中華民國第51屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第一名

080413

圓柱積木「新」解

學校名稱：臺中市烏日區九德國民小學

作者：	指導老師：
小六 林湘妮	卓樹樣
小六 陳羿汝	賴勇志

關鍵詞：圓柱積木、組合、展開圖

得獎感言

科展研究的歷程讓我們成長很多，在探討的過程中需要專心和耐心，更需要不斷的挑戰自己。兩年的研究中，不只學到新的知識，甚至學到做事時應有的態度；做一件事不可以草草交差了事，應該認真的完成才對。每當遭遇困難或失敗時，老師的鼓勵讓我們提升信心，克服困難記取教訓，並且不再犯相同的錯。

經歷了台中市的比賽，取得了參加全國科展的資格，最後得到國小組數學科的第一名獲總統接見，這些都是兩年前所不敢想像的，覺得自己何其幸運，能有這個和別人不一樣的經驗，不論是在研究的過程中、訓練的階段裡或是比賽期間，老師盡心的指導，讓我們了解研究學問的方法，希望自己在未來，能夠不忘老師的教導，做個認真負責的人。

圓柱積木「新」解

摘要

從圓柱積木中取 5～11 片積木也能堆疊，起初參考陳鼎文和王俞臻（民 98）篩選 12 片積木洞數組合的規則，找到篩選 5～11 片積木洞數組合的規則；但是積木數或總洞數改變時都要重新篩選，且檢驗積木洞數組合能不能堆疊時需花很多時間試驗積木的形狀。後來發現第 k 片積木堆疊時置放的木棒數 P_k 的規則，用這個規則從 5 片積木 4 根木棒的篩選資料，能以積木數不變而木棒數加 1、積木數和木棒數同時加 1、積木數加 1 而木棒數不變等方法陸續推演出 5～12 片積木堆疊可能的 P_k 組合；在 Excel 中用 P_k 的規則和圓柱積木的洞數能篩選掉大部分不可堆疊的 P_k 組合。最後用自行設計的堆疊工具可同時完成積木形狀的挑選與積木的排列，改進了以積木洞數規則篩選的缺點。

壹、研究動機

升上五年級時，知道學長學姐研究童玩積木的堆疊規則，得到第四十九屆全國科展第一名，並獲總統接見；覺得他們真光榮，對那組積木也感到好奇，就請媽媽帶我到鹿港老街買圓柱積木來疊疊看。結果看似簡單的積木卻難倒了我，於是找同學一起向學姐請教，又上網尋找相關資料，結果只找到「數」解圓柱積木(陳鼎文和王俞臻，民 98)的作品說明書。在研讀並堆疊後，漸漸了解其中的規則，不過心中卻產生一連串的疑問；從 12 片積木中取多少片積木也可以堆疊？當積木的片數固定時，積木的總洞數有什麼限制？從 12 片積木中取部分積木堆疊時，有哪些規則可以用來篩選積木洞數的組合？當積木洞數的組合固定時，怎麼挑選積木的形狀？爲了解決這些疑問，我們記錄研究過程，再從研究紀錄中找規則。經過一年多的研究，發現許多新規則，也用圓柱體側面「展開圖」的概念設計間接堆疊工具，利用規則和工具篩選積木組合並挑選積木的形狀。最後運用「數的十進位結構」、「無條件捨去法取概數」等知識，在 Excel 試算表寫公式快速篩選掉不可堆疊的組合。

貳、研究目的

一、探討從圓柱積木中取部分積木進行堆疊時，積木片數和總洞數的限制條件。

二、找出從圓柱積木中取部分積木進行堆疊時，積木須符合的數字規則。

三、用堆疊積木時須符合的數字規則，篩選從圓柱積木中取部分積木堆疊的可能組合。

四、設計間接堆疊工具，找出部分圓柱積木可以堆疊的組合，並挑選積木的形狀。

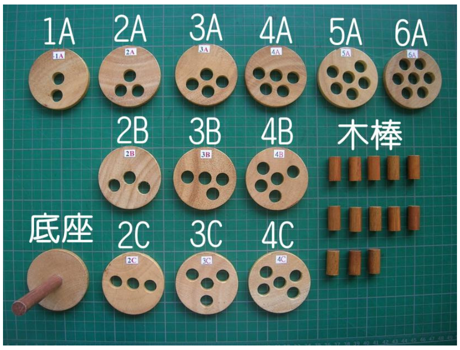
參、研究設備及器材

圓柱積木、電腦、筆、紙、鐵板、軟性磁鐵。

肆、研究過程

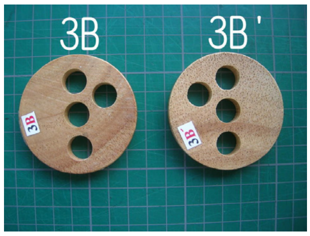
一、圓柱積木簡介：

圓柱積木有 1 個底座、12 片不同的積木和 13 根木棒；底座正中央的支柱長度等於 12 片積木的高度和；每片積木的正中央都有一個洞，周圍各有 1～6 個洞不等，每根木棒的長度是 3 片積木的高度和，詳如圖一。每堆疊 1 片積木，需先把積木中間的洞套進底座的支柱，再用木棒填滿周圍凹下的洞，最後如果能把所有的積木和木棒用完，並且沒有木棒凸出，便完成圓柱積木的堆疊，如圖二。



圖一：圓柱積木的組件

圖二：堆疊完成圖



圖三：積木 3B 翻轉圖

二、文獻探討：

本研究是「數」解圓柱積木(陳鼎文和王俞臻，民 98)的延伸探究，為便於討論及比較，將其內容整理如下。

(一) 定義符號：為了敘述方便，定義下列符號。

1. 以 N_k 表示第 k 片積木周圍的洞數；P_k 表示第 k 片積木堆疊時要置放的木棒數；O_k 表示第 k 片積木堆疊後凸出的木棒數。
2. 以數字代表洞數，英文字母區別形狀，將每一片圓柱積木命名為 1A、2A、2B、2C、3A、3B、3C、4A、4B、4C、5A、6A（如圖一），其中只有 3B 翻轉後形狀不同，另命名為3B′（如圖三）。
3. 以（1A，2A，…，3A）表示第 1 片、第 2 片、…、最後一片積木分別為 1A、2A、…、3A 的堆疊組合。

(二) 堆疊 12 片圓柱積木的數字規則如表一所示。

表一：堆疊 12 片圓柱積木的數字規則

編號	規則內容
1	$N_1+N_4+N_7+N_{10}=N_2+N_5+N_8+N_{11}=N_3+N_6+N_9+N_{12}=\sum_{k=1}^{10}P_k=13$
2	$N_k \ge O_{k-1}, k=2,3,\cdots,12$
3	$N_1<N_2<N_3, N_1\ne 5, N_1\ne 6, N_2\ne 6, N_2\ne 1, N_3\ne 1, N_3\ne 2, N_4\ne 1$
4	$N_{10}>N_{11}>N_{12}, N_{12}\ne 5, N_{12}\ne 6, N_{11}\ne 6, N_{11}\ne 1, N_{10}\ne 1, N_{10}\ne 2, N_9\ne 1$
5	若 $O_k=N_k=N_{k+1}$，則無法完成積木的堆疊
6	令 $O_0=0$，若 $O_{k-1}=0$， $1\le k\le 8$，且 $(N_k,N_{k+1},N_{k+2},N_{k+3})=(3,4,6,3)$ 或 $(3,5,6,3)$；或者若 $O_k=0$， $5\le k\le 12$，且 $(N_{k-3},N_{k-2},N_{k-1},N_k)=(3,6,4,3)$ 或 $(3,6,5,3)$，則無法完成積木的堆疊。

(三) N_k 與 P_k 、O_k 與 P_k 的關係如表二所示。

(四) 「數」解圓柱積木的研究發現：

12 片積木由下而上排列共有 958003200 種之多，藉由表一所列的數字規則篩選積木堆疊的洞數組合，洞數符合的堆疊組合只剩下 228 種，再實際堆疊後有 212 種洞數組合可完成堆疊。

表二：N_k 與 P_k 、O_k 與 P_k 的關係

積木 \ P_k	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	N_k 與 P_k 關係	O_k 與 P_k 關係
第 1 片	●												$N_1 = P_1$	$O_1 = P_1$
第 2 片	●	●											$N_2 = P_1 + P_2$	$O_2 = P_1 + P_2$
第 3 片	🔴	●	●										$N_3 = P_1 + P_2 + P_3$	$O_3 = P_2 + P_3$
第 4 片		🔴	●	●									$N_4 = P_2 + P_3 + P_4$	$O_4 = P_3 + P_4$
第 5 片			🔴	●	●								$N_5 = P_3 + P_4 + P_5$	$O_5 = P_4 + P_5$
第 6 片				🔴	●	●							$N_6 = P_4 + P_5 + P_6$	$O_6 = P_5 + P_6$
第 7 片					🔴	●	●						$N_7 = P_5 + P_6 + P_7$	$O_7 = P_6 + P_7$
第 8 片						🔴	●	●					$N_8 = P_6 + P_7 + P_8$	$O_8 = P_7 + P_8$
第 9 片							🔴	●	●				$N_9 = P_7 + P_8 + P_9$	$O_9 = P_8 + P_9$
第 10 片								🔴	●	●			$N_{10} = P_8 + P_9 + P_{10}$	$O_{10} = P_9 + P_{10}$
第 11 片									🔴	●	●		$N_{11} = P_9 + P_{10} + P_{11}$	$O_{11} = P_{10} + P_{11}$
第 12 片										🔴	●	●	$N_{12} = P_{10} + P_{11} + P_{12}$	$O_{12} = P_{11} + P_{12}$

●表示有 P_k 根木棒穿過第 I 片積木，並且凸出於第 I 片積木之上。

🔴表示有 P_k 根木棒穿過第 I 片積木，並且未凸出於第 I 片積木之上。

三、名詞定義：

(一) 數值化：設 $(N_1, N_2, \cdots, N_{x-1}, N_x)$ 是一組積木洞數的組合，令 $N_1N_2\cdots N_{x-1}N_x = N_1 \times 10^{x-1} + N_2 \times 10^{x-2} + \cdots + N_{x-1} \times 10 + N_x$，稱 $N_1N_2\cdots N_{x-1}N_x$ 為 $(N_1, N_2, \cdots, N_{x-1}, N_x)$ 數值化結果的數值。同理，$P_1P_2\cdots P_{x-3}P_{x-2}$ 為 $(P_1, P_2, \cdots, P_{x-3}, P_{x-2})$ 數值化結果的數值。例如：23421 是（2,3,4,2,1）數值化結果的數值。

