字群組來進行推算最大及最小圈數和：

推算公式：$\dfrac{<\text{數字總和}>+<\text{內圈總和}>}{4}=$ 圈數和

【表 1-1-1】

數字群組	總和	前 4	後 4	最小圈數和	最大圈數和	可能範圍
1,2,3,4,5,6,7,8	36	10	26	(36+10)÷4=11‥2	(36+26)÷4=15‥2	12～15
3,4,5,6,7,8,9,10	52	18	34	(52+18)÷4=17‥2	(52+34)÷4=21‥2	18～21
0,2,4,6,8,10,12,14	56	12	44	(56+12)÷4=17	(56+12)÷4=25	17～25
3,5,7,9,11,13,15,17	80	24	56	(80+24)÷4=26	(80+56)÷4=34	26～34
0,3,6,9,12,15,18,21	84	18	66	(84+18)÷4=25‥2	(84+66)÷4=37‥2	26～37
3,7,11,15,19,23,27,31	136	36	100	(136+36)÷4=43	(136+100)÷4=59	43～59

討論：

1. 以公差爲奇數的等差數列來拼排推算時，發現最小（大）圈數和算出來都會有餘數（皆餘 2），公差爲偶數的等差數列則沒有餘數，其原因可由上述的推算公式看出端倪，＜數字總和＞一定是 4 的倍數，而＜內圈總和＞爲 $\dfrac{(\text{首數}+\text{末數})\times 4}{2}$ 所得結果，而首數及末數爲一奇一偶，其和必爲奇數，因此＜內圈總和＞是 2 的奇數倍，因此可推論圈數和必不爲 4 的倍數，且餘數必爲 2。反之，公差爲偶數的等差數列，其首數及末數必爲同奇或同偶，其和必爲偶數，因此＜內圈總和＞必爲 4 倍數，所以可推論圈數和必爲 4 的倍數。
2. 以＜1,2,3,4,5,6,7,8＞數字群組來討論，其最小圈數和推算結果是 11 餘 2，表示用最小的四個數字當內圈總數會剩下 2（即不足 2），因此，內外圈要替換 2（如 1,2,3,4

換成 1,2,3,6 或 1,2,4,5 ……等)，就可形成下一個可能的圈數和 12，且剛好沒有剩下。＜這也符合第 45 屆全國科展國中作品【七邊形的數字謎題】裡所得的結論～四邊形數字謎題在頂點為最大四個數或最小四個數時無解＞

3. 目前所推論出可能排出的圈數和範圍皆以給定的數字做推論，尚未排出符合圈數和的正解，此待活動二再做深入探討。

【過程 1-2】五圈模式的數字邏輯圈可能排出的圈數和範圍

【表 1-2-1】

數字群組	總和	前 5	後 5	最小圈數和	最大圈數和	可能範圍
1,2,3,4,5,6,7,8,9,10	55	15	40	(55+15)÷5=14	(55+40)÷5=19	14～19
3,4,5,6,7,8,9,10,11,12	75	25	50	(75+25)÷5=20	(75+50)÷5=25	20～25
1,3,5,7,9,11,13,15,17,19	100	25	75	(100+25)÷5=25	(100+75)÷5=35	25～35
0,3,6,9,12,15,18,21,24,27	135	30	105	(135+30)÷5=33	(135+105)÷5=48	33～48
-8,-5,-2,1,4,7,10,13,16,19	55	-10	65	〔55+(-10)〕÷5=9	(55+65)÷5=24	9～24
1,5,9,13,17,21,25,29,33,37	190	45	145	(190+45)÷5=47	(190+145)÷5=67	47～67

討論：

1. 五圈模式不管公差是奇數或偶數，其推算出來的最小(大)圈數和都不會有餘數，其原因可由算式（$\frac{<\text{數字總和}>+<\text{內圈總和}>}{5}$＝圈數和）中看出端倪，＜數字總和＞一定是 5 的倍數，而＜內圈總和＞為$\frac{(\text{首數}+\text{末數})\times 5}{2}$所得結果，而首數及末數必二奇或二偶，因為間隔 4 個公差，所以其和必為偶數，因此＜內圈總和＞是 5 的倍數，所以推論圈數和也會 5 的倍數，所以沒有餘數。

【過程 1-3】六圈模式的數字邏輯圈可能排出的圈數和範圍

【表 1-3-1】

數字群組	總和	前 6	後 6	最小圈數和	最大圈數和	可能範圍
1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12	78	21	57	(78+21)÷6=16‥3	(78+57)÷6=22‥3	17～22
-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5	-6	-21	15	(-6+-21)÷6=-4‥3	(-6+15)÷6=1‥3	4～1
-4,-2,0,2,4,6,8,10,12,14,16,18	84	6	78	(84+6)÷6=15	(84+78)÷6=27	15～27
4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26	180	54	126	(180+54)÷6=39	(180+126)÷6=51	39～51
1,4,7,10,13,16,19,22,25,28,31,34	210	51	159	(210+51)÷6=43‥3	(210+159)÷6=62‥3	44～62
-8,-4,0,4,8,12,16,20,24,28,32,36	168	12	156	(168+12)÷6=30	(168+156)÷6=54	30～54

討論：

1. 六圈模式與四圈模式一樣，屬於偶數圈模式的數字圈，當公差為奇數時，最小（大）圈數和算出來都會有餘數，而且餘數皆為圈數的一半（6 的一半是 3），其原由與四

圈相同。當公差爲偶數時，則無餘數。

【過程 1-4】七圈模式的數字邏輯圈可能排出的圈數和範圍

【表 1-4-1】

數字群組	總和	前 7	後 7	最小圈數和	最大圈數和	可能範圍
1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14	105	28	77	(105+28)÷7=19	(105+77)÷7=26	19～26
5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18	161	56	105	(161+56)÷7=31	(161＋105)÷7=38	31～38
4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30	238	70	168	(238+70)÷7=44	(238+168)÷7=58	44～58
1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,27	196	49	147	(196+49)÷7=35	(196+147)÷7=49	35～49
2,6,10,14,18,22,26,30,34,38,42,46,50,54	392	98	294	(392+98)÷7=70	(392+294)÷7=98	70～98
-14,-11,-8,-5,-2,1,4,7,10,13,16,19,22,25	77	-35	112	(77-35)÷7=6	(77+112)÷7=27	6～27

討論：

1. 七圈模式與五圈模式一樣，屬於奇數圈模式的數字圈，不管公差是奇數或偶數，其推算出來的最小(大)圈數和都不會有餘數，其原由與五圈相同。

【過程 1-5】k 圈模式的數字邏輯圈可能排出的圈數和範圍

1.以等差數列(公差 1)群組來進行 k 圈模式圈數和範圍的探討

圈數： k 圈　　首數：n

數列群組：$\boxed{n、n+1、n+2、、、、n+k-2、n+k-1}$、$\boxed{n+k、n+k+1、、、n+2k-2、n+2k-1}$

全部數字總和：$\dfrac{(n+n+2k-1)\times 2k}{2}=\dfrac{4nk+4k^2-2k}{2}$

前 k 個數字和：$\dfrac{(n+n+k-1)\times k}{2}=\dfrac{2nk+k^2-k}{2}$

後 k 個數字和：$\dfrac{(n+k+n+2k-1)\times k}{2}=\dfrac{2nk+3k^2-k}{2}$

結果：

推算出的圈數和範圍→ $\dfrac{6nk+5k^2-3k}{2k}\sim\dfrac{6nk+7k^2-3k}{2k}\rightarrow\ 3n+\dfrac{5k-3}{2}\sim 3n+\dfrac{7k-3}{2}$

討論：

1. 當 k 爲奇數時，推算出的圈數和爲整數。
2. 當 k 爲偶數時，推算出的最小（或最大）圈數和爲分數值，表示用前 k 個數字無法排出符合條件的數字邏輯圈，需<u>**替換部分數字**</u>才有可能排出下一個整數的圈數和。以 k=6，n=1 爲例說明之：<數字群組爲 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12>

　→最小圈數和＝$3n+\dfrac{5k-3}{2}$＝3+$\dfrac{5\times 6-3}{2}$＝$16\dfrac{1}{2}$

　即表示最小圈數和從 17 開始，且需將原設定的 1、2、3、4、5、6 替代增加 3，

讓內圈數字和總和為 24，才有可能成功排出。

→最大圈數和＝$3n+\frac{7k-3}{2}$＝3+$\frac{7\times6-3}{2}$＝$22\frac{1}{2}$

即表示最大圈數和為 22，且需將原設定的 7、8、9、10、11、12 替代減少 3，讓內圈數字和總和為 54，才有可能成功排出。

3. 從我們推出的圈數和範圍公式中($3n+\frac{5k-3}{2}\sim3n+\frac{7k-3}{2}$)，可以看出最大圈數和比最小圈數和多了$\frac{2k}{2}$，即多了一個 k，因此**當推算出最小圈數和時，只要再加 k，即可推出最大圈數和是多少**(但偶數圈只需再加 k-1 即可)。

4. 若公差不是 1，那麼最小(大)圈數和還可用這個公式推算嗎？因此我們做了以下的檢驗（完整資料如附件），發現公差不同，會影響的是後面的數值(即$\frac{5k-3}{2}$)，所以前者的算式再修正成為 ($3n+\frac{5k-3}{2}$xd$\sim3n+\frac{7k-3}{2}$xd)，如此就可以快速算出此組等差數列可拼組出之組合。

【表 1-5-1】

四圈(最小圈數和)		五圈(最小圈數和)		六圈(最小圈數和)		七圈(最小圈數和)	
1,2,3,4,……		1,2,3,4,……		1,2,3,4,……		1,2,3,4,……	
12	$3\times1+\frac{5\times4-3}{2}\times1$	14	$3\times1+\frac{5\times5-3}{2}\times1$	17	$3\times1+\frac{5\times6-3}{2}\times1$	19	$3\times1+\frac{5\times7-3}{2}\times1$
1,3,5,7,……		1,3,5,7,……		1,3,5,7,……		1,3,5,7,……	
20	$3\times1+\frac{5\times4-3}{2}\times2$	25	$3\times1+\frac{5\times5-3}{2}\times2$	30	$3\times1+\frac{5\times6-3}{2}\times2$	35	$3\times1+\frac{5\times7-3}{2}\times2$
1,4,7,10,……		1,4,7,10,……		1,4,7,10,……		1,4,7,10,……	
29	$3\times1+\frac{5\times4-3}{2}\times3$	36	$3\times1+\frac{5\times5-3}{2}\times3$	44	$3\times1+\frac{5\times6-3}{2}\times3$	51	$3\times1+\frac{5\times7-3}{2}\times3$
1,5,9,13,……		1,5,9,13,……		1,5,9,13,……		1,5,9,13,……	
37	$3\times1+\frac{5\times4-3}{2}\times4$	47	$3\times1+\frac{5\times5-3}{2}\times4$	57	$3\times1+\frac{5\times6-3}{2}\times4$	67	$3\times1+\frac{5\times7-3}{2}\times4$
4,5,6,7……		4,5,6,7……		4,5,6,7……		4,5,6,7……	
21	$3\times4+\frac{5\times4-3}{2}\times1$	23	$3\times4+\frac{5\times5-3}{2}\times1$	26	$3\times4+\frac{5\times6-3}{2}\times1$	28	$3\times4+\frac{5\times7-3}{2}\times1$
4,6,8,10……		4,6,8,10……		4,6,8,10……		4,6,8,10……	
29	$3\times4+\frac{5\times4-3}{2}\times2$	34	$3\times4+\frac{5\times5-3}{2}\times2$	39	$3\times4+\frac{5\times6-3}{2}\times2$	44	$3\times4+\frac{5\times7-3}{2}\times2$
4,7,10,13……		4,7,10,13……		4,7,10,13……		4,7,10,13……	
38	$3\times4+\frac{5\times4-3}{2}\times3$	45	$3\times4+\frac{5\times5-3}{2}\times3$	53	$3\times4+\frac{5\times6-3}{2}\times3$	60	$3\times4+\frac{5\times7-3}{2}\times3$

4,8,12,16……		4,8,12,16……		4,8,12,16……		4,8,12,16……	
46	$3\times4+\frac{5\times4-3}{2}\times4$	56	$3\times4+\frac{5\times5-3}{2}\times4$	66	$3\times4+\frac{5\times6-3}{2}\times4$	76	$3\times4+\frac{5\times7-3}{2}\times4$

活動二：探討數字群組在不同圈數中的排列規律。

【初始想法與作法】

我們從數字群組中依【過程 1-5】的方法推算出可能的圈數和範圍後，再決定內外圈數字群組，然後列出所有組合利用數字棋實際分頭拼組檢驗，以一組五圈數列（1、2、3、4、5、6、7、8、9、10）來說明：

步驟一：推算出可能的圈數和範圍

最小圈數和：$3\times1+\frac{5\times5-3}{2}\times1=14$　最大圈數和：$3\times1+\frac{7\times5-3}{2}\times1=19$

