

中華民國第 51 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 數學科

最佳團隊合作獎

080409

滾動棋積—三角正多面體與滾積木遊戲

學校名稱：臺中市私立明道普霖斯頓國民小學

作者： 小五 賴彥豪 小四 李玟叡 小四 葉亮辰 小四 林彥好	指導老師： 陳志平
---	--------------

關鍵詞：展開圖、滾積木、棋盤

滾動“棋積”--三角正多面體與滾積木遊戲

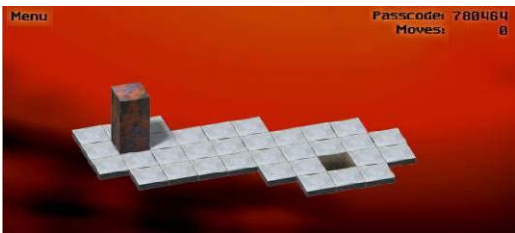
摘要

本研究探討由正三角形所組成的正多面體及其展開圖的型式，多面體的其中幾面塗上顏色，在同樣由正三角形所組成的棋盤上翻滾，找出翻滾產生的規律，並自創新的滾積木遊戲。

壹、研究動機

在康軒版五年級上學期數學課本第三單元「正方體、長方體和球」中，我們學到正方體、長方體的展開圖，老師也介紹其他立體圖形，我們想對展開圖進行研究，老師另外介紹了一個滾積木遊戲的網站，我們玩了幾關後就玩上癮，在長時間的努力下，終於把 33 關全部過關，並記錄下每一關如何過關，如紀錄表一。

滾積木遊戲是由長方體的積木及特定的棋盤上規定一個正方形出口組成，全部過關之後我們想利用正三角形組合正多面體自創相關遊戲。

	關 卡	跳關碼	所需步數
	一	780464	7 步
→ ↓ →→ ↓ ↓ →。			

貳、研究目的

- 一、探討由正三角形組合而成多面體的展開圖，及其各面上色的情形。
- 二、設計由正三角形組成的棋盤。
- 三、利用正三角形做成的正多面體及棋盤，設計新的滾積木遊戲。

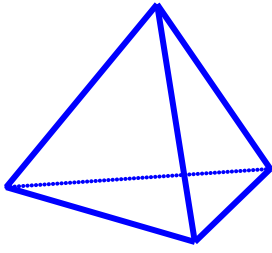
參、研究器材及專有名詞

- 一、研究器材：組合智慧片、筆、計算紙、記錄表、Microsoft Office Word 軟體。
- 二、專有名詞：組合、線對稱、點對稱。
 - (一) 組合：n 個相異物中取 m 個出來，會有 $C(n,m) = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ 種情形。
 - (二) 線對稱：將圖形對摺。如果圖形能完全疊合，即為線對稱圖形。
 - (三) 點對稱：以圖形的某一點為中心，旋轉 180 度以後，能夠和原來的圖形完全重合，即為點對稱圖形。

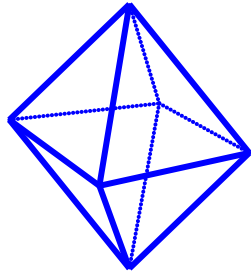
肆、研究過程

- 一、找出所有可以由正三角形組成的正多面體。
 - (一)要組成立體，同一個頂點至少需要 3 個正三角形。
 - (二)同一頂點有 3 個正三角形，可組成正四面體，如圖一。
 - (三)同一頂點有 4 個正三角形，可組成正八面體，如圖二。
 - (四)同一頂點有 5 個正三角形，可組成正二十面體，如圖三。
 - (五)同一頂點有 6 個正三角形，因正三角形的每一內角為 60° ，6 個三角形合起來為

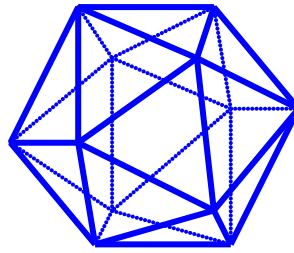
360°，形成一個穩定的平面，無法形成立體，但可以當做棋盤，如圖四。



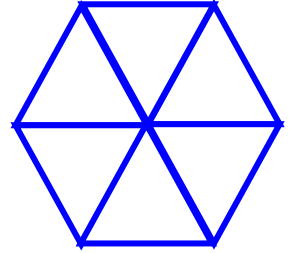
圖一



圖二



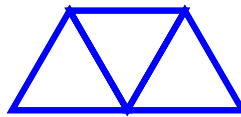
圖三



圖四

二、利用正三角形連塊，找出由正三角形組成正多面體的展開圖。

(一)由正三角形組成的三連塊只有一種，形狀如圖五，我們依序列出三~八連塊，如紀錄表二

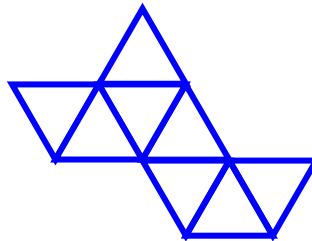


圖五

(二)經過旋轉、翻轉後若相同的連塊，視為同一種；為了避免連塊重複，從六連塊開始，我們進行命名。

(三)命名規則：

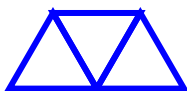
- 1.以最多連環塊(同一頂點)的數量為第一碼。
- 2.以逆時針的方向計算，在第幾塊上連接下一塊為第 2 碼。
- 3.連接後若再往逆時針連接一塊代碼為逆。
- 4.連接後若再往順時針連接一塊代碼為順。
- 5.連接後若順時針及逆時針方向都各接一塊代碼為全。
- 6.自第二碼起以數字較小為命名優先方式。(設定命名優先方式讓相同連塊只有一種命名)
- 7.全的命名優先於逆，逆優先於順。
- 8.全(逆)表示在全之後逆的位置再多方塊，如圖六以(4-1-全-(逆)-順)表示。