(二) 反序堆疊：如果 $(N_1, N_2, \cdots, N_{x-1}, N_x)$ 和 $(N_1', N_2', \cdots, N_{x-1}', N_x')$ 都可以完成 x 片積木的堆疊且 $(N_1, N_2, \cdots, N_{x-1}, N_x) = (N_x', N_{x-1}', \cdots, N_2', N_1')$，則稱這兩個組合互為反序堆疊。同理，若 $(P_1, P_2, \cdots, P_{x-3}, P_{x-2})$ 和 $(P_1', P_2', \cdots, P_{x-3}', P_{x-2}')$ 皆可完成 x 片積木的堆疊且 $(P_1, P_2, \cdots, P_{x-3}, P_{x-2}) = (P_{x-2}', P_{x-3}', \cdots, P_2', P_1')$，則稱這兩個組合互為反序堆疊；本研究僅列出兩組合數值化後其值較大者。例如：（2,3,4,2,1）和（1,2,4,3,2）互為反序堆疊，研究中只列出（2,3,4,2,1）。

四、從圓柱積木中取部分積木進行堆疊時，積木片數和總洞數有什麼限制條件？

(一) 因為 12 片圓柱積木都不相同，而且每根木棒的長度是 3 片積木的高度和，所以從 12 片積木中取 x 片積木進行堆疊，必須符合下列條件：

1. $N_1 < N_2 < N_3$。

2. $N_{x-2} > N_{x-1} > N_x$。

3. 積木總洞數是 3 的倍數。

(二) 堆疊與討論後發現：最少須取 5 片積木堆疊；從 12 片積木中取 5～11 片堆疊時，總洞數的條件如表三。

表三：從 12 片圓柱積木中取 5～11 片積木堆疊其總洞數的條件

積木數	積木總洞數最小值	積木總洞數最大值	最小值與最大值間 3 的倍數
5	**10**	**23**	**12，15，18，21**
6	**13**	**26**	**15，18，21，24**
7	**16**	**29**	**18，21，24，27**
8	**20**	**32**	**21，24，27，30**
9	**24**	**34**	**24，27，30，33**
10	**28**	**36**	**30，33，36**
11	**33**	**38**	**33，36**

在後面的研究中發現：5 片和 8 片積木總洞數為 21 時，與積木洞數矛盾而無法堆疊。

五、從圓柱積木中取部分積木進行堆疊時，積木須符合哪些數字規則？

(一) 參考表一、表二所列的規則和關係，從 12 片積木中取 5～11 片積木堆疊時，發現積木洞數的數字規則與陳鼎文和王俞臻（民 98）所發現堆疊 12 片積木的規則相似，結果整理如表四。

表四：x 片圓柱積木總洞數 y 堆疊時的積木洞數的數字規則

代號	規則內容
A	$x=5$　$N_1+N_4=N_2+N_5=N_3=\sum_{k=1}^{3}P_k=\frac{y}{3}$
	$x=6$　$N_1+N_4=N_2+N_5=N_3+N_6=\sum_{k=1}^{4}P_k=\frac{y}{3}$
	$x=7$　$N_1+N_4+N_7=N_2+N_5=N_3+N_6=\sum_{k=1}^{5}P_k=\frac{y}{3}$
	$x=8$　$N_1+N_4+N_7=N_2+N_5+N_8=N_3+N_6=\sum_{k=1}^{6}P_k=\frac{y}{3}$
	$x=9$　$N_1+N_4+N_7=N_2+N_5+N_8=N_3+N_6+N_9=\sum_{k=1}^{7}P_k=\frac{y}{3}$
	$x=10$　$N_1+N_4+N_7+N_{10}=N_2+N_5+N_8=N_3+N_6+N_9=\sum_{k=1}^{8}P_k=\frac{y}{3}$
	$x=11$　$N_1+N_4+N_7+N_{10}=N_2+N_5+N_8+N_{11}=N_3+N_6+N_9=\sum_{k=1}^{9}P_k=\frac{y}{3}$
	$x=12$　$N_1+N_4+N_7+N_{10}=N_2+N_5+N_8+N_{11}=N_3+N_6+N_9+N_{12}=\sum_{k=1}^{10}P_k=\frac{y}{3}$
B	$N_k \ge O_{k-1}, k=2,3,\cdots,x$
C	$N_1<N_2<N_3, N_1\ne 5, N_1\ne 6, N_2\ne 6, N_2\ne 1, N_3\ne 1, N_3\ne 2, N_4\ne 1$
D	$N_{x-2}>N_{x-1}>N_x, N_x\ne 5, N_x\ne 6, N_{x-1}\ne 6, N_{x-1}\ne 1, N_{x-2}\ne 1, N_{x-2}\ne 2, N_{x-3}\ne 1$
E	令 $O_0=0$，如果 $O_{k-1}=0$ 且 $(N_k,N_{k+1},N_{k+2},N_{k+3})=(3,4,6,3)$ 或 $(3,5,6,3)$；或者如果 $O_k=0$ 且 $(N_{k-3},N_{k-2},N_{k-1},N_k)=(3,6,4,3)$ 或 $(3,6,5,3)$，就無法完成積木的堆疊。
F	當 $x=12$ 時，如果 $O_k=N_k=N_{k+1}$，就無法完成積木的堆疊。

(二) 根據規則 A～E 篩選積木洞數組合：

1. 取 5～11 片積木堆疊時，符合規則 A 的積木洞數組合個數，統計結果如表五；

其中 5 片積木總洞數爲 21 時，沒有符合規則 A 的組合。

表五：5～11 片積木堆疊時，符合規則 A 的積木洞數組合個數

積木數	積木總洞數	符合規則 A 的積木洞數組合個數	積木數	積木總洞數	符合規則 A 的積木洞數組合個數
5	12	4	8	21	108
	15	12		24	450
	18	20		27	648
	21	0		30	216
6	15	32	9	24	324
	18	68		27	1998
	21	104		30	2430
	24	24		33	972
7	18	52	10	30	2304
	21	180		33	5832
	24	216		36	1152
	27	72	11	33	5184
				36	10752

2. 以 5 片積木堆疊爲例，根據規則 A～E 篩選積木洞數的組合，結果如表六，並討論如下：

表六：根據規則 A～E 篩選 5 片積木堆疊的積木洞數組合結果

積木總洞數	用規則 A 篩選 $(N_1,N_4),(N_2,N_5),(N_3)$	符合規則 C 和 D	符合規則 B	符合規則 E	堆疊結果(紅色字體表示爲部分黑字的反序堆疊)	可堆疊的積木洞數組合個數
12	(1,3),(2,2),(4)	(1,2,4,3,2)	○	○	(1A,2B,4B,3A,2A)	1
	(3,1),(2,2),(4)	×				
	(2,2),(1,3),(4)	(2,3,4,2,1)	○	○	(2A,3A,4B,2B,1A)	
	(2,2),(3,1),(4)	×				
15	(1,4),(2,3),(5)	(1,2,5,4,3)	○	○	(1A,2A,5A,4B,3B)	3
	(4,1),(2,3),(5)	×				
	(1,4),(3,2),(5)	(1,3,5,4,2)	○	○	(1A,3A,5A,4B,2B)	
	(4,1),(3,2),(5)	×				
	(2,3),(1,4),(5)	×				
	(3,2),(1,4),(5)	×				
	(2,3),(4,1),(5)	(2,4,5,3,1)	○	○	(2B,4B,5A,3A,1A)	
	(3,2),(4,1),(5)	(3,4,5,2,1)	○	○	(3B,4B,5A,2A,1A)	
	(2,3),(2,3),(5)	×				
	(3,2),(2,3),(5)	×				
	(2,3),(3,2),(5)	(2,3,5,3,2)	○	○	(2A,3A,5A,3B,2B)	
	(3,2),(3,2),(5)	×				
18	(1,5),(2,4),(6)	(1,2,6,5,4)	○	○	(1A,2B,6A,5A,4B)	3
	(5,1),(2,4),(6)	×				
	(1,5),(4,2),(6)	(1,4,6,5,2)	○	○	(1A,4C,6A,5A,2C)	
	(5,1),(4,2),(6)	×				
	(2,4),(1,5),(6)	×				
	(4,2),(1,5),(6)	×				
	(2,4),(5,1),(6)	(2,5,6,4,1)	○	○	(2C,5A,6A,4C,1A)	
	(4,2),(5,1),(6)	(4,5,6,2,1)	○	○	(4B,5A,6A,2B,1A)	
	(1,5),(3,3),(6)	(1,3,6,5,3)	○	×		
	(5,1),(3,3),(6)	×				
	(3,3),(1,5),(6)	×				
	(3,3),(5,1),(6)	(3,5,6,3,1)	○	×		
	(2,4),(2,4),(6)	×				
	(4,2),(2,4),(6)	×				
	(2,4),(4,2),(6)	(2,4,6,4,2)	○	○	(2A,4C,6A,4A,2C)	
	(4,2),(4,2),(6)	×				
	(2,4),(3,3),(6)	(2,3,6,4,3)	○	×		
	(4,2),(3,3),(6)	×				
	(3,3),(2,4),(6)	×				
	(3,3),(4,2),(6)	(3,4,6,3,2)	○	×		

(1) 檢驗積木洞數組合能不能堆疊時，需要花很多時間試驗積木形狀的組合，例如$(2,3,4,2,1)$共有 27 種積木形狀的組合，其中有 19 種不能堆疊，所以要找到其中 1 組可以堆疊的形狀組合，常常需要花很多時間。

(2) 雖然依照表六的方法，能篩選出 5～11 片積木可以堆疊的積木洞數組合，但是從表五的數據可以推知，當積木數或總洞數越來越多時，需要花很多時間篩選。

(3) 從表六的紀錄發現，無法用這些篩選資料推演出 6～11 片積木各種總洞數時，可能堆疊的積木洞數組合。

(4) 從表二可知：陳鼎文和王俞臻(民 98)的研究所定義的 P_k 和 N_k 有著密切關係，但是 P_k 在其篩選過程中卻無任何貢獻。

(5) 因爲每根木棒的長度是 3 片積木的高度和，而且堆疊完成時不能有木棒凸出，所以當堆疊 x 片積木的總洞數爲 y 時 $P_{x-1}=P_x=0$；又從表四可以知道 $\sum_{k=1}^{x-2}P_k=\frac{y}{3}$，因此利用 P_k 來篩選積木的組合時，不只數字較少，數值也比較小，研究後我們找到下列的數字規則。

