中華民國第51屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080412

骨牌夾心餅之同心圓探討

學校名稱：新北市樹林區樹林國民小學

作者：	指導老師：
小六 陳怡儒 小六 彭敏瑄 小六 賴昭吟	宋雅筠 黃姿維

關鍵詞：骨牌、圖形排列、總和

骨牌夾心餅之同心圓探討

摘要

一、4×4 骨牌同心圓

1. 下圖一則成功的 4×4 骨牌同心圓示例：

2	5	2	0
3	1	2	3
3	2	1	3
1	1	4	3

（1） 內圓（紅色部分）每行每列總和皆相同都為 3。

（2） 外圓（含紅色部分）每行每列總和皆相同都為 9。

（3） 設計源自於骨牌魔方陣的變形，本遊戲不探討對角線的總和。

2. 本研究發現：

（1） 4×4 同心圓之內圓總和≠外圓總和。

（2） 4×4 同心圓的內圓總和範圍介於 1≦內圓和 α≦11。

（3） 當 4≦內圓和 α≦8 時，其外圓總和 β 的最小值與最大值有其固定的範圍：α＋1≦β≦α＋11。

（4） 當內圓和不在 4≦α≦8 的範圍內，其外圓最大值逐漸從兩頭遞減；外圓最小值逐漸從兩頭遞增。

（5） 4×4 骨牌同心圓的排列方式有七大類共 32 種。因不同骨牌排列的變化，會產生更多 4×4 骨牌同心圓的拼組可能。

二、5×5 骨牌同心圓

1. 下圖一則成功的 4×4 骨牌同心圓示例：

5	2	0	4	6
5	2	6	4	0
1	6		6	4
2	4	6	2	3
4	3	5	1	4

（1） 3×3 內圓（紅色部分）每行每列總和皆相同都為 12。

（2） 5×5 外圓（含紅色部分）每行每列總和皆相同都為 17。

（3） 設計源自於骨牌魔方陣的變形，本遊戲不探討對角線的總和。

2. 本研究發現：

（1） 5×5 同心圓的內圓總和≠外圓總和。

（2） 5×5 同心圓的內圓總和範圍介於 4≦內圓和 α≦12。

（3） 當 7≦內圓和 α≦9 時，其外圓總和 β 的最小值與最大值有其固定的範圍：α＋1≦β≦α＋11。

（4） **當內圓和不在 7≦α≦9 的範圍內，其外圓最大值逐漸從兩頭遞減；外圓最小值逐漸從兩頭遞增。**

壹、 研究動機

骨牌的研究並非新鮮事，從歷屆的科展主題便可略知一二，從骨牌數字城牆、骨牌方塊舞到骨牌魔方陣等，皆是數學研究好手耳熟能詳的遊戲。骨牌千變萬化，每每都讓人趨之若鶩，想一窺骨牌的奧秘，當然我們也不例外。為了在科展數學好手中脫穎而出，我們參考了歷屆作品資料和相關書籍，偶然在「數學遊樂園之舉一反三」一書上發現「同心魔方陣」，這是新鮮又具有挑戰性的主題，於是我們集思廣益研發成「骨牌同心圓」。課本中「圖形的縮放」就如同骨牌同心圓，圖形由 1×2 長方形放大而形成 4×4、5×5 正方形，因為骨牌有基本圖形條件的限制，所以我們必須從各方面來深究骨牌同心圓，題目雖然艱澀但值得我們去探討。

貳、 研究目的

一、探討骨牌與同心魔方陣結合後「骨牌同心圓」的創意與特色。
二、探討 4x4 骨牌同心圓之總和範圍與排列變化。
三、深究 5×5 骨牌同心圓之組合特色與總和範圍、排列。

參、 研究器材

一、骨牌
二、排列塑膠板
三、電腦繪圖軟體-小畫家
四、實驗紀錄紙

肆、 研究內容與過程

研究目的一 骨牌與同心魔方陣的結合

（一） 魔方陣、骨牌和同心魔方陣

1. **魔方陣**：魔方陣是遊戲書中常出現的題目，在九宮格內任意填入數字，使其每行每列，甚至兩對角線的總和皆一樣（下圖一）。

16	9	14
11	13	15
12	17	10

圖一

2. **骨牌**：從歷屆科展題目的演變，幾乎兩三年就會出現一件令人嘆為觀止的骨牌研究，以 47 屆科展為例：

屆數	作品名稱	作品簡介	作品價值
第 47 屆 第三名	翻滾吧!骨牌 ~旋風魔方陣	1. 將骨牌上的點數改換成數字模式，窮盡所有組合中，發現魔方陣的規律和組型。 2. 研究不同圖形的最大與最小邊數和，進而歸納三種圖形，進行規律的分析與探究。	1. 解釋 3x3 魔方陣任四張組合的可能性。 2. 發現 3x3 魔方陣的骨牌，最多只能兩片相同。 3. 設計骨牌方連組型的新遊戲。
第 47 屆 第二名	骨牌大變身-新式菱形骨牌「數字花遊戲之探究」	1. 將兩個正方形所連接的長方形骨牌，改變成用兩個三角形所連接成菱形骨牌。 2. 介紹菱形骨牌的特性與各式不同的圖形。進而探詢「幾多花」最大值和最小值。 3. 創造「大心型」、「四小心型」、「中空菱形」以及「阿尼型」等四種大花圖形，並深入分析其結果。	1. 創新菱形骨牌。 2. 開發骨牌新遊戲：「雙花齊鳴」和「賓士雙響砲」。

3. **同心魔方陣：**為了突破前人的作品，我們絞盡腦汁，偶然在一本書中看到一則有趣的題目，引起我們極大的興趣（圖三）。

同心魔方陣

5×5 魔方陣有一種有趣的特性，就是其內部 3×3 仍然是一個魔方陣。

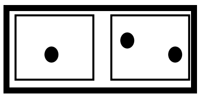
23	1	2	20	19
22	16	9	14	4
5	11	13	15	21
8	12	17	10	18
7	25	24	6	3

摘錄＜舉一反三＞

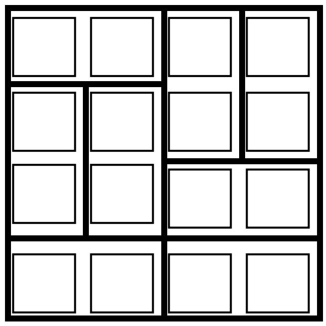
（二）創意新遊戲：魔方陣＋骨牌＋同心魔方陣＝骨牌同心圓

我們思考一個好玩的現象，當同心魔方陣與骨牌結合時，會產生什麼火花呢？於是我們開始動工！

1. **骨牌+同心魔方陣：**利用骨牌排成同心魔方陣，首先挑戰 4x4 的魔方陣。

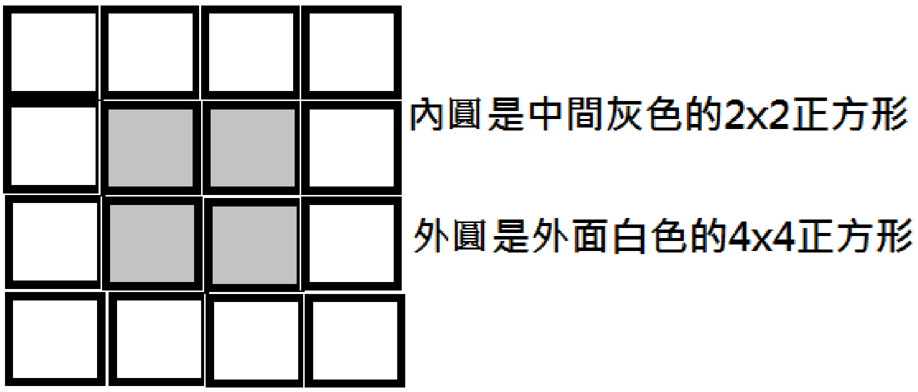


一張骨牌



4x4 骨牌

2. 遊戲規則：



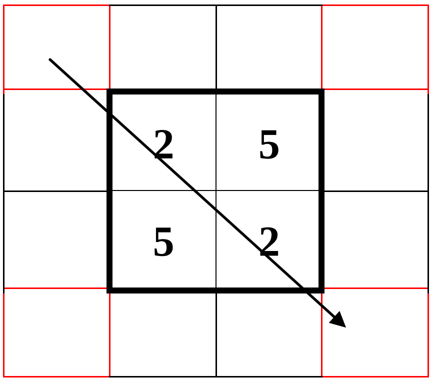
①外圓〈如白色區域＋灰色部分〉4 × 4 的正方形每行每列總和相同。

②內圓〈只討論灰色區域〉2 × 2 的正方形每邊總和相同。

2	**5**	**2**	**0**
3	**1**	**2**	**3**
3	**2**	**1**	**3**
1	**1**	**4**	**3**

成功範例：內和 / 外和 ＝ 3 / 9

3. **遊戲限制**：魔方陣的條件為每行、每列、對角線相同，但是以骨牌同心圓而論，當我們固定內圓總和，其對角線角落四點位置的數字，**容易受到選取而造成數值總和極端，不易探討最小值，所以骨牌同心圓暫不考慮對角線的總和。**以下圖為例說明：內圓和 7，右斜對角線與左斜對角線的總和已差距 6（10－4）。