步驟二：依據圈數和列出可能的數字組合，再逐一拼組檢驗<打✓表示可以排出的組合>【表 2-0-1】

圈數和	檢驗	內圈和	內圈數字組					外圈和	外圈數字組					檢驗	內圈和	內圈數字組					外圈和	外圈數字組				
14	✓	15	1	2	3	4	5	40	6	7	8	9	10													
15		20	1	2	3	4	10	35	5	6	7	8	9		20	1	2	4	6	7	35	3	5	8	9	10
		20	1	2	3	5	9	35	4	6	7	8	10		20	1	3	4	5	7	35	2	6	8	9	10
		20	1	2	3	6	8	35	4	5	7	9	10		20	2	3	4	5	6	35	1	7	8	9	10
		20	1	2	4	5	8	35	3	6	7	9	10													
16		25	1	2	3	9	10	30	4	5	6	7	8		25	1	3	6	7	8	30	2	4	5	9	10
		25	1	2	4	8	10	30	3	5	6	7	9		25	1	4	5	6	9	30	2	3	7	8	10
		25	1	2	5	7	10	30	3	4	6	8	9		25	1	4	5	7	8	30	2	3	6	9	10
		25	1	2	5	8	9	30	3	4	6	7	10		25	2	3	4	6	10	30	1	5	7	8	9
		25	1	2	6	7	9	30	3	4	5	8	10		25	2	3	4	7	9	30	1	5	6	8	10
	✓	25	1	3	4	7	10	30	2	5	6	8	9		25	2	3	5	6	9	30	1	4	7	8	10
		25	1	3	4	8	9	30	2	5	6	7	10		25	2	3	5	7	8	30	1	4	6	9	10
		25	1	3	5	6	10	30	2	4	7	8	9		25	2	4	5	6	8	30	1	3	7	9	10
	✓	25	1	3	5	7	9	30	2	4	6	8	10		25	3	4	5	6	7	30	1	2	8	9	10
17		30	1	2	8	9	10	25	3	4	5	6	7	✓	30	2	4	6	8	10	25	1	3	5	7	9
		30	1	3	7	9	10	25	2	4	5	6	8		30	2	4	7	8	9	25	1	3	5	6	10
		30	1	4	6	9	10	25	2	3	5	7	8		30	2	5	6	7	10	25	1	3	4	8	9
	✓	30	1	4	7	8	10	25	2	3	5	6	9		30	2	5	6	8	9	25	1	3	4	7	10
		30	1	5	6	8	10	25	2	3	4	7	9		30	3	4	5	8	10	25	1	2	6	7	9
		30	1	5	7	8	9	25	2	3	4	6	10		30	3	4	6	7	10	25	1	2	5	8	9
		30	2	3	6	9	10	25	1	4	5	7	8		30	3	4	6	8	9	25	1	2	5	7	10
		30	2	3	7	8	10	25	1	4	5	6	9		30	3	5	6	7	9	25	1	2	4	8	10
		30	2	4	5	9	10	25	1	3	6	7	8		30	4	5	6	7	8	25	1	2	3	9	10
18		35	1	7	8	9	10	20	2	3	4	5	6		35	4	5	7	9	10	20	1	2	3	6	8
		35	2	6	8	9	10	20	1	3	4	5	7		35	4	6	7	8	10	20	1	2	3	5	9
		35	3	5	8	9	10	20	1	2	4	6	7		35	5	6	7	8	9	20	1	2	3	4	10
		35	3	6	7	9	10	20	1	2	4	5	8													
19	✓	40	6	7	8	9	10	15	1	2	3	4	5													

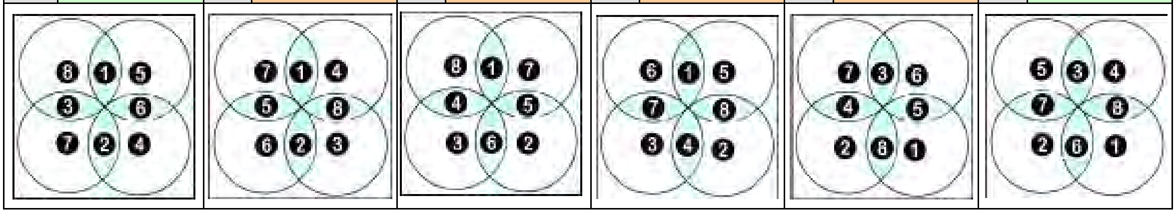
我們發現利用上述的方法，再搭配對數字組合的一些限制條件（例如：最大數字不會與最小的 2 個數字共圈、最小數字也不會同時與最大的 2 個數字共圈等），雖可以窮盡所有解，但非常費時，過程中需不斷地按規律替換移位與嘗試，因此，我們想到可以請畢業的學長（學資訊工程的學長）依據我們的需求寫出一個適合的程式，就請電腦依據我們指定的替換原則自動幫我們完成拼組，爾後我們再做深入探究。以下開始進行各種圈數的探討：

【過程 2-1】四圈模式的探討

探索(a)：1、2、3、4、5、6、7、8→圈數和範圍 12～15→修正 12～15

【表 2-1-A】

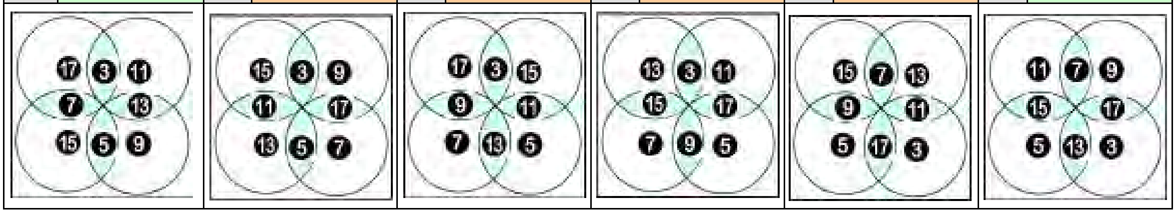
12	B-2-1-a-01	13	B-2-1-a-02	13	B-1-1-a-03	14	B-1-1-a-04	14	B-1-1-a-05	15	B-1-1-a-06



探索(B)：3、5、7、9、11、13、15、17→圈數和範圍 26～34→修正 27～33

【表 2-1-B】

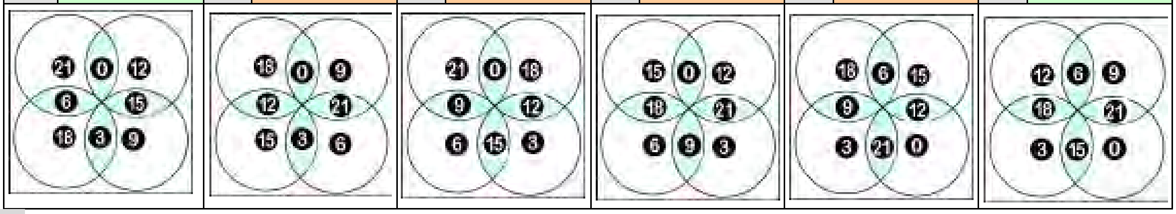
27	B-2-1-b-01	29	B-2-1-b-02	29	B-2-1-b-03	31	B-2-1-b-04	31	B-2-1-b-05	33	B-2-1-b-06



探索(C)：0、3、6、9、12、15、18、21→圈數和範圍 26～37→修正 27～36

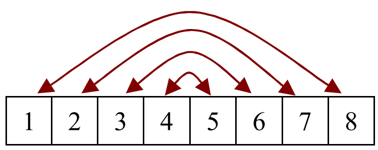
【表 2-1-C】

27	B-3-1-c-01	30	B-3-1-c-02	30	B-3-1-c-03	33	B-3-1-c-04	33	B-3-1-c-05	36	B-3-1-c-06



討論：

1. 探索(A)(B)(C)皆為等差數列，所形成的解皆為六組，且***前後皆屬於對稱組***，即只要將數字前後對調就可以形成對稱組。<以右圖為例，兩數相加=9，則此兩數即為調換對象>



2. 我們用【過程 1-5】的公式推衍所得出的圈數和範圍與實際排出的圈數和範圍有差異，深入探究是在於$(3n+\frac{5k-3}{2}\times d \sim 3n+\frac{7k-3}{2}\times d)$中的$\frac{5k-3}{2}$及$\frac{7k-3}{2}$，當 k 為偶數時(即偶數圈）此會有餘數，倘若以分數處理的話，可能與 d 加乘，餘數就不見了，導致與實際排出的圈數和有差異，因此只要取其最最大或最小整數值再來乘以 d，即可找到實際的圈數和。因此我們用上高斯(取大於或等於此數的最小整數

值)與<u>下高斯</u>(取小於或等於此數的最大整數值)符號將公式整理一下：

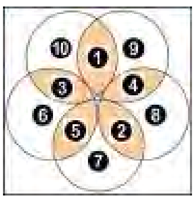
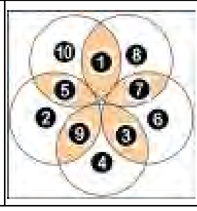
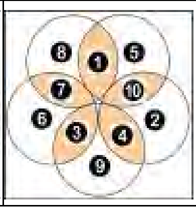
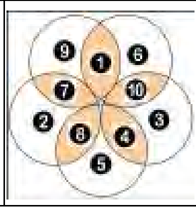
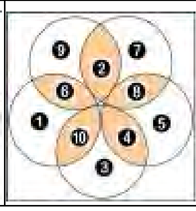
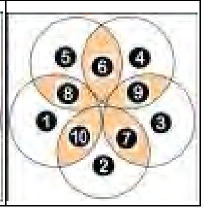
等差數列所能排出的圈數和範圍：$3n+\left\lceil \dfrac{5k-3}{2} \right\rceil \times d \sim 3n+\left\lfloor \dfrac{7k-3}{2} \right\rfloor \times d$

3. 三組等差數列其排法皆是以探索(A)為基模，8 個數字都可以採對應的方式，對應到相同的位置，所以只要是等差數列其在四圈的模式下皆只有 6 組解(4 種圈數和)。

【過程 2-2】五圈模式的探討

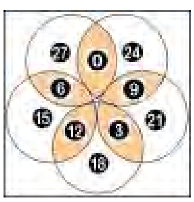
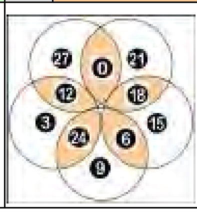
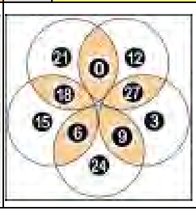
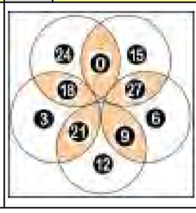
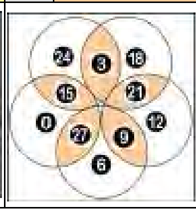
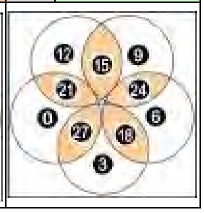
探索(A)：1、2、3、4、5、6、7、8、9、10→圈數和範圍 14～19

【表 2-2-A】

14	B-2-2-A-01	16	B-2-2-A-02	16	B-2-2-A-03	17	B-2-2-A-04	17	B-2-2-A-05	19	b-2-2-A-06
											

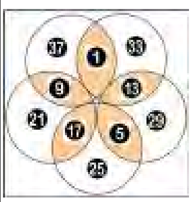
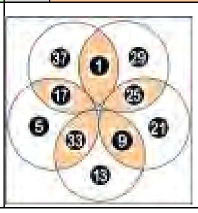
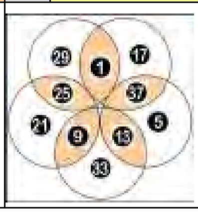
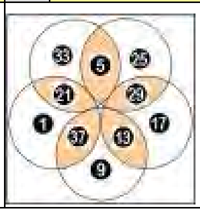
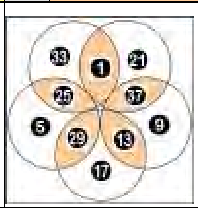
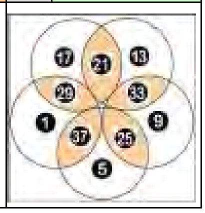
探索(B)：0、3、6、9、12、15、18、21、24、27→圈數和範圍 33～48

【表 2-2-B】

33	B-2-2-B-01	39	B-2-2-B-02	39	B-2-2-B-03	42	B-2-2-B-04	42	B-2-2-B-05	48	B-2-2-B-06
											

探索(C)：1、5、9、13、17、21、25、29、33、37→圈數和範圍 47～67

【表 2-2-C】

47	B-2-2-C-01	55	B-2-2-C-02	55	B-2-2-C-03	59	B-2-2-C-04	59	B-2-2-C-05	67	B-2-2-C-06
											

討論：

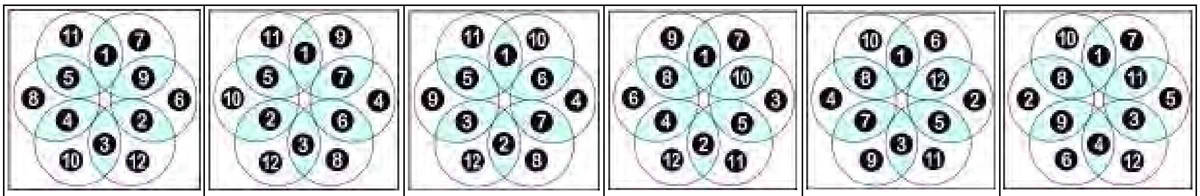
1. 探索(A)(B)(C)皆為等差數列，所形成的解皆為六組，且**前後皆屬於對稱組**，即只要將數字前後對調就可以形成對稱組。
2. 三組等差數列其排法皆是以探索(A)為基模，10 個數字都可以採對應的方式，對應到相同的位置，所以只要是等差數列其在五圈的模式下皆只有 6 組解(4 種圈數和)。

【過程 2-3】六圈模式的探討

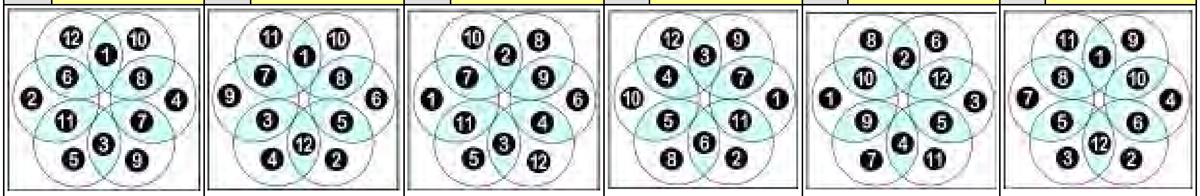
探索(A)：1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12→修正的圈數和範圍 17～22

【表 2-3-A】

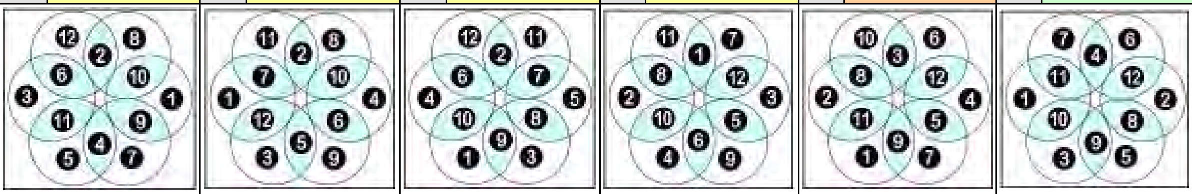
17	B-2-3-A-01	17	B-2-3-A-02	17	B-2-3-A-03	18	B-2-3-A-04	19	B-2-3-A-05	19	B-2-3-A-06