(三) 探討堆疊 5～12 片積木時與 P_k 有關的數字規則：

根據表一、表二和表四，探討堆疊 x 片積木的總洞數爲 y 時與 P_k 有關的數字規則如下，結果整理如表七。

1. 每根木棒的長度是 3 片積木的高度和，且堆疊完成時不能有木棒凸出，所以

(1) $P_{x-1}=P_x=0$。

(2) $\sum_{k=1}^{x}P_k=\sum_{k=1}^{x-2}P_k=\frac{y}{3}$。

2. 因爲 $N_1=P_1$、$N_x=P_{x-2}$ 而且圓柱積木中 1 個洞的積木只有 1 片，所以 P_1 和 P_{x-2} 不可以同時是 1，也就是 $P_1\times P_{x-2}\neq 1$。

3. 如果 $P_k\geq 5$，那麼 $N_k=P_{k-2}+P_{k-1}+P_k\geq 5$、$N_{k+1}=P_{k-1}+P_k+P_{k+1}\geq 5$、$N_{k+2}=P_k+P_{k+1}+P_{k+2}\geq 5$，但是 12 片積木中洞數大於或等於 5 的只有 2 片，所以 $P_k<5$。

4. 因爲 $N_1<N_2<N_3$、$N_1\neq 0$，所以 $P_1\neq 0,P_2\neq 0,P_3\neq 0$；因爲 $N_{x-2}>N_{x-1}>N_x$、$N_x\neq 0$，所以 $P_{x-4}\neq 0,P_{x-3}\neq 0,P_{x-2}\neq 0$，因此

(1) 當 $5\leq x\leq 8$ 時，$P_k\neq 0,k=1,2,\cdots,x-2$。

(2) 當 $9\leq x\leq 12$ 時，$P_k\neq 0,k=1,2,3,x-4,x-3,x-2$，且 $P_k\geq 0,4\leq k\leq x-5$。

5. 因爲 $N_2\neq 6,N_{x-1}\neq 6$，所以 $P_1+P_2<6$, $P_{x-3}+P_{x-2}<6$。

6. 由規則 F 知：若 $O_k=N_k=N_{k+1}$，則無法完成積木的堆疊：

(1) 如果 $O_k=N_k=N_{k+1}$，那麼 $P_{k-1}+P_k=P_{k-2}+P_{k-1}+P_k=P_{k-1}+P_k+P_{k+1}$，可以推

知$P_{k-2}=P_{k+1}=0$。

(2) 由前面的討論知道，當$9\le x\le 12$時，$0<P_k<5, k=1,2,3,x-4,x-3,x-2$，而且$0\le P_k<5$，$4\le k\le x-5$；只有當$x=12$且$P_4=P_7=0$時，$P_{k-2}=P_{k+1}=0$才會成立；所以當$x=12$且$P_4=P_7=0$時，無法完成積木的堆疊。

7. 由規則 E 可推知：

(1) 如果$(P_1,P_2,P_3,P_4)=(3,1,2,0)$或$(3,2,1,0)$，則無法完成積木的堆疊。

(2) 如果$(P_1,P_2,P_3,P_4,P_5)=(2,1,3,0,0)$或$(1,2,3,0,0)$，則無法完成積木的堆疊。

(3) 如果$(P_{x-5},P_{x-4},P_{x-3},P_{x-2})=(0,2,1,3)$或$(0,1,2,3)$，則無法完成積木的堆疊。

(4) 若$(P_{x-6},P_{x-5},P_{x-4},P_{x-3},P_{x-2})=(0,0,3,1,2)$或$(0,0,3,2,1)$，則無法完成積木的堆疊。

表七：x 片圓柱積木總洞數 y 時與P_k有關的數字規則

代號	規則內容
G	$P_{x-1}=P_x=0$，$\sum_{k=1}^{x}P_k=\sum_{k=1}^{x-2}P_k=\frac{y}{3}$。
H	1. 當$5\le x\le 8$時，$0<P_k<5, k=1,2,\cdots,x-2$。 2. 當$9\le x\le 12$時，$0<P_k<5, k=1,2,3,x-4,x-3,x-2$，$0\le P_k<5, 4\le k\le x-5$。 3. $P_1\times P_{x-2}\ne 1$。 4. $P_1+P_2<6, P_{x-3}+P_{x-2}<6$。
I	1. $(P_1,P_2,P_3,P_4)=(3,1,2,0)$或$(3,2,1,0)$時，就無法完成積木的堆疊。 2. $(P_1,P_2,P_3,P_4,P_5)=(2,1,3,0,0)$或$(1,2,3,0,0)$時，就無法完成積木的堆疊。 3. $(P_{x-5},P_{x-4},P_{x-3},P_{x-2})=(0,2,1,3)$或$(0,1,2,3)$時，就無法完成積木的堆疊。 4. $(P_{x-6},P_{x-5},P_{x-4},P_{x-3},P_{x-2})=(0,0,3,1,2)$或$(0,0,3,2,1)$時，就無法完成積木的堆疊。
J	當$x=12$且$P_4=P_7=0$時，無法完成積木的堆疊。

六、用堆疊積木時與P_k有關的數字規則，篩選從圓柱積木中取部分積木堆疊的可能組合：

從 12 片積木中取 x 片積木堆疊時，因爲$P_{x-1}=P_x=0$，所以篩選 x 片積木堆疊的P_k組合，只需篩選$(P_1\sim P_{x-2})$，爲了敘述方便，文章中也以$(P_1\sim P_{x-2})$表示 x 片積木堆疊的P_k組合。

(一) 從 12 片圓柱積木中取 5～6 片積木堆疊時，用表七的規則篩選可堆疊的P_k組合，結果如表八，並討論如下：

1. 從表八紅色箭號標示的部分發現：利用規則 G 和 H 篩選並扣除反序堆疊的$(P_1\sim P_{x-2})$後，當積木數不變而木棒數增加 1 時，只要依序分別在$P_1\sim P_{x-2}$其中一個數加 1，就可以推演出符合規則 G 和 H 的$(P_1'\sim P_{x-2}')$組合，推演方法與數字關係如表九。

2. 當積木爲 5～12 片且積木數固定不變時，都能用表九的方法類推，得到增加 1 根木棒時符合規則 G 和 H 的P_k組合；只是必須先找出堆疊 5～12 片積木且木棒數最少時，符合規則 G 和 H 的P_k組合。

表八：從 12 片圓柱積木中取 x 片積木堆疊時，可堆疊的 P_k 組合（x＝5 或 6）

x	$\sum_{k=1}^{x} P_k$	用規則 G、H 篩選 $(P_1 \sim P_{x-2})$	扣除反序堆疊後的 $(P_1 \sim P_{x-2})$	符合積木洞數	符合規則 I	符合規則 J	堆疊結果	可堆疊的組合數
5	4	(2,1,1)	(2,1,1)	○	○	○	(2A,3A,4B,2B,1A)	1
		(1,1,2)						
	5	(3,1,1)	(3,1,1)	○	○	○	(3B,4B,5A,2A,1A)	3
		(2,2,1)	(2,2,1)	○	○	○	(2B,4B,5A,3A,1A)	
		(2,1,2)	(2,1,2)	○	○	○	(2A,3A,5A,3B,2B)	
	6	(4,1,1)	(4,1,1)	○	○	○	(4B,5A,6A,2B,1A)	3
		(3,2,1)	(3,2,1)	○	×			
		(3,1,2)	(3,1,2)	○	×			
		(2,3,1)	(2,3,1)	○	○	○	(2C,5A,6A,4C,1A)	
		(2,2,2)	(2,2,2)	○	○	○	(2A,4C,6A,4A,2C)	
		(2,1,3)						
6	5	(2,1,1,1)	(2,1,1,1)	○	○	○	(2A,3A,4A,3B,2B,1A)	1
	6	(3,1,1,1)	(3,1,1,1)	○	○	○	(3C,4B,5A,3A,2A,1A)	4
		(2,2,1,1)	(2,2,1,1)	○	○	○	(2A,4B,5A,4C,2B,1A)	
		(2,1,2,1)	(2,1,2,1)	○	○	○	(2B,3B,5A,4A,3A,1A)	
		(2,1,1,2)	(2,1,1,2)	○	○	○	(2C,3B,4B,4A,3A,2B)	
	7	(4,1,1,1)	(4,1,1,1)	○	○	○	(4B,5A,6A,3C,2B,1A)	6
		(3,2,1,1)	(3,2,1,1)	○	○	○	(3B,5A,6A,4C,2C,1A)	
		(3,1,2,1)	(3,1,2,1)	○	○	○	(3A,4B,6A,4A,3B,1A)	
		(3,1,1,2)	(3,1,1,2)	○	○	○	(3B,4B,5A,4A,3A,2A)	
		(2,3,1,1)	(2,3,1,1)	×				
		(2,2,2,1)	(2,2,2,1)	○	○	○	(2A,4A,6A,5A,3A,1A)	
		(2,2,1,2)	(2,2,1,2)	×				
		(2,1,3,1)	(2,1,3,1)	○	○	○	(2A,3A,6A,5A,4A,1A)	
		(2,1,2,2)						
		(2,1,1,3)						
	8	(4,1,2,1)	(4,1,2,1)	×				2
		(4,1,1,2)	(4,1,1,2)	○	○	○	(4C,5A,6A,4A,3A,2A)	
		(3,2,2,1)	(3,2,2,1)	×				
		(3,2,1,2)	(3,2,1,2)	×				
		(3,1,3,1)	(3,1,3,1)	×				
		(3,1,2,2)	(3,1,2,2)	○	○	○	(3B,4B,6A,5A,4A,2B)	
		(3,1,1,3)	(3,1,1,3)	×				
		(2,3,2,1)	(2,3,2,1)	×				
		(2,3,1,2)	(2,3,1,2)	×				
		(2,2,3,1)	(2,2,3,1)	×				
		(2,2,2,2)	(2,2,2,2)	×				
		(2,2,1,3)						
		(2,1,4,1)	(2,1,4,1)	×				
		(2,1,3,2)						