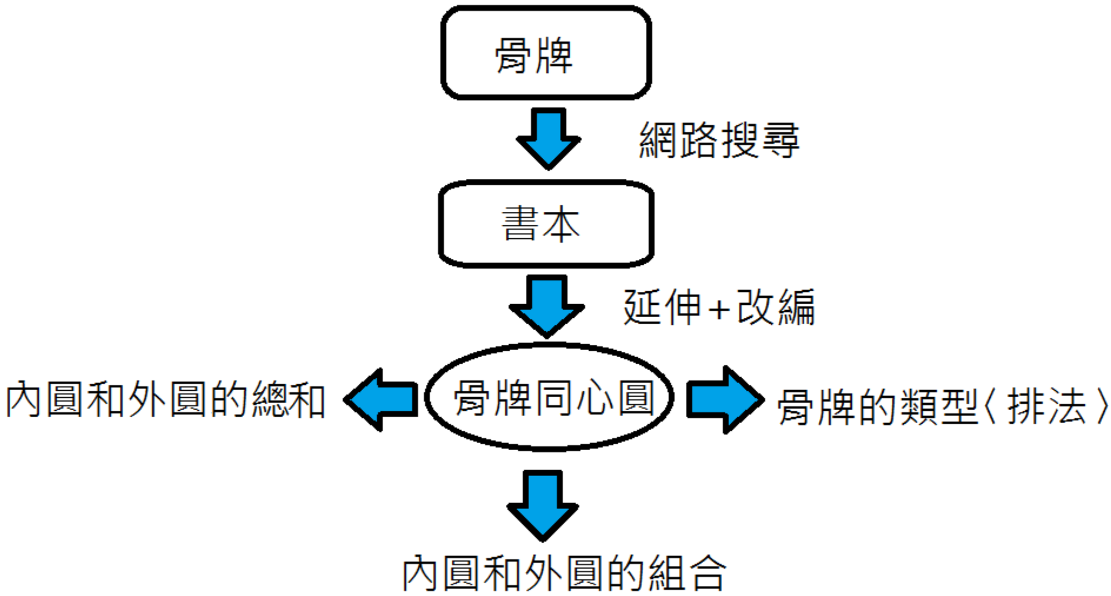


4. 遊戲特色：

（1）困難度提高：魔方陣的數字使用，依圖形的條件有較大的選取彈性，如 5×5 魔方陣，填數從 1~25 任填。反觀骨牌同心圓，數字使用的範圍只介於骨牌數字的 0~6，數字選取的自由度低，相對增加困難度。

（2）創新度：結合常見數學題材，串連成新的遊戲與玩法，無相關資料可參閱，反而提高本作品的研究價值。

5. 研究步驟：



研究目的二 探討 4x4 骨牌同心圓

（一）骨牌的基本設計

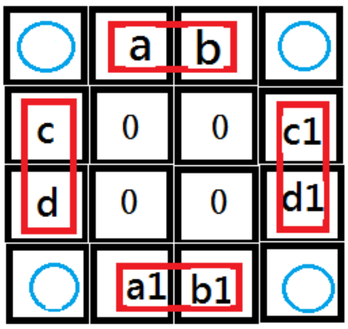
骨牌													
							3 3						
					2 2	2 3	2 4	3 4	4 4				
			1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	2 5	3 5	4 5	5 5		
	0 0	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6
總和	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
張數	**1**	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**	**4**	**3**	**3**	**2**	**2**	**1**	**1**

1. **由上表可知，一副 4×4 骨牌同心圓需要 8 張，我們猜測總和下限應該 4≦。**
2. **骨牌兩數的最大值為 12，內緣由兩張骨牌所構成，所以內圓總和上限應該≦12；反之，內圓總和最小值則是 0。所以我們猜測其骨牌同心圓內圓總和範圍 0≦α≦12。**
3. **28 骨牌的數字都出現 8 次，所以一副骨牌同心圓的數字至多使用 8 次。**

（二）骨牌同心圓內外圓極大極小值與骨牌的關係

1、內圓總和的最小值與最大值範圍

（1）內圓總和最小值 0 是無法成功的類型



〔**驗證**〕

當內圓為 0，外圓總和相同時：

a＋0＋0＋a1＝b＋0＋0＋b1＝c＋0＋0＋c1＝d＋0＋0＋d1＝

a＋b＋2○＝a1＋2○＋b1＝c＋2○＋d＝c1＋2○＋d1

①∵ a＋a1＝b＋b1＝c＋c1＝d＋d1

且 a＋b=a1＋b1=c＋d=c1＋d1

∴ a=b1； b=a1； c=d1； c1=d 且○＝0

②骨牌有 0 的組合為 $\boxed{00}$、$\boxed{01}$、$\boxed{02}$、$\boxed{03}$、$\boxed{04}$、$\boxed{05}$、$\boxed{06}$等 7 張，扣除已使用 8 個 0，則剩下 6 個數字（1~6），無法排滿紅色框區域。

（2）內圓總和最大值 12 是無法成功的類型

○	a	b	○
c	6	6	c1
d	6	6	d1
○	a1	b1	○

〔**驗證**〕

當內圓為 12，外圓相同時：

a＋6＋6＋a1＝b＋6＋6＋b1＝c＋6＋6＋c1＝d＋6＋6＋d1＝

a＋b＋2○＝a1＋2○＋b1＝c＋2○＋d＝c1＋2○＋d1

①∵ a＋a1＝b＋b1＝c＋c1＝d＋d1

且 a＋b=a1＋b1=c＋d=c1＋d1

∴ a=b1； b=a1； c=d1； c1=d　且○＝6

②骨牌有 6 的組合為$\boxed{60}$、$\boxed{61}$、$\boxed{62}$、$\boxed{63}$、$\boxed{64}$、$\boxed{65}$、$\boxed{66}$等 7 張，扣除已使用 8 個 6，則剩下 6 個數字（0~5），無法排滿紅色框區域。

結論：我們推翻先前的假設，假設內圓總和為 α，其範圍應在 1≦α≦11。

內圓	1	2	3	4	5	6
圖例	0 2 3 0 4 1 0 0 1 0 1 3 0 2 1 2	1 0 3 1 2 0 2 1 2 2 0 1 0 3 2	2 1 1 1 0 3 0 2 0 0 3 2 3 1 1 0	2 1 0 2 0 0 4 1 0 4 0 1 3 0 1 1	2 1 0 3 0 0 5 1 1 5 0 0 3 0 1 2	2 1 0 4 0 0 6 1 1 6 0 0 4 0 1 2
內圓	7	8	9	10	11	
圖例	3 1 0 4 0 5 2 1 1 2 5 0 4 0 1 3	2 1 1 5 1 3 5 0 0 5 3 1 6 0 0 3	4 0 1 5 0 3 6 1 0 6 3 1 6 1 0 3	5 1 1 1 4 6 0 0 6 4 1 5 0 0 6	5 0 2 6 1 5 6 1 2 6 5 0 5 2 0 6	內圓總和 α **1≦α≦11**