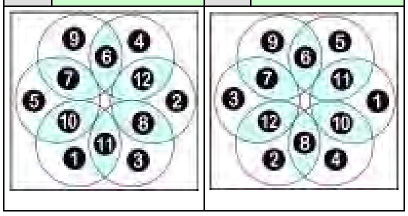
19	B-2-3-A-07	19	B-2-3-A-08	19	B-2-3-A-09	19	B-2-3-A-10	20	B2-3-A-11	20	B-2-3-A-12



20	B-2-3-A-13	20	B-2-3-A-14	20	B-2-3-A-15	20	B-2-3-A-16	21	B-2-3-A-17	22	B-2-3-A-18

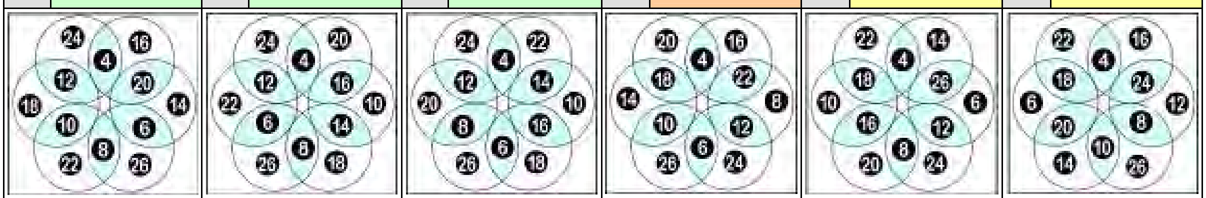


22	B-2-3-A-19	22	B-2-3-A-20

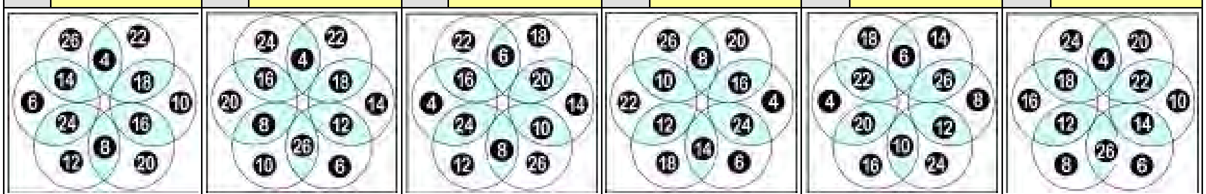


探索(B)：4、6、8、10、12、14、16、18、20、22、24、26→修正的圈數和範圍 40～50【表 2-3-B】

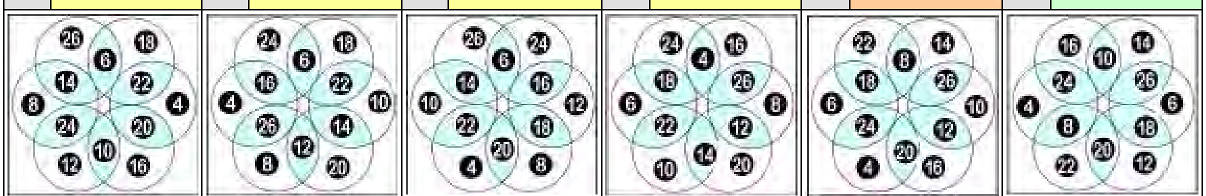
40	B-2-3-B-01	40	B-2-3-B-02	40	B-2-3-B-03	42	B-2-3-B-04	44	B-2-3-B-05	44	B-2-3-B-06

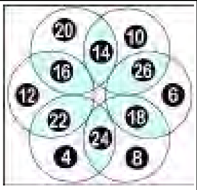
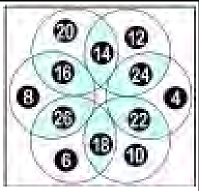


44	B-2-3-B-07	44	B-2-3-B-08	44	B-2-3-B-09	44	B-2-3-B-10	46	B-2-3-B-11	46	B-2-3-B-12



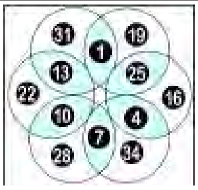
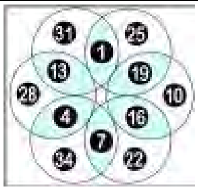
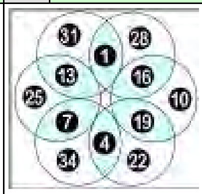
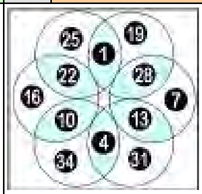
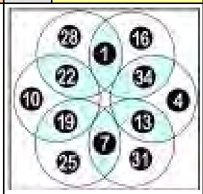
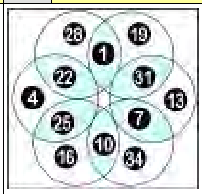
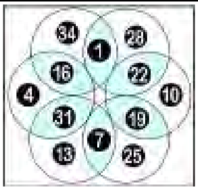
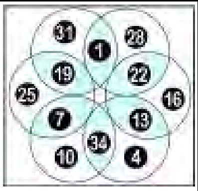
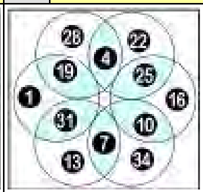
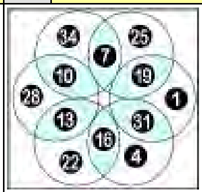
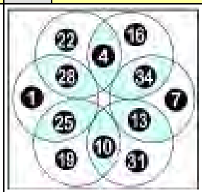
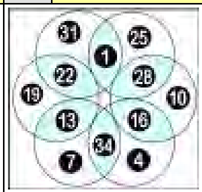
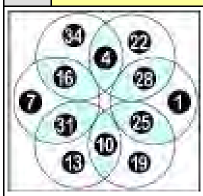
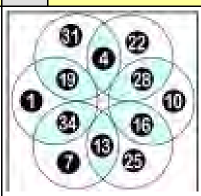
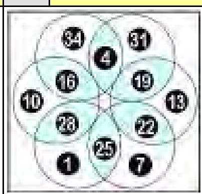
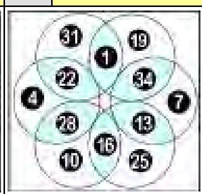
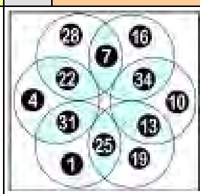
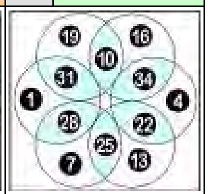
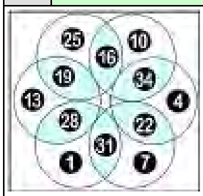
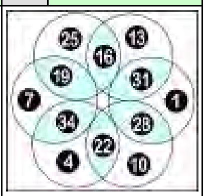
46	B-2-3-B-13	46	B-2-3-B-14	46	B-2-3-B-15	46	B-2-3-B-16	48	B-2-3-B-17	50	B-2-3-B-18



50	B-2-3-B-19	50	B-2-3-B-20
			

探索(C)：1、4、7、10、13、16、19、22、25、28、31、34→修正的圈數和範圍 45～60

【表 2-3-C】

45	B-2-3-C-01	45	B-2-3-C-02	45	B-2-3-C-03	48	B-2-3-C-04	51	B-2-3-C-05	51	B-2-3-C-06
											
51	B-2-3-C-07	51	B-2-3-C-08	51	B-2-3-C-09	51	B-2-3-C-10	54	B-2-3-C-11	54	B-2-3-C-12
											
54	B-2-3-C-13	54	B-2-3-C-14	54	B-2-3-C-15	54	B-2-3-C-16	57	B-2-3-C-17	60	B-2-3-C-18
											
60	B-2-3-C-19	60	B-2-3-C-20								
											

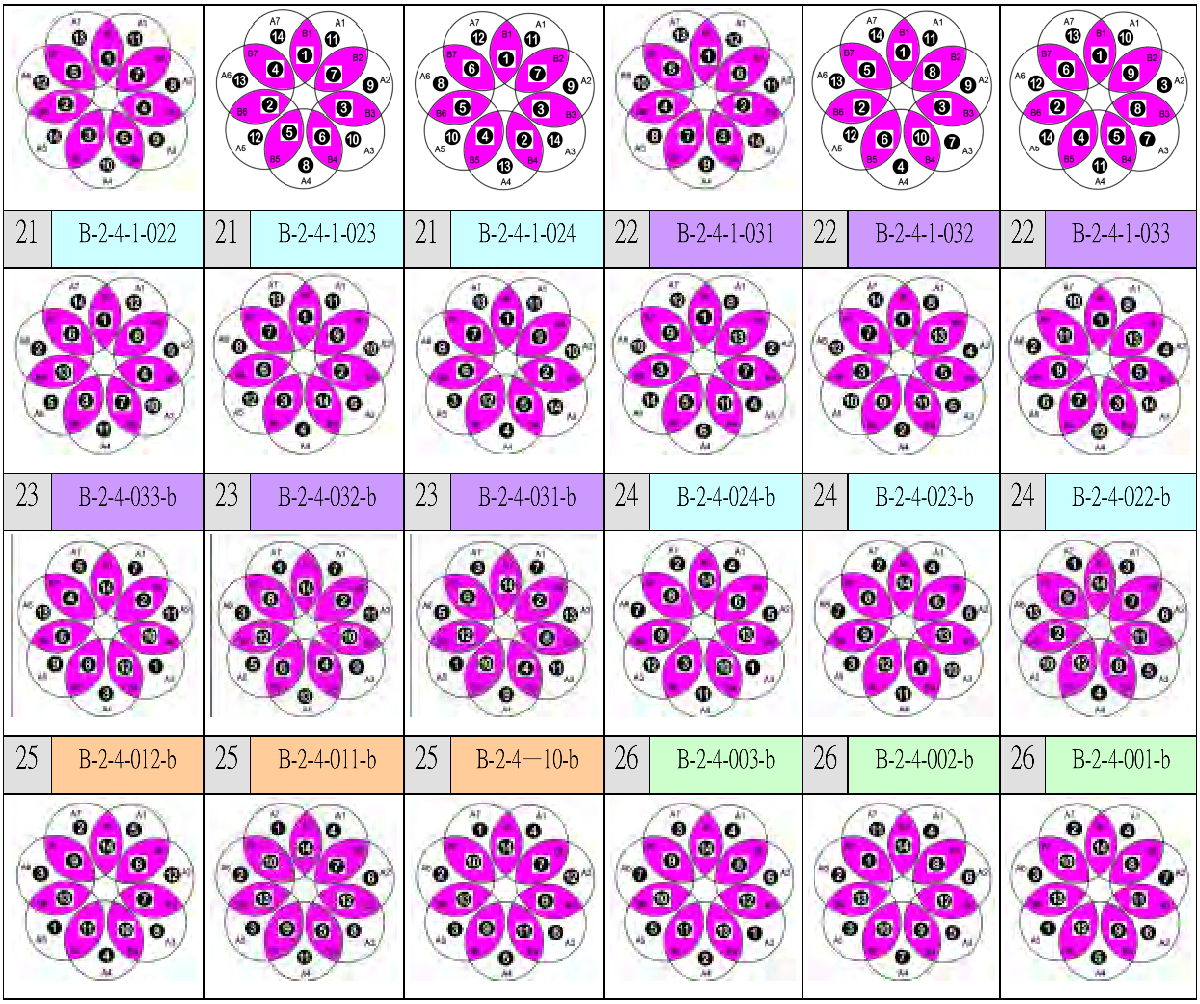
【過程 2-4】七圈模式的探討

探索(A)：1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14→圈數和範圍 19～26

說明：其可排出的組數共有 118 組，因版面的關係，僅列出 1-14 中相對應的 24 組，其餘的數列【探索(B)：0、1、2……11、12、13；探索(C)：0、2、4……22、24、26】請見附件資料。

【表 2-4-A】

19	B-2-4-1-001	19	B-2-4-1-002	19	B-2-4-1-003	20	B-2-4-1-010	20	B-2-4-1-011	20	B-2-4-1-012



討論：

1. 探索(A)(B)(C)皆爲等差數列，所形成的解皆爲 118 組，且**前後皆屬於對稱組**，即只要將**數字前後對調就可以形成對稱組**。
2. 三組等差數列其排法皆是以探索(A)爲基模，14 個數字都可以採對應的方式，對應到相同的位置，所以只要是等差數列其在七圈的模式下皆有 118 組解(8 種圈數和)。

結果:

1. 所有以等差數字群組所排出的數字圈個數皆爲偶數個，且不但組數具對稱性，就連內部的排列也具對稱性，說明如下：

甲、排出的各圈數和之組數具對稱性

【表 2-4-B】

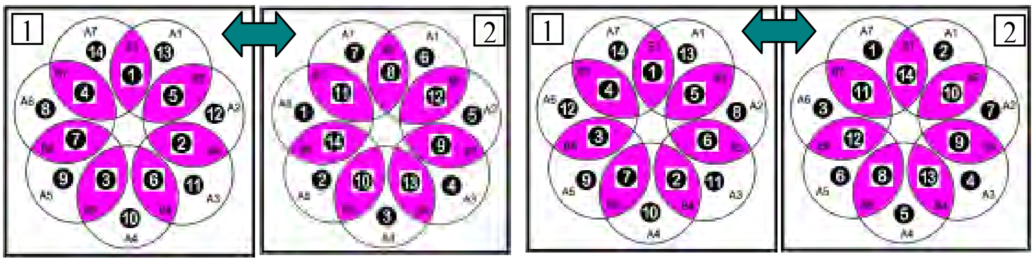
圈數	數列群組	拼組出的圈數和及組數									推論圈數和
四圈	1、2、3、4、5、6、7、8	圈數和	12	13	14	15					12～15
		組數	1	2	2	1					
四圈	3、5、7、9、11、13、15、17	圈數和	27	29	31	33					27～33
		組數	1	2	2	1					
四圈	0、3、6、9、12、15、18、21	圈數和	27	30	33	36					27～36
		組數	1	2	2	1					
五圈	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10	圈數和	14	16	17	19					14～19
		組數	1	2	2	1					