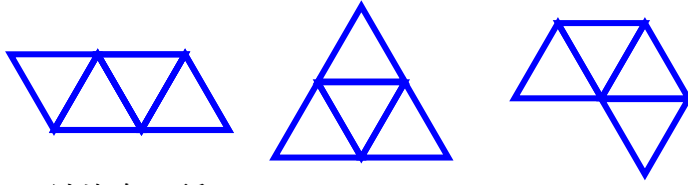
圖六

(四)列出各連塊的數量：

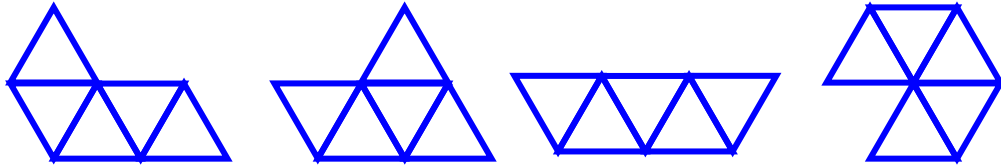
- 1.三連塊有 1 種



2.四連塊有 3 種

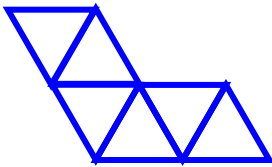


3.五連塊有 4 種

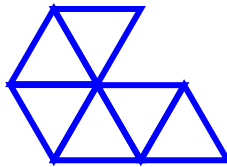


4.六連塊有 12 種 (部分圖形需經過旋轉或翻轉才能找出正確的命名)

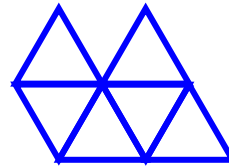
(4-1-4)



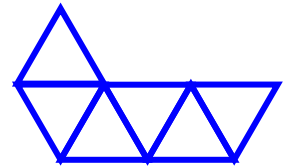
(5-1)



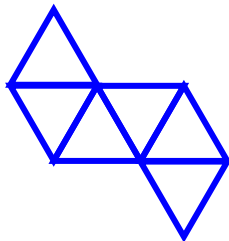
(5-2)



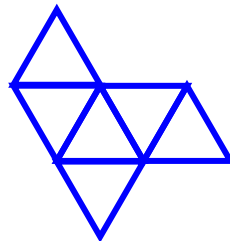
(4-1-順)



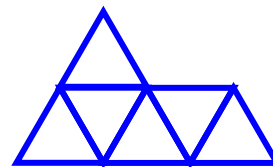
(4-1-逆)



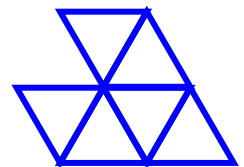
(4-1-2)



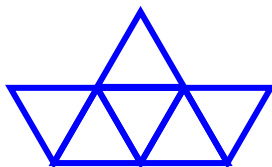
(4-1-3)



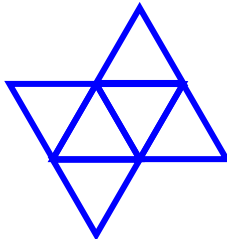
(5-3)



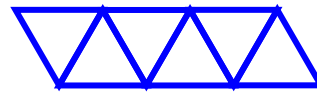
(4-2-順)



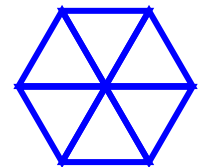
(4-2-3)



(3-1-順-逆)



(6)

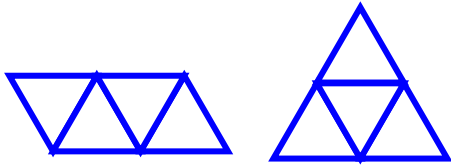


5.七連塊有 24 種，詳如紀錄表二，第 13、14 頁。

6.八連塊有 66 種，詳如紀錄表二，第 30~34 頁。

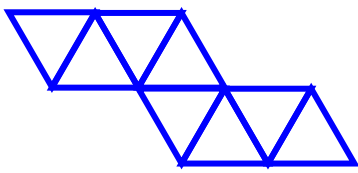
(五)找出由正三角形組成正多面體的展開圖：

1.正四體展開圖共有 2 種

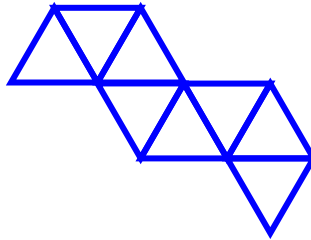


2. 正八面體的展開圖共有 11 種 (部分圖形需經過旋轉或翻轉才能找出正確的命名)

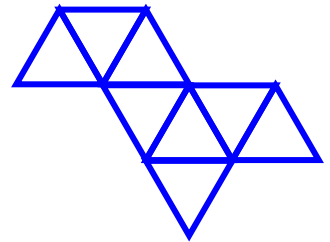
(4-1-逆-順-4)



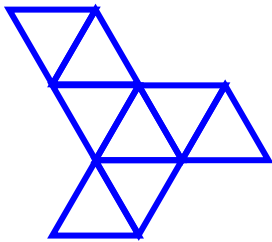
(4-1-逆-順-順)



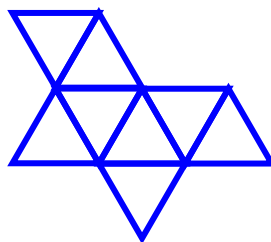
(4-1-全-(逆)-順)



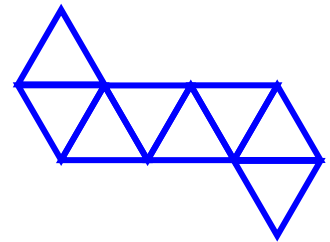
(4-1-順-2-逆)



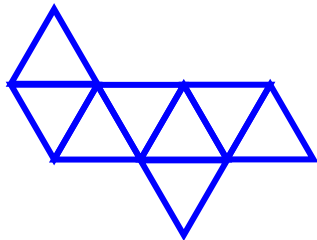
(4-1-2-3-4)



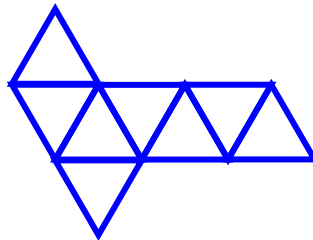
(4-1-順-逆-逆)



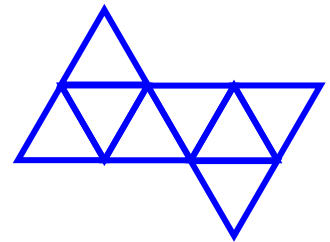
(4-1-全-(順)-逆)



