中華民國第 51 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第二名

080410

方塊田田又填填

學校名稱：新北市樹林區大同國民小學

作者：	指導老師：
小四　高佳晏	顏榮皇
小六　吳文詠	謝佳鈺

關鍵詞：非負整數、對稱、二進位法

摘要

設有一組數列定義$\{a_{i,j,1}\}$，如下：

1. $a_{1,1,1}=0$
2. $a_{i,j,1}$規定：

 (1) 除了$a_{1,j,1}$，$a_{2,j,1}$，$a_{3,j,1}$，$\cdots$，$a_{i-1,j,1}$ 的整數不能再出現外的最小非負整數。

 (2) 除了$a_{i,1,1}$，$a_{i,2,1}$，$a_{i,3,1}$，$\cdots$，$a_{i,j-1,1}$的整數不能再出現外的最小非負整數。

本研究首先發現$a_{i,j,1}=a_{j,i,1}$，$a_{i,i,1}=0$，$a_{1,j,1}=j-1$，$a_{2,j,1}=(j-1)-(-1)^j$。並發現下列現象，並構造$A_{1,r}$方塊。

$$A_{1,1}=[0]，A_{1,2}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}，A_{1,3}=\begin{bmatrix}0&1&2&3\\1&0&3&2\\2&3&0&1\\3&2&1&0\end{bmatrix}，$$

設$A_{1,r}$成立，$A_{1,r}=[a_{i,j,1}]_{2^{k-1}\times 2^{k-1}\times 1}$，$A^*_{1,r}=[b_{i,j,1}]_{2^{k-1}\times 2^{k-1}\times 1}$，則$b_{i,j,1}=a_{i,j,1}+2^{r-1}$

$A_{1,r}$方塊分割成 4 個方塊，$A_{1,r}=\begin{bmatrix}B_{1,r-1}&C_{1,r-1}\\D_{1,r-1}&E_{1,r-1}\end{bmatrix}$，則$A_{1,r}=\begin{bmatrix}B_{1,r-1}&B^*_{1,r-1}\\B^*_{1,r-1}&B_{1,r-1}\end{bmatrix}$。

本研究發現方塊的對稱，主對角線，次對角線的性質，並利用二進位法尋找$a_{i,j,1}$的一般式。

本研究並延伸到三維空間，發現三維方塊的構造、三維的軸對稱、三維空間最小步數的奇偶性及以二進位法探討三維空間一般式。

壹、前言

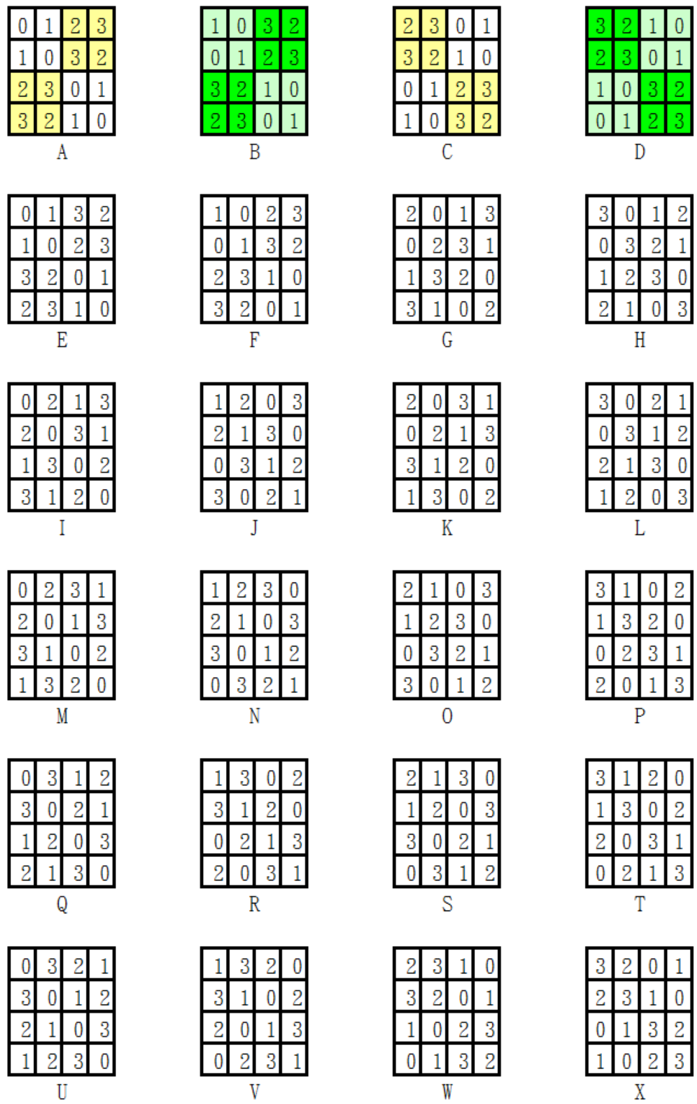
一、研究動機

設計一個4×4特殊魔方陣規則：

4×4方塊中，每一列0、1、2、3只能出現一次；

4×4方塊中，每一行0、1、2、3只能出現一次；)

小的2×2方陣在4×4方塊中呈對角關係，數字安排要相同：



圖一、4x4特殊魔方陣

如圖一，在二維空間4×4特殊魔方陣是24種。

改變遊戲規後，即是本研究的研究主題。

二、研究主題

二維的平面中，考慮方塊：

（1） $a_{1,1,1}=0$

(2) $a_{i,j,1}$：$\forall i\geq 2,\ \forall j\geq 2$；

除了$a_{1,j,1}$，$a_{2,j,1}$，$a_{3,j,1}$，…，$a_{i-1,j,1}$ 不能再出現外的最小非負整數。

除了$a_{i,1,1}$，$a_{i,2,1}$，$a_{i,3,1}$，…，$a_{i,j-1,1}$ 不能再出現外的最小非負整數。

本研究在於如何構造方塊$A_{1,r}$，觀察$A_{1,r}$方塊的性質並列出$a_{i,j,1}$一般式。

貳、二維平面

一、構造$A_{1,r}$方塊

本部分討論二維空間，都以第 1 層最為討論範圍，即三度空間中 Z 軸為 1；顯然，

$$A_{1,1}=[0]_{2^0\times 2^0\times 1}$$

命題一、$A_{1,2}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}_{2^1\times 2^1\times 1}$。

【證明】

考慮二維空間的第一層$A_{1,1}=[0]_{2^0\times 2^0\times 1}$。

在$A_{1,2}$第 1 行第 2 列，$a_{1,2,1}$只能選擇 1，即$a_{1,2,1}=1$；

在$A_{1,2}$第 2 行第 1 列，$a_{2,1,1}$只能選擇 1，即$a_{2,1,1}=1$；

考慮$a_{1,2,1}=1$，$a_{2,1,1}=1$，在$A_{1,2}$第 2 行第 2 列，$a_{2,2,1}$只能選擇 0，即$a_{2,2,1}=0$。

□

構造 $A_{1,2}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}_{2^1\times 2^1\times 1}$ 後，可以發現：

命題二、 $A_{1,2}$ 中，每一列的 0 和 1 只出現 1 次。每一行的 0 和 1 只出現 1 次。

命題三、 $A_{1,3}=\begin{bmatrix}0&1&2&3\\1&0&3&2\\2&3&0&1\\3&2&1&0\end{bmatrix}_{2^2\times 2^2\times 1}$

【證明】

依命題二， $a_{1,3,1}=2$ 即 $a_{1,4,1}=3$ ；

$a_{1,3,1}=2$ 即 $a_{2,3,1}=3$ ；

$a_{1,4,1}=3$ ， $a_{2,3,1}=3$ 即 $a_{2,4,1}=2$ ；

同理， $a_{3,1,1}=2$ 即 $a_{4,1,1}=3$ ；

$a_{3,1,1}=2$ 即 $a_{3,2,1}=3$ ；

$a_{4,1,1}=3$ ， $a_{3,2,1}=3$ 即 $a_{4,2,1}=2$ ；

考慮 $A_{1,3}$ 中第 3 列 $a_{1,3,1}=2$ ， $a_{2,3,1}=3$ ；第 4 列 $a_{1,4,1}=3$ ， $a_{2,4,1}=2$ ；