五圈	0、3、6、9、12、15、18、21、24、27	圈數和	33	39	42	48					33～48
		組數	1	2	2	1					
五圈	1、5、9、13、17、21、25、29、33、37	圈數和	47	55	59	67					47～67
		組數	1	2	2	1					
六圈	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12	圈數和	17	18	19	20	21	22			17～22
		組數	3	1	6	6	1	3			
六圈	4、6、8、10、12、14、16、18、20、22、24、26	圈數和	40	42	44	46	48	50			40～50
		組數	3	1	6	6	1	3			
六圈	1、4、7、10、13、16、19、22、25、28、31、34	圈數和	45	48	51	54	57	60			45～60
		組數	3	1	6	6	1	3			
七圈	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14	圈數和	19	20	21	22	23	24	25	26	19～26
		組數	9	10	11	29	29	11	10	9	
七圈	1、3、5、7、9、11、13、15、17、19、21、23、25、27	圈數和	35	37	39	41	43	45	47	49	35～49
		組數	9	10	11	29	29	11	10	9	
七圈	2、6、10、14、18、22、26、30、34、38、42、46、50、54	圈數和	70	74	78	82	86	90	94	98	70～98
		組數	9	10	11	29	29	11	10	9	

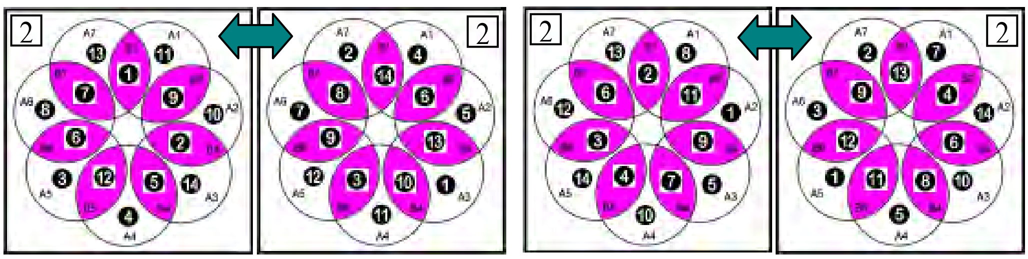
乙、組數之間的排列也具對稱性

以七圈為例<1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14>，當排出一組時，只要將數字互換(1↔14、2↔13、3↔12、4↔11……)，即可得出另一組。

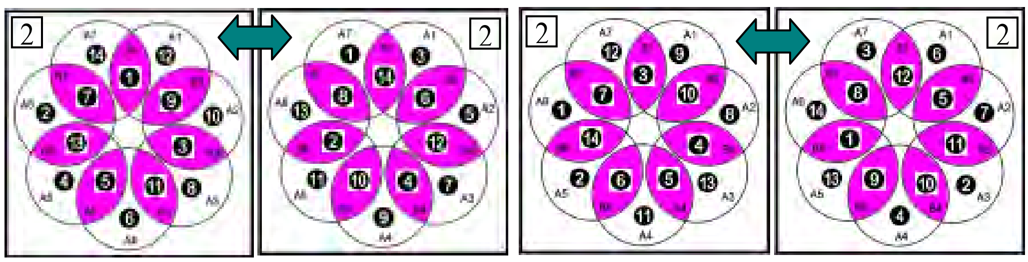
a. 圈數和 19 對應的圈數和是 26，抽二種排列方法來觀察之。



b. 圈數和 21 對應的圈數和是 24，抽二種排列方法來觀察之。

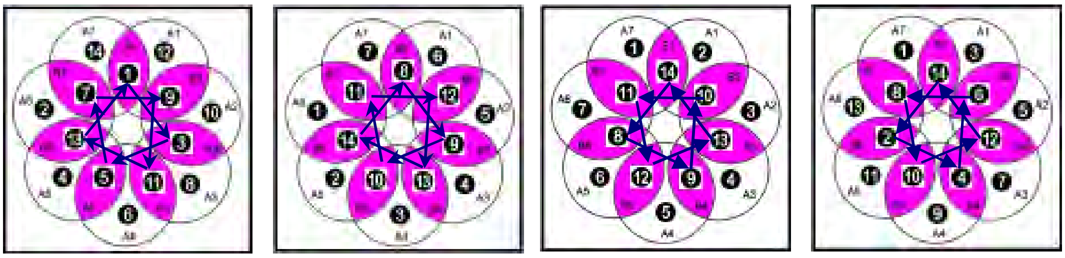


c. 圈數和 22 對應的圈數和是 23，抽二種排列方法來觀察之。



由上述對稱性的關係來看，等差數列的七圈模式共有 118 組解（請見附件資料），其只要找出圈數和為 19、20、21、22 的 59 組解後，其對稱的 59 組解也就 ok 了。

2. 奇數圈模式中用一組連續數字群組（如 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14）組來拼排，最快的方式可以選用最小連續數字（公差 1～1,2,3,4,5,6,7）及公差 2(1,3,5,7,9,11,13)的連續數字當內圈，各以間隔跳的方式來排放（似七角星)，即可很快排出正解，但此法只限在公差 1 或公差 2 的情況，因爲當從連續數字群組中無法選出公差 3 的連續數組。

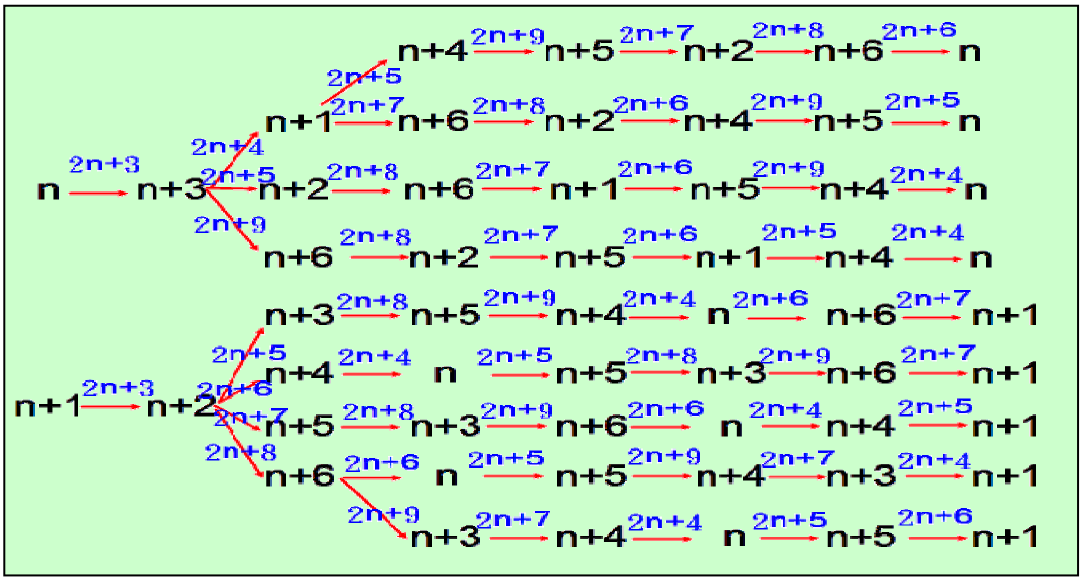


3. 以 n 爲起始的等差數列群組（以七圈爲例），其最小的圈數和及最大的圈數和之內外圈皆爲連續數列，可由下列分析方法窮盡所有解，且每組皆有對稱組，因此就能形成 36 組（包含公差 2 的連續數）。

將數列設定爲 n、n+1、n+2、n+3、n+4、n+5、n+6、n+7、n+8、n+9、n+10、n+11、n+12、n+13

→內圈和最小爲 7n+21，所以平均相鄰的 2 個內圈和爲 2n+6，因此內圈要兩兩組合出 2n+3、2n+4、2n+5、2n+6、2n+7、2n+8、2n+9。

→推得外圈最大數字 n+13 需配 2 個內圈分別爲 n&n+3 及 n+1&n+2，再運用概念圖有效率地窮盡所有解

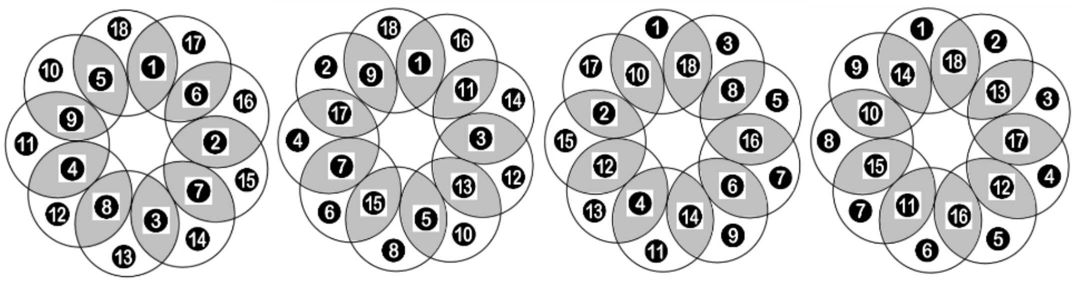


用上述的方法我們也可以**找到窮盡九圈基模組**(即以 1,2,3,4,5,6,7,8,9 爲內圈～圈數和爲 24)之組合(共有 31 組)，進而推衍圈數和爲 28、29 及 33 的 93 組(以下各列出幾組)。

【表 2-4-C】

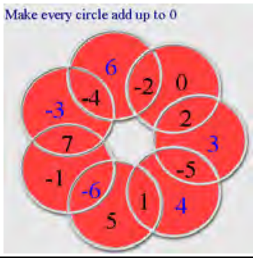
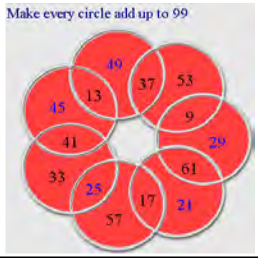
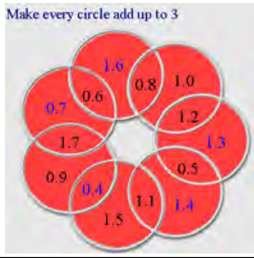
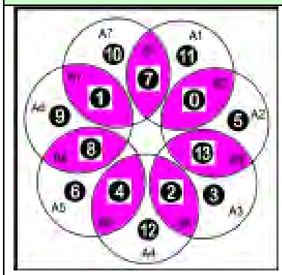
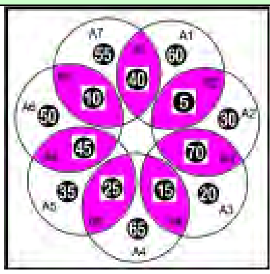
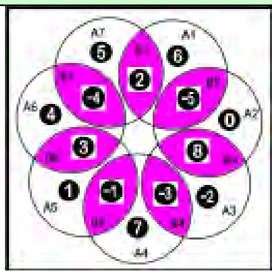
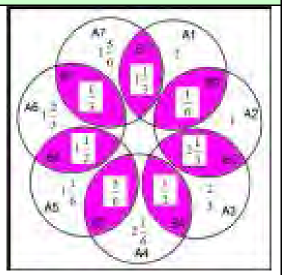
編號	圈數和 24																	
001	1	18	5	10	9	11	4	12	8	13	3	14	7	15	2	16	6	17
002	1	18	5	10	9	12	3	17	4	13	7	11	6	16	2	14	8	15
003	1	18	5	10	9	13	2	14	8	12	4	17	3	15	6	11	7	16
004	1	18	5	10	9	13	2	16	6	11	7	14	3	17	4	12	8	15

005	1	18	5	11	8	10	6	14	4	17	3	12	9	13	2	15	7	16
006	1	18	5	11	8	10	6	16	2	15	7	13	4	17	3	12	9	14
007	1	18	5	12	7	14	3	17	4	11	9	13	2	16	6	10	8	15
008	1	18	5	12	7	15	2	16	6	10	8	13	3	17	4	11	9	14
009	1	18	5	15	4	17	3	12	9	13	2	14	8	10	6	11	7	16
010	1	18	5	16	3	12	9	11	4	13	7	15	2	14	8	10	6	17
011	1	18	5	16	3	14	7	15	2	13	9	11	4	12	8	10	6	17
012	1	18	5	16	3	17	4	12	8	10	6	11	7	15	2	13	9	14
013	1	18	5	17	2	13	9	11	4	12	8	10	6	15	3	14	7	6
014	1	18	5	17	2	14	8	10	6	15	3	12	9	11	4	13	7	16
015	2	18	4	11	9	10	5	12	7	14	3	13	8	15	1	17	6	16
016	2	18	4	11	9	10	5	12	7	16	1	17	6	15	3	13	8	14
017	2	18	4	11	9	12	3	14	7	16	1	15	8	10	6	13	5	17
018	2	18	4	11	9	14	1	17	6	10	8	13	3	16	5	12	7	15
019	2	18	4	12	8	13	3	15	6	11	7	16	1	14	9	10	5	17
020	2	18	4	12	8	13	3	16	5	10	9	14	1	17	6	11	7	15
021	2	18	4	12	8	15	1	17	6	11	7	14	3	16	5	10	9	13
022	2	18	4	13	7	11	6	10	8	15	1	14	9	12	3	16	5	17
023	2	18	4	13	7	14	3	12	9	10	5	11	8	15	1	17	6	16
024	2	18	4	13	7	16	1	14	9	12	3	15	6	10	8	11	5	17
025	2	18	4	13	7	16	1	17	6	15	3	12	9	10	5	11	8	14
026	2	18	4	14	6	11	7	16	1	15	8	13	3	12	9	10	5	17
027	2	18	4	15	5	11	8	10	6	17	1	16	7	14	3	12	9	13
028	2	18	4	17	3	12	9	10	5	13	6	11	7	16	1	15	8	14
029	2	18	4	17	3	13	8	15	1	14	9	10	5	12	7	11	6	16
030	2	18	4	17	3	15	6	10	8	11	5	12	7	16	1	14	9	13
031	2	18	4	17	3	16	5	12	7	11	6	10	8	15	1	14	9	13
編號	圈數和爲 28																	
101	1	18	9	2	17	4	7	6	15	8	5	10	13	12	3	14	11	16
104	1	18	9	2	17	8	3	10	15	6	7	16	5	12	11	4	13	14
106	1	18	9	4	15	2	11	10	7	16	5	6	17	8	3	12	13	14
編號	圈數和爲 29																	
201	18	1	10	17	2	15	12	13	4	11	14	9	6	7	16	5	8	3
204	18	1	10	17	2	11	16	9	4	13	12	3	14	7	8	15	6	5
206	18	1	10	15	4	17	8	9	12	3	14	13	2	11	16	7	6	5
編號	圈數和爲 33																	
301	18	1	14	9	10	8	15	7	11	6	16	5	12	4	17	3	13	2
302	18	1	14	9	10	7	16	2	15	6	12	8	13	3	17	5	11	4
303	18	1	14	9	10	6	17	5	11	7	15	2	16	4	13	8	12	3