2、內外圓的總和相同的可能性

〔**驗證**〕

3	**0**	**0**	**3**
0	**4**	**2**	**0**
0	**2**	**4**	**0**
3	**0**	**0**	**3**

① 以**張數**討論：若每行每列總和相同，4×4 骨牌需要使用 8 張共 16 個相同的數字， 但是每個數字都只有出現 7 張，內外圓總和相同不可成立。

② 以**數字**討論：當內圓總和＝外圓總和，外圓則需要 8 個 0，換句話說需要使用全部包含 0 的骨牌，但是和 0 配對的骨牌數字還需包含 1~6，若每邊和為 6，**使用 8 個 0 但是其配對的數字卻重複**，所以內外圓總和相同不可成立。

結論：內圓總和≠外圓總和。

3、內圓總和與外圓總和最大值最小值的關係

（1）外圓總和最小值：假設內圓數值為 α，外圓數值為 α＋1。

〔**驗證**〕

- 骨牌同心圓外圓總和 **α＋1** 需成立的條件，需考慮骨牌張數的限制。因 4x4 骨牌同心圓須 8 張骨牌，故**當骨牌張數超過 8 張可以選擇時，內圓和＝α，外圓和為 α＋1 可能可以成功。**
- 當我們重新檢視骨牌總和時，骨牌點數低於 3 的張數皆不足 8 張，所以**內圓總和 α≧4〈即外圓總和≧5〉，其骨牌張數大於 8 張，則可以成立。**

〔**例證**〕當內圓總和＝4，外圓總和＝5。

2	**1**	**0**	**2**
0	**0**	**4**	**1**
0	**4**	**0**	**1**
3	**0**	**1**	**1**

※以內圓總和 4 來做說明，其組合方式就有 04、13、22，如果以這三種當作內圓，是否都可以找到外圓總和？

※實際操作

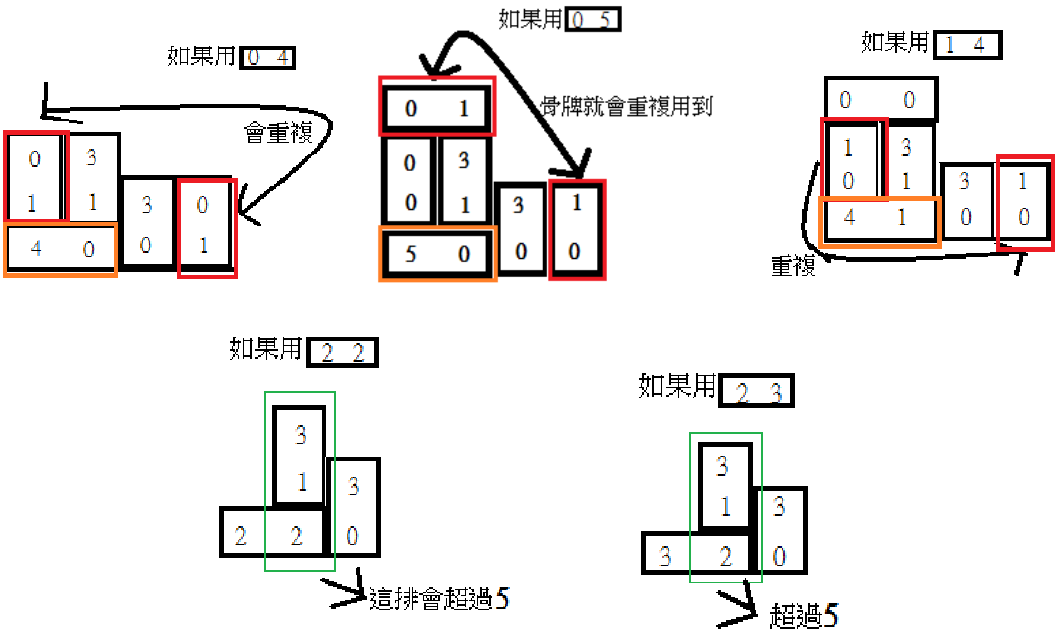
內圓類型	0 4（外圓和＝5）	1 3（外圓和＝6）	2 2（外圓和＝5）
圖例	2 1 0 2 0 4 1 0 4 0 1 3 0 1 1	2 2 0 2 0 3 1 2 1 1 3 1 3 0 2 1	1 0 0 4 1 2 2 0 0 2 2 1 3 1 1 0

〔發現〕

※ 當內圓類型為 **1 ＋ 3**，外圓最小總和＝**6**，我們分析原因：

當外圓和 **α＋1** 時，外圓只能使用數字 **1**，但此時內圓卻已經使用 **2** 個 **1**，**8** 個 **1** 扣除已使用 **2** 的 **1**，只剩 **6** 個 **1**，但是 **16**、**15** 不可以使用，因為會大於外圓最小值的設定，若使用 **14** 則會出現重複。所以當只有 **3** 個 **1** 的條件下無法完成最小值 **5**。

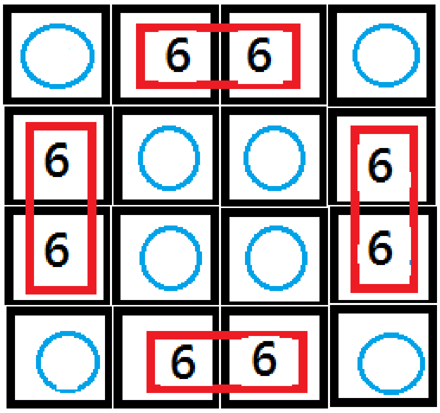
我們以圖例說明：



<u>※我們猜測不同數字組合的類型有可能影響外圓總和。</u>

（2） 外圓總和最大值：假設內圓數值為 α，外圓數值為 α＋11。

①假設內圓和＝α，外圓和為 α＋12



- 當外圓紅色框位置皆放數字 6，此時藍色框的數字皆會重複使用，意即當內圓和＝α，外圓和為 α＋12，不可能成立。所以假設內圓數值為 α，外圓數值為 α＋11 是成立的。

②以內圓總和思考，總和 4 的組合方式就有 04、13、22，如果以這三種當作內圓，是否都可以找到外圓總和最大值？

※實際操作

內圓類型	0 4（外圓和＝15）				1 3（外圓和＝15）				2 2（外圓和＝15）			
圖例	1	5	6	3	2	3	6	2	1	5	6	3
	6	0		5	6	1	3	5	5	2	2	6
	5	4	0	6	6	3	1	5	5	2	2	6
	3	6	5	1	1	6	5	3	4	6	5	0

〔發現〕

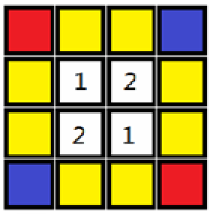
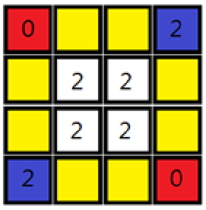
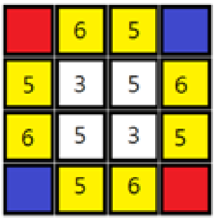
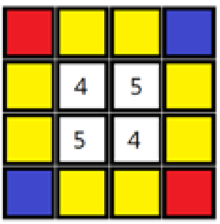
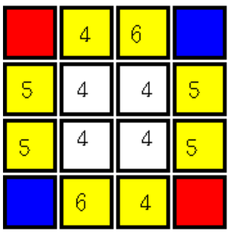
1. 以內圓和為 4，外圓總和為 β，其外圓最大值範圍應 β≦α＋11，所以外圓最大值為 4＋11＝15，符合我們的假設。
2. 結論：我們推翻先前的假設，假設內圓和＝α，外圓總和為 β，其範圍應 α＋1≦β≦α＋11。

（3） 探討 4 × 4 骨牌同心圓外圓總和的範圍。

① 由內外圓總和的範圍，我們經由實作發現的使用不同的內圓數字組合方式，會影響其外圓最大值或最小值(請見附件資料)。

內圓總和	內圓數字組合	外圓最小值	外圓最大值	備註
1	0＋1	5	11	
2	0＋2	5	13	
	1＋1			
3	0＋3	5	14	
	1＋2	**6**（*）	14	
4	0＋4	5	15	
	1＋3	**6**（*）	15	
	2＋2	5	15	外圓和 **6**（x）
5	0＋5	6	16	
	1＋4			
	2＋3			
6	0＋6	7	17	
	1＋5			
	2＋4			
	3＋3			
7	1＋6	8	18	
	2＋5			
	3＋4			
8	2＋6	9	19	
	3＋5	9	**18**（*）	
	4＋4	9	19	外圓和 **18**（x）
9	3＋6	10	19	
	4＋5	10	**18**（*）	
10	4＋6	11	19	
	5＋5			
11	5＋6	13	19	