第 3 行 $a_{3,1,1}=2$ ， $a_{3,2,1}=3$ ；第 4 行 $a_{4,1,1}=3$ ， $a_{4,2,1}=2$ ；

所以，在 $A_{1,3}$ 中 $a_{3,3,1}=0$ ， $a_{4,3,1}=1$ ， $a_{3,4,1}=1$ ， $a_{4,4,1}=0$ 。

□

定義： $A^*_{1,2}=\begin{bmatrix}2&3\\3&2\end{bmatrix}_{2^1\times 2^1\times 1}$

命題四、 $A_{1,2}=\left[a_{i,j,1}\right]_{2^1\times 2^1\times 1}$ ， $A^*_{1,2}=\left[b_{i,j,1}\right]_{2^1\times 2^1\times 1}$ ， 則 $b_{2^2\times 2^2\times 1}=a_{2^2\times 2^2\times 1}+2$ 。

命題五、 $A_{1,3}$ 分割成四塊， $A_{1,3}=\begin{bmatrix}0&1&2&3\\1&0&3&2\\2&3&0&1\\3&2&1&0\end{bmatrix}_{2^2\times 2^2\times 1}=\begin{bmatrix}A_{1,2}&A^*_{1,2}\\A^*_{1,2}&A_{1,2}\end{bmatrix}_{2^2\times 2^2\times 1}$ 。

命題六： $A_{1,3}=\begin{bmatrix}0&1&2&3\\1&0&3&2\\2&3&0&1\\3&2&1&0\end{bmatrix}_{2^2\times2^2\times1}$ ，

每一列的 0、1、2 和 3 只出現 1 次，

每一行的 0、1、2 和 3 只出現 1 次。

定義：$A_{1,r}=[a_{i,j,1}]_{2^{k-1}\times2^{k-1}\times1}$ 則 $A^*_{1,r}=[b_{i,j,1}]_{2^{k-1}\times2^{k-1}\times1}$ ，其中，$b_{i,j,1}=a_{i,j,1}+2^{r-1}$ 。

命題七、

若 $A_{1,r}$ 每一列由 0 至 $2^{r-1}-1$ 出現一次，則 $A^*_{1,r}$ 每一列由 2^{r-1} 至 2^r-1 出現一次；

若 $A_{1,r}$ 每一行由 0 至 $2^{r-1}-1$ 出現一次，則 $A^*_{1,r}$ 每一行由 2^{r-1} 至 2^r-1 出現一次。

命題八、 $A_{1,r}$ 方塊分割成 4 個方塊，$A_{1,r}=\begin{bmatrix}B_{1,r-1}&C_{1,r-1}\\D_{1,r-1}&E_{1,r-1}\end{bmatrix}$，則 $A_{1,r}=\begin{bmatrix}B_{1,r-1}&B^*_{1,r-1}\\B^*_{1,r-1}&B_{1,r-1}\end{bmatrix}$。

【證明】

直觀觀察如 $A_{1,1}=[0]_{2^0\times2^0\times1}$ 、命題一及命題三。

依命題七，若 $A_{1,r-1}$ 每一列 0 至 $2^{r-2}-1$ 出現一次，

每一行數字由 0 至 $2^{r-2}-1$ 出現一次，

則 $D_{1,r-1}=C_{1,r-1}=B^*_{1,r-1}$ ；

同時，$B^*_{1,r-1}$ 每一列數字由 $2^{r-2}-1$ 至 $2^{r-1}-1$ 出現一次，

$B^*_{1,r-1}$ 每一行數字由 $2^{r-2}-1$ 至 $2^{r-1}-1$ 出現一次，

則 $E_{1,r-1}=B_{1,r-1}$ 。

□

由命題六及命題八可以構造出 $A_{1,4}$ 方塊如圖四。

0	1						
1	0						

圖二、$A_{1,2}$ 方塊

0	1	2	3				
1	0	3	2				
2	3	0	1				
3	2	1	0				

圖三、$A_{1,3}$ 方塊

0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	3	2	5	4	7	6
2	3	0	1	6	7	4	5
3	2	1	0	7	6	5	4
4	5	6	7	0	1	2	3
5	4	7	6	1	0	3	2
6	7	4	5	2	3	0	1
7	6	5	4	3	2	1	0

圖四、$A_{1,4}$ 方塊

二、$a_{1,i,1}$及$a_{2,i,1}$ 的數值

命題九、給定$A_{1,r}$方塊，$a_{1,j,1}=j-1$。

【證明】

如圖五，

$a_{1,1,1}=0=1-1=j-1$。

$a_{1,1,1}=0$ 則 $a_{1,2,1}=1=2-1=j-1$。

$a_{1,1,1}=0$ 且 $a_{1,2,1}=1$ 則 $a_{1,3,1}=2=3-1=j-1$。

由第一行$a_{1,1,1}=0$，$a_{1,2,1}=1$，$a_{1,3,1}=2$，

假設 $j\le w$ 時$a_{1,j,1}=j-1$成立，

即在第 1 行，$j\le w$ 時$0\le a_{1,j,1}\le w-1$，0、1、2、⋯、$w-1$唯一存在，

所以當 $j=w+1$時，$a_{1,w+1,1}=w+1-1=w$。依數學歸納法得證。

0	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

圖五、$a_{1,j,1}=j-1$

□

命題十、給定$A_{1,r}$方塊，$a_{2,j,1}=(j-1)-(-1)^j$

【證明】

(i)　直觀$a_{2,2k-1,1}=2k-1$如圖六；直觀$a_{2,2k,1}=2k-2$如圖七。

(ii)　由圖六及圖七，設$w\le 2k-2$，第 2 行，0、1、2、⋯、$2k-3$ 唯一出現，

由(i)得到$a_{1,2k-1,1}=2k-2$，$a_{2,2k-1,1}=2k-1$，

由(i)得到$a_{1,2k,1}=2k-1$，又$a_{2,2k-1,1}=2k-1$，所以$a_{2,2k,1}=2k-2$。

(iii)　$-(-1)^{2k-1}=1$，$a_{2,2k-1,1}=2k-1=(2k-1)-1-(-1)^{2k-1}$

(iv)　$-(-1)^{2k}=-1$，$a_{2,2k,1}=2k-2=((2k)-1)-(-1)^{2k}$。

□

0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	3	2	5	4	7	6
2	3						
3	2						
4	5						
5	4						
6	7						
7	6						

圖六、$a_{2,2k-1,1}=2k-1$

0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	3	2	5	4	7	6
2	3						
3	2						
4	5						
5	4						
6	7						
7	6						

圖七、$a_{2,2k,1}=2k-2$

三、$A_{1,r}$ 方塊的對角線主與次對角線

命題十一、給定 $A_{1,r}$ 方塊，則主對角線 $a_{i,i,1}=0$。

【證明】

如圖八，$a_{1,1,1}=0$，即 $a_{i,1,1}>0$，$\forall i\geq 2$；且 $a_{1,j,1}>0$，$\forall j\geq 2$。

$a_{2,1,1}>0$，且 $a_{1,2,1}>0$，則 $a_{2,2,1}=0$。

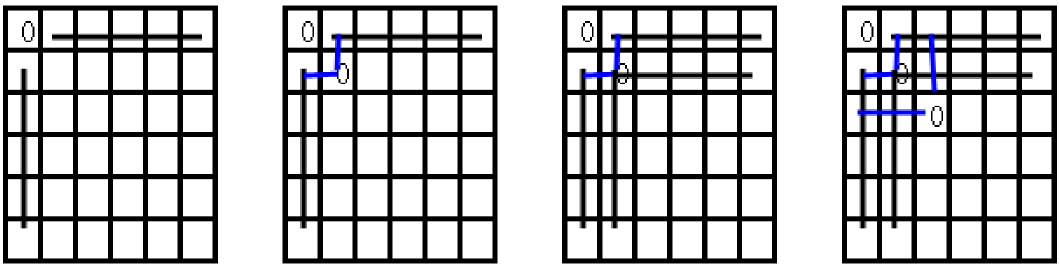
$a_{2,2,1}=0$，即 $a_{i,2,1}>0$，$\forall i\geq 3$；且 $a_{2,j,1}>0$，$\forall j\geq 3$。

$a_{3,1,1}>0$，$a_{3,2,1}>0$，$a_{1,3,1}>0$，且 $a_{2,3,1}>0$，則 $a_{3,3,1}=0$。

設 $i=w$ 時，$a_{w,w,1}=0$，即 $a_{i,w,1}>0$，$\forall i\geq w+1$；且 $a_{w,j,1}>0$，$\forall j\geq w+1$。