4. 將等差數列群組之數字平移後，其排出的組數及排列模式皆與原等差數列群組完全相同，甚至轉換成其它等差數列也一樣的，所不同的僅是圈數和不同而已。因此，

再仔細觀看 http://nlvm.usu.edu/en/nav/category_g_2_t_1.html（NLVM 的 Tessellations），其雖有四種不同模式的挑戰介面及多道佈題，但其實皆只能算是一種排法的模組而已，所以，以七圈爲例，光是 118 種解法就可以生成數千種題庫了，面對千變萬化的等差數列群組時，只要將它轉換成以 1 爲起始的連續數即可輕易解題。

基模：以 1 為起始的連續數	平移 7：以-6 為起始數	公差 4：以 9 為起始數	平移：以 0.4 為起始數
1、2、3、4、……	1→-6、2→-5、3→-4……	1→9、2→13、3→17……	1→0.4、2→0.5、3→0.4……
			
平移 1：以 0 為起始數	公差 5：以 5 為起始數	公差 2：以-5 為起始數	平移：以 1/6 為起始數
1→0、2→1、3→2……	1→5、2→10、3→15……	1→-5、2→-3、3→-1……	1→1/6、2→1/3、3→1/2……
			

5. 以 $3n+\left[\frac{5k-3}{2}\right]\times d \sim 3n+\left[\frac{7k-3}{2}\right]\times d$ 可以正確推算出等差數列可排出的圈數和範圍，且圈數和的跳躍間隔與公差有關。
6. 在四～六圈模式中我們很容易窮盡所有解，但七圈模式卻是困擾著我們，雖然可以由最原始的基模（以 1 爲始的連續數）找出其基本型的九種排法，並延伸出其它 36 種，但其餘的 82 種想用試誤法窮盡它是有困難的，因此我們嘗試羅列可能數字組合，希望能從中看出端倪，但似乎還是失敗的，因爲看不出其數字替換有其規律的軌跡。(註：因爲篇幅的關係，所以我們只有列出前半段，後半段與之對稱)

◎圈數和 20 【表 2-4-E】

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

◎圈數和 21 【表 2-4-F】

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

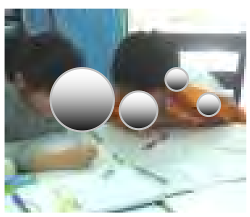
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14



1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

◎圈數和 22　【表 2-4-G】

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

延伸探討 能否自由設定圈數和，再反推可能的數字群組有哪些

在一次的探究中，崴哥突然想到，可不可以由自己來設計幸運數字當作圈數和，再依據圈數和來設定挑戰的數字群組呢？思考一下應該可以用【過程 2-1】的公式來反推，因此，我們以七圈爲例做了下列的推論：

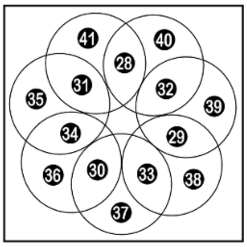
(1) 若最小的圈數和爲 100

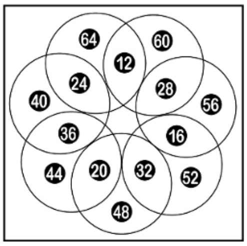
$$3n+\left[\frac{5k-3}{2}\right]\times d=100\rightarrow 3n+\left[\frac{5\times 7-3}{2}\right]\times d=100\rightarrow 3n+16\times d=100$$ ⋯<n,d 皆爲整數>

n	28	~~22.6~~	~~17.3~~	12	~~6.6~~	~~1.3~~	-4
d	1	~~2~~	~~3~~	4	~~5~~	~~6~~	7

有 2 組正整數解：❶28,29,30,31⋯⋯41

❷12,16,20,24⋯⋯56





◎可以再繼續推衍到首項爲負數，因此可以有很多組解。

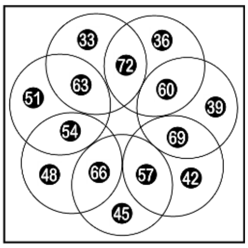
(2) 若最大的圈數和爲 168

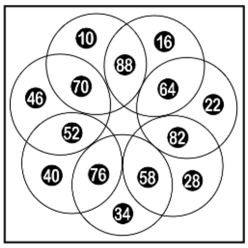
$$3n+\left[\frac{7k-3}{2}\right]\times d=168\rightarrow 3n+\left[\frac{7\times 7-3}{2}\right]\times d=168\rightarrow 3n+23\times d=168$$ ⋯<n,d 皆爲整數>

n	~~48.3~~	~~40.6~~	33	~~25.3~~	~~17.6~~	10	~~2.3~~	~~5.3~~	-13
d	~~1~~	~~2~~	3	~~4~~	~~5~~	6	~~7~~	~~8~~	9

有 2 組解：❶33,36,39,42⋯⋯72

❷10,16,22,28⋯⋯88





◎可以再繼續推衍到首項爲負數，因此可以有很多組解。

活動三：探討給予內外圈數字群組，如何有效判斷其是否為有效群組？

由於數字邏輯圈是環環相扣，當圈數變大時，要將全部的數字就定位，除了內外圈數字分別成等差數列的組合能依我們找尋出來的規律排列出來外，其餘的解皆需搭配限制條件（如：4 和 5 在一起，則 3 和 6 就不能在一起，除非有共同的交集；最大數與最小數的搭配限制等。）反覆嘗試才有可能排列出來。因此我們退而求其次思考，若改採以給予內外圈數字群組，能否快速判斷其是否有解？倘若有解，能否快速找出正確排法呢？

【過程 3-1】依據給定的內外圈數字群組，推斷其可組成的圈數和

各種圈數模式各設定四組數列，並分組指定其內外圈數字，因此算圈數和只要運用【(數字總和+內圈數字和)÷圈數】此算式即可得之，但可以推算出圈數和未必就一定能排出正確解，需再進行下一步檢驗。

註：以下的數列不限等差數列組。

【表 3-1-1】

圈數	數例				圈數和推算過程	無解	可能有解
	內圈數字		外圈數字				
四圈	2、5、6、7	20	1、3、4、8	16	(20×2＋16)÷4=14		✓
	1、2、5、8	16	3、4、6、7	20	(16×2＋20)÷4=13		✓
	1、2、5、10	18	6、7、11、12	36	(18×2+36) ÷4=18		✓
	1、7、10、11	29	2、5、6、12	25	(29×2+25)÷4=20‥3	✓	
五圈	0、3、6、15、10	34	1、7、9、12、13	42	(34×2+42)÷5=22		✓
	1、3、7、12、13	36	0、6、9、10、15	40	(36×2+40)÷5=22‥2	✓	
	1、5、7、8、12	33	0、2、4、10、13	29	(33×2+29)÷5=19		✓
	5、8、10、12、13	48	0、1、2、4、7	14	(48×2＋14)÷5=22		✓
六圈	1、7、16、19、22、31	96	4、10、13、25、28、34	114	(96×2＋114)÷6=51		✓
	1、4、10、13、22、28	78	7、16、19、25、31、34	132	(78×2＋132)÷6=48		✓
	2、3、4、10、11、15	45	0、5、8、12、13、16	54	(45×2+54)÷6=24		✓
	0、2、3、8、10、16	39	4、5、11、12、13、15	60	(39×2+60)÷6=23		✓
七圈	1、2、4、8、9、12、13	49	0、3、5、6、7、10、11	42	(49×2+42)÷7=20		✓
	0、3、6、8、9、10、13	49	1、2、4、5、7、11、12	42	(49×2+42)÷7=20		✓
	2、10、13、14、16、19、20	94	0、3、6、7、9、18、21	64	(94×2+64)÷7=36		✓
	0、2、3、9、10、14、18	56	6、7、13、16、19、20、21	102	(56×2+102)÷7=30‥4	✓	

討論：

1. 當圈數和不為整數時，即表示此組一定無解，通過此關也未必有解，需得做進一步的檢驗。

【過程 3-2】利用雙向脈絡圖來檢驗給定的數字群組能否排出符合條件的數字邏輯圈。

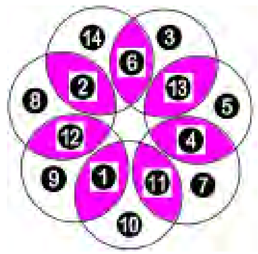
原先我們以數字棋實際來進行推論排列，但覺得非常沒有效率，因此，我們想出了利用雙向脈絡圖的方式來檢驗，發現非常的好用。方法是：以外圈來推斷內圈數字組合，唯一組合解時則畫上連線，若非唯一組合則先跳過，即先畫出唯一組合解的連線，最後每個數字需同時剛好有 2 條連線才可能拼組出來。下方以 2 組數例來作說明：

內	1	3	4	6	7	9	12
21							
外	~~2~~	5	8	10	11	~~13~~	14

1. 先推出圈數和：21
2. 以 2 來看需配 19，只有一解 12&7，即刪 2。
3. 再看 14 需配 7，有二解，所以暫時不連。
   註：有時從極端的數找起較快，因組合數較少
4. 再看 13 需配 8，只有一解 1&7，即刪 13。此時 7 已連出 2 線，所以不能再用到 7 了。
5. 再看 11 需配 10，有三解，所以跳過。
6. 再看 10 需配 11，只有一解 7&4，但 7 已不能用，所以此題無解。

內	1	2	4	6	11	12	13
22							
外	~~3~~	~~5~~	~~7~~	~~8~~	~~9~~	~~10~~	~~14~~

1. 先推出圈數和：22
2. 以 3 來看需配 19，只有一解 13&6，即刪 3。
3. 再看 14 需配 8，只有一解 6&2，即刪 14。
4. 再看 10 需配 12，只有一解 11&1，即刪 10。
5. 再看 5 需配 17，只剩一解 13&4，即刪 5。
6. 再看 7 需配 15，有 11&4，所以 11&4 可連線，即刪 7。
7. 再看 9 需配 13，只剩一解 12&1，即刪 9。
8. 再看 8 需配 12，只剩一解 12&2，即刪 8。
9. 再依脈絡線的順序將數字排入即可完成。

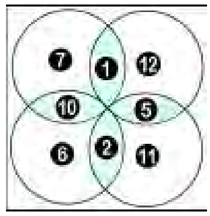


利用上述方法，我們將【過程 3-1】中可能有解的數字群組做分析，很快就能拼出正解。

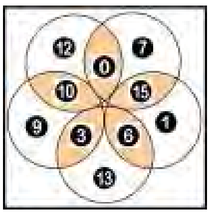
內	2	5	6	7
14	無解			
外	~~1~~	2	5	8

內	1	2	5	8
18	無解			
外	3	4	6	7

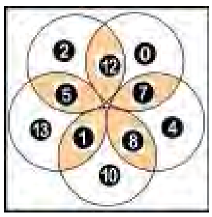
內	1	2	5	10
18				
外	~~6~~	~~7~~	~~11~~	~~12~~



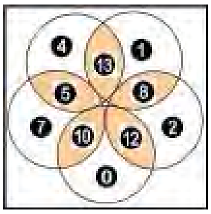
內	0	3	6	10	15
22					
外	~~1~~	~~7~~	~~9~~	~~12~~	~~13~~



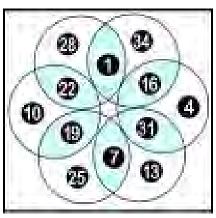
內	1	5	7	8	12
19					
外	~~0~~	~~2~~	~~4~~	~~10~~	~~13~~



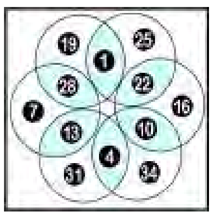
內	5	8	10	12	13
22					
外	~~0~~	~~1~~	~~2~~	~~4~~	~~7~~



內	1	7	16	19	22	31
51						
外	~~4~~	~~10~~	~~13~~	~~25~~	~~28~~	~~34~~

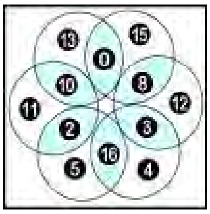


內	1	4	10	13	22	28
48						
外	~~7~~	~~16~~	~~19~~	~~25~~	~~31~~	~~34~~

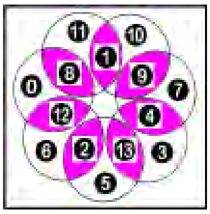


內	2	3	4	10	11	15
24	無解					
外	0	5	8	12	13	16

內	0	2	3	8	10	16
23						
外	4	5	11	12	13	15

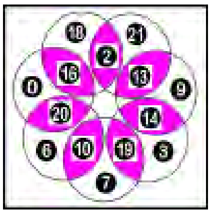


內	1	2	4	8	9	12	13
20							
外	0	3	5	6	7	10	11

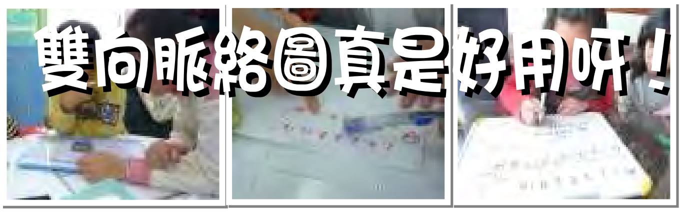


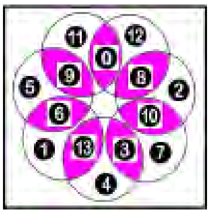
內	0	3	6	8	9	10	13
20							
外	1	2	4	5	7	11	12