②針對上表，我們以圖例說明各項特例：

特例	圖例	說明
內圓和 3 〈1＋2〉 外圓和 5		（a） 內 3 外 5 可用的牌有 0 1、0 2、0 3、0 4、0 5、1 1、1 2、1 3、1 4、2 2、2 3、0 0。 （b） 若外圓頂點〈紅、藍色部分〉放 0 5、1 4 和 2 3，則外圓的其他地方〈黃色部分〉就必須使用 0，但一副骨牌裡最多只有 7 個 0，所以就不能使用 0 5、1 4 和 2 3。 （c） 如果外圓頂點〈紅、藍色部分〉放置 0 4、1 3 和 2 2， 則外圓的其他地方〈黃色部分〉就必須使用 1 和 0，這樣 1 使用太多以致無法成功。 （d） 可用的牌：0 1、0 2、0 3、0 4、0 5、1 1、1 2、1 3、1 4、2 2、2 3、0 0，去掉不能使用的 0 4、0 5、1 3、1 4、2 2 和 2 3，剩下的張數不夠組合成一個完整的 4×4 骨牌同心圓。
內圓和 4 〈2＋2〉 外圓和 6		（a）內圓和 4 外圓和 6 之間相差 2，2 的組合有 0 2 和 1 1，先假如外圓頂點〈紅、藍色部分〉是 0 和 2，則外圓的其他地方〈黃色部分〉就只能放置 0 2 或 1 1，但由於同一個數字重覆太多，所以外圓頂點〈紅、藍色部分〉就不能放 0 和 2。 （b）假如外圓頂點〈紅、藍色部分〉放置 1 1，則外圓的其他地方〈黃色部分〉一樣得放 0 2 或 1 1，數字都會重覆太多次。
內圓和 8 〈3＋5〉 外圓和 19		（a）內 3 外 5 之間相差 11，11 的組合只有 5 6，假如外圓的其他地方〈黃色部分〉都填上 5 和 6，5 和 6 就會重複太多次以致無法成功。
內圓和 8 〈4＋4〉 外圓和 18		（a）18-8=10，10 的組合有 5+5 和 4+6，如果全部放置 5+5，會導致 5 太多，但若全部放置 4+6，會導致 4 重複太多，平均分放的話，4 就會有 6 個，5 會有 4 個〈黃、白色部分〉。 （b）18-10=8，8 的組合有 2+6 和 3+5 和 4+4，外圓頂點〈紅、藍色部分〉不能放置 2+6、3+5 和 4+4，因會讓 4、5、6 重複太多次且 4 的周圍幾乎不是 4、5 就是 6。
內圓和 9 〈4＋5〉 外圓和 19		（a） 內 9 外 19 內外之間相差 10，10 的組合有 4 6 和 5 5，若外圓頂點〈紅、藍色部分〉和外圓的其他地方〈黃色部分〉放置 4、5 和 6 的話，數字會重複太多以致無法成功。

③ **簡單歸納 4 × 4 骨牌同心圓總和的範圍：**

假設內圓和為 α，外圓最小 β 或最大值 γ 的關係如下：

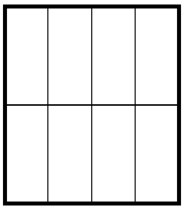
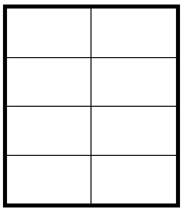
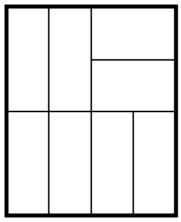
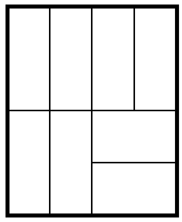
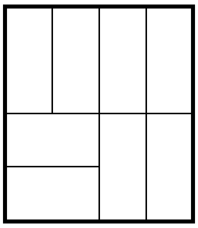
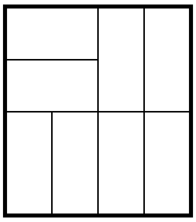
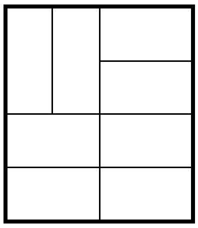
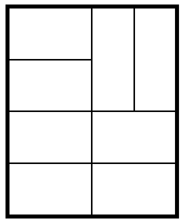
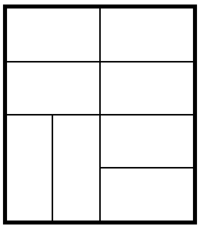
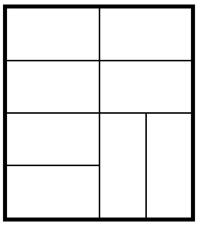
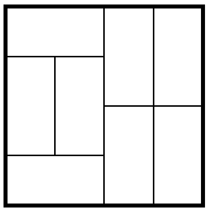
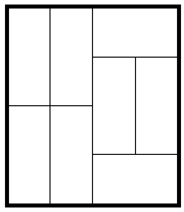
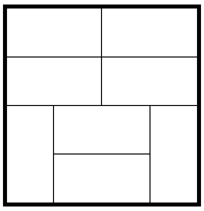
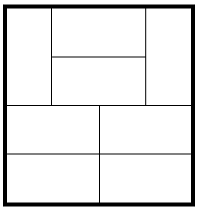
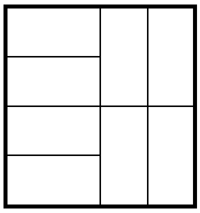
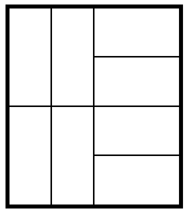
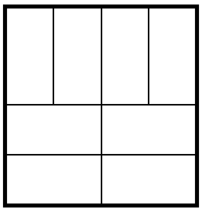
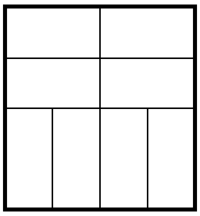
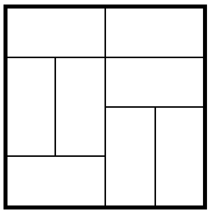
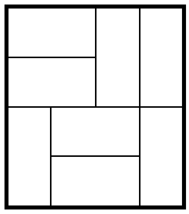
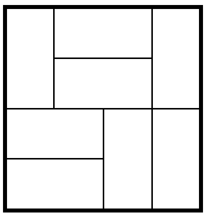
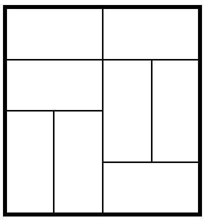
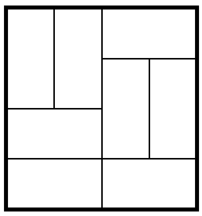
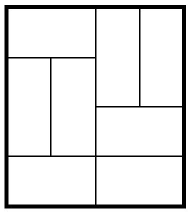
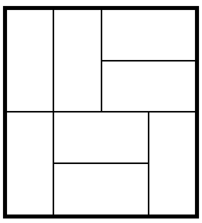
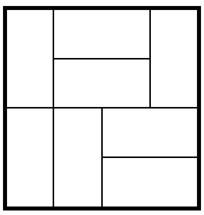
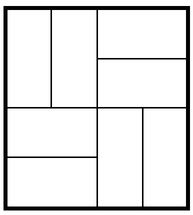
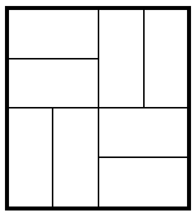
內圓和	外圓和範圍	β	γ	
1	5~11	α＋4	α＋10	
2	5~13	α＋3	α＋11	
3	5~14	α＋2	α＋11	
4	5~15 遞增	α＋1	α＋11	遞減
5	6~16	α＋1	α＋11	
6	7~17	α＋1	α＋11	
7	8~18	α＋1	α＋11	
8	9~19	α＋1	α＋11	
9	10~19 遞增	α＋1	α＋10	遞減
10	11~19	α＋1	α＋9	
11	13~19	α＋2	α＋8	