表九：積木數 x 不變，以木棒數增加 1 的方法，推演符合規則 G 和 H 的 P_k 組合（x＝5 或 6）

x	木棒數	$(P_1' \sim P_{x-2}')$與$(P_1 \sim P_{x-2})$的關係	$(P_1' \sim P_{x-2}')$與$(P_1 \sim P_{x-2})$數值化結果的關係
5	5	（3,1,1）＝（2＋1,1,1）	311＝211＋100
		（2,2,1）＝（2,1＋1,1）	221＝211＋10
		（2,1,2）＝（2,1,1＋1）	212＝211＋1
	6	（4,1,1）＝（3＋1,1,1）	411＝311＋100
		（3,2,1）＝（2＋1,2,1）＝（3,1＋1,1）	321＝221＋100＝311＋10
		（3,1,2）＝（2＋1,1,2）＝（3,1,1＋1）	312＝212＋100＝311＋1
		（2,3,1）＝（2,2＋1,1）	231＝221＋10
		（2,2,2）＝（2,1＋1,2）＝（2,2,1＋1）	222＝212＋10＝221＋1
		（2,1,3）＝（2,1,2＋1）	213＝212＋1
6	6	（3,1,1,1）＝（2＋1,1,1,1）	3111＝2111＋1000
		（2,2,1,1）＝（2,1＋1,1,1）	2211＝2111＋100
		（2,1,2,1）＝（2,1,1＋1,1）	2121＝2111＋10
		（2,1,1,2）＝（2,1,1,1＋1）	2112＝2111＋1
	7	（4,1,1,1）＝（3＋1,1,1,1）	4111＝3111＋1000
		（3,2,1,1）＝（2＋1,2,1,1）＝（3,1＋1,1,1）	3211＝2211＋1000＝3111＋100
		（3,1,2,1）＝（2＋1,1,2,1）＝（3,1,1＋1,1）	3121＝2121＋1000＝3111＋10
		（3,1,1,2）＝（2＋1,1,1,2）＝（3,1,1,1＋1）	3112＝2112＋1000＝3111＋1
		（2,3,1,1）＝（2,2＋1,1,1）	2311＝2211＋100
		（2,2,2,1）＝（2,1＋1,2,1）＝（2,2,1＋1,1）	2221＝2121＋100＝2211＋10
		（2,2,1,2）＝（2,1＋1,1,2）＝（2,2,1,1＋1）	2212＝2112＋100＝2211＋1
		（2,1,3,1）＝（2,1,2＋1,1）	2131＝2121＋10
		（2,1,2,2）＝（2,1,1＋1,2）＝（2,1,2,1＋1）	2122＝2112＋10＝2121＋1
		（2,1,1,3）＝（2,1,1,2＋1）	2113＝2112＋1
	8	（4,1,2,1）＝（3＋1,1,2,1）＝（4,1,1＋1,1）	4121＝3121＋1000＝4111＋10
		（4,1,1,2）＝（3＋1,1,1,2）＝（4,1,1,1＋1）	4112＝3112＋1000＝4111＋1
		（3,2,2,1）＝（2＋1,2,2,1）＝（3,1＋1,2,1）	3221＝2221＋1000＝3121＋100
		（3,2,1,2）＝（2＋1,2,1,2）＝（3,1＋1,1,2）	3212＝2212＋1000＝3112＋100
		（3,1,3,1）＝（2＋1,1,3,1）＝（3,1,2＋1,1）	3131＝2131＋1000＝3121＋10
		（3,1,2,2）＝（3,1,1＋1,2）＝（3,1,2,1＋1）	3122＝3112＋1000＝3112＋10
		（3,1,1,3）＝（2＋1,1,1,3）＝（3,1,1,2＋1）	3113＝2113＋1000＝3112＋1
		（2,3,2,1）＝（2,2＋1,2,1）＝（2,3,1＋1,1）	2321＝2221＋100＝2311＋10
		（2,3,1,2）＝（2,2＋1,1,2）＝（2,3,1,1＋1）	2312＝2212＋100＝2311＋1
		（2,2,3,1）＝（2,1＋1,3,1）＝（2,2,2＋1,1）	2231＝2131＋100＝2221＋10
		（2,2,2,2）＝（2,2,1＋1,2）＝（2,2,2,1＋1）	2222＝2212＋10
		（2,2,1,3）＝（2,1＋1,1,3）＝（2,2,1,2＋1）	2213＝2113＋100＝2212＋1
		（2,1,4,1）＝（2,1,3＋1,1）	2141＝2131＋10
		（2,1,3,2）＝（2,1,3,1＋1）	2132＝2131＋1

老師指導我們用符號表示，當積木數不變，只增加 1 根木棒時$(P_1 \sim P_{x-2})$與$(P_1' \sim P_{x-2}')$數值化結果的關係如下：

$$P_1' \times 10^{x-3} + P_2' \times 10^{x-4} + \cdots + P_{x-3}' \times 10 + P_{x-2}' = P_1 \times 10^{x-3} + P_2 \times 10^{x-4} + \cdots + P_{x-3} \times 10 + P_{x-2} + 10^{x-2-k}$$

其中 $k = 1,2,3,\cdots,x-2$ 。

(二) 怎麼篩選堆疊 5～12 片積木且木棒數最少時，符合規則 G 和 H 的 P_k 組合？

1. 我們先利用表七的規則，找出 5～9 片積木，當 $\sum_{k=1}^{5} P_k = 4$ 、 $\sum_{k=1}^{6} P_k = 5$ 、 $\sum_{k=1}^{7} P_k = 6$ 、 $\sum_{k=1}^{8} P_k = 7$ 和 $\sum_{k=1}^{9} P_k = 8$ 時可堆疊的 P_k 組合，並找出其推演的數據來源，結果如表十。

表十：篩選 5～9 片積木且木棒數最少時，可堆疊的 P_k 組合

積木數	木棒數	用規則 G、H 篩選 P_k 組合	扣除反序堆疊後的 P_k 組合	符合積木洞數	符合規則 I	符合規則 J	可堆疊的組合數
5	4	(2,1,1)	(2,1,1)	○	○	○	1
6	5	(2,1,1,1)	(2,1,1,1)	○	○	○	1
7	6	(2,1,1,1,1)	(2,1,1,1,1)	○	○	○	1
8	7	(2,1,1,1,1,1)	(2,1,1,1,1,1)	×			0
	8	(3,1,1,1,1,1)	(3,1,1,1,1,1)	×			3
		(2,2,1,1,1,1)	(2,2,1,1,1,1)	○	○	○	
		(2,1,2,1,1,1)	(2,1,2,1,1,1)	○	○	○	
		(2,1,1,2,1,1)	(2,1,1,2,1,1)	×			
		(2,1,1,1,2,1)	(2,1,1,1,2,1)	○	○	○	
		(2,1,1,1,1,2)	(2,1,1,1,1,2)	×			
9	8	(2,1,1,1,1,1,1)	(2,1,1,1,1,1,1)	×			2
		(3,1,1,0,1,1,1)	(3,1,1,0,1,1,1)	×			
		(2,2,1,0,1,1,1)	(2,2,1,0,1,1,1)	×			
		(2,1,2,0,1,1,1)	(2,1,2,0,1,1,1)	×			
		(2,1,1,0,2,1,1)	(2,1,1,0,2,1,1)	○	○	○	
		(2,1,1,0,1,2,1)	(2,1,1,0,1,2,1)	○	○	○	
		(2,1,1,0,1,1,2)	(2,1,1,0,1,1,2)	×			

2. 從表十綠色箭號標示的部分發現：利用規則 G 和 H 篩選並扣除反序堆疊的 P_k 組合後，當積木數和木棒數同時增加 1 時，只要依序分別在 $P_1 \sim P_{x-2}$ 之前或 P_{x-2} 之後增加一個數字 1，就可以推演出符合規則 G 和 H 的 P_k 組合，推演方法整理於表十一，而且此方法於 5～12 片積木堆疊時都可以推演。

表十一：$\sum_{k=1}^{5} P_k = 4$、$\sum_{k=1}^{6} P_k = 5$、$\sum_{k=1}^{7} P_k = 6$、$\sum_{k=1}^{8} P_k = 7$ 和 $\sum_{k=1}^{9} P_k = 8$ 時 P_k 組合的推演方法說明

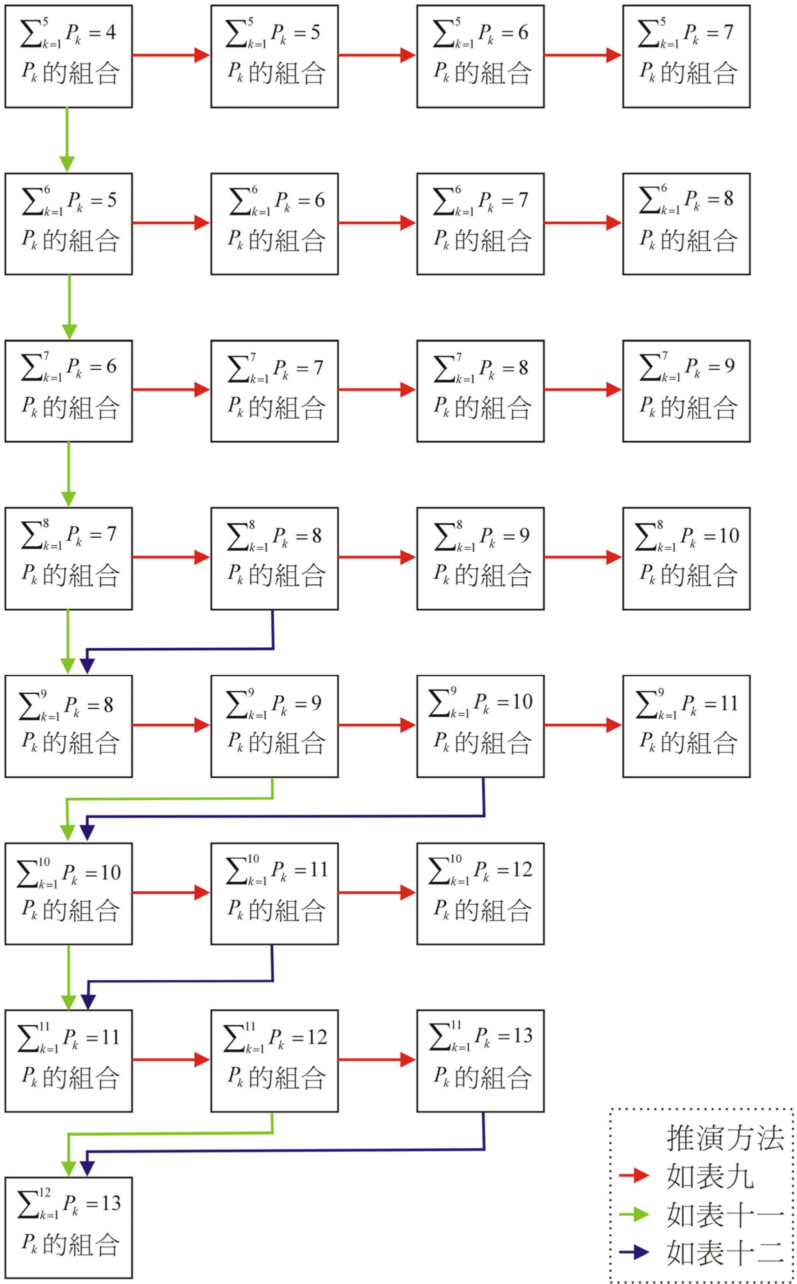
方法說明	$\sum_{k=1}^{5} P_k = 4 \rightarrow \sum_{k=1}^{6} P_k = 5$	$\sum_{k=1}^{6} P_k = 5 \rightarrow \sum_{k=1}^{7} P_k = 6$	$\sum_{k=1}^{7} P_k = 6 \rightarrow \sum_{k=1}^{8} P_k = 7$	$\sum_{k=1}^{8} P_k = 7 \rightarrow \sum_{k=1}^{9} P_k = 8$
推演來源	(2,1,1)	(2,1,1,1)	(2,1,1,1,1)	(2,1,1,1,1,1)
推演方法	(1,2,1,1) (2,1,1,1) (2,1,1,1) (2,1,1,1)	(1,2,1,1,1) (2,1,1,1,1) (2,1,1,1,1) (2,1,1,1,1) (2,1,1,1,1)	(1,2,1,1,1,1) (2,1,1,1,1,1) (2,1,1,1,1,1) (2,1,1,1,1,1) (2,1,1,1,1,1) (2,1,1,1,1,1)	(1,2,1,1,1,1,1) (2,1,1,1,1,1,1) (2,1,1,1,1,1,1) (2,1,1,1,1,1,1) (2,1,1,1,1,1,1) (2,1,1,1,1,1,1) (2,1,1,1,1,1,1)
推演結果	(2,1,1,1)	(2,1,1,1,1)	(2,1,1,1,1,1)	(2,1,1,1,1,1,1)