$a_{w+1,j,1}>0$，$1\leq j\leq w$；且 $a_{i,w+1,1}>0$，$1\leq i\leq w$ 則 $a_{w+1,w+1,1}=0$。

依數學歸納法得證。



甲　　乙　　丙　　丁

圖八、$a_{i,i,1}=0$ 的演算

□

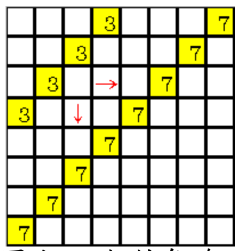
命題十二、給定 $A_{1,r}$ 方塊，$r\geq 2$，則 $A_{1,r}$ 次對角線 $a_{i,2^{k-1}+1-i,1}=2^{k-1}-1$。

【證明】

$A_{1,2}$ 方塊次對角線 $a_{i,2^1+1-i,1}=1=2^{2-1}-1$，

$A_{1,3}$ 方塊次對角線 $a_{i,2^1+1-i,1}=3=2^{3-1}-1$，如圖九。

設 $r=m$ 成立，即 $a_{i,2^{m-1}+1-i,1}=2^{m-1}-1$。



圖九、次對角線

當 $r=m+1$，將 $A_{1,m+1}$ 分割成 4 個方塊，則 $A_{1,m+1}=\begin{bmatrix} A_{1,m} & A^*_{1,m} \\ A^*_{1,m} & A_{1,m} \end{bmatrix}$。

$A_{1,m}(a_{i,j})$ 及 $A^*_{1,m}(b_{i,j})$，$b_{i,j}=a_{i,j}+2^{m-1}$，$a_{i,2^m+1-i,1}=2^{m-1}-1+2^{m-1}=2^m-1$。

□

以 $A_{1,5}$ 方塊為例，可細分為 16 個小區塊，其小區域次對角線數值如圖十的甲部分；再觀察圖十的乙部分、丙部分及丁部分可以推論命題十五。

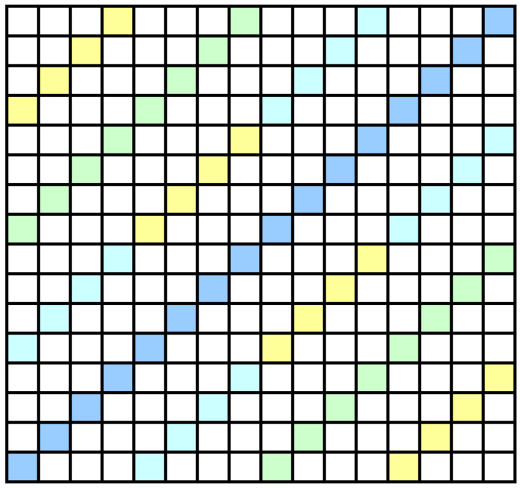
圖十中的綠色箭頭是增加數值，

藍色箭頭是不增不減，

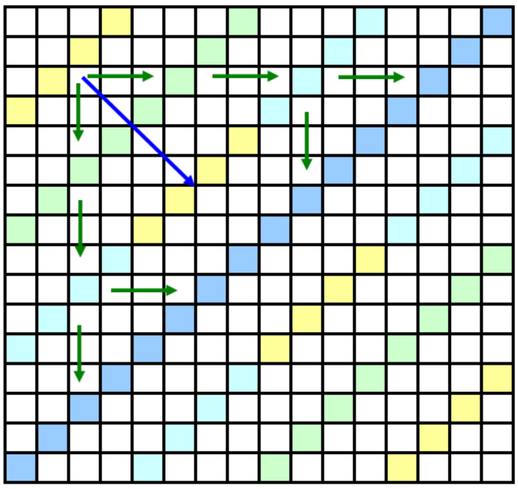
紅色箭頭則減少數值。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

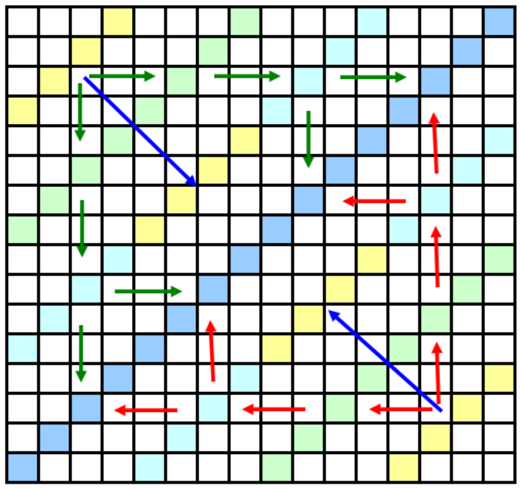
甲



乙



丙

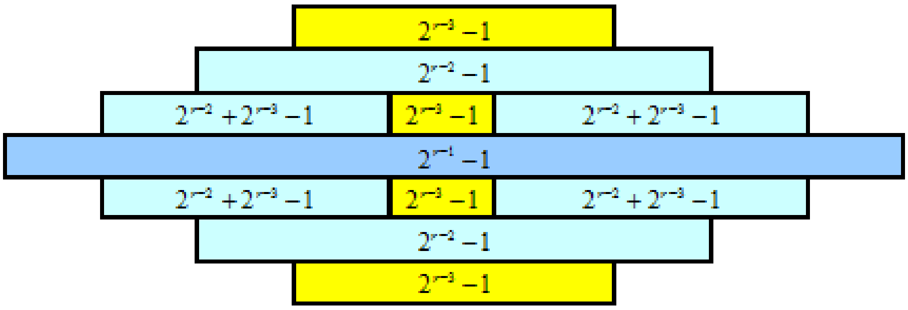


丁

圖十、$A_{1,5}$ 方塊的數值變化示意圖

命題十三、

給定 $A_{1,r}$ 方塊，$r \geq 3$，可分割成 16 個小方塊各個小區塊的分別如圖十一。



圖十一、$A_{1,r}$ 方塊分割成 16 個小方塊後次對角線數值

四、對稱

命題十四、給定 $A_{1,r}$ 方塊，$a_{i,j,1} = a_{j,i,1}$。

命題十五、給定 $A_{1,r}$ 方塊，延著主對角線 $a_{i,i,1} = 0$，$A_{1,r}$ 方塊出現線對稱。

命題十六、給定 $r \geq 2$，延著次對角線 $a_{i,2^{k-1}+1-i,1} = 2^{k-1}-1$，$A_{1,r}$ 方塊出現線對稱。

【證明】

直觀觀察：$A_{1,2}$ 方塊延著次對角線出現線對稱，如圖十二；

$A_{1,3}$ 方塊延著次對角線出現線對稱，如圖十三；

$A_{1,4}$ 方塊延著次對角線出現線對稱，如圖十四。

0	1						
1	0						

圖十二、$A_{1,2}$ 方塊

0	1	2	3				
1	0	3	2				
2	3	0	1				
3	2	1	0				

圖十三、$A_{1,3}$ 方塊

0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	3	2	5	4	7	6
2	3	0	1	6	7	4	5
3	2	1	0	7	6	5	4
4	5	6	7	0	1	2	3
5	4	7	6	1	0	3	2
6	7	4	5	2	3	0	1
7	6	5	4	3	2	1	0