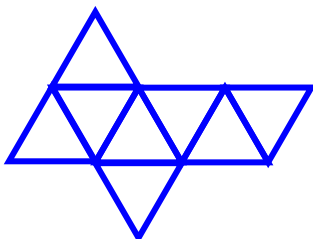
(4-1-順-逆-2)



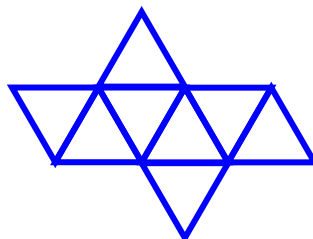
(4-1-全-3)



(4-1-順-2-3)



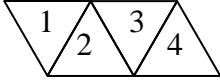
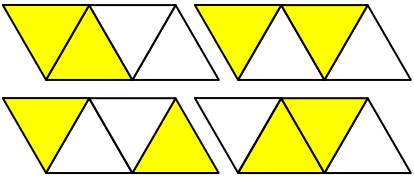
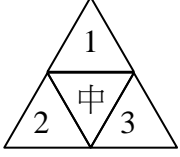
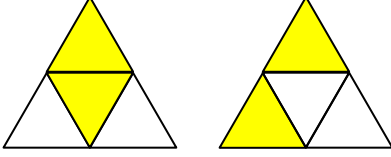
(4-1-2-3-逆)

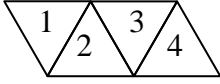
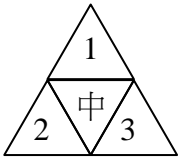


三、正四面體和正八面體展開圖著色研究

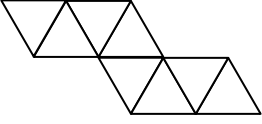
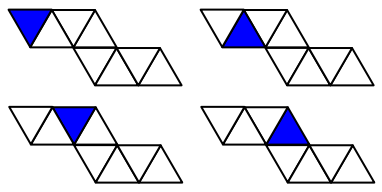
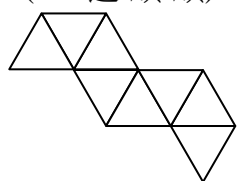
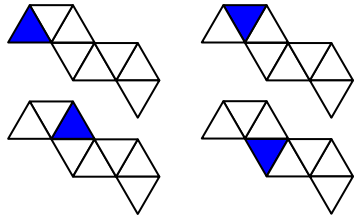
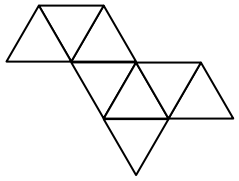
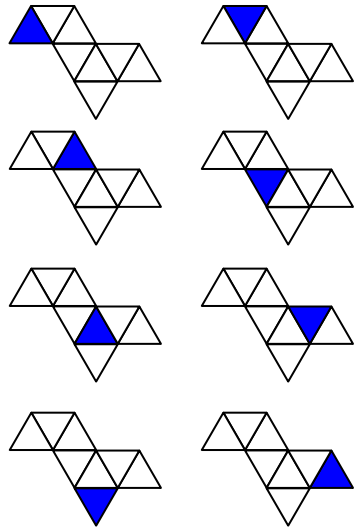
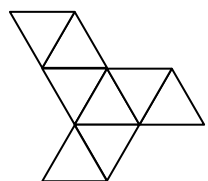
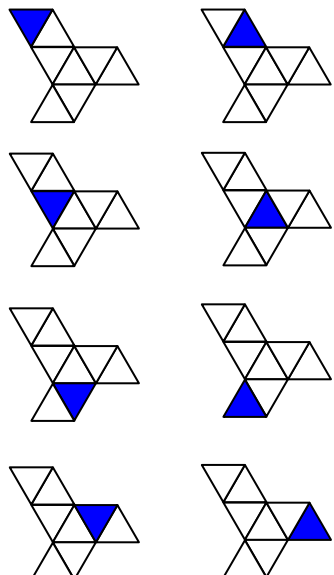
(一)正四面體展開圖著色

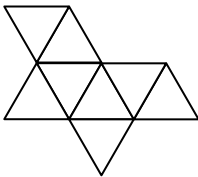
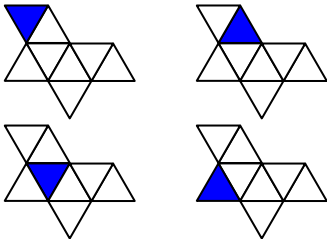
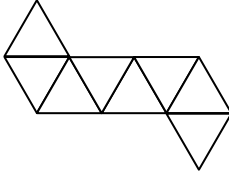
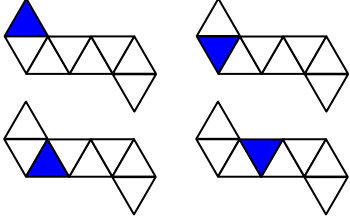
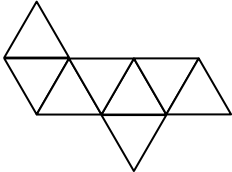
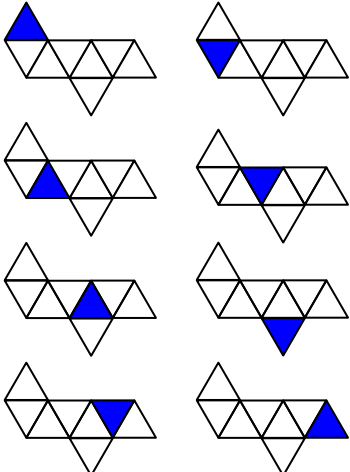
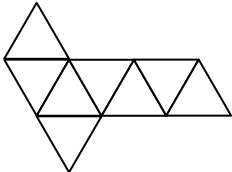
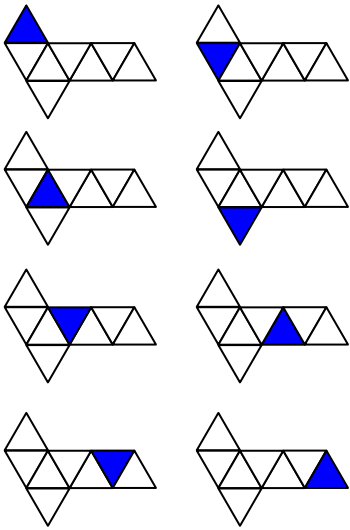
正四面體展開圖			
總面數：4		著色面數：1	
展開圖	說明	數量	樣式
	著色有 1、2、3、4 四種，其中 1 與 4，2 與 3 重複。	2	
	著色有 1、2、3、中四種，其中 1、2、3 重複。	2	