3. 從表十藍色箭號標示的部分發現：當 $\sum_{k=1}^{9} P_k = 8$ 時，篩選符合規則 G 和 H 的 P_k 組合，不只要把 $\sum_{k=1}^{8} P_k = 7$ 時，符合規則 G 和 H 並扣除反序堆疊後的 P_k 組合，用上述積木數和木棒數同時增加 1 的方法推演；還要把 $\sum_{k=1}^{8} P_k = 8$ 時，符合規則 G 和 H 並扣除反序堆疊後的 P_k 組合，只把積木數增加 1，而不增加木棒數的方法推演，也就是在 P_3 的後面增加一個數字 0。

4. 又根據規則 H 知道，堆疊 9 片積木時，P_4 可能爲 0；堆疊 10 片積木時，P_4、P_5 可能爲 0；當堆疊 11 片積木時，P_4、P_5、P_6 可能爲 0；而堆疊 12 片積木時，P_4、P_5、P_6、P_7 可能爲 0。所以當積木爲 9～12 片時，符合規則 G 和 H 的 P_k 組合的推演方法如表十二所列。

表十二：積木數爲 9～12，以積木數增加 1 而不增加木棒數的方法，推演符合規則 G 和 H 的 P_k 組合

積木數	P_k 組合的推演方法
9	$(P_1',P_2',P_3',P_4',P_5',P_6',P_7')=(P_1,P_2,P_3,0,P_4,P_5,P_6)$
10	$(P_1',P_2',P_3',P_4',P_5',P_6',P_7',P_8')=(P_1,P_2,P_3,0,P_4,P_5,P_6,P_7)$
	$(P_1',P_2',P_3',P_4',P_5',P_6',P_7',P_8')=(P_1,P_2,P_3,P_4,0,P_5,P_6,P_7)$
11	$(P_1',P_2',P_3',P_4',P_5',P_6',P_7',P_8',P_9')=(P_1,P_2,P_3,0,P_4,P_5,P_6,P_7,P_8)$
	$(P_1',P_2',P_3',P_4',P_5',P_6',P_7',P_8',P_9')=(P_1,P_2,P_3,P_4,0,P_5,P_6,P_7,P_8)$
	$(P_1',P_2',P_3',P_4',P_5',P_6',P_7',P_8',P_9')=(P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,0,P_6,P_7,P_8)$
12	$(P_1',P_2',P_3',P_4',P_5',P_6',P_7',P_8',P_9',P_{10}')=(P_1,P_2,P_3,0,P_4,P_5,P_6,P_7,P_8,P_9)$
	$(P_1',P_2',P_3',P_4',P_5',P_6',P_7',P_8',P_9',P_{10}')=(P_1,P_2,P_3,P_4,0,P_5,P_6,P_7,P_8,P_9)$
	$(P_1',P_2',P_3',P_4',P_5',P_6',P_7',P_8',P_9',P_{10}')=(P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,0,P_6,P_7,P_8,P_9)$
	$(P_1',P_2',P_3',P_4',P_5',P_6',P_7',P_8',P_9',P_{10}')=(P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6,0,P_7,P_8,P_9)$



圖四：以規則 G 和 H 篩選 5～12 片積木 P_k 組合的推演流程圖及推演方法

5. 當$9 \le x \le 12$，用規則 G 和 H 篩選$\sum_{k=1}^{x} P_k = z$時的P_k組合，除了要用$\sum_{k=1}^{x-1} P_k = z-1$時，符合規則 G 和 H 並扣除反序堆疊後的$P_k$組合，藉由表十一中積木數和木棒數同時增加 1 的方法推演外；還要用$\sum_{k=1}^{x-1} P_k = z$時，符合規則 G 和 H 並扣除反序堆疊後的P_k組合，藉由表十二中積木數增加 1 而木棒數不變的方法推演。

6. 歸納出篩選 5～12 片積木符合規則 G 和 H 的P_k組合時，推演流程圖及方法如前頁圖四，其中$\sum_{k=1}^{11} P_k = 13$時雖不能堆疊，但是能用於推演 12 片積木的組合。

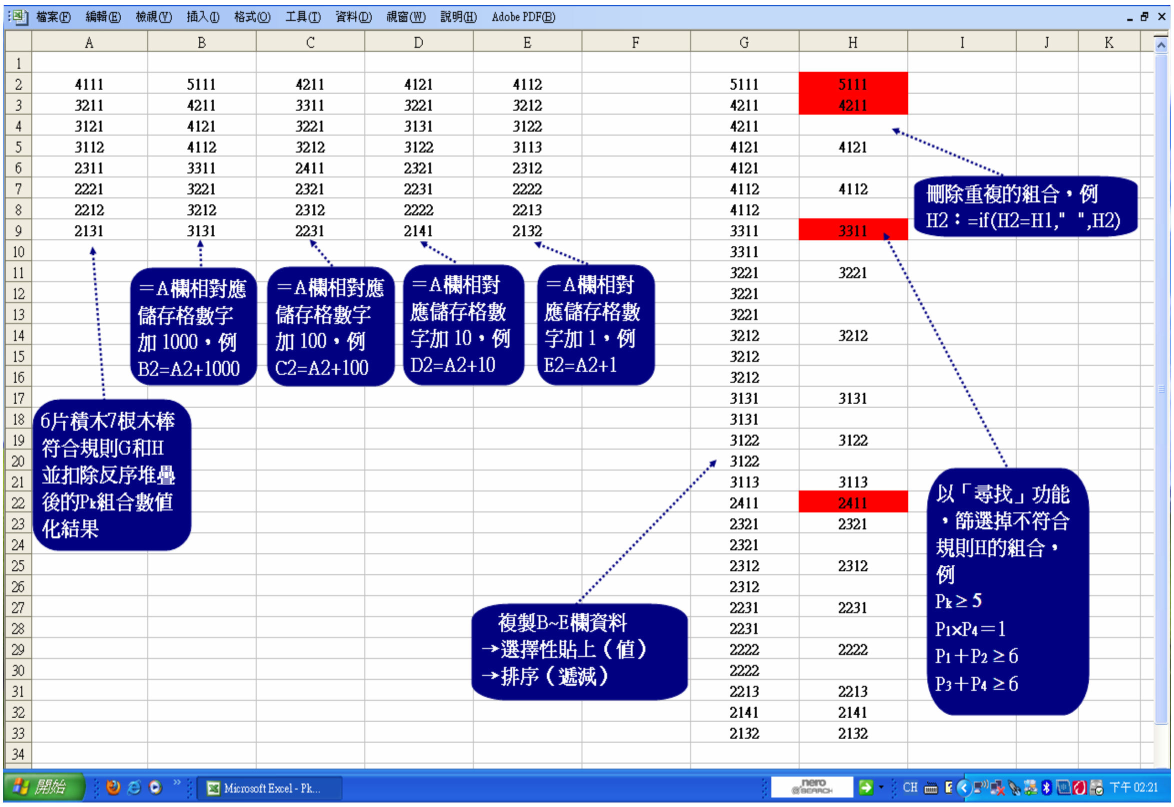
七、如何利用 Excel 試算表推演及篩選符合規則 G 和 H 的P_k組合？

用P_k的規則能從已經篩選的資料，以積木數不變而木棒數加 1、積木數和木棒數同時加 1、積木數加 1 而木棒數不變等方法推演 5～12 片積木堆疊可能的P_k組合，也可以篩選掉大部分不可堆疊的P_k組合；但是如果以手寫方式進行推演和篩選工作，不但費時且可能有所遺漏。想起以前常看老師用 Excel 試算表統計成績，所以向老師詢問如何利用 Excel 試算表進行這些推演和篩選的工作？方法說明如下。

(一) 以積木數不變，木棒數增加 1 的方法推演符合規則 G 和 H 的P_k組合：

1. 由表八和表九得知當積木數不變，而增加 1 根木棒時，只要依序分別在P_k組合其中一個數加 1，就可以推演出符合規則 G 和 H 的P_k組合。

2. 圖五是以$\sum_{k=1}^{6} P_k = 7$時符合規則 G 和 H 並扣除反序堆疊後的P_k組合，推演$\sum_{k=1}^{6} P_k = 8$時符合規則 G 和 H 的P_k組合的過程。其中 H 欄空白儲存格所對應的 G 欄數值，就是多餘的重複數值，紅色儲存格為不符合規則 H 的組合。