圖十四、$A_{1,4}$ 方塊

設 $r=t-1$ 時，$A_{1,t-1}$ 方塊沿次對角線呈現線對稱。

當 $r=t$ 時，比較 $A_{1,t-1}(a_{i,j,1})$ 和 $A^{*}_{1,t-1}(b_{i,j,1})$，如圖十五，甲的綠色箭頭，

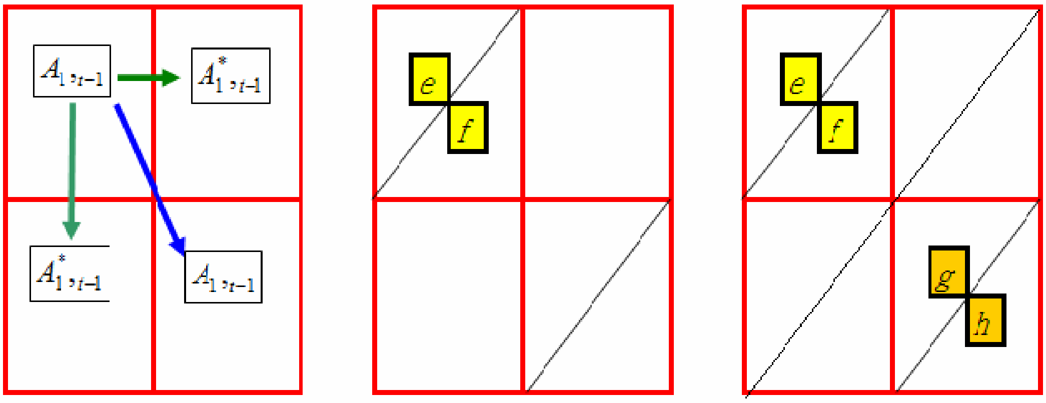
$$b_{i,j,1}=a_{i,j,1}+2^{t-2}，$$

$A_{1,t-1}(a_{i,j,1})$ 呈現線對稱則 $A^{*}_{1,t-1}(b_{i,j,1})$ 呈現線對稱。

如圖十五的乙，假設 $A_{1,t-1}$ 方塊沿次對角線呈現線對稱，任取 e，$e=f$。

如圖十五的甲，藍色箭頭兩邊的方塊是相同，及丙的 $e=g$，$f=h$。

因此，$e=h$，$f=g$，因此，$A_{1,t}$ 方塊沿次對角線呈現線對稱。



甲　　　　乙　　　　丙

圖十五、$A_{1,r}$ 方塊沿次對角線的線對稱

觀察圖十六、發現 $A_{1,5}$ 方塊呈現點對稱。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

圖十六、$A_{1,5}$ 方塊的點對稱

命題十七、給定方塊$A_{1,r}$方塊呈現點對稱。

【證明】

依命題十五、給定$A_{1,r}$方塊，延著主對角線$a_{i,i,1}=0$，$A_{1,r}$方塊出現線對稱。

依命題十六、給定$A_{1,r}$方塊，$r\geq 2$，延著次對角線$a_{i,2^{k-1}+1-i,1}=2^{k-1}-1$，

$A_{1,r}$方塊出現線對稱。

□

由命題十七可推理:

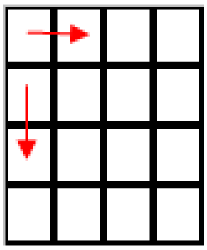
命題十八、

一個方塊沿著其主對角線呈線對稱,又沿次對角線呈現對稱,則該方塊呈點對稱。

五、最少步數的奇偶性

定義：最少步數：

二維空間進位法的最小步數,是由$a_{1,1,1}$到$a_{i,j,1}$的最少步數,其中規定只能「→」及「↓」,不能走斜的及後退。如圖十七：



圖十七

命題十九、二維空間的最少步數為$i+j-2$

【證明】

給定i，從 1 到i的最少步數為$i-1$，

給定j，從 1 到j的最少步數為$j-1$，

則最少步數為$i-1+j-1=i+j-2$

□

以下為 $A_{1,4}$ 的最少步數如甲圖。

偶數的為淡黃色網底，奇數的為淡綠色網底，如乙圖。

又從 $a_{i,j,1}$ 出發，第 1 步必然是奇數，第 2 步是偶數，依此類推，走完奇數步後就是偶數步，走完偶數步後就是奇數，因此將所有的最少步數值 mod 2，如丙圖。

甲

0	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	9
3	4	5	6	7	8	9	10
4	5	6	7	8	9	10	11
5	6	7	8	9	10	11	12
6	7	8	9	10	11	12	13
7	8	9	10	11	12	13	14

乙

0	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	9
3	4	5	6	7	8	9	10
4	5	6	7	8	9	10	11
5	6	7	8	9	10	11	12
6	7	8	9	10	11	12	13
7	8	9	10	11	12	13	14

丙

0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0

圖十八

命題二十、：$i+j-2 \equiv a_{i,j,1} \mod 2$。

六、同餘

如圖十九、給定 $A_{1,4}$ 方塊，$(a_{i,j,1}) \bmod 2$ 有 $2^2 \times 2^2$ 個 $A_{1,2}$ 方塊；

如圖二十、給定 $A_{1,4}$ 方塊，$(a_{i,j,1}) \bmod 4$ 有 2×2 個第 $A_{1,3}$ 方塊。

0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0

圖十九、$(a_{i,j,1}) \bmod 2$

0	1	2	3	0	1	2	3
1	0	3	2	1	0	3	2
2	3	0	1	2	3	0	1
3	2	1	0	3	2	1	0
0	1	2	3	0	1	2	3
1	0	3	2	1	0	3	2
2	3	0	1	2	3	0	1
3	2	1	0	3	2	1	0

圖二十、$(a_{i,j,1}) \bmod 4$

命題二十一、給定第 $A_{1,r}$ 方塊，若除以 2^m，則得到有 $2^{r-m} \times 2^{r-m}$ 個第 $A_{1,r-m}$ 方塊。

【證明】

$x + 2^m \equiv x \pmod{2^m}, \forall m \in N$，所以得到有 $2^{r-m} \times 2^{r-m}$ 個 $A_{1,r-m}$ 方塊。

□

七、方塊對稱

定義:方塊對稱：以圖二十一為例，出現方塊對稱。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

圖二十一、$A_{1,5}$ 方塊對稱

方塊對稱的現象，引導以「降階尋求二維方塊一般式」的演算方法如附錄二。

八、二進位法

尋找二維的方陣一般式是本研究的重要目的，其思考過程：

(一)一個歷經千辛萬苦但被放棄的經驗，如附錄一。

(二)由圖十九，$A_{1,5}$ 方塊對稱啟發的「降階演算法」，如附錄二。

(三)由第 50 屆國展作品『與二進位法邂逅的數列』得到的靈感。

觀察圖二十二，特別注意加上顏色網底的部份，

給定 $a_{i,j,1}-(j-1)$，$i=2^t+1$。

得到下列命題。

命題二十二、$a_{2^t+1,j,1}=j-1-(-1)^{\left[\frac{j+2^t-1}{2^t}\right]}\times 2^t$，$t\in N\cup\{0\}$。

0	1	2	3	4	5	6	7
0	-1	2	1	4	3	6	5
0	1	-2	-1	4	5	2	3
0	-1	-2	-3	4	3	2	1
0	1	2	3	-4	-3	-2	-1
0	-1	2	1	-4	-5	-2	-3
0	1	-2	-1	-4	-3	-6	-5
0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7

圖二十二、$a_{i,j,1}-(j-1)$

定義：$d_{2^t+1,j,1}=-(-1)^{\left[\frac{j+2^t-1}{2^t}\right]}\times 2^t$ ，$t\in N\cup\{0\}$ 。

猜測一、給定 j ，$d_{2^t+1,j,1}$和整數有同樣的加法性質。

命題二十三、以二進位法求一般式

【作法】

先描述演算方法，再以 Excel2003 程式說明演算方法。

第一步驟：演算方法：給定$a_{i,j,1}$，若$i=j$ ，則$a_{i,j,1}$=0。

電腦程式：給定 B2=$i\le 2^{16}-1$ ，D2=$j\le 2^{16}-1$ ，

if $i=j$ then $a_{i,j,1}$=0，即 H20=0。

第二步驟：演算方法：給定$a_{i,j,1}$，$i-1$取二進位法，即$i-1=(c_s c_{s-1}......c_3c_2c_1c_0)_2$ 。

電腦程式：B3=B2-1，B4=int(B3/2)，C4=mod(B3，2)依此遞迴。

第三步驟：演算方法：$a_{i,j,1}=j-1+\sum_{t=0}^{s}(c_t\times d_{2^t+1,j,1})$ 。

電腦程式：給定某一2^t ，設$t=0$即 A4=0，則

E4=(C4)*(-1)*((-1)^(INT((D2+(2^A4)-1)/(2^A4))))*(2^A4)依此遞迴，

直到 $i-1=(c_s c_{s-1}......c_3c_2c_1c_0)_2$ 的 2^s 位。

因為採 Excel2003 程式，設 D2=$j\le 2^{16}-1$ ，故令$2^s=2^{15}$ 。

計算$a_{i,j,1}=j-1+\sum_{t=0}^{s}(c_t\times d_{2^t+1,j,1})$ ，$a_{i,j,1}$H20=$D2-1+SUM(E4:E19)。