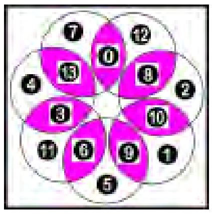
內	2	10	13	14	16	19	20
36							
外	0	3	6	7	9	18	21



內	0	3	6	8	9	10	13
20							
外	1	2	4	5	7	11	12







討論：

1. 以雙向脈絡圖方式來解題，較能呈現整體觀，容易看出哪些數字需重複，以及如何調配數字的重複性。
2. 當以外圈數字同時去搭配 2 個內圈數字時，倘若多數外圈數字都有 2 組解時，那麼此組數列有 2 組解的機率很大（例如上述最後一組數例）。

活動四：探討不同的提示位置對成功解題的難易度之影響。

在 NLVM 的教學網站上提供的題庫（七圈），皆以提示五個區域為主，其餘的 9 個數字再自行填入，因此接下來我們要探討的是不同的提示位置對其解題的難易之影響，並提出可行的破題路徑，以下探討以五圈、六圈及七圈為主。

【過程 4-1】依據提示個數找出可能提示位置的組合(請見附件)。

提示個數又分內外圈有不同的搭配組合，因此我們利用組合公式推算出不同分配所形成的提示位置種類。

例如：5 圈模式：2 內 3 外→ $C_2^5 \times C_3^5 = \frac{5\times4}{1\times2} \times \frac{5\times4\times3}{1\times2\times3} = 10\times10 = 100$

6 圈模式：2 內 4 外→ $C_2^6 \times C_4^6 = \frac{6\times5}{1\times2} \times \frac{6\times5\times4\times3}{1\times2\times3\times4} = 15\times15 = 225$

7 圈模式：3 內 4 外→ $C_3^7 \times C_4^7 = \frac{7\times6\times5}{1\times2\times3}\times\frac{7\times6\times5\times4}{1\times2\times3\times4}$=35x35=1225

【表 4-1-1】

5 圈模式	5 個提示	提示類型	5 內	4 內 1 外	3 內 2 外	2 內 3 外	1 內 4 外	5 外		
		個數	1	25	100	100	25	1		
	4 個提示	提示類型	4 內	3 內 1 外	2 內 2 外	1 內 3 外	4 外			
		個數	5	50	100	50	5			
	3 個提示	提示類型	3 內	2 內 1 外	1 內 2 外	3 外				
		個數	10	50	50	10				
6 圈模式	6 個提示	提示類型	6 內	5 內 1 外	4 內 2 外	3 內 3 外	2 內 4 外	1 內 5 外	6 外	
		個數	1	36	225	400	225	36	1	
	5 個提示	提示類型	5 內	4 內 1 外	3 內 2 外	2 內 3 外	1 內 4 外	5 外		
		個數	6	90	300	300	90	6		
	4 個提示	提示類型	4 內	3 內 1 外	2 內 2 外	1 內 3 外	4 外			
		個數	15	120	225	120	15			
7 圈模式	7 個提示	提示類型	7 內	6 內 1 外	5 內 2 外	4 內 3 外	3 內 4 外	2 內 5 外	1 內 6 外	7 外
		個數	1	49	441	1225	1225	441	49	1
	6 個提示	提示類型	6 內	5 內 1 外	4 內 2 外	3 內 3 外	2 內 4 外	1 內 5 外	6 外	
		個數	7	147	735	1225	735	147	7	
	5 個提示	提示類型	5 內	4 內 1 外	3 內 2 外	2 內 3 外	1 外 4 外	5 外		
		個數	21	245	735	735	245	21		
	4 個提示	提示類型	4 內	3 內 1 外	2 內 2 外	1 內 3 外	4 外			
		個數	35	245	441	245	35			

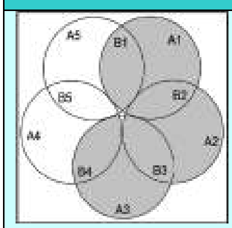
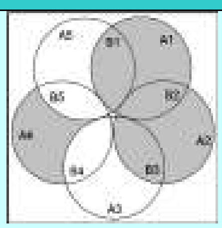
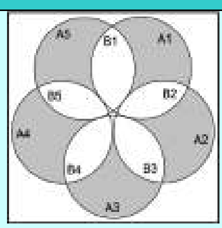
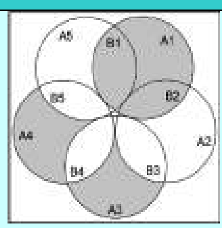
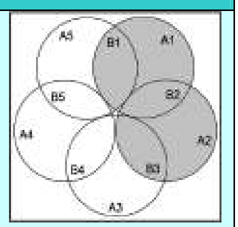
討論：

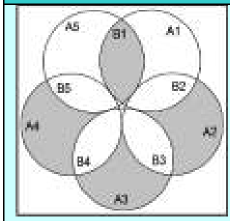
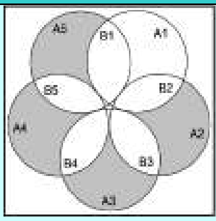
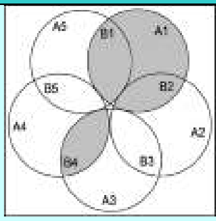
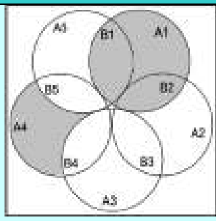
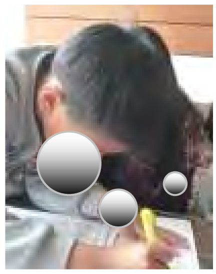
依其組合公式推算出來的提示位置總數雖達數千種，但因數字邏輯圈是屬於對稱圖形，因此有很多提示位置類型經由翻轉或是旋轉後皆屬於同一種提示位置，所以我們並不需要檢驗如此多組。

【過程 4-2】歸納在各種不同提示數量下推衍後所形成的題組。

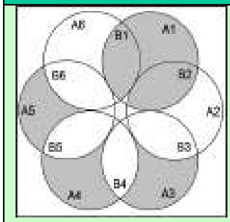
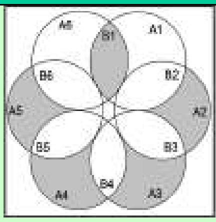
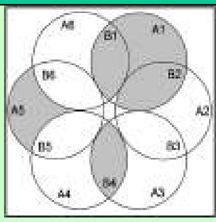
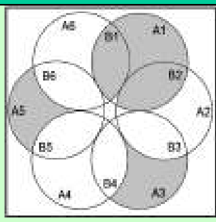
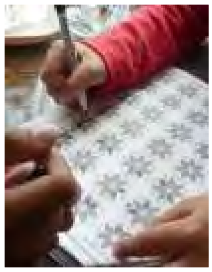
當圈內三個數字中有兩個數字出現，那麼第三個數也等同出現了，所以當給定提示後，與其相關位置之數字也相對就現形了，其數字間又有連環效益，感覺就像數獨 Sudoku 一樣，因此我們將所有提示的組合位置一一列出，找出已現形的數字位置，最後將剩餘的未知區塊題組彙整如下：

探索一：五圈模式在 5～3 個提示下，所形成的可能題組。＜白色區塊爲待填區＞ 【表 4-2-1】

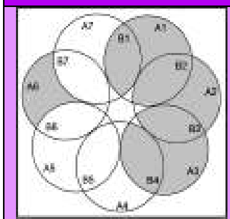
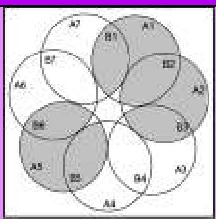
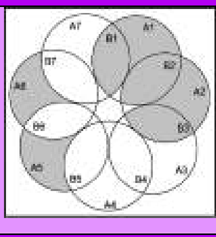
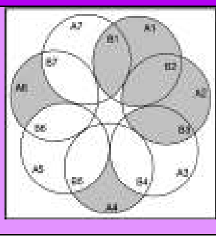
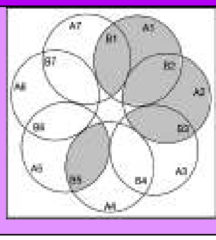
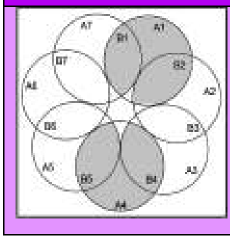
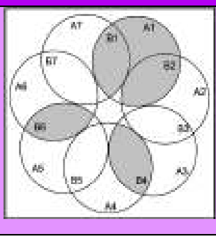
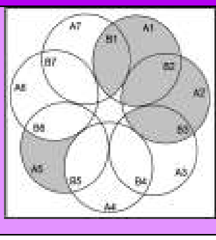
5-001	5-002	5-003	5-004	5-005
				

5-006	5-007	5-008	5-009	
				

探索二：六圈模式在 6～3 個提示下，所形成的可能題組。(與五圈相類似的題組就不再重複)【表 4-2-2】

6-001	6-002	6-003	6-004	
				

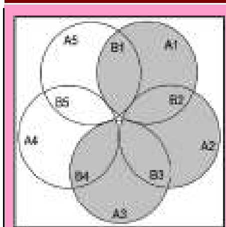
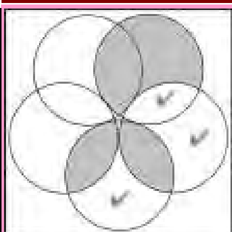
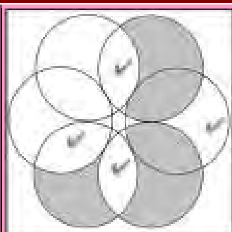
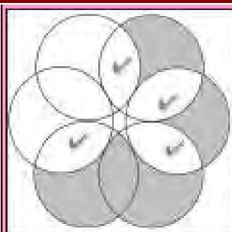
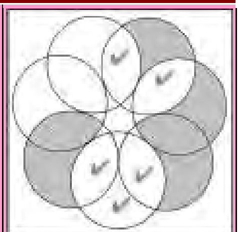
探索三：七圈模式在 7～4 個提示下，所形成的可能題組。(與前面相類似的題組就不再重複)【表 4-2-3】

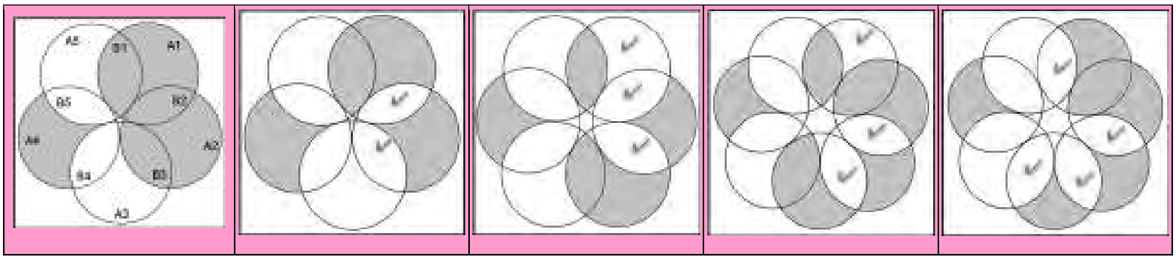
7-001	7-002	7-003	7-004	7-005
				
7-006	7-007	7-008		
				

註：四種提示所形成的可能題組類型相當多，多數是難解的，在此僅列出較易解的題組。

討論：

1. 提示類型的個數雖具對稱性，如 7 圈模式之 6 內 1 外&1 內 6 外，雖各有 49 種提示方法，但其難易度就有差異，提示在內圈的數量愈多，相對的就較容易解題。
2. 圈數不同提示個數不同，最後也可能會產生相同的題組，因此，我們可以從數千種不同的提示位置中歸納整理出許多基本的題組，下表以 5 圈為例說明之。【表 4-2-4】

形成的題組	在不同的圈數及不同的提示下可能形成左邊的題組			
				

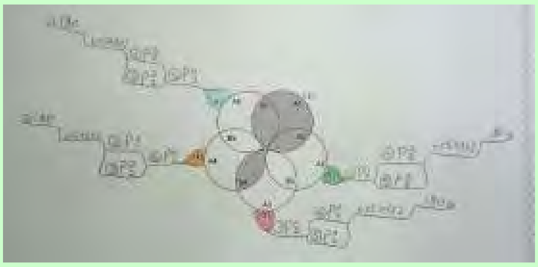
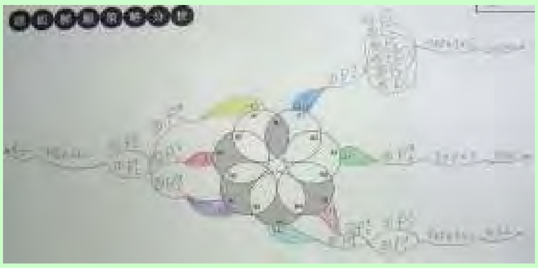
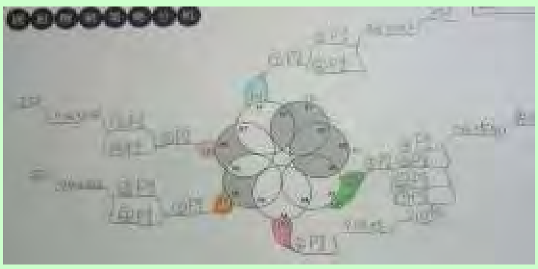


3. 若最後出現的是 5-001(M 型)或 5-002(雙月型)的模式，表示答案幾乎是呼之欲出了。
4. 最後的題組有些只要找出一個(通常是內圈)，其他它答案就如連環扣一樣全都出現了，例如 5-003、5-004、5-006、5-007、6-001、6-002。
5. 不同提示位置解題的難易度會有所差別，但難易度有其機率與直觀的變數較難有其判準的基準，因此我們設定假設，嘗試利用排列規律將它數值化，並以心智圖的方式來呈現策略分析結果，在此僅列出幾個圖例說明之，其餘請詳見附件，供作分析參考：