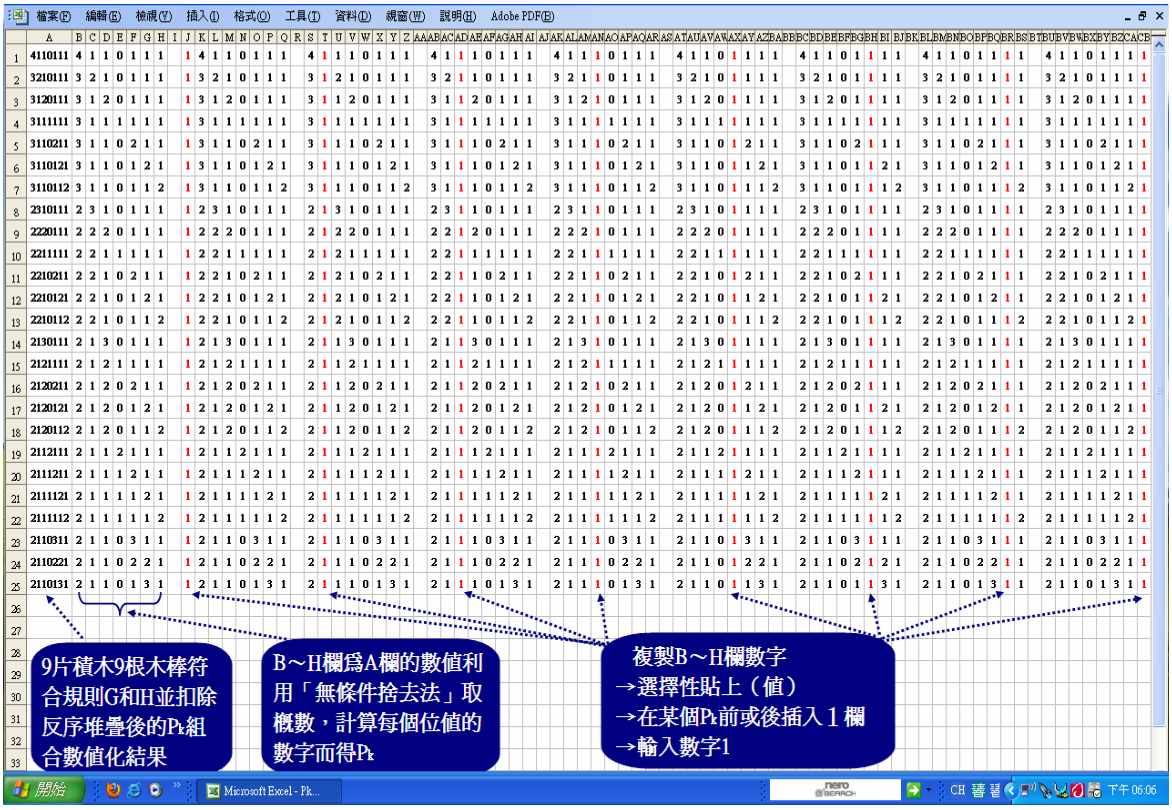


圖五：積木數不變，木棒數增加 1 時，推演符合規則 G 和 H 的P_k組合過程圖

(二) 以積木數和木棒數同時增加 1 的方法推演符合規則 G 和 H 的 P_k 組合：

1. 由表十和表十一得知當積木數和木棒數同時增加 1 時，只要依序分別在 P_k 組合其中一個數之前或最後一個數之後增加一個數字 1，就可以推演出符合規則 G 和 H 的 P_k 組合。

2. 圖六是以 $\sum_{k=1}^{9} P_k = 9$ 時符合規則 G 和 H 並扣除反序堆疊後的 P_k 組合，推演 $\sum_{k=1}^{10} P_k = 10$ 時符合規則 G 和 H 的 P_k 組合的過程。其中紅色數字 1 所在位置即表示在其相對應的位置增加一片積木，並且置放 1 根木棒。



圖六：積木數和木棒數同時增加 1 時，推演符合規則 G 和 H 的 P_k 組合過程圖

(三) 以積木數增加 1 而木棒數不變的方法推演符合規則 G 和 H 的 P_k 組合：

1. 由表十和表十二得知當積木數增加 1 而木棒數不變時，只要依序分別在 P_k 組合可以爲 0 的位置增加一個數字 0，就可以推演出符合規則 G 和 H 的 P_k 組合。

2. 圖七是以 $\sum_{k=1}^{9} P_k = 10$ 時符合規則 G 和 H 並扣除反序堆疊後的 P_k 組合，推演 $\sum_{k=1}^{10} P_k = 10$ 時符合規則 G 和 H 的 P_k 組合的結果。其中紅色數字 0 所在位置即表示於相對應的位置增加一片積木，並且未增加置放的木棒。

(四) 篩選掉反序堆疊、不符合積木洞數及規則 I 和 J 的 P_k 組合：

圓柱積木中 1、5、6 個洞的積木各 1 片，2～4 個洞的積木各 3 片，如果 P_k 組合不符合這些限制時，簡稱爲不符合積木洞數。

1. 以 $\sum_{k=1}^{6} P_k = 8$ 時符合規則 G 和 H 的 P_k 組合（圖五 H 欄）爲例，依序篩選掉反序堆疊、不符合積木洞數及不符合規則 I 和 J 的 P_k 組合，篩選過程所使用的

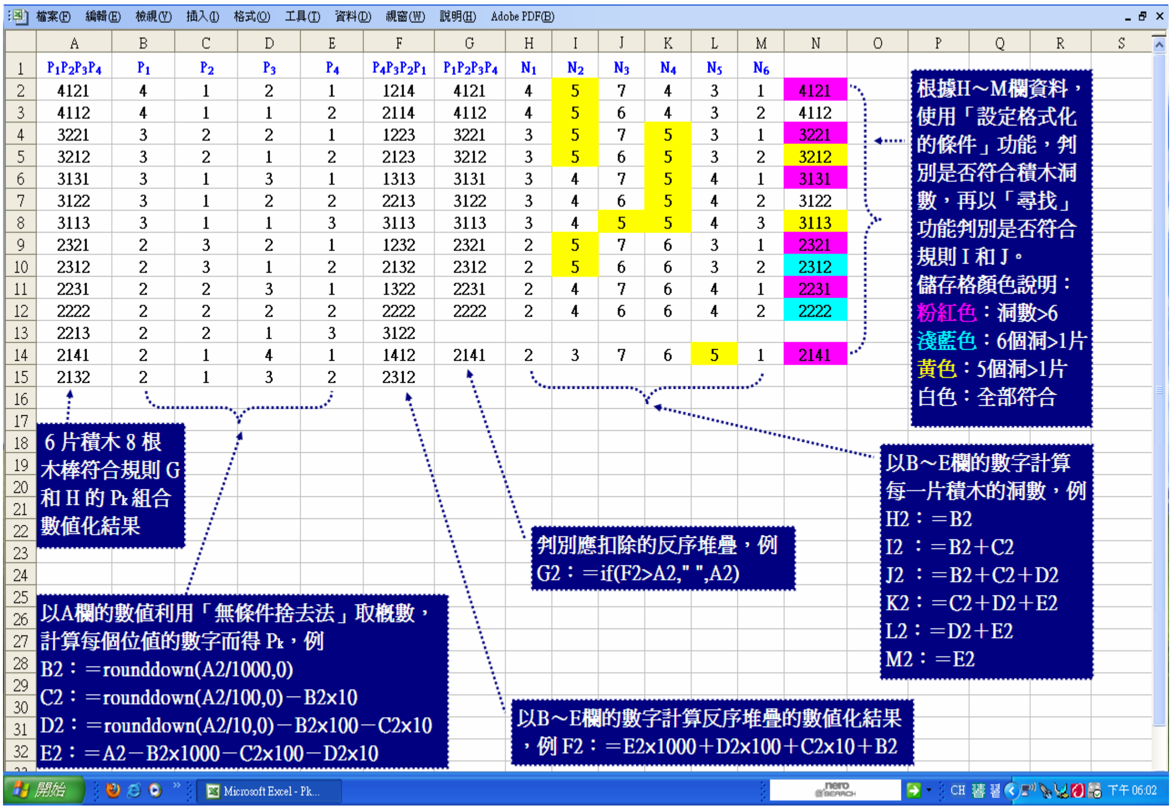
Excel 功能、公式及數值處理方式說明如圖八。

2. 圖八中 G_{13} 和 G_{15}，表示刪除 2 個反序堆疊的組合，數值如 A_{13} 和 A_{15} 儲存格。

3. 圖八中 N 欄白色儲存格內的 2 組數字，就是 6 片積木 8 根木棒堆疊時，符合所有 P_k 規則和積木洞數的組合。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
53	2121112	2	1	2	1	1	1	2		2	1	2	0	1	1	1	2		2	1	2	1	0	1	1	2
54	2120311	2	1	2	0	3	1	1		2	1	2	0	0	3	1	1		2	1	2	0	0	3	1	1
55	2120221	2	1	2	0	2	2	1		2	1	2	0	0	2	2	1		2	1	2	0	0	2	2	1
56	2120212	2	1	2	0	2	1	2		2	1	2	0	0	2	1	2		2	1	2	0	0	2	1	2
57	2120131	2	1	2	0	1	3	1		2	1	2	0	0	1	3	1		2	1	2	0	0	1	3	1
58	2113111	2	1	1	3	1	1	1		2	1	1	0	3	1	1	1		2	1	1	3	0	1	1	1
59	2112211	2	1	1	2	2	1	1		2	1	1	0	2	2	1	1		2	1	1	2	0	2	1	1
60	2112121	2	1	1	2	1	2	1		2	1	1	0	2	1	2	1		2	1	1	2	0	1	2	1
61	2112112	2	1	1	2	1	1	2		2	1	1	0	2	1	1	2		2	1	1	2	0	1	1	2
62	2111311	2	1	1	1	3	1	1		2	1	1	0	1	3	1	1		2	1	1	1	0	3	1	1
63	2111221	2	1	1	1	2	2	1		2	1	1	0	1	2	2	1		2	1	1	1	0	2	2	1
64	2111131	2	1	1	1	1	3	1		2	1	1	0	1	1	3	1		2	1	1	1	0	1	3	1
65	2110411	2	1	1	0	4	1	1		2	1	1	0	0	4	1	1		2	1	1	0	0	4	1	1
66	2110321	2	1	1	0	3	2	1		2	1	1	0	0	3	2	1		2	1	1	0	0	3	2	1
67	2110231	2	1	1	0	2	3	1		2	1	1	0	0	2	3	1		2	1	1	0	0	2	3	1
68	2110141	2	1	1	0	1	4	1		2	1	1	0	0	1	4	1		2	1	1	0	0	1	4	1