□

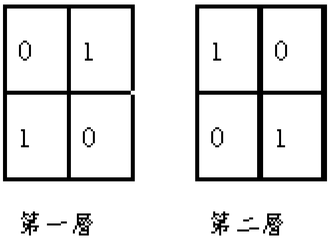
叁、三維空間

一、構造三維的$V(r)$方塊

定義：$V(1)=[0]_{2^0\times 2^0\times 2^0}$

命題二十四、

$V(2)=A_{1,2}+A_{2,2}$



圖二十三

【證明】

考慮三維空間的$V(2)$。

在$A_{1,2}$第 1 行第 2 列，$a_{1,2,1}$只能選擇 1，即$a_{1,2,1}=1$；

在$A_{1,2}$第 2 行第 1 列，$a_{2,1,1}$只能選擇 1，即$a_{2,1,1}=1$；

考慮$a_{1,2,1}=1$，$a_{2,1,1}=1$，在$A_{1,2}$第 2 行第 2 列，$a_{2,2,1}$只能選擇 0，即$a_{2,2,1}=0$。

在$A_{2,2}$第 1 行第 1 列，$a_{1,1,2}$只能選擇 1，即$a_{1,1,2}=1$；

考慮$a_{1,2,1}=1$，$a_{1,1,2}=1$，在$A_{2,2}$第 1 行第 2 列，$a_{1,2,2}$只能選擇 0，即$a_{1,2,2}=0$；

考慮$a_{2,1,1}=1$，$a_{1,1,2}=1$，在$A_{2,2}$第 2 行第 1 列，$a_{2,1,2}$只能選擇 0，即$a_{2,1,2}=0$；

在$A_{2,2}$第 2 行第 2 列，$a_{2,2,2}$只能選擇 1，即$a_{2,2,2}=1$。

□

命題二十五、

當 $z=1$ 且 $x=1$ 時，0、1 出現一次；
當 $z=1$ 且 $x=2$ 時，0、1 出現一次；
當 $z=1$ 且 $y=1$ 時，0、1 出現一次；
當 $z=1$ 且 $y=2$ 時，0、1 出現一次。

當 $z=2$ 且 $x=1$ 時，0、1 出現一次；
當 $z=2$ 且 $x=2$ 時，0、1 出現一次；
當 $z=2$ 且 $y=1$ 時，0、1 出現一次；
當 $z=2$ 且 $y=2$ 時，0、1 出現一次。

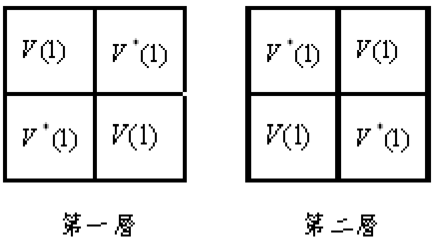
當 $x=1$ 且 $y=1$ 時，0、1 出現一次；
當 $x=1$ 且 $y=2$ 時，0、1 出現一次。

當 $x=2$ 且 $y=1$ 時，0、1 出現一次；
當 $x=2$ 且 $y=2$ 時，0、1 出現一次。

定義：$V(1)=[0]_{2^0\times 2^0\times 2^0}$ ，則 $V^*(1)=[1]_{2^0\times 2^0\times 2^0}$

命題二十六、

將 $V(2)$ 分成 8 塊，$V^*(1)=V(1)+2^0$ ，構造方式如圖二十四：



圖二十四、$V(2)$

定義

設 $V_{r-1}(a_{i,j,k})$ 以成立，$V^*_{r-1}(b_{i,j,k})$ 被定義，$b_{i,j,k}=a_{i,j,k}+2^{r-2}$ 。

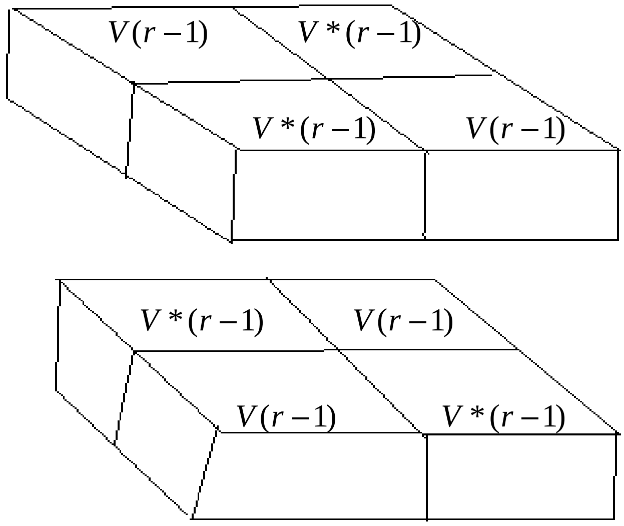
命題二十七、

設 $V(r-1)$ 中，每一個 i 軸，0、1、2、…、$2^{r-2}-1$ 各只出現過一次。
每一個 j 軸，0、1、2、…、$2^{r-2}-1$ 各只出現過一次。
每一個 k 軸，0、1、2、…、$2^{r-2}-1$ 各只出現過一次。
則 $V^*(r-1)$ 中，每一個 i 軸，2^{r-2}、$2^{r-2}+1$、$2^{r-2}+2$、…、2^{r-1} 各只出現過一次。
每一個 j 軸，2^{r-2}、$2^{r-2}+1$、$2^{r-2}+2$、…、2^{r-1} 各只出現過一次。
每一個 k 軸，2^{r-2}、$2^{r-2}+1$、$2^{r-2}+2$、…、2^{r-1} 各只出現過一次。

設 $V(r)$ 維邊長是 2^{r-1} 的正方形方塊。

$$V(r)=A_{1},_{r}+A_{2},_{r}+A_{3},_{r}+\cdots+A_{2^{r-1}},_{r}=\sum_{i=1}^{2^{r-1}}A_{k},_{r}$$

將 $V(r)$ 分成 8 塊，構造方式如圖二十五：



圖二十五、$V(r)$ 構造

二、與 4×4 特殊魔方陣的比較

考慮前言的研究動機提過 4×4 特殊魔方陣，如圖一，
本研究的 $A_{1},_{3}$ 就是圖一的 A；本研究的 $A_{2},_{3}$ 就是圖一的 B；
本研究的 $A_{3},_{3}$ 就是圖一的 C；本研究的 $A_{4},_{3}$ 就是圖一的 D。

推理得到下列命題：

命題二十八、本研究的 $A_{4k-3},_{3}$，如圖二十六；本研究的 $A_{4k-2},_{3}$，如圖二十七；
本研究的 $A_{4k-1},_{3}$，如圖二十八；本研究的 $A_{4k},_{3}$， 如圖二十九。

$4k-4$	$4k-3$	$4k-2$	$4k-1$
$4k-3$	$4k-4$	$4k-1$	$4k-2$
$4k-2$	$4k-1$	$4k-4$	$4k-3$
$4k-1$	$4k-2$	$4k-3$	$4k-4$

圖二十六、$A_{4k-3},_{3}$

$4k-3$	$4k-4$	$4k-1$	$4k-2$
$4k-4$	$4k-3$	$4k-2$	$4k-1$
$4k-1$	$4k-2$	$4k-3$	$4k-4$
$4k-2$	$4k-1$	$4k-4$	$4k-3$

圖二十七、$A_{4k-2},_{3}$

$4k-2$	$4k-1$	$4k-4$	$4k-3$
$4k-1$	$4k-2$	$4k-3$	$4k-4$
$4k-4$	$4k-3$	$4k-2$	$4k-1$
$4k-3$	$4k-4$	$4k-1$	$4k-2$

圖二十八、$A_{4k-1,3}$

$4k-1$	$4k-2$	$4k-3$	$4k-4$
$4k-2$	$4k-1$	$4k-4$	$4k-3$
$4k-3$	$4k-4$	$4k-1$	$4k-2$
$4k-4$	$4k-3$	$4k-2$	$4k-1$