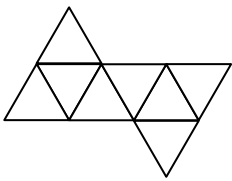
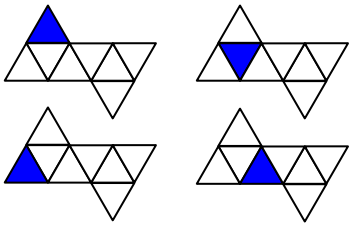
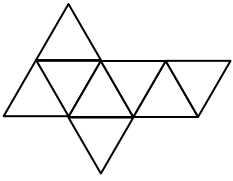
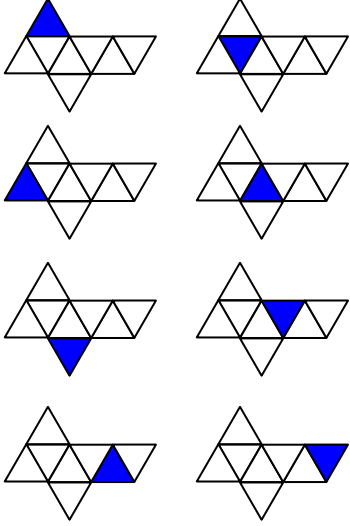
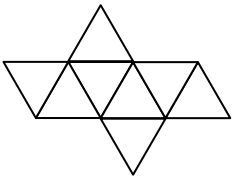
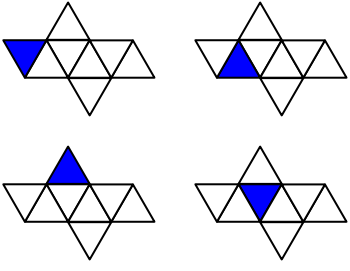
正四面體展開圖			
總面數：4		著色面數：2	
展開圖	說明	數量	樣式
	上 2 色共有(1,2)、(1,3)、(1,4)、(2,3)、(2,4)、(3,4)六種，其中(1,2)與(3,4)，(1,3)與(2,4)重複。	4	
	上 2 色共有(中,1)、(中,2)、(中,3)、(1,2)、(1,3)、(2,3)六種，其中(中,1)與(中,2)與(中,3)，(1,2)與(1,3)與(2,3)重複。	2	

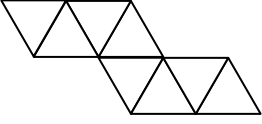

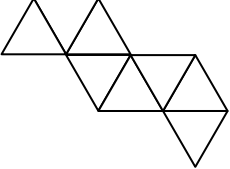
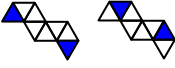
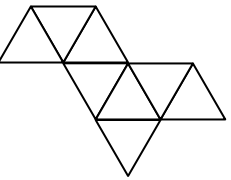
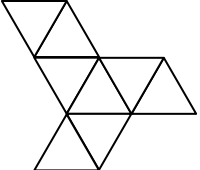
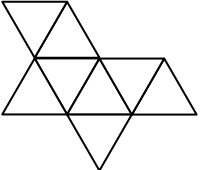
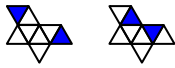
正四面體展開圖			
總面數：4		著色面數：3	
展開圖	說明	數量	樣式
	上 3 色共有(1,2,3)、(1,2,4)、(1,3,4)、(2,3,4)四種，其中(1,2,3)與(2,3,4)，(1,2,4)與(1,3,4)相同。	2	與總面數：4。著色面數：1 相同
	上 3 色共有(中,1,2)、(中,1,3)、(中,2,3)、(1,2,3)四種，其中(中,1,2)與(中,1,3)與(中,2,3)重複。	2	與總面數：4。著色面數：1 相同

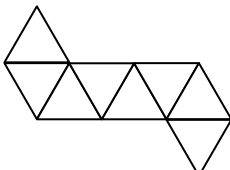
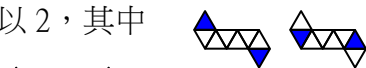
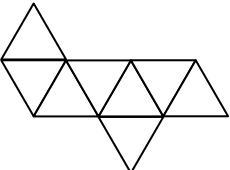
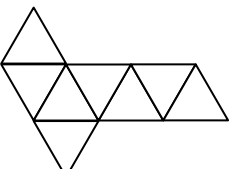
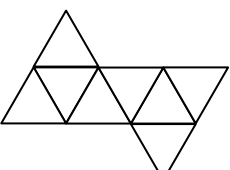
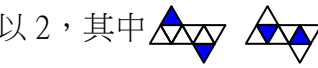
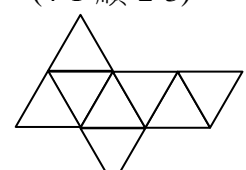
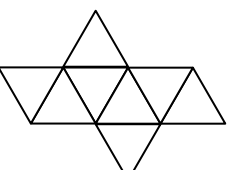