圖七：積木數增加 1 而木棒數不變時，推演符合規則 G 和 H 的 P_k 組合過程圖



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	$P_1P_2P_3P_4$	P_1	P_2	P_3	P_4	$P_4P_3P_2P_1$	$P_1P_2P_3P_4$	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	
2	4121	4	1	2	1	1214	4121	4	5	7	4	3	1	4121
3	4112	4	1	1	2	2114	4112	4	5	6	4	3	2	4112
4	3221	3	2	2	1	1223	3221	3	5	7	5	3	1	3221
5	3212	3	2	1	2	2123	3212	3	5	6	5	3	2	3212
6	3131	3	1	3	1	1313	3131	3	4	7	5	4	1	3131
7	3122	3	1	2	2	2213	3122	3	4	6	5	4	2	3122
8	3113	3	1	1	3	3113	3113	3	4	5	5	4	3	3113
9	2321	2	3	2	1	1232	2321	2	5	7	6	3	1	2321
10	2312	2	3	1	2	2132	2312	2	5	6	6	3	2	2312
11	2231	2	2	3	1	1322	2231	2	4	7	6	4	1	2231
12	2222	2	2	2	2	2222	2222	2	4	6	6	4	2	2222
13	2213	2	2	1	3	3122								
14	2141	2	1	4	1	1412	2141	2	3	7	6	5	1	2141
15	2132	2	1	3	2	2312								

圖八：篩選掉反序堆疊、不符合積木洞數及規則 I 和 J 的 P_k 組合過程圖

4. 如果把圖六和圖七中 $\sum_{k=1}^{10} P_k = 10$ 時，推演的 $(P_1 \sim P_8)$ 數值化後整理於同一欄，再用圖五和圖八的方法依序篩選掉重複、不符合規則 G 和 H、反序堆疊、不符合積木洞數及不符合規則 I 和 J 的組合後，就是 $\sum_{k=1}^{10} P_k = 10$ 時，符合所有 P_k 規則和積木洞數的組合。

5. 根據 P_k 組合能算出 N_k 組合，但是直接堆疊時，仍會遇到 2～4 個洞的積木形狀挑選的難題，所以我們設計了間接堆疊工具，以方便挑選積木形狀的組合。

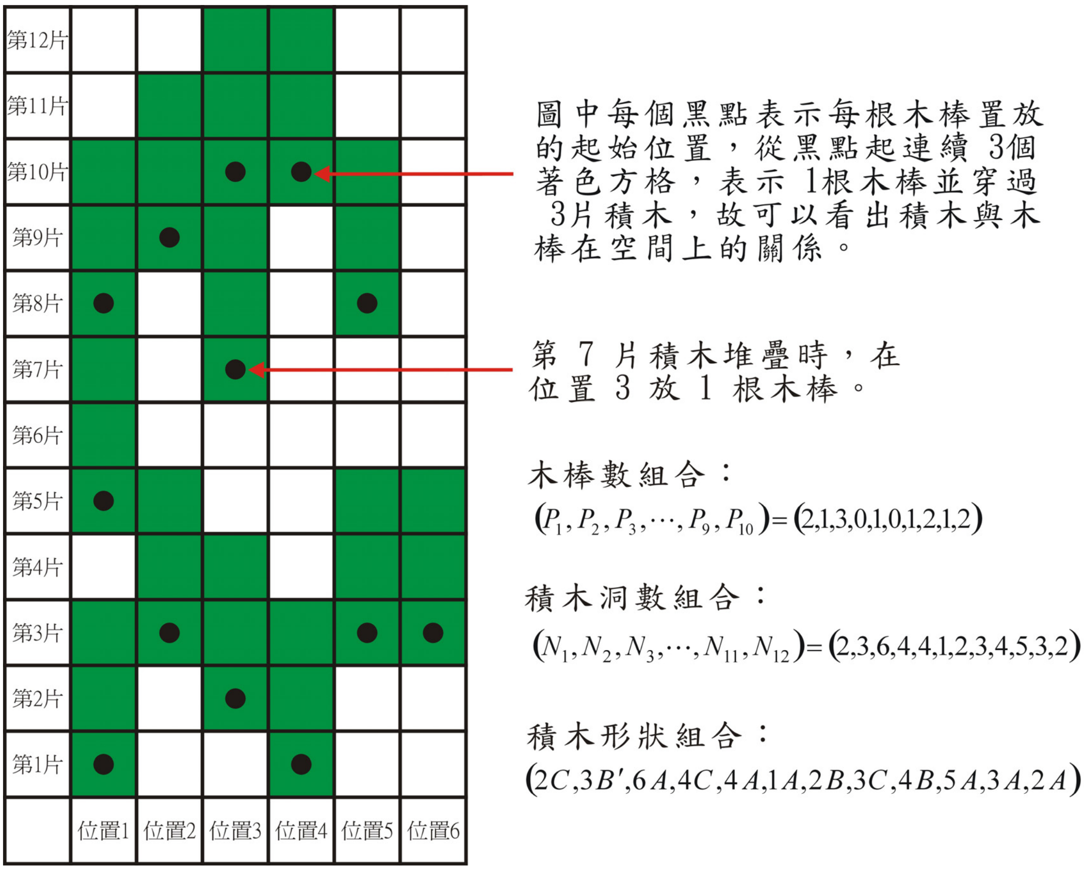
八、設計間接堆疊工具，篩選部分圓柱積木可以堆疊的組合，並挑選積木的形狀：

由於每根木棒的長度是 3 片積木的高度和，所以在堆疊過程中調整 1 片積木的形狀時，常常引起多片積木形狀的連鎖變化，而難以堆疊成功。另外在圓柱積木中，木棒和積木在立體空間上的關係難以了解，即使是陳鼎文和王俞臻（民 98）所提出用 4x3 棋盤調整積木位置後，再實際堆疊積木，仍無法完全排除這些困難，因此提出下列方法設計堆疊工具。

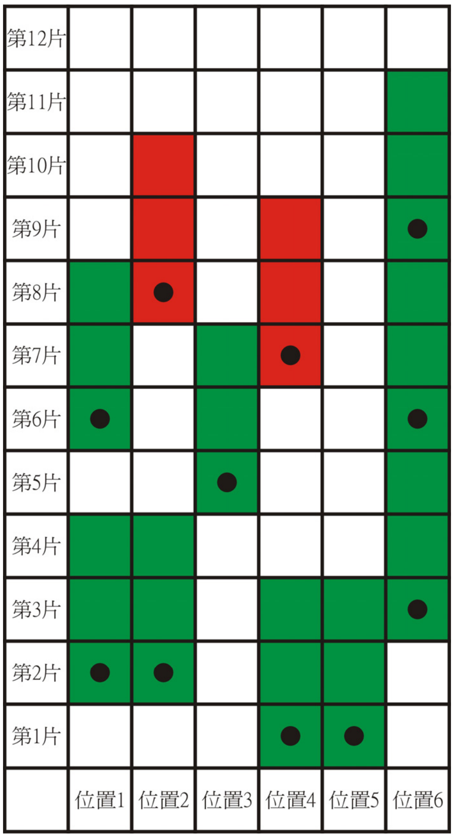
(一) 圓柱積木側面展開圖堆疊工具：

1. 圓柱積木的側面展開圖是長方形，如果把 12 片積木和木棒的相對位置標示於側面展開圖，結果如圖九。

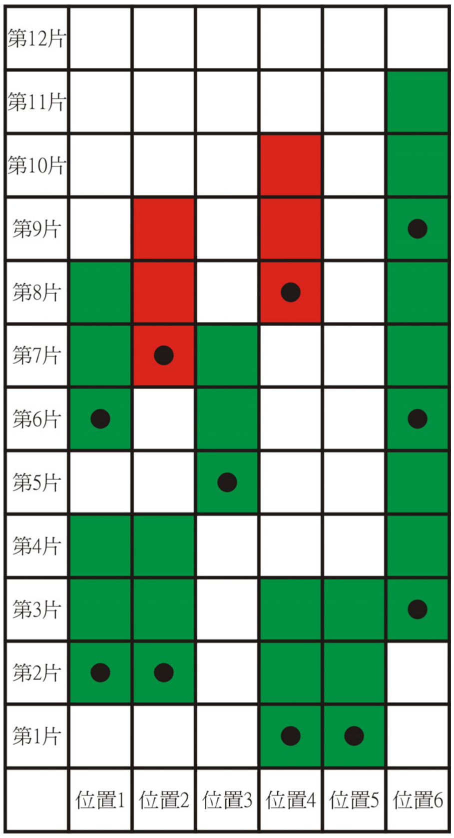
2. 為了操作方便，把圓柱積木側面展開圖貼於鐵板上，將軟性磁鐵裁成圖九中 3 個方格大小以代表木棒，並於一端畫上黑點，而成為自製的堆疊工具



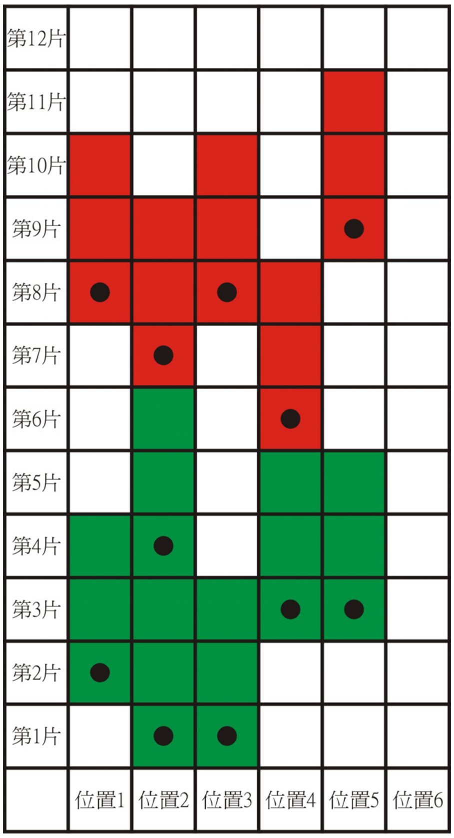
圖九：圓柱積木側面展開圖圖說 1



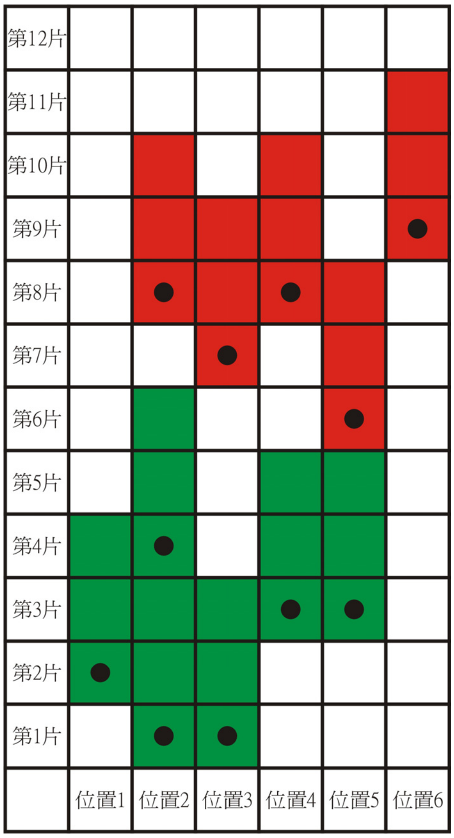
圖十：圓柱積木側面展開圖圖說 2



圖十一：圓柱積木側面展開圖圖說 3



圖十二：圓柱積木側面展開圖圖說 4



圖十三：圓柱積木側面展開圖圖說 5

3. 圓柱積木側面展開圖堆疊工具使用說明：

(1) 操作時是根據篩選出的$(P_1 \sim P_{x-2})$組合，依序將P_k根木棒（即軟性磁鐵）放置在第 k 片積木，而利用木棒置放位置的選擇，調整積木的形狀；只要沒