如圖二十九、$A_{4k,3}$

圖二十二用 $a_{i,j,1}-(j-1)$ 而發現規律，進而以二進位法處理二維平面的一般式。

本研究模仿圖二十二的方法，計算：$A_{4k-3,3}-A_{1,3}$ 如圖三十；

$A_{4k-2,3}-A_{1,3}$ 如圖三十一。

$A_{4k-1,3}-A_{1,3}$ 如圖三十二。

$A_{4k,3}-A_{1,3}$ 如圖三十三。

同樣有很漂亮的規律，進而利用二進位法處理三維空間的一般式，如下一頁。

$4k-4$	$4k-4$	$4k-4$	$4k-4$
$4k-4$	$4k-4$	$4k-4$	$4k-4$
$4k-4$	$4k-4$	$4k-4$	$4k-4$
$4k-4$	$4k-4$	$4k-4$	$4k-4$

圖三十、$A_{4k-3,3}-A_{1,3}$

$4k-3$	$4k-5$	$4k-3$	$4k-5$
$4k-5$	$4k-3$	$4k-5$	$4k-3$
$4k-3$	$4k-5$	$4k-3$	$4k-5$
$4k-5$	$4k-3$	$4k-5$	$4k-3$

圖三十一、$A_{4k-2,3}-A_{1,3}$

$4k-2$	$4k-2$	$4k-6$	$4k-6$
$4k-2$	$4k-2$	$4k-6$	$4k-6$
$4k-6$	$4k-6$	$4k-2$	$4k-1$
$4k-6$	$4k-6$	$4k-1$	$4k-2$

圖三十二、$A_{4k-1,3}-A_{1,3}$

$4k-1$	$4k-3$	$4k-5$	$4k-7$
$4k-3$	$4k-1$	$4k-7$	$4k-5$
$4k-5$	$4k-7$	$4k-1$	$4k-3$
$4k-7$	$4k-5$	$4k-3$	$4k-1$

圖三十三、$A_{4k,3}-A_{1,3}$。

三、以二進位法探討三維空間一般式

原先平面二進位法一般式為$a_{i,j,1} = j-1+\sum_{s=0}^{t}(c_t \times d_{2^t+1,j,1})$，

定義：$d_{1,j,2^t+1} = -(-1)^{\left[\frac{j+2^t-1}{2^t}\right]} \times 2^t$，$t \in N \cup \{0\}$。

命題二十九：探討三度空間二進位法一般式。

【做法】

第一步驟：演算方法：先用三維第一層一般式。

電腦程式：如三維第一層二進位法的電腦程式。

第二步驟：將每一層都減掉$A_{1,r}$，如圖三十四至圖四十一。

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

圖三十四、$A_{1,4}-A_{1,4}$

1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1

圖三十五、$A_{2,4}-A_{1,4}$

2	2	-2	-2	2	2	-2	-2
2	2	-2	-2	2	2	-2	-2
-2	-2	2	2	-2	-2	2	2
-2	-2	2	2	-2	-2	2	2
2	2	-2	-2	2	2	-2	-2
2	2	-2	-2	2	2	-2	-2
-2	-2	2	2	-2	-2	2	2
-2	-2	2	2	-2	-2	2	2

圖三十六、$A_{3,4}-A_{1,4}$

3	1	-1	-3	3	1	-1	-3
1	3	-3	-1	1	3	-3	-1
-1	-3	3	1	-1	-3	3	1
-3	-1	1	3	-3	-1	1	3
3	1	-1	-3	3	1	-1	-3
1	3	-3	-1	1	3	-3	-1
-1	-3	3	1	-1	-3	3	1
-3	-1	1	3	-3	-1	1	3

圖三十七、$A_{4,4}-A_{1,4}$

4	4	4	4	-4	-4	-4	-4
4	4	4	4	-4	-4	-4	-4
4	4	4	4	-4	-4	-4	-4
4	4	4	4	-4	-4	-4	-4
-4	-4	-4	-4	4	4	4	4
-4	-4	-4	-4	4	4	4	4
-4	-4	-4	-4	4	4	4	4
-4	-4	-4	-4	4	4	4	4

圖三十八、$A_{5,4}-A_{1,4}$

5	3	5	3	-3	-5	-3	-5
3	5	3	5	-5	-3	-5	-3
5	3	5	3	-3	-5	-3	-5
3	5	3	5	-5	-3	-5	-3
-3	-5	-3	-5	5	3	5	3
-5	-3	-5	-3	3	5	3	5
-3	-5	-3	-5	5	3	5	3
-5	-3	-5	-3	3	5	3	5

圖三十九、$A_{6,4}-A_{1,4}$

6	6	2	2	-2	-2	-6	-6
6	6	2	2	-2	-2	-6	-6
2	2	6	6	-6	-6	-2	-2
2	2	6	6	-6	-6	-2	-2
-2	-2	-6	-6	6	6	2	2
-2	-2	-6	-6	6	6	2	2
-6	-6	-2	-2	2	2	6	6
-6	-6	-2	-2	2	2	6	6

圖四十、$A_{7,4}-A_{1,4}$

7	5	3	1	-1	-3	-5	-7
5	7	1	3	-3	-1	-7	-5
3	1	7	5	-5	-7	-1	-3
1	3	5	7	-7	-5	-3	-1
-1	-3	-5	-7	7	5	3	1
-3	-1	-7	-5	5	7	1	3
-5	-7	-1	-3	3	1	7	5
-7	-5	-3	-1	1	3	5	7

圖四十一、$A_{8,4}-A_{1,4}$

第三步驟：演算方式：給定$a_{i,j,k}$，$k-1$取二進位法，$k-1=(g_s g_{s-1}......g_3 g_2 g_1 g_0)_2$

電腦程式：F3=F2-1，F4=int(F3/2)，G4=mod(F3，2)依此遞迴。

第四步驟：演算方法：$a_{i,j,k}=j-1+\sum_{t=0}^{s}(c_t \times d_{2^t+1,j,1})+\sum_{t=0}^{s}(g_t \times d_{1,j,2^t+1})$。

電腦程式：先用三維第一層一般式，再給定某一2^t，設$t=0$即 A4=0，

則 I4= G4*(-1)*((-1)^(INT((D2+(2^A4)-1)/(2^A4))))*(2^A4)

第五步驟：思考方式：如下一頁的圖四十二，先從側面算下來，如三維第一層的方式。不過再從側面算進去時，需要再一次調正負號。

演算方法：

$$a_{i,j,k}=j-1+\sum_{t=0}^{s}(c_t \times d_{2^t+1,j,1})+\sum_{t=0}^{s}(g_t \times d_{1,j,2^t+1}\times(-(-1)^{\left[\frac{i+2^t+1}{2^t}\right]}))$$ 。

電腦程式：

J4= I4*((-1)*((-1)^(INT((B2+(2^A4)-1)/(2^A4)))))

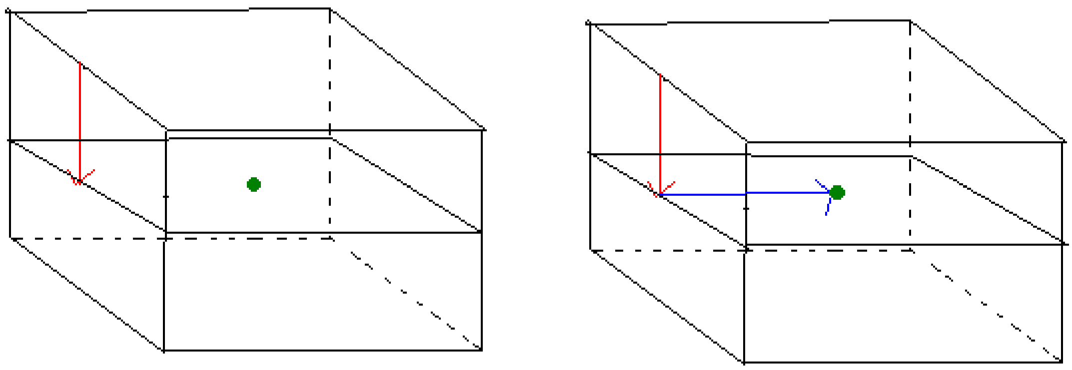
依此遞迴，直到$k-1=(g_s g_{s-1}......g_3 g_2 g_1 g_0)_2$的$2^s$位。

因為採 Excel2003 程式，設 D2=$j \le 2^{16}-1$，故令$2^s=2^{15}$。

計算 $a_{i,j,k} = j-1+\sum_{t=0}^{s}(c_t \times d_{2^t+1,j,1})+\sum_{t=0}^{s}(g_t \times d_{1,j,2^t+1} \times (-(-1)^{\left[\frac{i+2^t+1}{2^t}\right]}))$ ，