(二)正八面體展開圖著色

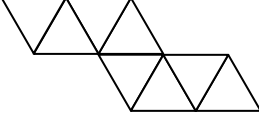
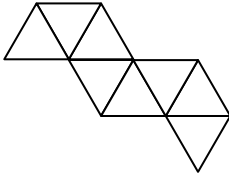
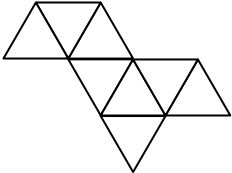
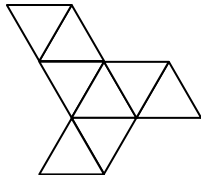
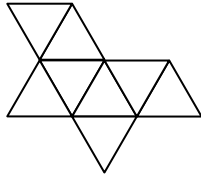
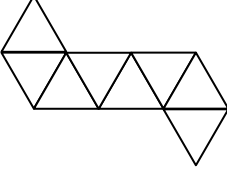
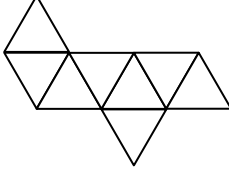
正八面體展開圖					
總面數：8			著色面數：1		
展開圖	公式	公式說明	數量	樣式	
(4-1-逆-順-4) 	$C(8,1)/2$	8 個中選 1 個上色共有 8 種，因為是點對稱圖形，經旋轉後，8 種中各有 2 種重複，故除以 2。	4		
(4-1-逆-順-順) 	$C(8,1)/2$	8 個中選 1 個上色共有 8 種，因為是線對稱圖形，經翻轉後，8 種中各有 2 種重複，故除以 2。	4		
(4-1-全-(逆)-順) 	$C(8,1)$	8 個中選 1 個上色共有 8 種。	8		
(4-1-順-2-逆) 	$C(8,1)$	8 個中選 1 個上色共有 8 種。	8		

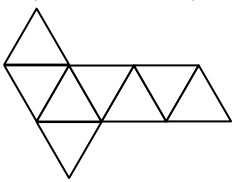
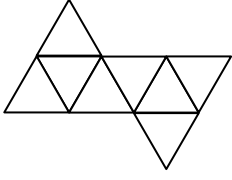
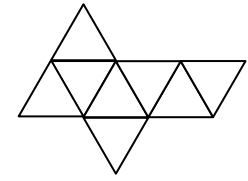
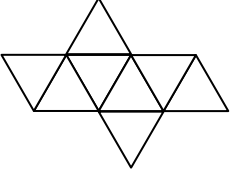
展開圖	公式	公式說明	數量	樣式
(4-1-2-3-4) 	$C(8,1)/2$	8 個中選 1 個上色共有 8 種，因為是線對稱圖形，經翻轉後，8 種中各有 2 種重複，故除以 2。	4	
(4-1-順-逆-逆) 	$C(8,1)/2$	8 個中選 1 個上色共有 8 種，因為是點對稱圖形，經旋轉後，8 種中各有 2 種重複，故除以 2。	4	
(4-1-全-(順)-逆) 	$C(8,1)$	8 個中選 1 個上色共有 8 種。	8	
(4-1-順-逆-2) 	$C(8,1)$	8 個中選 1 個上色共有 8 種。	8	

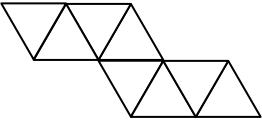
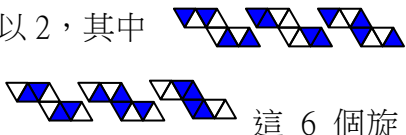
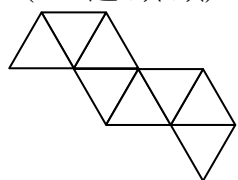
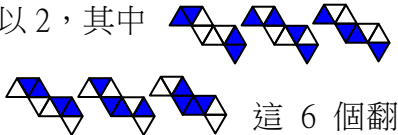
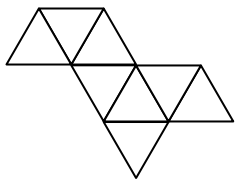
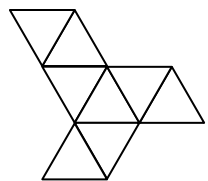
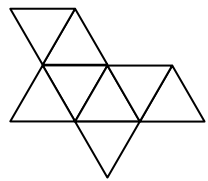
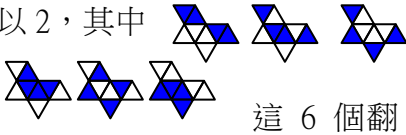
展開圖	公式	公式說明	數量	樣式
(4-1-全-3) 	$C(8,1)/2$	8 個中選 1 個上色共有 8 種，因為是點對稱圖形，經旋轉後，8 種中各有 2 種重複，故除以 2。	4	
(4-1-順-2-3) 	$C(8,1)$	8 個中選 1 個上色共有 8 種。	8	
(4-1-2-3-逆) 	$C(8,1)/2$	8 個中選 1 個上色共有 8 種，因為是點對稱圖形，經旋轉後，8 種中各有 2 種重複，故除以 2。	4	

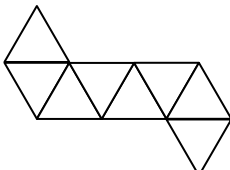
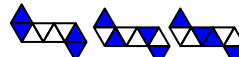
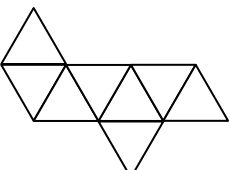
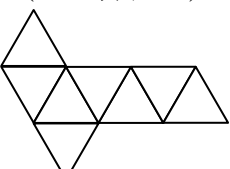
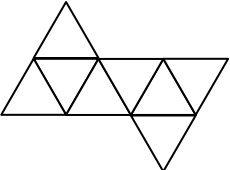

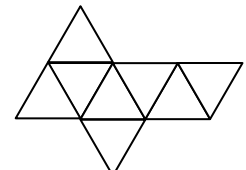
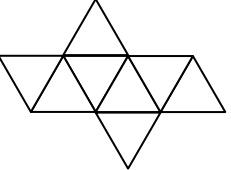

正八面體展開圖				
總面數：8		著色面數：2		
展開圖	公式	公式說明	數量	樣式
(4-1-逆-順-4) 	$C(8,2)/2+2$	8 個中選 2 個上色共有 28 種，因為是點對稱圖形所以要除以 2，其中  這 4 個旋轉後相同，並沒有重複計算， $4 \div 2 = 2$ ，這 4 個只算了 2 個，故要再加 2。	16	如紀錄表三，第 8 頁
(4-1-逆-順-順) 	$C(8,2)/2+2$	8 個中選 2 個上色共有 28 種，因為是線對稱圖形所以要除以 2，其中  這 4 個翻轉後相同，並沒有重複計算， $4 \div 2 = 2$ ，這 4 個只算了 2 個，故要再加 2。	16	如紀錄表三，第 9 頁
(4-1-全-(逆)-順) 	$C(8,2)$	8 個中選 2 個上色共有 28 種。	28	如紀錄表三，第 10、11 頁
(4-1-順-2-逆) 	$C(8,2)$	8 個中選 2 個上色共有 28 種。	28	如紀錄表三，第 11~13 頁
(4-1-2-3-4) 	$C(8,2)/2+2$	8 個中選 2 個上色共有 28 種，因為是線對稱圖形所以要除以 2，其中  這 4 個翻轉後相同，並沒有重複計算， $4 \div 2 = 2$ ，這 4 個只算了 2 個，故要再加 2。	16	如紀錄表三，第 13、14 頁