說明：<u>**在已知總和下，提示 n 個位置之數字，最少嘗試次數之步驟。**</u>

※前題每圈 3 個數字中若兩個現形，則第 3 個數字自動填入的情況下

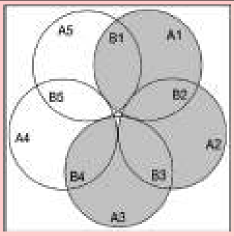
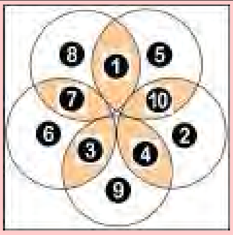
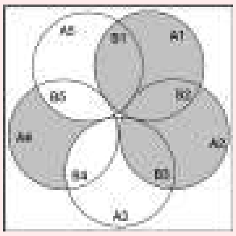
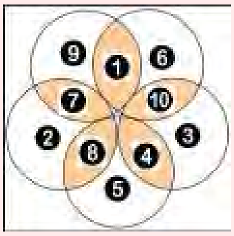
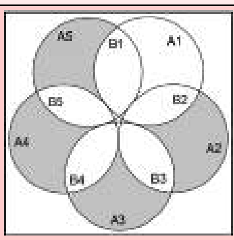
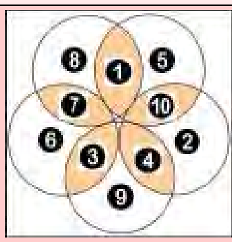
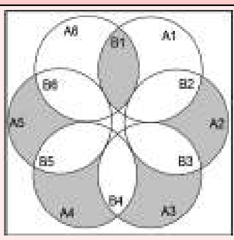
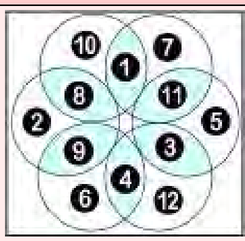
【表 4-2-5】

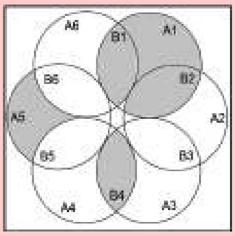
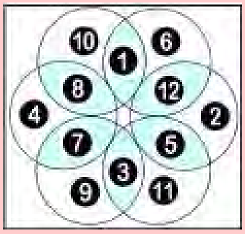
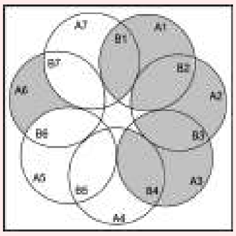
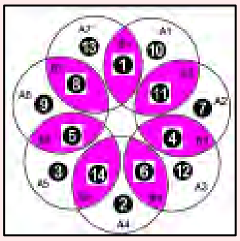
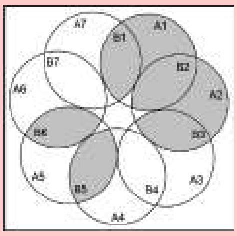
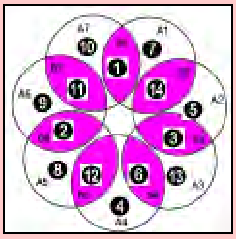
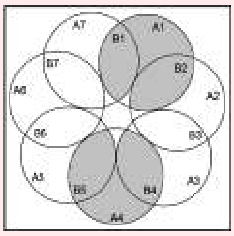
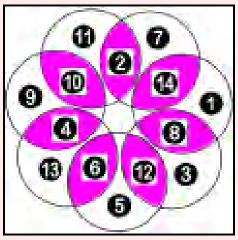
由作何一圈下手皆可	由第 4、5、6 圈下手較好
	
由第 3、4、5、6、7 圈下手皆可	由第 4 圈下手較快
	
由第 3 圈下手較快	由第 4 圈下手較快
	
由第 5 圈下手較快	由任何一圈下手皆可

	
由第 4、5、6、7 圈下手皆可	由第 6 圈下手較快
	

【過程 4-3】分析題組找尋適當的解題策略。

我們將上述所推衍出的題組彙整後，用數字棋一一實際進行分析探討，並寫下遇到此題組其可行的解題策略（如附件），在此我們列出以下幾個題組的分析：【表 4-3-1】

編號	題組	數例	解題策略分析
5-001			策略：看 B1 及 B4 差多少來決定 A4 及 A5 是多少,採大配小,小配大 舉例：剩下 8,7,6，而 B1 及 B4 差了 2,所以 A4 及 A5 必為 6,8,然後小的 6 放到 A4 的位置,其餘的 2 個數就可以放入了
5-002			策略：從剩下的 4 個數中找到與 A4 共一圓的 2 個數，再與 B1 及 B3 相互搭配即能成功。 舉例：剩下 9,7,8,5,要與 2 配成 17,需要 15,所以就是 7 和 8 搭了,而 B1 及 B3 分別是 1,4,所以 1 需要 16,所以 7 需和 9 共圓,因此全部答案就都出來了.
5-007			策略：從 B3、B4、B5 下手皆可，因為 B3、B4、B5 都有 2 個可驗證處，1 個數出來其他數一目瞭然。 舉例：由 9 切入,9 要 7，只有 3,4 一組，靠 6 和 2 檢驗，就能夠馬上完成。
6-002			策略：推算其中一個內圈,全部的答案就會出來了 舉例：一圈要配成 19,A3 的 12 還差 7,只有 3 和 4;A4 的 6 需要 13,只有 9 和 4;4 是他們兩個重疊之數，所以放在 B4，在這樣答案就出來了。

6-003			策略：從 A5 那一圈，用 A4.A6 來檢驗，左半部即可出來，右邊從哪一圈開始都可解出。 舉例：從 4 那圈開始，合是 19，4 需要 15，有 7,8 和 10,5，若用 7,8,大小配，8 放 1 那圈 7 放 3 那圈，7＋3＝10，需要 9 成立，8＋1＝9，需 10 成立，3 需要 16，只有 11.5 可以，依大小配，5 放 12 那圈，2 放進去完成。
7-001			策略:從 B1 圈開始推,因爲旁邊還有 A6 可檢驗,推出來後剩 A4,B5,A5, 看 B4 及 B6 差多少來決定 A4 及 A5 是多少,探大配小,小配大 舉例:一圈和要是 22,從 B1 這圈開始推,1 要配 21,只有 13 和 8,A6 位子的 9 要配 13,只有 8 和 5; 剩下 2,3,14，而 B4 及 B6 差了 1,所以 A4 及 A5 必爲 2,3 然後小的 2 放到 A4 的位置,其餘的 2 個數就可以放入了
7-003			策略：從 A6,A7,B7(或 A3,B4,A4)開始，另一組就看 B5,B3(或 B1,B6)的差，來決定位置。 舉例：1 要 21，只有 10,11＆8,13 兩組，因爲 B6 是 2，還差 20，只有 11 是適合的，所以 A6 要擺 9，B5 是 12，B3 是 3，相差 9，因此 13,4 差 9，大配小，小配大，6 擺中間，輕鬆破解本題。
7-007			策略:從剩下的圈中找到一圓空白的,找到 3 個數,如有兩組可能,再與 A3 及 A5 相互檢驗,即可成功;然後再看 B2 及 B4 差多少來決定 A2 及 A3 是多少,探大配小,小配大。 舉例:需配成 23,所以就是 9,4 和 10 搭,2 需要 21,只有 11,10,然後 13 就可排進 A5;剩下 1,3,8，而 B2 及 B4 差 2,→A4 及 A5 必爲 1,3,當 1 放到 A3 的位置,其餘的 2 數就可以放入了。

延伸探討(1)—能否將此研究轉化更具挑戰性的活動呢？

既然提示類型可以有很多種，再加上轉動的加乘效果，所以，我們計畫將此研究的成果設計成一組遊戲套組，運用各類題本×提示個數×提示位置×提示盤轉動之加乘效果，並延伸到正負數、小數及分數，再搭配難易度將可以生成無窮的挑戰題，以下就試舉幾個變化的範例：

說明 1：中間爲數字邏輯圈基模題本，紫色區塊皆以此基模題本加上 8 種不同提示位置形成各種挑戰題。

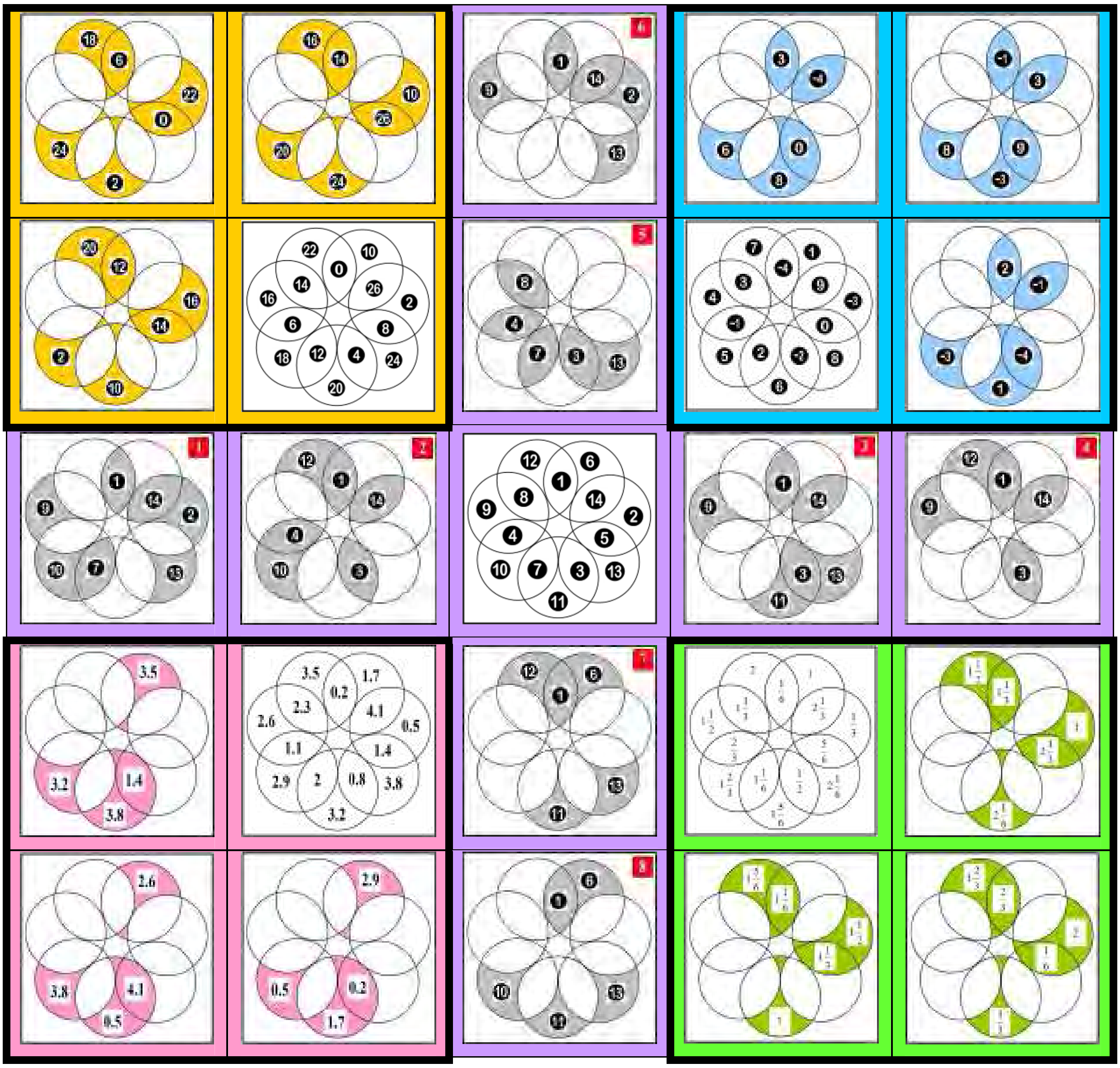
說明 2：左上橘色區塊是以 0 爲始，公差爲 4 的基模題本對應數列，其餘轉動題本再配上同一種提示位置。

說明 3：右上藍色區塊是-4 爲始的連續數的基模題本對應數列，其餘轉動題本再配上同一種提示位置。

說明 4：左下粉紅區塊是以 0.2 爲始，公差爲 0.3 的基模題本對應數列，其餘轉動題本再配上同一種提示位置

說明 5：右下綠色區塊是以基模題本平移結果(以爲 $\frac{1}{6}$ 始，公差爲 $\frac{1}{6}$)，其餘轉動題本再配上同一種提示位置。

【表 4-3-A-1】

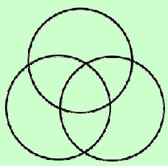
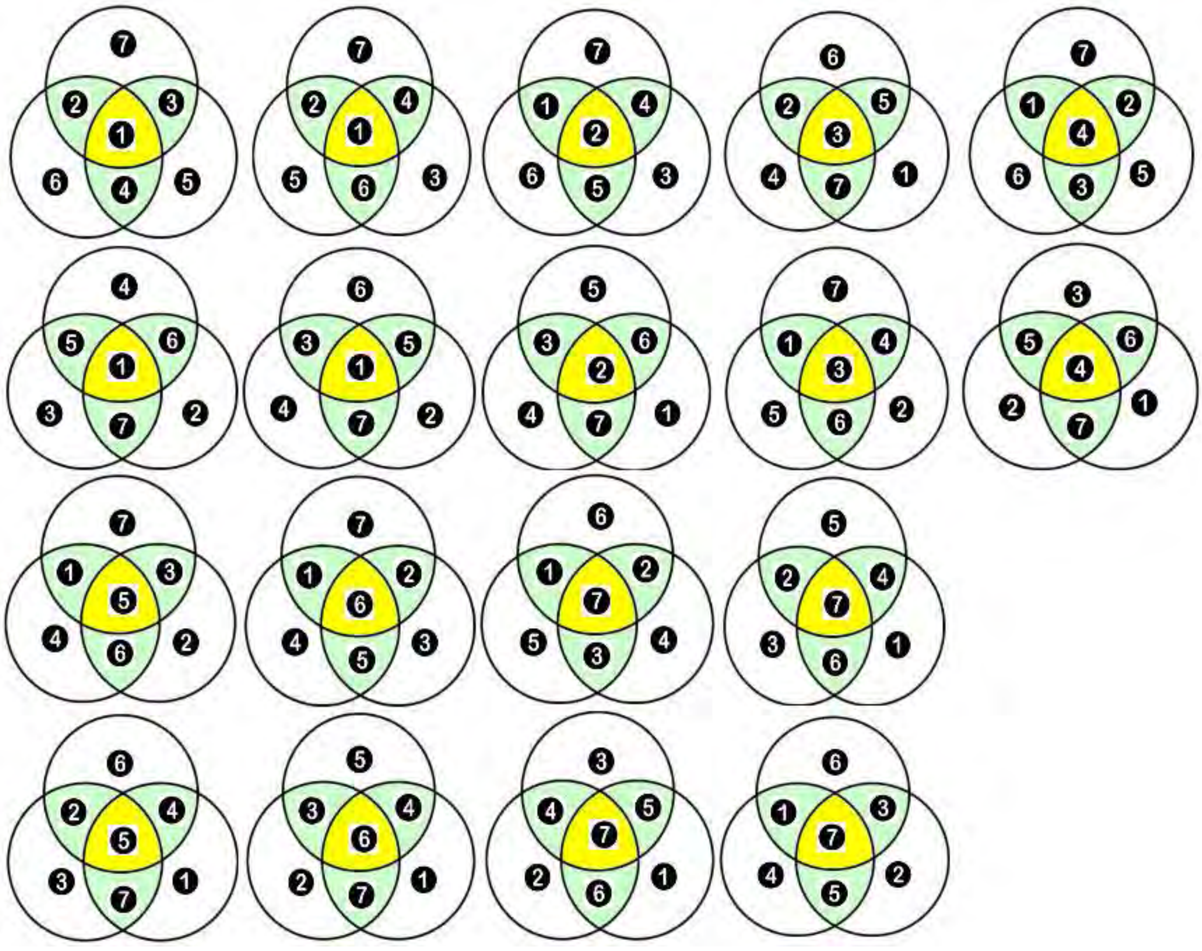