M20=$D2-1+SUM(E4:E19)+ SUM(J4:J19)。

甲　　　　　　　　　　　　　　　　　　乙

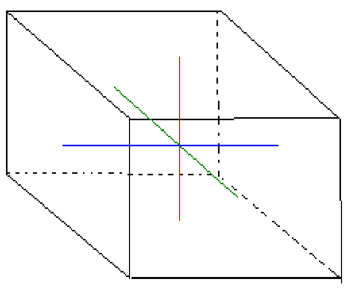


圖四十二、第五步驟調解正負號示意圖

對三維空間本研究利用 Excel2003 的一個例子如附錄三。

四、三維的軸對稱

給定 $V(r)$ 立體方塊，取這個方塊的中心點為原點(0，0，0)，
以藍色的 x 軸為軸心，旋轉 180 度，還是跟原本的一樣。
以綠色的 y 軸為軸心，旋轉 180 度，還是跟原本的一樣。
以紅色的 z 軸為軸心，旋轉 180 度，還是跟原本的一樣。



圖四十三、軸對稱

命題三十、

給定$V(r)$立體方塊，取這個方塊的中心點為原點(0，0，0)，則

對x軸為軸心旋轉180°還是原來樣子的軸對稱，

對y軸為軸心旋轉180°還是原來樣子的軸對稱，

對z軸為軸心旋轉180°還是原來樣子的軸對稱

五、三維空間最小步數的奇偶性

可以利用二維平面的命題二十推理到三維空間。

命題三十一、$i+j+k-3 \equiv a_{i,j,k} \mod 2$。

肆、結果

一、二維平面

1. 方塊構造

$A_{1,1}=[0]_{2^0\times 2^0\times 1}$

$$A_{1,2}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}_{2^1\times 2^1\times 1}$$

$$A_{1,3}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 3 & 2\\ 2 & 3 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}_{2^2\times 2^2\times 1}$$

設 $A_{1,r}$ 成立，$A_{1,r}=[a_{i,j,1}]_{2^{k-1}\times 2^{k-1}\times 1}$ ，$A^*_{1,r}=[b_{i,j,1}]_{2^{k-1}\times 2^{k-1}\times 1}$ ，則 $b_{i,j,1}=a_{i,j,1}+2^{r-1}$

$A_{1,r}$ 方塊分割成 4 個方塊，$A_{1,r}=\begin{bmatrix}B_{1,r-1} & C_{1,r-1}\\ D_{1,r-1} & E_{1,r-1}\end{bmatrix}$ ，則 $A_{1,r}=\begin{bmatrix}B_{1,r-1} & B^*_{1,r-1}\\ B^*_{1,r-1} & B_{1,r-1}\end{bmatrix}$ 。

2. 對角線

給定 $A_{1,r}$ 方塊，則主對角線 $a_{i,i,1}=0$ 。

給定 $A_{1,r}$ 方塊，$r\geq 2$ ，則 $A_{1,r}$ 次對角線 $a_{i,2^{k-1}+1-i,1}=2^{k-1}-1$ 。

3. 對稱

給定 $A_{1,r}$ 方塊，$a_{i,j,1}=a_{j,i,1}$ 。

給定 $A_{1,r}$ 方塊，延著主對角線 $a_{i,i,1}=0$ ，$A_{1,r}$ 方塊出現線對稱。

給定 $r\geq 2$ ，延著次對角線 $a_{i,2^{k-1}+1-i,1}=2^{k-1}-1$ ，$A_{1,r}$ 方塊出現線對稱。

發現 $A_{1,5}$ 方塊呈現點對稱。

給定方塊 $A_{1},_{r}$ 方塊呈現點對稱。

一個方塊沿著其主對角線呈線對稱，又沿次對角線呈現對稱，則該方塊呈點對稱。

4. 最小步數的奇偶性

二維空間的最少步數為 $i+j-2$ ，$i+j-2 \equiv a_{i},_{j},_{1} \mod 2$

5. 同餘

給定第 $A_{1},_{r}$ 方塊，若除以 2^{m} ，則得到有 $2^{r-m} \times 2^{r-m}$ 個第 $A_{1},_{r-m}$ 方塊。

6. 二進位法

定義：$i-1=(c_{s}c_{s-1}......c_{3}c_{2}c_{1}c_{0})_{2}$

$a_{i},_{j},_{1}=j-1+\sum_{t=0}^{s}(c_{t} \times d_{2^{t}+1},_{j},_{1})$ ，其中 $a_{2^{t}+1},_{j},_{1}=j-1-(-1)^{\left\lceil \frac{j+2^{t}-1}{2^{t}} \right\rceil} \times 2^{t}$ ，

$$d_{2^{t}+1},_{j},_{1}=-(-1)^{\left\lceil \frac{j+2^{t}-1}{2^{t}} \right\rceil} \times 2^{t}$$

二、三維空間

1. 構造

定義：$V(1)=[0]_{2^{0}\times 2^{0}\times 2^{0}}$ ，$V(2)=A_{1},_{2}+A_{2},_{2}$ 。

定義：設 $V_{r-1}(a_{i},_{j},_{k})$ 以成立，$V_{r-1}^{*}(b_{i},_{j},_{k})$ 被定義，$b_{i},_{j},_{k}=a_{i},_{j},_{k}+2^{r-2}$ 。

設 $V(r)$ 維邊長是 2^{r-1} 的正方形方塊。

$$V(r)=A_{1},_{r}+A_{2},_{r}+A_{3},_{r}+\cdots+A_{2^{r-1}},_{r}=\sum_{i=1}^{2^{r-1}}A_{k},_{r}$$

2. 以二進位法探討三維空間一般式

定義：$i-1=(c_s c_{s-1}\ldots\ldots c_3 c_2 c_1 c_0)_2$，

$k-1=(g_s g_{s-1}\ldots\ldots g_3 g_2 g_1 g_0)_2$。

$d_{1,j,2^t+1}=-(-1)^{\left[\frac{j+2^t-1}{2^t}\right]}\times 2^t$，$t\in N\cup\{0\}$。

計算 $a_{i,j,k}=j-1+\sum_{t=0}^{s}(c_t\times d_{2^t+1,j,1})+\sum_{t=0}^{s}(c_t\times d_{1,j,2^t+1}\times(-(-1)^{\left[\frac{i+2^t+1}{2^t}\right]}))$。

3. 三維的軸對稱

給定$V(r)$立體方塊，取這個方塊的中心點為原點(0，0，0)，則

對 x 軸為軸心旋轉 180° 還是原來樣子的軸對稱，

對 y 軸為軸心旋轉 180° 還是原來樣子的軸對稱，

對 z 軸為軸心旋轉 180° 還是原來樣子的軸對稱。

4. 三維空間最小步數的奇偶性

可以利用二維平面推理到三維空間。$i+j+k-3\equiv a_{i,j,k} \mod 2$。

參考資料

1. 題目來自於科學教育館民國100年1月24日科學教師科展研習講稿,未出版。
2. 顏嘉佑，天使與魔鬼，第29頁，第49屆全國科學展覽會，科學教育館，臺北。

民國100年4月10日

http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/49/pdf/080409.pdf

3. 顏嘉佑，與二進位法邂逅的數列，第4頁，第50屆全國科學展覽會，科學教育館，臺北。

民國100年4月10日

http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/50/pdf/030418.pdf

附錄一、$a_{i,j,1}$一般式的原先想法

舉$a_{13,31,1}$：

$a_{1,32,1}$=32−1=31＞30＞0，且$a_{1,32,1}$最接近 30，區塊第一個數為$\dfrac{31+1}{2}=16$。

$a_{1,16+1}\sim a_{1,32}$每列都有(32−16)、(32−16+1)、(32−16+2)、…、31，則$a_{13,31}$落在第 5 區塊的倒數第 2 列，如表一及表二。

$a_{13,32}=32-1-13+1=19$，再利用$a_{1,j,1}$轉成$a_{2,j,1}$的方式，為 $19+(-1)^{13}=18$

表一

$a_{1,2^{r},1}$(尾數)	$a_{1,2^{r-1}+1,1}$ (區塊的第一個數)	$A_{1,r}$
1	1	$A_{1,1}$
3	2	$A_{1,2}$
7	4	$A_{1,3}$
…	…	$A_{1,4}$
$2^{r}-1$	2^{r-1}	$A_{1,r}$