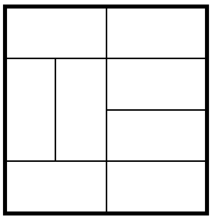
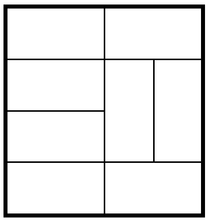
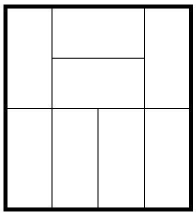
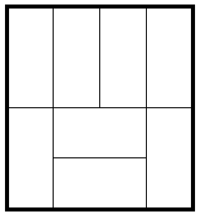
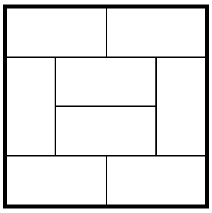
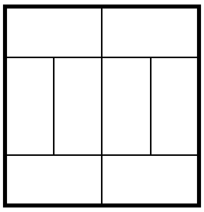
結論：

- <u>**4x4 同心圓的內圓總和≠外圓總和。**</u>
- <u>**4x4 同心圓的內圓總和範圍介於 1≦內圓和 α ≦11。**</u>
- <u>**當 4≦內圓和 α ≦8 時，其外圓總和 β 的最小值與最大值有其固定的範圍：α ＋1≦ β ≦ α ＋11。**</u>
- <u>**當內圓和不在 4≦ α ≦8 的範圍內，其外圓最大值逐漸從兩頭遞減；圓最小值逐漸從兩頭遞增。**</u>

（三）4×4 骨牌同心圓的排列變化

1. 疑問：實作 4×4 骨牌同心圓時，一共需要使用 8 張骨牌，但是每個人依照各自的習慣會有不同的排列方式，8 張骨牌的排列方式有幾種，是否每一種的排列方式都可以照到正確解答嗎？我們開始研究 8 張骨牌的排列。
2. 在 4×4 的方格紙中，8 張骨牌的排列方式有九種，但是受限於同心圓的規定，其中兩種 H、I 無法採用。然而骨牌的排列經過旋轉與翻轉後也會改變骨牌的數字組和，所以實際上 4×4 中 8 張骨牌的變化相當多種，以下是我們彙整排列方法的圖表：

編號	圖例	編號	圖例	編號	圖例	編號	圖例
A		A		B		**B**	
B		B		B		**B**	
B		B		C		**C**	
C		**C**		D		D	
D		D		E		E	
E		E		E		E	
E		E		F		F	

G		G		G		G	
H		I					

3. 依據這些排法，我們發現一些有趣的現象：

（1） 骨牌同心圓可使用 7 種排法，每一種排法經過旋轉翻轉後的變化各不相同，以下表所示：

編號	A	B	C	D	E	F	G
組數	2	8	4	4	8	2	4
合計	32 組						

（2） 同一組骨牌同心圓的數字，換了第二種不一樣的排法，依舊可以成功。

內圓和 2 外圓和 6	1：E 2：B 3：A 4：G	1 4 1 0 2 1 1 2 0 1 1 4 3 0 3 0	1 4 1 0 2 1 1 2 0 1 1 4 3 0 3 0	1 4 1 0 2 1 1 2 0 1 1 4 3 0 3 0	1 4 1 0 2 1 1 2 0 1 1 4 3 0 3 0
內圓和 2 外圓和 7	1：A 2：B 3：F 4：B	0 1 3 3 2 2 0 3 4 0 2 1 1 4 2 0	0 1 3 3 2 2 0 3 4 0 2 1 1 4 2 0	0 1 3 3 2 2 0 3 4 0 2 1 1 4 2 0	0 1 3 3 2 2 0 3 4 0 2 1 1 4 2 0
內圓和 2 外圓和 8	1：C 2：G 3：E 4：F	0 5 3 0 4 1 1 2 4 1 1 2 0 1 3 4	0 5 3 0 4 1 1 2 4 1 1 2 0 1 3 4	0 5 3 0 4 1 1 2 4 1 1 2 0 1 3 4	0 5 3 0 4 1 1 2 4 1 1 2 0 1 3 4