展開圖	公式	公式說明	數量	樣式
(4-1-順-逆-逆) 	$C(8,2)/2+2$	8 個中選 2 個上色共有 28 種，因為是點對稱圖形所以要除以 2，其中  這 4 個旋轉後相同，並沒有重複計算， $4 \div 2 = 2$ ，這 4 個只算了 2 個，故要再加 2。	16	如紀錄表三，第 14、15 頁
(4-1-全-(順)-逆) 	$C(8,2)$	8 個中選 2 個上色共有 28 種。	28	如紀錄表三，第 15、16 頁
(4-1-順-逆-2) 	$C(8,2)$	8 個中選 2 個上色共有 28 種。	28	如紀錄表三，第 17、18 頁
(4-1-全-3) 	$C(8,2)/2+2$	8 個中選 2 個上色共有 28 種，因為是點對稱圖形所以要除以 2，其中  這 4 個旋轉後相同，並沒有重複計算， $4 \div 2 = 2$ ，這 4 個只算了 2 個，故要再加 2。	16	如紀錄表三，第 18、19 頁
(4-1-順-2-3) 	$C(8,2)$	8 個中選 2 個上色共有 28 種。	28	如紀錄表三，第 19~21 頁
(4-1-2-3-逆) 	$C(8,2)/2+2$	8 個中選 2 個上色共有 28 種，因為是點對稱圖形所以要除以 2，其中  這 4 個旋轉後相同，並沒有重複計算， $4 \div 2 = 2$ ，這 4 個只算了 2 個，故要再加 2。	16	如紀錄表三，第 21、22 頁

正八面體展開圖				
總面數：8		著色面數：3		
展開圖	公式	公式說明	數量	樣式
(4-1-逆-順-4) 	$C(8,3)/2$	8 個中選 3 個上色共有 56 種，因為是點對稱圖形，經旋轉後，各有 2 種重複，所以要除以 2。	28	如紀錄表三，第 23、24 頁
(4-1-逆-順-順) 	$C(8,3)/2$	8 個中選 3 個上色共有 56 種，因為是線對稱圖形，經翻轉後，各有 2 種重複，所以要除以 2。	28	如紀錄表三，第 24~26 頁
(4-1-全-(逆)-順) 	$C(8,3)$	8 個中選 3 個上色共有 56 種。	56	如紀錄表三，第 26~29 頁
(4-1-順-2-逆) 	$C(8,3)$	8 個中選 3 個上色共有 56 種。	56	如紀錄表三，第 29~32 頁
(4-1-2-3-4) 	$C(8,3)/2$	8 個中選 3 個上色共有 56 種，因為是線對稱圖形，經翻轉後，各有 2 種重複，所以要除以 2。	28	如紀錄表三，第 32~34 頁
(4-1-順-逆-逆) 	$C(8,3)/2$	8 個中選 3 個上色共有 56 種，因為是點對稱圖形，經旋轉後，各有 2 種重複，所以要除以 2。	28	如紀錄表三，第 34~35 頁
(4-1-全-(順)-逆) 	$C(8,3)$	8 個中選 3 個上色共有 56 種。	56	如紀錄表三，第 35~38 頁

展開圖	公式	公式說明	數量	樣式
(4-1-順-逆-2) 	$C(8,3)$	8 個中選 3 個上色共有 56 種。	56	如紀錄表三，第 38~41 頁
(4-1-全-3) 	$C(8,3)/2$	8 個中選 3 個上色共有 56 種，因為是點對稱圖形，經旋轉後，各有 2 種重複，所以要除以 2。	28	如紀錄表三，第 41~43 頁
(4-1-順-2-3) 	$C(8,3)$	8 個中選 3 個上色共有 56 種。	56	如紀錄表三，第 43~46 頁
(4-1-2-3-逆) 	$C(8,3)/2$	8 個中選 3 個上色共有 56 種，因為是點對稱圖形，經旋轉後，各有 2 種重複，所以要除以 2。	28	如紀錄表三，第 46~47 頁

正八面體展開圖				
總面數：8		著色面數：4		
展開圖	公式	公式說明	數量	樣式
<p>(4-1-逆-順-4)</p> 	$C(8,4)/2+3$	<p>8 個中選 4 個上色共有 70 種，因為是點對稱圖形所以要除以 2，其中  這 6 個旋轉後相同，並沒有重複計算，$6 \div 2 = 3$，這 6 個只算了 3 個，故要再加 3。</p>	38	如紀錄表三，第 48、49 頁
<p>(4-1-逆-順-順)</p> 	$C(8,4)/2+3$	<p>8 個中選 4 個上色共有 70 種，因為是線對稱圖形所以要除以 2，其中  這 6 個翻轉後相同，並沒有重複計算，$6 \div 2 = 3$，這 6 個只算了 3 個，故要再加 3。</p>	38	如紀錄表三，第 50、51 頁
<p>(4-1-全-(逆)-順)</p> 	$C(8,4)$	8 個中選 4 個上色共有 70 種。	70	如紀錄表三，第 52、55 頁
<p>(4-1-順-2-逆)</p> 	$C(8,4)$	8 個中選 4 個上色共有 70 種。	70	如紀錄表三，第 56、59 頁
<p>(4-1-2-3-4)</p> 	$C(8,4)/2+3$	<p>8 個中選 4 個上色共有 70 種，因為是線對稱圖形所以要除以 2，其中  這 6 個翻轉後相同，並沒有重複計算，$6 \div 2 = 3$，這 6 個只算了 3 個，故要再加 3。</p>	38	如紀錄表三，第 60、61 頁