延伸探討(2) **很多與此類似的題型，我們能否應用相同的原理解題呢？**

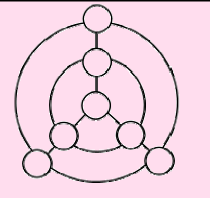
在研究過程中，我們也收集了很多相類似的挑戰題，也都有異曲同工之妙，經過這次的研究，面對這類似的題目我們也可以去嘗試解題，並從中發現一些規律：

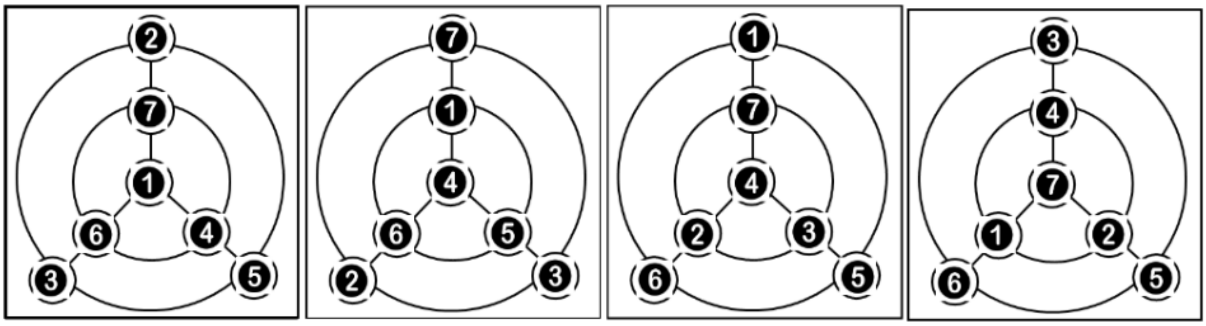
類型一：將 1～7 填入空格中，共有幾種填法？

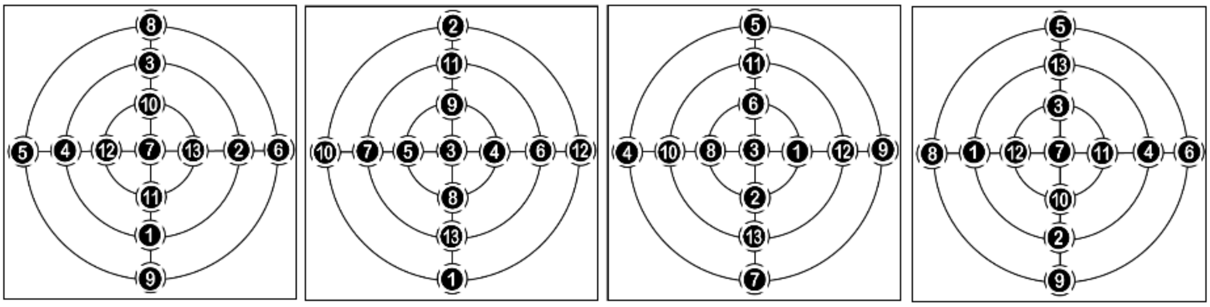
【表 4-3-B-1】

題 組	分 析
	1. 外圈與相對的內圈都差都相同，且內外圈的差皆為 3 的倍數。 2. 共有 18 種填法，組與組間兩兩對稱。 3. 以 1 和 7 當中間數時，各有 4 組（分連續數與奇偶數兩類），其餘的皆只有 2 組。 4. <u>也可以做數字的平移</u>（如填入 2,4,6 ……14 或-3,-2,-1,….3），排法皆相同。
	

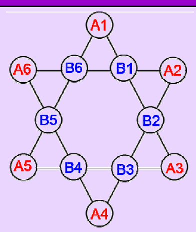
類型二：將 1～7 填入空格中，使每排的三個數及外圓圈上的 3 個數之和都是 10 【表 4-3-B-2】

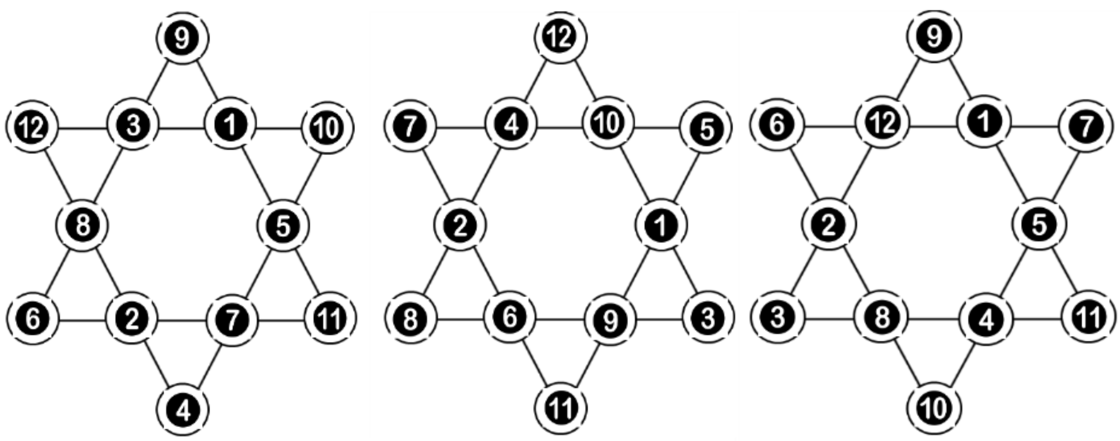
題 組	分 析
	1.(總和－中間數)÷3 需爲整數，所以推得 1,4,7 可以當中間數。 2.扣除中間數後將其他六個數平分成 3 組，使其各組的和皆爲(總和－中間數)÷3 所得的答案，再從 3 組數中各找一個數放在外圈，使外圈的 3 個數和與各組及中間數之和相等。 3.也可以做數字的平移（如填入 2,4,6 ……14 或-3,-2,-1,…3），排法皆相同。

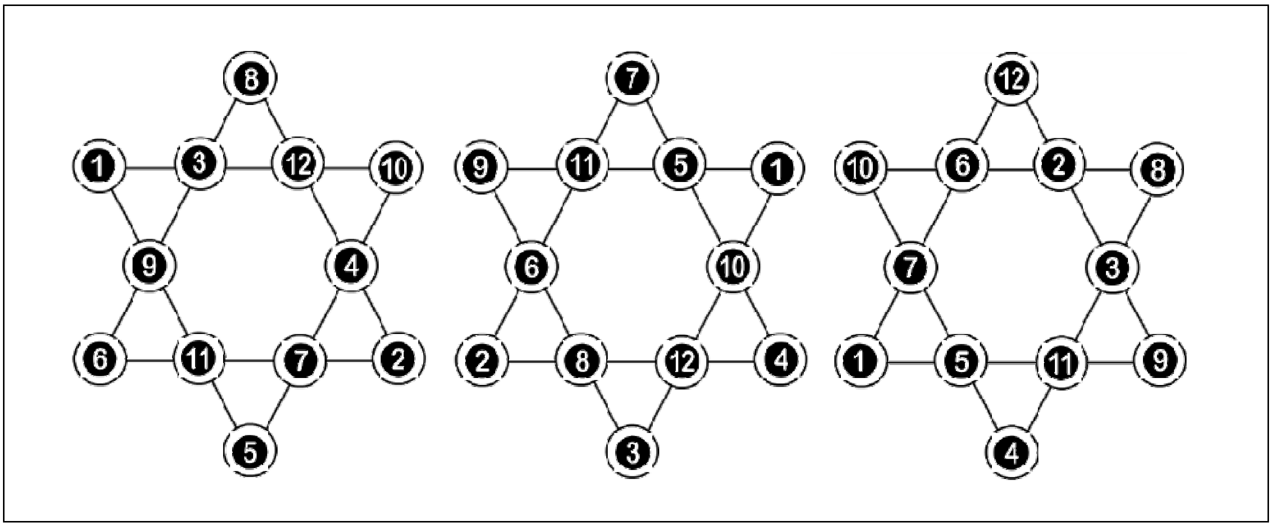




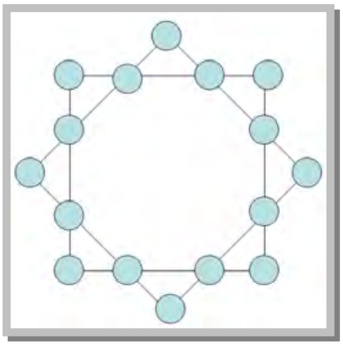
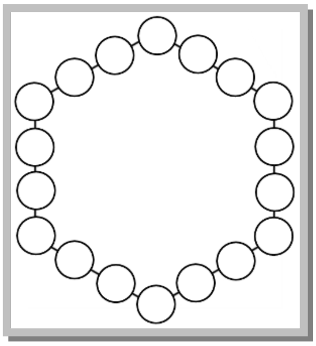
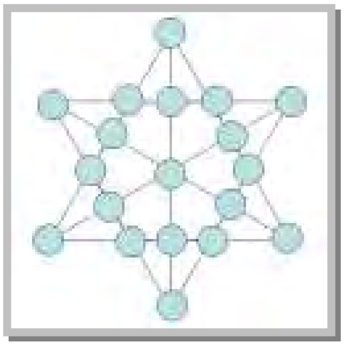
類型三：將 1～12 填入空格中，使每個直排上的四個數字和皆相同 【表 4-3-B-2】

題 組	分 析
	1. 只要找出一組答案，就可以把改造成其他 3 組，還能再重那 3 組裡，每一組再改造出 2 組，然後一直延續下去，而且並不是用對稱或旋轉的方式。 2. 改造方法：先把隨便一個頂點固定(總共有 6 個頂點所以能對換 6 種)，我們用 A1 來示範,然後把 B1 和 A3 的位子對調，B6 和 A5 的位子對調，B2 和 B5 的位子不用移動，其他的就很容易排出來了。





其它：相類似的題目還有很多，期望將在日後繼續探究它，並加以延伸變化之。

陸、結論

一、想要窮盡數字邏輯圈拼組的所有解，得先知道其所能排出的圈數和範圍，利用

【$\dfrac{<\text{數字總和}>+<\text{內圈總和}>}{4}$＝圈數和】即可求出其範圍。

二、當數字群組呈等差數列時，則可以利用【$3n+\left\lceil\dfrac{5k-3}{2}\right\rceil\times d \sim 3n+\left\lfloor\dfrac{7k-3}{2}\right\rfloor\times d$】很快求出圈數和範圍，且圈數和的數字序列以公差 d 爲間隔跳躍。（註：n 爲首數、k 爲圈數、d 爲公差）

三、當數字群組呈等差數列時，其圈數和所排出的組數前後具對稱性。

四、當數字群組呈等差數列時，組數之間的排列也具對稱性，當排出一組時，只要將數字互換(1↔14、2↔13、3↔12、4↔11……)，即可得出另一組。

五、等差數列（公差 d）在奇數圈模式採用內圈間隔跳的方式可以很快排出最小的圈數和及最大的圈數和。

七、只要是等差數列的數字群組皆可以平移轉化爲以 1 爲起始的連續數列，包括有固定公差的正負數、分數或小數等，因此看似複雜難處理的數據，也能迎刃而解，順利拼組成功。

八、運用【$3n+\left\lceil \frac{5k-3}{2} \right\rceil \times d$ ～ $3n+\left\lfloor \frac{7k-3}{2} \right\rfloor \times d$】之公式可以反其道而行，自由設定圈數和，然後再找出可排出此圈數和的數字群組，作爲拼組的題本。

九、給予內外圈數字群組，我們可以運用【(數字總和+內圈數字和)÷圈數】找出圈數和，再運用雙向脈絡圖的連線方式來判斷此組是否能拼組成功。

十、不同的提示位置會影響解題成功的難易度，因此我們可以利用各類題本×提示個數×提示位置×提示盤轉動之加乘效果變化出千變萬化的題目。

柒、未來展望

一、找出七圈中那 82 組的數字排列規律，進而期望能推衍到九圈或其它奇數圈。

二、探究偶數圈的變化規律。

三、非等差數列的數字群組，除了用試誤法外，能否找到更有效率的解法呢？

捌、參考資料

一、 第四十五屆國中組數學科展～「七邊形的數字謎題」

二、 第三十七屆初小組數學科展～「奇妙的數學遊戲」

三、 第二十五屆高小組數學科展～「怎樣安排才恰當」

【評語】080414

本研究以“數學邏輯圖”為基礎，經由平移或轉化為正負數、等差數列、小數及分數的過程，做出許多變化，也使得研究結果更為豐富。而由研究結果衍生出的遊戲，極為有趣，頗具吸引力，整體而言是一篇值得稱許的好作品。惟若能在遊戲的設計上，將之精簡，使之攜帶方便，但仍不失其原有之功能，則將可更提高本研究之應用性。