（3） 同一組骨牌同心圓的數字，同一種骨牌排列方法，雖然排法經過旋轉或翻轉後，仍然可以成功。

2	5	2	4
2	0	6	5
5	6	0	2
4	2	5	2

〈內 6、外 13 〉**D**

	5	2	4
2	0	6	5
5	6	0	2
4	2	5	2

〈內 6、 外 13〉**D**

2	5	2	4
2	0	6	5
5	6	0	2
4	2	5	2

〈 內 6、 外 13 〉**D**

2	5	2	4
2	0	6	5
5	6	0	2
2	4	5	2

〈 內 6、 外 13 〉**D**

（4） 同一種排列方法也可以找出同一組 4×4 同心圓的最小值到最大值的所有答案（**最大值與最小值則經過旋轉後找出**）。

2

〈1+1〉

排法 C

2	0	3	0
1	1	1	2
0	1	1	3
2	3	0	0

〈2、5〉

1	4	1	0
2	1	1	2
0	1	1	4
3	0	3	0

〈2、6 〉

2	3	2	0
3	1	1	2
0	1	1	5
2	2	3	0

〈2、7 〉

0	5	3	0
4	1	1	2
4	1	1	2
0	1	3	4

〈2、8〉

2	2	4	1
5	1	1	2
2	1	1	5
0	5	3	1

〈2、9〉

2	2	5	1
6	1	1	2
2	1	1	6
0	6	3	1

〈2、10〉

1	4	6	0
4	1	1	5
6	1	1	3
0	5	3	3

〈2、11〉

1	4	4	3
5	1	1	5
6	1	1	4
0	6	6	0

〈2、12〉

0	6	5	2
5	1	1	6
6	1	1	5
2	5	6	0

〈2、13〉

【結論】

- 4x4 骨牌同心圓的排列方式有七大類共 32 種。
- 骨牌排列的變化會產生更多 4x4 骨牌同心圓的拼組可能。

(四)<u>骨牌同心圓的快速解法</u>

1. 以【內圓類型法】作快速解法的示範：內圓和 6 外圓和 12。

〈1〉 內圓 6 可分成：

6= 0+6

1+5

2+4

3+3

〈2〉 選其中一組當內圓

6= 0+6

1+5？ 內圓

2+4

3+3

〈3〉填上內圓

	1	5	
	5	1	

〈4〉外圓-內圓=6

6= 0+6

1+5 ╳

2+4

3+3

〈5〉1+5 已用在內圓，

盡量不要用 1+5

6= 0+6？ 外圓

2+4 ↗

3+3

〈6〉填上外圓

	2	4	
0	1	5	6
6	5	1	0
	4	2	

〈7〉12-6=6

6=0+6 ╳

1+5 ╳

2+4 ╳

3+3

〈8〉其中 3 項已用過，

刪去不用。

6= 3+3？ 外圓角落

〈9〉填上外圓角落

3	2	4	3
0	1	5	6
6	5	1	0
3	4	2	3

〈10〉畫上排法

先從角落唯一性 03 開始

因爲 03 只有一張。

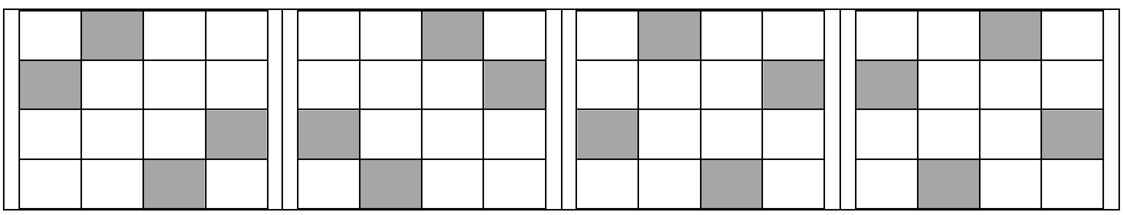
3	2	4	3
0	1	5	6
6	5	1	0
3	4	2	3

〈11〉完成骨牌同心圓！

3	2	4	3
0	1	5	6
6	5	1	0
3	4	2	3

2. 以【四位置法】作快速解法的示範：每行每列使用四個位置的＋1 或－1，

即可快速找出下一組解答。



※ 以下圖內圓和 1 外圓和 5 為例說明：

0	2	3	0
4	1	0	0
1	0	1	3
0	2	1	2

內圓 1 外圓 5

0	3	3	0
5	1	0	0
1	0	1	4
0	2	2	2

內圓 1 外圓 6

0	2	4	0
4	1	0	1
2	0	1	3
0	3	1	2

內圓 1 外圓 6

0	3	3	0
4	1	0	1
2	0	1	3
0	2	2	2

內圓 1 外圓 6

0	2	4	0
5	1	0	0
1	0	1	4
0	3	1	2

內圓 1 外圓 6

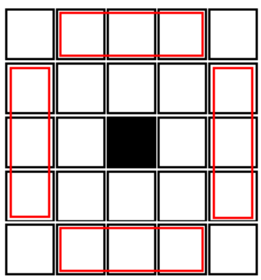
【結論】

- **4x4 骨牌同心圓的快速解題方式有兩種，分別為【內圓類型法】與【四位置法】，其中以【四位置法】最為快速且簡單。**
- **兩種快速解法都須熟悉骨牌 32 種的拼組可能，才能從生手變成專家。**

研究目的三 深究 5×5 骨牌同心圓

（一）5×5 骨牌同心圓的組合特色

5×5 骨牌同心圓：當我們試著從 5×5 魔方陣改編製 5×5 同心圓時，則遇到一個問題，骨牌由兩個點數所形成，意即需要偶數格的圖形，但是 5×5 同心圓有 25 個方格，所以我們重新設計 5×5 同心圓的圖形，以下圖為例：



（1） 5×5 同心圓分內圓與外圓兩層，內圓為 3×3；外圓為 5×5。

（2） 內圓每行每列的總和皆相同，外圓每行每列的總和皆相同，但是都不需考慮對角線的總和。

（3） 中間塗黑處表示空格，在總和意義上則表示 0。

（二）5×5 骨牌同心圓的最大值與最小值

1. 討論 5×5 同心圓的 3×3 內圓最小值。

（1） <u>內圓和為 1</u>：5×5 中內圓總和若為 1 是無法成功，因為從 28 張骨牌中只能取出兩張牌 $\boxed{01}$和 $\boxed{00}$，但內圓要用的牌有四張，所以內圓是 1 無法成功。

（2） <u>內圓和為 2</u>：5×5 中內圓總和等於 2 也無法成功，從 28 張骨牌取出 $\boxed{02}$、$\boxed{11}$、$\boxed{01}$ 和 $\boxed{00}$。雖然剛好四張，但是受限於總和，一定會有一張骨牌重複而一張骨牌 $\boxed{00}$ 無法使用的情形產生，下圖所示：

0	**1**	**1**
2	■	**0**
0	**1**	**1**

$\boxed{01}$重複

1	**0**	**1**
1	■	**1**
0	**2**	**0**

$\boxed{01}$重複

（3） <u>內圓和為 3</u>：5×5 中內圓總和等於 3 的骨牌可使用 $\boxed{03}$、$\boxed{02}$、$\boxed{01}$、$\boxed{00}$、$\boxed{11}$和 $\boxed{12}$共 6 張牌，**因此有可能 5×5 同心圓的 3×3 內圓最小總和為 3**。

<u>【假設】5x5 同心圓其內圓最小總和為 3</u>

【驗證】當內圓總和＝3，外圓總和＝4

A. 以 3×3 內圓總和為 α，5×5 外圓總和為 α＋1，則表示外圓紅色框需要 6 個 0 和 6 個 1，所以當 3×3 內圓數字超過 2 個 0 或 2 個 1，表示 5×5 同心圓無法順利成功。

2	0	0	0	2
0	0	2	1	1
0	3	■	0	1
0	0	1	2	1
2	1	1	1	2

B. 由上述可推測，當外圓總和≦9 時，5×5 同心圓就無法成功，因為 0、1、2、3、4 的數字會重複太多次。

2	1	1	1	0
0	0	2	1	2
2	3	■	0	0
0	0	1	2	2
1	1	1	1	1

內圓和 3/外圓和 5

3	1	1	1	0
0	0	2	1	3
3	3	■	0	0
0	0	1	2	3
0	2	2	2	0

內圓和 3/外圓和 6

1	2	2	2	0
1	0	2	1	3
3	3	■	0	1
1	0	1	2	3
1	2	2	2	0

內圓和 3/外圓和 7

1	2	1	4	0
2	0	2	1	3
1	3	■	0	4
4	0	1	2	1
0	3	4	1	0

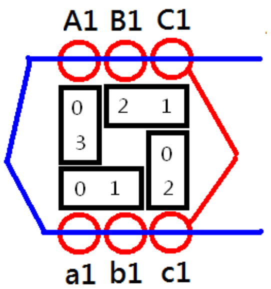
內圓和 3/外圓和 8

0	3	3	3	0
3	0	2	1	3
3	3	■	0	3
3	0	1	2	3
0	3	3	3	0

內圓和 3/外圓和 9

C. 當外圓總和≧10 時，受限於總和大小，5×5 同心圓也無法成功。

以下圖說明：外圓總和＝10



<u>外圓和 10-3=7　總和 7 有 $\boxed{25}$、$\boxed{34}$、$\boxed{16}$</u>

<u>可以 A1＋a1＝7　B1＋b1＝7　C1＋c1＝7</u>

<u>所以 A1＋a1＋B1＋b1＋C1＋c1＝21</u>

<u>但是實際上每行總和應為 10</u>

<u>意即 A1＋a1＋B1＋b1＋C1＋c1＝20</u>

<u>因此 A1＋a1＋B1＋b1＋C1＋c1＝20≠21</u>

D. 因為 **A1＋a1＋B1＋b1＋C1＋c1＝20≠21**， 所以內圓和 3 外圓和 10 無法成功，此道理可類推至外圓總和為 11、12、13 等無法成功的理由

結論：當內圓總和＝3，無論外圓總和皆無法成功，所以 5x5 同心圓的 3x3 內圓最小總和為 4。

2. 討論 5×5 同心圓的 3×3 內圓最大值。

（1） 5×5 中內圓總和若為 12，可以從 28 張骨牌中取出點數為 6 的組合，如$\boxed{06}$、$\boxed{15}$、$\boxed{24}$、$\boxed{33}$等，而內圓使用的牌有四張，所以內圓最大值 12 可能可以成功。

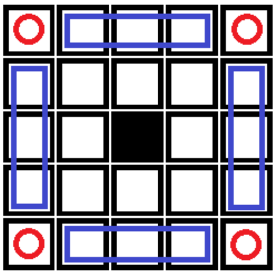
【實際操作】

5	2	0	4	6
5	2	6	4	0
1	6		6	4
2	4	6	2	3
4	3	5	1	4

3. 討論 5×5 同心圓的外圓最小值。

（1） 由上述我們知道5×5同心圓之3×3內圓最小值為4，那麼其外圓的最小值是多少？

【假設】3×3 內圓最小值為 4，外圓最小值為 4＋1＝5，



【驗證】

●3×3 內圓總和 4，外圓總和 5：5－4＝1，（藍框部份）必須填 0 和 1，4 的組合有：0、0、4；0、1、3；0、2、2；1、1、2。但這些組合裡擁有太多的 0 和 1，無法成功。

●3×3 內圓總和 4，外圓總和 6：6－4＝2，（藍框部份）必須填 0 和 1，4 的組合有：0、0、4；0、1、3；0、2、2；1、1、2。但 0、1 和 2 重複多次，不能成功。

●3×3 內圓總和 4，外圓總和 7：7－4＝3，（藍框部份）必須填 0 和 1，4 的組合有：0、0、4；0、1、3；0、2、2；1、1、2。但 0、1 和 2 重複多次，不能成功。

●**換句話說，探討外圓最小值應是 3×3 內圓的數字使用，若 3×3 內圓和為 α，5×5 外圓總和為 α＋1，外為藍色部分需要使用 6 個 0 和 6 個 1，意及內圓若使用超過 2 個 0 或 1 時，5×5 外圓總和最小值 α＋1 則不可能成功。**