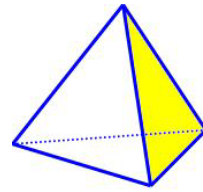
展開圖	公式	公式說明	數量	樣式
(4-1-順-逆-逆) 	$C(8,4)/2+3$	8 個中選 4 個上色共有 70 種，因為是點對稱圖形所以要除以 2，其中  這 6 個旋轉後相同，並沒有重複計算， $6 \div 2 = 3$ ，這 6 個只算了 3 個，故要再加 3。	38	如紀錄表三，第 62、63 頁
(4-1-全-(順)-逆) 	$C(8,4)$	8 個中選 4 個上色共有 70 種。	70	如紀錄表三，第 64、67 頁
(4-1-順-逆-2) 	$C(8,4)$	8 個中選 4 個上色共有 70 種。	70	如紀錄表三，第 68、71 頁
(4-1-全-3) 	$C(8,4)/2+3$	8 個中選 4 個上色共有 70 種，因為是點對稱圖形所以要除以 2，其中  這 6 個旋轉後相同，並沒有重複計算， $6 \div 2 = 3$ ，這 6 個只算了 3 個，故要再加 3。	38	如紀錄表三，第 72、73 頁
(4-1-順-2-3) 	$C(8,4)$	8 個中選 4 個上色共有 70 種。	70	如紀錄表三，第 74、77 頁
(4-1-2-3-逆) 	$C(8,4)/2+3$	8 個中選 4 個上色共有 70 種，因為是點對稱圖形所以要除以 2，其中  這 6 個旋轉後相同，並沒有重複計算， $6 \div 2 = 3$ ，這 6 個只算了 3 個，故要再加 3。	38	如紀錄表三，第 78、79 頁

正八面體展開圖著 5 色數量與正八面體展開圖著 3 色數量相同
 正八面體展開圖著 6 色數量與正八面體展開圖著 2 色數量相同
 正八面體展開圖著 7 色數量與正八面體展開圖著 1 色數量相同

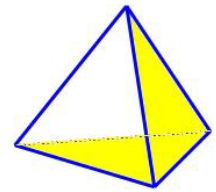
四、正多面體著色研究

(一)正四面體著色

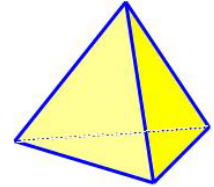
- 1.正四面體著色 1 色只有 1 種，如圖七。
- 2.正四面體著 2 色只有 1 種，如圖八。
- 3.正四面體著 3 色只有 1 種，如圖九。



圖七



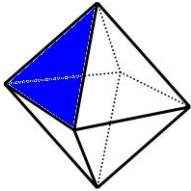
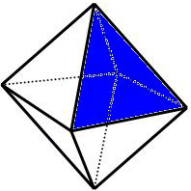
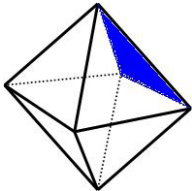
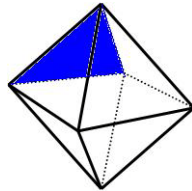
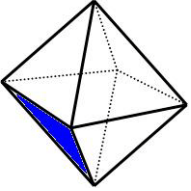
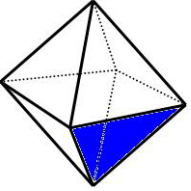
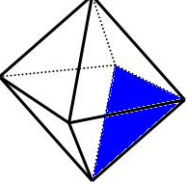
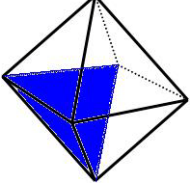
圖八



圖九

(二) 正八面體著色

- 1.正八面體著色的面因有相對位置產生不同，我們先將各面進行編號，如表一。

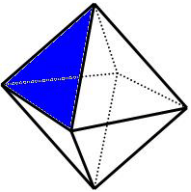
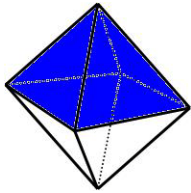
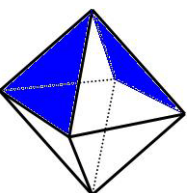
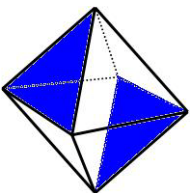
1		2		3		4	
5		6		7		8	

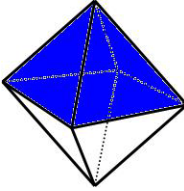
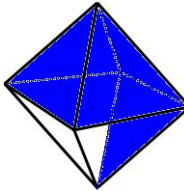
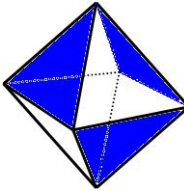
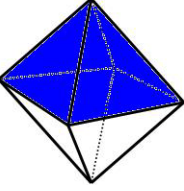
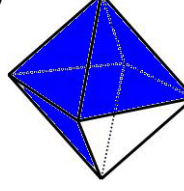
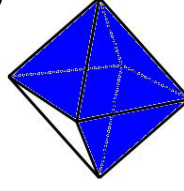
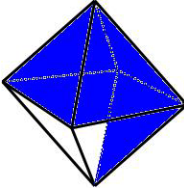
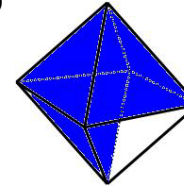
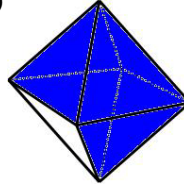
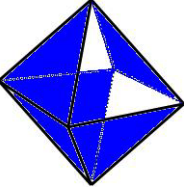
表一

- 2.為了避免因翻轉而產生不同的著色正八面體，我們訂定著色的位置進行命名，命名規則如下：

- (1)以表一各位置編號為依據，依序將著色的位置標記出。
- (2)命名時以編號數字較小的為優先順序。

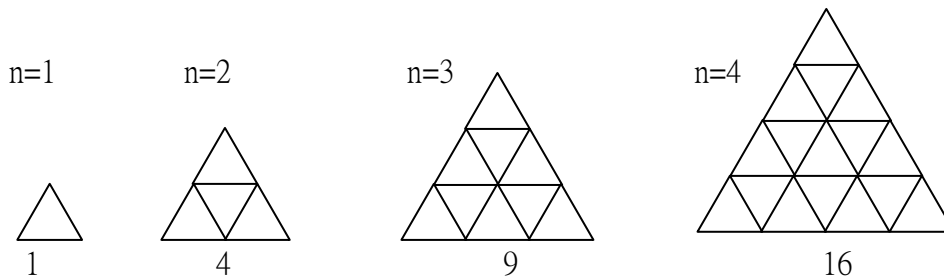
- 3.八面體著色情形如表二。

著色面數	數量	命名、樣式
1	1	(1) 
2	3	(1-2)  (1-3)  (1-7) 