表二

$i=32$	$i=31$	$i=30$	$i=29$
31	30	29	28
30	31	28	29
29	28	31	30
28	29	30	31
…	…	…	…
19	18	17	16
18	19	16	17
17	16	19	18
16	17	18	19

本研究原先想利用區塊及方塊對稱處理$a_{i,j,1}$一般式，但始終無法有很有效的系統整理。後來發現圖二十二、$a_{i,j,1}-(j-1)$有規律出現，即命題二十二：

$$a_{2^t+1,j,1}=j-1-(-1)^{\left[\frac{j+2^t-1}{2^t}\right]}\times 2^t \text{ ， } t\in N\cup\{0\} \text{ 。}$$

最後利用命題二十三、以二進位法求一般式。

數學的美麗就在於尋找答案的過程，發現不同的思考方向，產生新的解法。

附錄二、降階演算方法

以降階演算法求二維平面一般式，概念來自圖十九、$A_{1,5}$方塊對稱。

【作法】

第一步驟：給定$a_{i,j,1}$，若$i=j$，則$a_{i,j,1}$=0。

第二步驟：設$2^{k-2}\le i\le 2^{k-1}-1$，進入第三步驟。

第三步驟：若$i > j$則$a_{i,j,1}=a_{j,i,1}$，進入第四步驟，如圖三十六的甲。

第四步驟：$a_{1,j,1}=j-1$；$a_{2,j,1}=j-1-(-1)^{j}$；

並累計過去計算$s(k)$本次的$a_{1,j,1}$或$a_{2,j,1}$，合計為$a_{i,j,1}$；

若此時$a_{i,j,1}$，$i\ge 3$則進入第五步驟。

第五步驟：若此時$a_{i,j,1}$中$2^{k-2}\le j\le 2^{k-1}-1$則$a_{i-2^{k-2},j-2^{k-2},1}=a_{i,j,1}$，

並記錄$s(k)=0$，如圖三十六的乙。

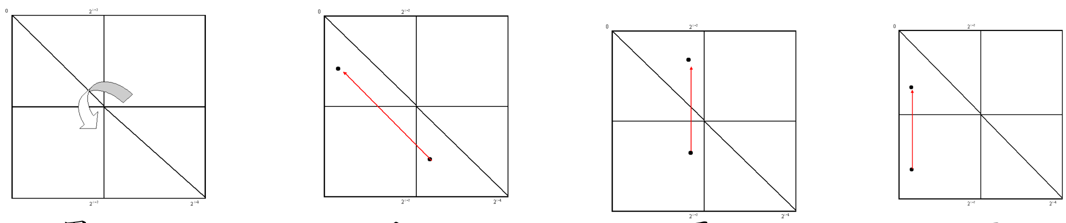
若此時$a_{i,j,1}$中$1\le j\le 2^{k-2}-1$則$a_{i-2^{k-2},j,1}=a_{i,j,1}$，

並記錄$s(k)=2^{k-2}$，如圖三十六的丙和丁。

此時進入第六步驟。

第六步驟：判斷此時的$i-2^{k-2}$的範圍，並依其範圍進入另一次迴圈，

由第二步驟開始。



甲 乙 丙 丁

圖三十六、二維平面的降階方法

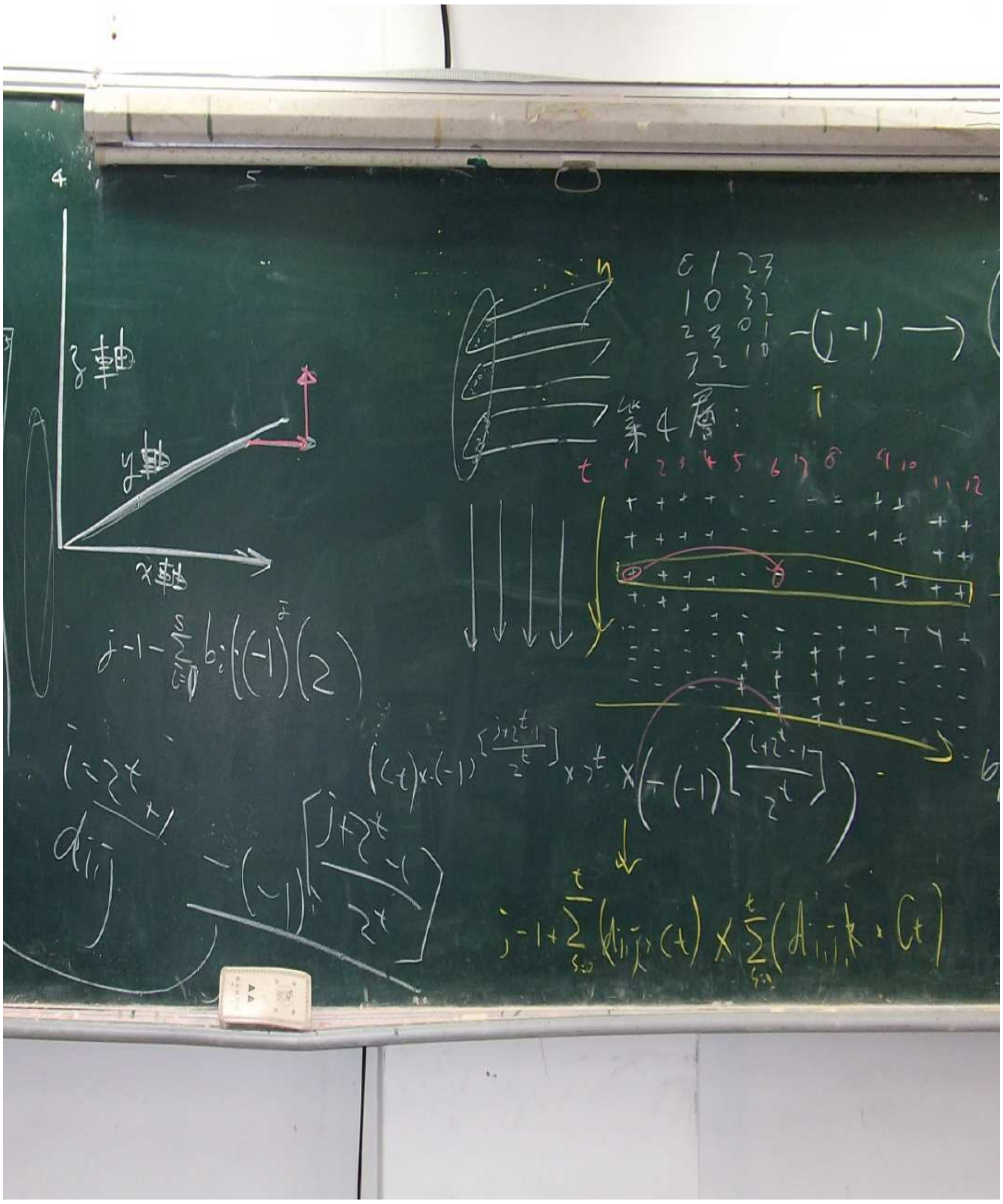
□

附錄三、利用 Excel2003 對三維空間一般式的一個例子

表三、$a_{4,3,3}=3$的一個 Excel2003 計算例子

t	i		j		k								
	4		3		3								
	3				2								
0	1	1		1	1	0		0	0				
1	0	1		-2	0	1		-2	2				
2	0	0		0	0	0		0	0				
3	0	0		0	0	0		0	0				
4	0	0		0	0	0		0	0				
5	0	0		0	0	0		0	0				
6	0	0		0	0	0		0	0				
7	0	0		0	0	0		0	0				
8	0	0		0	0	0		0	0				
9	0	0		0	0	0		0	0				
10	0	0		0	0	0		0	0				
11	0	0		0	0	0		0	0				
12	0	0		0	0	0		0	0				
13	0	0		0	0	0		0	0				
14	0	0		0	0	0		0	0				
15	0	0		0	0	0		0	0				
				-1					2		ai, j, k的值	3	

附錄四、數學演算照片的舉例



圖三十七、本研究利用黑板演算三維空間的二進位法一般式

【評語】080410

1. 主題的選擇相當有挑戰性，討論也相當深入，並掌握問題的基本結構。
2. 問題的延伸性及創意性較弱，但數學的深度值得肯定。
3. 推演到三維的情況，也相當有趣，討論也相當完整。