●從 3×3 內圓的數字使用來分析：

3×3 內圓和＝4		3×3 內圓和＝5		3×3 內圓和＝6	
1 0 3 3 1 0 4 0	1 2 1 1 3 2 2 0	1 0 4 4 1 0 5 0	3 1 1 2 3 0 4 1	1 0 5 5 1 0 6 0	0 2 4 5 1 1 4 1

●因此我們可以推論，當 **3×3 內圓和為 α＝7，5×5 外圓總和最小值 α＋1＝8， 應可以成立。**

【實際操作】

5	0	1	1	1
0	2	5	0	1
0	3		4	1
0	2	2	3	1
3	1	0	0	4

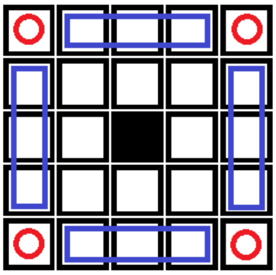
結論：3x3 內圓和為 α，5x5 外圓總和最小值 $\alpha+1$ 成立，先決條件 $\alpha \geqq 7$。

4.討論 5×5 同心圓的外圓最大值。

由上述我們知道 5×5 同心圓之 3×3 內圓最小值為 4，那麼其外圓的最小值是多少？

【假設】 3×3 內圓最小值為 4，外圓最小值為 4＋12＝17，是否可行？

【驗證】



（1） 假設 3×3 內圓最小值為 α，當 5×5 外圓總和為 α＋12，此時外圓需用 12 個 6，一副骨牌只有 8 個 6，意即 **5×5 外圓總和最大值為 α＋12 無法成功**。

（2） **所以我們可以猜測當 3×3 內圓最小值為 α，5×5 外圓總和最大值應為 α＋11。**

（3） 當我們持續探討 3×3 內圓最小值為 α，5×5 外圓總和最大值應為 α＋11 的假設時，我們發現 5×5 同心圓其 3×3 內圓總和低於 6 以下，**5×5 外圓總和最大值為 α＋11 的假設是不能成立的**。原因如下：

1	5	5	6	0
5	2	3	1	6
6	2		4	5
5	2	3	1	6
0	6	6	5	0

不管如何排列，角落一定會出現三個 **0**，但是與其相配對的只有 **5** 和 **6**，會造成骨牌重複出現，所以一定無法排出其他的可能性。

【實際操作】

1	5	5	5	2
6	3	3	1	5
5	3	■	4	6
6	1	4	2	5
0	6	6	6	0

<u>**結論：3x3 內圓和為 α，5x5 外圓總和最大值 $\alpha+11$ 成立，先決條件 $\alpha\geqq 7$。**</u>

5. 5×5 同心圓的範圍

【說明】我們以圖例說明 5 × 5 骨牌同心圓的發現：

（1）5 × 5 骨牌同心圓總和的範圍：

假設 3×3 內圓和為 α，5×5 外圓最小 β 或最大值 γ 的關係如下：

內圓和	外圓和範圍	β	γ
4	8~12	α＋4	α＋8
5	8~14	α＋3	α＋9
6	8~16	α＋2	α＋10
7	8~18	α＋1	α＋11
8	9~19	α＋1	α＋11
9	10~20	α＋1	α＋11
10	11~20	α＋1	α＋10
11	12~20	α＋1	α＋9
12	15~20	α＋3	α＋8

遞增 遞減

遞增 遞減

（2）<u>**解釋內圓 6 外圓總和 17**</u>：當內外原相差 11 時，〈紅框部分〉都必須放置 5 和 6，11 的組合有 555　666、556　665 和 565　656。但 555　666 中的 666 會超過 17，所以不能使用 555　666，只能放置 556　665 和 565　656。周圍〈藍圈部分〉共有 3 個 0 和 1 個 1，且 0 的周圍都是 5 和 6，導致不是 0 5 重複就是 0 6 重複。

0	6	6	5	0
6				5
5		■		6
6				5
0	5	5	6	1

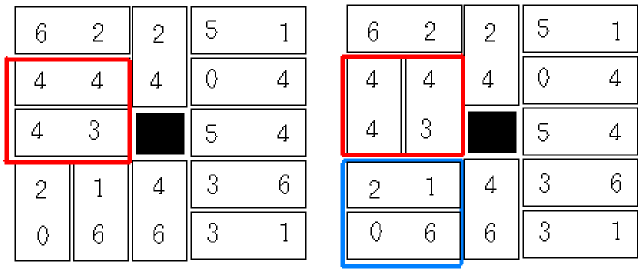
（3）進而解釋 5 × 5 骨牌同心圓總和範圍的限制：

<table>
<tr><th>特例</th><th>圖例</th><th>說明</th></tr>
<tr><td>內 4 外 7
內 4 外 15</td><td><table><tr><td>0</td><td>3</td><td>1</td><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td></td><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr></table></td><td>內 4 外 7 只能用到 0、1、2、3 這四個數，如果內圓用 4，那 0 就會使用超過 8 個。24 個格子平分這四個數，那每一個數字都要填 6 個，可是都沒有出現 4、5、6 三個數字，所以是無法成功的。</td></tr>
<tr><td>內 5 外 7
內 5 外 16</td><td><table><tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td></td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>5</td></tr></table></td><td>這裡 1 和 0 已經使用太多次，骨牌會重覆，也是不可成功的。</td></tr>
<tr><td>內 6 外 7
內 6 外 17</td><td><table><tr><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td></td><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>5</td></tr></table></td><td>如果要使用最小值，一定會有 6 個 1 跟 6 個 0 以上，如果要有 6 個 1 和 6 個 0 就要有兩組 0~6 七個數字，6x2+7x2 等於 26，再減掉 0+1 等於 25，但是方格紙有 24 格，所以這也是無法成功的。</td></tr>
<tr><td>內 11 外 20</td><td><table><tr><td>6</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>0</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>6</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td></td><td>6</td><td>5</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>5</td><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td></tr></table></td><td>這裡 4、5、6 這 3 個數字一直替換，可知骨牌一定會重複。</td></tr>
<tr><td>內 12 外 14</td><td><table><tr><td>5</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>6</td><td></td><td>6</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>6</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>6</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>6</td></tr></table></td><td>因為是內圓最大值外圓最小值，所以 6 一定有 6 個，4 個角落旁的數字一定會跟 0.1.2 做結合，6 又跟內圓 2、4 結合，但 2 重複，若用 5+1，則 1 重複，若用 3+3，則 3 自己本身就重複了。所以跟 6 個 6 相連的數字一定只有 4 個，是無法成功的。</td></tr>
</table>

6. 5×5 同心圓的排列

5×5 骨牌同心圓需要使用 12 張骨牌，我們發現 12 張骨牌有一些排列的特色：5×5 的數字排列有很多種，例如內 8 外 16，數字不變只要變換兩張或四張骨牌的方向，就能變成另一種，可見同一組 5×5 骨牌同心圓，只要任意變換骨牌也能出現新組合。

內8外16



結論：

- **5x5 同心圓的內圓總和≠外圓總和。**
- **5x5 同心圓的內圓總和範圍介於 4≦內圓和 α≦12。**
- **當 7≦內圓和 α≦9 時，其外圓總和 β 的最小值與最大值有其固定的範圍：α＋1≦β≦α＋11。**
- **當內圓和不在 7≦α≦9 的範圍內，其外圓最大值逐漸從兩頭遞減；圓最小值逐漸從兩頭遞增。**

伍、 研究結論

1. 4x4 骨牌同心圓

（1） **以內圓和＝α，外圓和為 α＋1，則內外圓總和最小值的範圍為：內圓和＝α，外圓和＝α＋1；先決條件 α≧4。以下圖說明：**

內圓類型	0 4（外圓和＝5）	1 3（外圓和＝6）	2 2（外圓和＝5）
圖例	2 1 0 2 0 0 4 1 0 4 0 1 3 0 1 1	2 2 0 2 0 3 1 2 1 1 3 1 3 0 2 1	1 0 0 4 1 2 2 0 0 2 2 1 3 1 1 0
說明	※當內圓類型為 13 時，外圓最小總和為 6，我們分析原因： ◆ 當**外圓和 α＋1** 時，外圓只能使用點數 1，但此時內圓卻已經使用 2 個 1，8 個 1 扣除已使用 2 的 1，只剩 6 個 1，但是 16、15 不可以使用，因為會大於外圓最小值的設定，若使用 14 則會出現重複。所以當只有 3 個 1 的條件下無法完成最小值 5。 ◆ 探討內外圓最小值時，**外圓至少需要 4 個 1**，所以內圓使用過多的 1 會影響外圓最小值的出現。		