有出現相同形狀的積木，就是 1 組對應於$(P_1 \sim P_{x-2})$的堆疊組合。

(2) 前頁圖十中，因爲第 2 片和第 7 片積木的形狀都是 4C，所以不符合；但是如果將紅色部分的 2 根木棒位置上下互換而成爲圖十一，就可以完成堆疊。

(3) 前頁圖十二的第 6 片和第 7 片積木的形狀都是 2B，所以不符合；但是如果將紅色部分的 5 根木棒位置向右移動而成爲圖十三，就可以完成堆疊。

(二) 以規則 G～J 篩選 x 片積木堆疊的 P_k 組合，並找出可堆疊的積木排列：

1. 依照圖四中 P_k 組合的推演流程圖知道，只要先找到$\sum_{k=1}^{5} P_k = 4$時$(P_1 \sim P_3)$的組合，就可以用 Excel 依照本研究提出的規則及方法，快速篩選出 x 片積木堆疊時，符合規則 G～J 和積木洞數的$(P_1 \sim P_{x-2})$組合，篩選過程中$(P_1 \sim P_{x-2})$組合數量變化統計結果如表十三。

2. 最後用圓柱積木側面展開圖堆疊工具進行間接堆疊，合計找出 5～12 片積木可堆疊的$(P_1 \sim P_{x-2})$組合共有 344 組，每組各列舉一種可堆疊的積木排列，結果詳如附錄一～八。

表十三：規則 G～J 篩選 x 片積木堆疊的$(P_1 \sim P_{x-2})$組合過程中數量變化統計表

X	$\sum_{k=1}^{x} p_k$	用規則 G、H 篩選$(P_1 \sim P_{x-2})$的組合			反序堆疊	不符積木洞數	不符合規則 I	不符合規則 J	無法堆疊	可以堆疊
		符合規則 G 且 $P_1 \times P_{x-2} \neq 1$	$P_k = 5$	$P_1 + P_2 \geq 6$ 或 $P_{x-3} + P_{x-2} \geq 6$						
5	4	2	0	0	1	0	0	0	0	1
	5	3	0	0	0	0	0	0	0	3
	6	6	0	0	1	0	2	0	0	3
	7	9	1	3	1	4	0	0	0	0
6	5	1	0	0	0	0	0	0	0	1
	6	4	0	0	0	0	0	0	0	4
	7	10	0	0	2	2	0	0	0	6
	8	18	1	3	2	10	0	0	0	2
7	6	1	0	0	0	0	0	0	0	1
	7	5	0	0	0	0	0	0	0	5
	8	15	0	0	2	6	0	0	0	7
	9	33	1	3	4	21	0	0	0	4
8	7	1	0	0	0	1	0	0	0	0
	8	6	0	0	0	3	0	0	0	3
	9	21	0	0	3	11	0	0	0	7
	10	53	1	3	6	37	0	0	0	6
9	8	7	0	0	0	5	0	0	0	2
	9	28	0	0	3	12	1	0	0	12
	10	81	1	3	9	51	2	0	0	15
	11	193	8	16	27	132	2	0	0	8
10	10	105	0	0	5	82	4	0	1	13
	11	309	9	19	43	197	10	0	1	30
	12	690	42	69	91	475	1	0	1	11
11	11	405	0	0	26	336	0	0	1	42
	12	1160	53	91	150	809	5	0	0	52
	13	2521	200	282	340	1699	0	0	0	0
12	13	3400	0	0	294	2944	25	23	8	106
合 計		9087	317	492	1010	6837	52	23	12	344

伍、研究結果

一、研究發現詳如研究過程敘述，分項條列如下：

(一) 從圓柱積木中取 5～11 片也能堆疊，選取的積木總洞數須符合表三所列的條件。

(二) 找到篩選 5～11 片積木堆疊組合時，積木洞數的數字規則，如表四所列。

(三) 發現第 k 片積木堆疊時置放的木棒數 P_k 的規則，詳如表七。

(四) 用 P_k 的規則能從 5 片積木 4 根木棒的篩選資料，用下列三種方法陸續推演出 5～12 片積木堆疊可能的 P_k 組合，推演流程圖如圖四。

1. 以積木數不變而木棒數加 1，方法詳如表九和圖五。
2. 積木數和木棒數同時加 1，方法詳如表十一和圖六。
3. 積木數加 1 而木棒數不變，方法詳如表十二和圖七。

(五) 在 Excel 試算表中，用 P_k 的規則和圓柱積木的洞數能快速推演及篩選掉大部分不可堆疊的 P_k 組合，詳如圖五～八。

(六) 運用自行設計的圓柱積木側面展開圖堆疊工具，能找出可堆疊的 P_k 組合，也能挑選出積木的形狀。

二、本研究與「數」解圓柱積木（陳鼎文和王俞臻，民 98）比較：

(一) 本研究找到篩選 5～11 片積木洞數組合的規則 A～F 與「數」解圓柱積木篩選 12 片積木洞數組合的規則 1～6 相似。

(二) 用積木洞數的規則篩選出 5～11 片積木可能的洞數組合後，必須先挑選其中 2～4 個洞的積木形狀，再把積木調整成可堆疊的排列。而挑選積木形狀及調整積木的排列需花費很多時間。

(三) 本研究發現第 k 片積木堆疊時置放的木棒數 P_k 的規則，用此規則能根據已篩選的資料，推演和篩選 5～12 片積木堆疊可能的 P_k 組合，其中 12 片積木可堆疊的組合與「數」解圓柱積木所發現的組合扣除反序堆疊後都相同。

(四) 依照本研究篩選出可能的 P_k 組合，運用圓柱積木側面展開圖堆疊工具間接堆疊後，就可以同時挑選出積木的形狀並把積木調整成可堆疊的排列，改進了以積木洞數規則篩選的缺點。

陸、討論

一、研究過程中把 P_k 組合數值化的目的是什麼？

(一) 因爲用圖五～七中三種方法推演 P_k 的組合時，會產生很多重複的組合，把數值化的結果排序後，可以快速刪除重複的組合。

(二) 另外圖八中判別應扣除的反序堆疊組合時，利用數值化的結果比大小，就可以篩選掉反序堆疊的組合。

二、用 P_k 的規則和積木洞數的規則篩選積木的組合，兩種方法的主要差別是什麼？

(一) 用 P_k 的規則能根據已篩選的資料，推演、篩選出 5～12 片積木堆疊可能的 P_k 組合。用積木洞數的規則篩選，當積木數或總洞數改變時都要重新篩選，無法用已篩選的資料推演。

(二) 而且比較表五和表十三得知，用 P_k 的規則篩選時篩選的範圍較小，提高了篩選的效率。例如：從 12 片積木中取 11 片積木的洞數組合有 739200 種，其中符合積木洞數規則 A 的組合有 15936 種；而符合 P_k 的規則 G 且 $P_1 \times P_{x-2} \neq 1$ 的組合只有 1565 種。

三、圓柱積木側面展開圖堆疊工具和直接堆疊積木的方法主要差別是什麼？

(一) 以直接堆疊檢驗積木洞數組合能不能堆疊時，需花很多時間試驗積木的形狀組合。用圓柱積木側面展開圖堆疊工具則是調整木棒（軟性磁鐵）的位置，使每片積木的形狀都不同時，便是可堆疊的組合。

(二) 另外圓柱積木側面展開圖堆疊工具爲平面而非立體，操作時可以直接看出木棒和積木的關係及變化，比較容易調整積木形狀的排列方式。

四、每一組可堆疊的 P_k 組合，都只有唯一的積木組合可以完成堆疊嗎？

(一) 不是，如果用圓柱積木側面展開圖堆疊工具，依序調整木棒（軟性磁鐵）的位置使每片積木的形狀都不同，將符合者一一記錄，便可找出所有的組合。

(二) 例如：P_k 組合爲（2,2,1,1,1）時就可以找到 76 種積木排列可完成堆疊，而 7 片積木的排列共有 552 種可完成堆疊。

五、用 P_k 的規則篩選 5～11 片積木可能堆疊的組合中，有 4 組無法堆疊，原因是什麼？

根據研究結果，P_k 組合爲（3,1,2,1,0,1,1,1）、（3,1,2,1,0,1,1,2）、（3,1,2,1,0,1,1,3）和（3,1,1,0,3,0,1,1,1）都是因爲無法調整出積木 3C 的位置而不能完成堆疊。

柒、結論

陳鼎文和王俞臻（民 98）研究圓柱積木的解題主軸是積木的洞數，本研究的解題主軸則是木棒數。最重要的發現是：利用木棒數 P_k 的規則推演堆疊組合時，不只能縮小篩選範圍，也能篩選掉絕大多數不可行的堆疊組合，提高了篩選的效率；另外運用自行設計的圓柱積木側面展開圖堆疊工具間接堆疊後，就可以同時挑選出積木的形狀並把積木調整成可堆疊的排列，改進了以積木洞數規則篩選的缺點。未來如果透過此堆疊工具找出 5～12 片積木的所有堆疊組合，將有助於進一步探討「形」解圓柱積木的規則，而達到「速」解圓柱積木的境界。一年多來最重要的研究經驗是發現把研究資料整理成表格，對於解題方法的探討有很大的幫助。

捌、參考資料

陳鼎文和王俞臻（民 98)。「數」解圓柱積木。載於周茜芸（執行編輯)，**中華民國第 49 屆中小學科學展覽會第一名優勝作品專輯**（76-106 頁)。臺北市：國立臺灣科學教育館。

【評語】080413

本研究以圓柱積木出發，植基於過去的研究基礎，從另外一個角度切入，衍生出豐富、完整的研究成果，過程中除了逐步探討，一一解答心中疑問外，亦能善用軟體及程式，使研究結果得到躍進，整體而言是一篇難得的好作品。