（2） **骨牌張數會有條件的限制內外圓總和最小值。**

（3） 內圓使用不同的數字組合方式，會影響其外圓的最大值或最小值

內圓總和	內圓數字組合	外圓最小值	外圓最大值	備註
3	0＋3	5	14	
	1＋2	**6**（*）	14	
4	0＋4	5	15	
	1＋3	**6**（*）	15	
	2＋2	5	15	外圓和 **6**（×）
8	2＋6	9	19	
	3＋5	9	**18**（*）	
	4＋4	9	19	外圓和 **18**（×）
9	3＋6	10	19	
	4＋5	10	**18**（*）	

（4） 4 × 4 骨牌同心圓總和的範圍：

我們假設內圓和為 α，外圓最小 β 或最大值 γ 的關係如下：

內圓和	外圓和範圍	β	γ
1	5~11	α＋4	α＋10
2	5~13	α＋3	α＋11
3	5~14	α＋2	α＋11
4	5~15	α＋1	α＋11
5	6~16	α＋1	α＋11
6	7~17	α＋1	α＋11
7	8~18	α＋1	α＋11
8	9~19	α＋1	α＋11
9	10~19	α＋1	α＋10
10	11~19	α＋1	α＋9
11	13~19	α＋2	α＋8

遞增 遞減

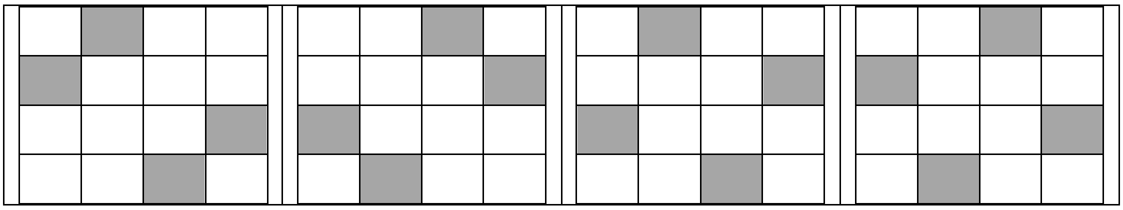
遞增 遞減

- **4×4 同心圓的內圓總和≠外圓總和。**
- **4×4 同心圓的內圓總和範圍介於 1≦內圓和 α≦11。**
- **當 4≦內圓和 α≦8 時，其外圓總和 β 的最小值與最大值有其固定的範圍：α＋1≦β≦α＋11。**
- **當內圓和不在 4≦α≦8 的範圍內，其外圓最大值逐漸從兩頭遞減；外圓最小值逐漸從兩頭遞增。**

（5） 骨牌同心圓可使用 7 種排法，每一種排法經過旋轉翻轉後的變化各不相同，以下表所示：

編號	A	B	C	D	E	F	G
組數	2	8	4	4	8	2	4
合計	32 組						

（6） **4x4 骨牌同心圓的快速解題方式有兩種，分別為【內圓類型法】與【四位置法】，其中以【四位置法】最為快速且簡單。**



0	2	3	0
4	1	0	0
1	0	1	3
0	2	1	2

內圓 1 外圓 5

0	3	3	0
5	1	0	0
1	0	1	4
0	2	2	2

內圓 1 外圓 6

0	2	4	0
4	1	0	1
2	0	1	3
0	3	1	2

內圓 1 外圓 6

0	3	3	0
4	1	0	1
2	0	1	3
0	2	2	2

內圓 1 外圓 6

0	2	4	0
5	1	0	0
1	0	1	4
0	3	1	2

內圓 1 外圓 6

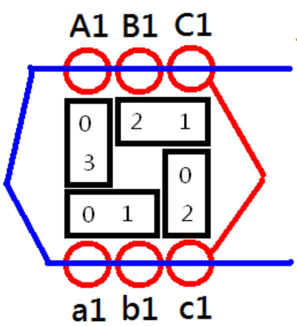
2. 5x5 骨牌同心圓

（1） 以 3×3 內圓總和為 α，5×5 外圓總和為 α＋1，則表示外圓需要 6 個 0 和 6 個 1，當 3×3 內圓數字超過 2 個 0 或 2 個 1，即表示 5×5 同心圓無法順利成功。

（2） 當外圓總和≦9 時，5×5 同心圓就無法成功，因為 0、1、2、3、4 的數字會重複太多次。

（3） 當外圓總和≧10 時，受限於總和大小，5×5 同心圓也無法成功。

以下圖說明：外圓總和＝10



外圓和 10-3=7　總和 7 有 $\boxed{25}$、$\boxed{34}$、$\boxed{16}$

可以 A1＋a1＝7　B1＋b1＝7　C1＋c1＝7

所以 A1＋a1＋B1＋b1＋C1＋c1＝21

但是實際上每行總和應為 10

意即 A1＋a1＋B1＋b1＋C1＋c1＝20

因此 **A1＋a1＋B1＋b1＋C1＋c1＝20≠21**

【結論】**A1＋a1＋B1＋b1＋C1＋c1＝20≠21**， 所以內圓和 3 外圓和 10 無法成功，此道理可類推至外圓總和為 11、12、13 等無法成功的理由。

【發現】當內圓總和＝3，無論外圓總和皆無法成功，所以 **5×5 同心圓的 3×3 內圓最小總和為 4**。

（4） 5 × 5 骨牌同心圓總和的範圍：

我們假設 3×3 內圓和為 α，5×5 外圓最小 β 或最大值 γ 的關係如下：

內圓和	外圓和範圍	β	γ
4	8~12	$\alpha+4$	$\alpha+8$
5	8~14	$\alpha+3$	$\alpha+9$
6	8~16	$\alpha+2$	$\alpha+10$
7	8~18	$\alpha+1$	$\alpha+11$
8	9~19	$\alpha+1$	$\alpha+11$
9	10~20	$\alpha+1$	$\alpha+11$
10	11~20	$\alpha+1$	$\alpha+10$
11	12~20	$\alpha+1$	$\alpha+9$
12	15~20	$\alpha+3$	$\alpha+8$

遞增 遞減

遞增 遞減

【結論】

- 5×5 同心圓的內圓總和≠外圓總和。
- 5×5 同心圓的內圓總和範圍介於 4≦內圓和 α≦12。
- 當 7≦內圓和 α≦9 時，其外圓總和 β 的最小值與最大值有其固定的範圍：$\boldsymbol{\alpha+1\leqq\beta\leqq\alpha+11}$。
- 當內圓和不在 7≦α≦9 的範圍內，其外圓最大值逐漸從兩頭遞減；外圓最小值逐漸從兩頭遞增。

3. 4x4 骨牌同心圓與 5 × 5 骨牌同心圓的比較

	4x4 骨牌同心圓	5 × 5 骨牌同心圓
內圓總和 1~3	✓	✘
內圓最大值 12	✘	✓
外圓最小值的範圍	內圓總和 4≦α ≦6 外圓總和最小值為α +1	內圓總和 7≦α ≦11 外圓總和最小值為α +1
外圓最大值的範圍	內圓總和 2≦α ≦9 外圓總和最大值為α +11	內圓總和 7≦α ≦9 外圓總和最大值為α +11

陸、 展望

開發骨牌同心圓是需要持續性的探討，方能得到更完整的全貌，現階段對於 6x6 同心圓及考量對角線總和的議題都尚未有人提出研究結果，期許我們能完成這項使命。努力加油！

柒、 參考書目

王榮輝（譯）：數學遊樂園之舉一反三。台北：牛頓。

【評語】080412

本研究巧妙的結合了骨牌與同心魔方陣，產生出骨牌同心圓的研究構想，頗具創意，是一份原創性頗高，令人欣賞的佳作，雖乏相關文獻可供參閱，卻也為本作品提供了值得探究的空間，未來若能針對 6x6 同心圓及考量對角線總和的議題再更深入探討，研究結果將令人期待。