著色面數	數量	命名、樣式
3	3	(1-2-3)  (1-2-7)  (1-3-6) 
4	7	(1-2-3-4)  (1-2-3-5)  (1-2-3-6)  (1-2-3-7)  (1-2-3-8)  (1-2-7-8)  (1-3-6-8) 
5	3	圖如著色 3 面之白色
6	3	圖如著色 2 面之白色
7	1	圖如著色 1 面之白色

五、棋盤的研究

(一)找出由正三角形組成更大正三角形棋盤的數量規律



第 n 層的三角形數為 n-1 層的三角形數再加 2 個

第 n 層的三角形總數為 $1+3+5+\dots+(2n-1)$

依梯形公式 $1+3+5+\dots+(2n-1)=(1+2n-1)\times n/2=n^2$

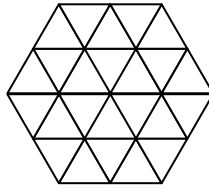
(二)由正三角形組成最對稱、完整的形狀為正六邊形，故我們決定用正六邊形當作棋盤。

n=1



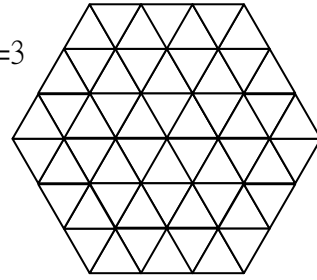
6

n=2



24

n=3



54

每一個正六邊形由六個正三角形組成，從一個邊是由幾個三角形組成，我們可以推知整個六邊形共有多少個正三角形，總個數= $6n^2$

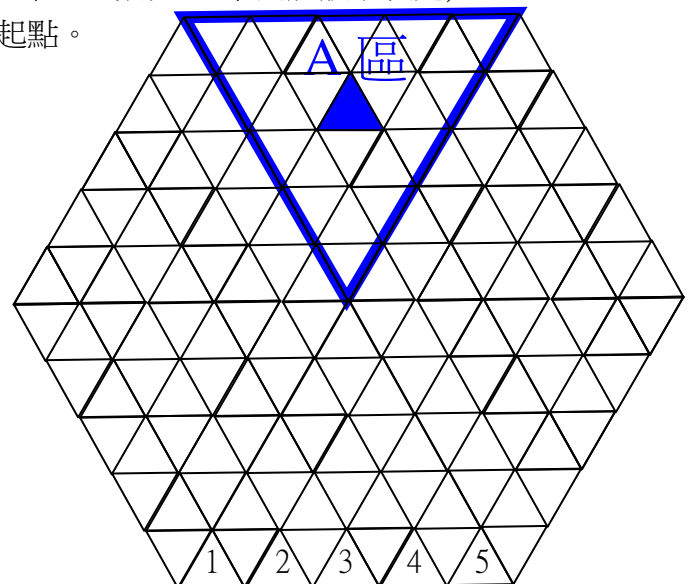
六、設計滾積木遊戲

(一)遊戲規則：

- 1.以 n=5 的正六邊形當棋盤。(如圖十、圖十一)
- 2.在棋盤上的 1、2、4、5 位置分別擺上著色一面、著色二面、著色三面、著色四面之正四面體，3 位置擺上著色一面之正八面體，擺放方法由玩家自行決定。
- 3.在玩家對面的 A 區內的其中一個三角形設置著色出口，四面體積木著色的面向下正對出口時，則可拿起積木，當作過關，目的為全部的積木都過關。
- 4.正多面體積木以滾動的方式進行移動，一個有著色的面往相對應沒有著色的正四面體滾動時，可將被碰撞的正四面體平移兩格；一個有著色的面往相對應沒有著色的正八面體滾動時，可將被碰撞的正八面體翻滾一格。
- 5.被碰撞的正多面體積木後方尚有其他積木或已無退路，則不能進行碰撞。
- 6.玩家須用滾動積木的方式將有著色的面向下面對出口，即可拿掉該積木，所有積木都拿掉時，即可過關。
- 7.本遊戲可 1~3 人同時進行，2 人以上進行遊戲時，於各個玩家對面設置出口。
- 8.2 人以上進行遊戲時，每人輪流一次走一格，可相互阻攔或碰撞，全部積木先走出出口的玩家獲勝。(2 人以上，出口位置可用正二十面體骰子決定)
- 9.2 人以上，可由六個邊各自選一個當起點。
- 10.八面體不得碰撞對手的八面體。
- 11.2 人以上，不得進入對手的出口。



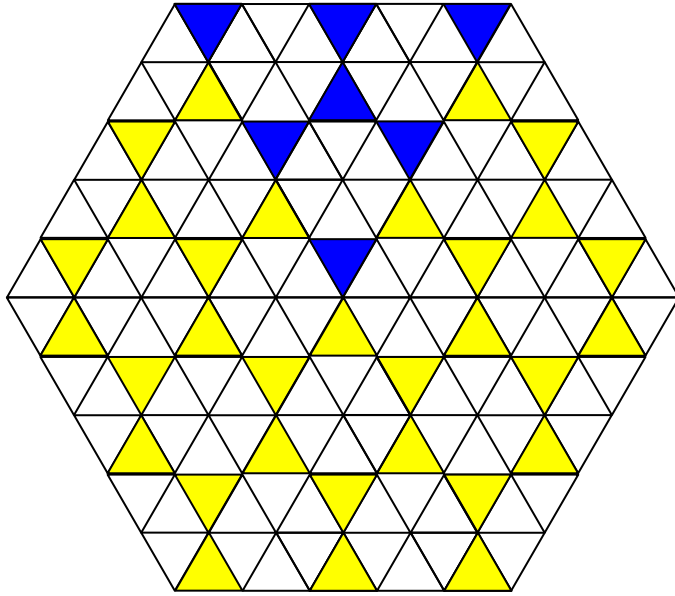
圖十



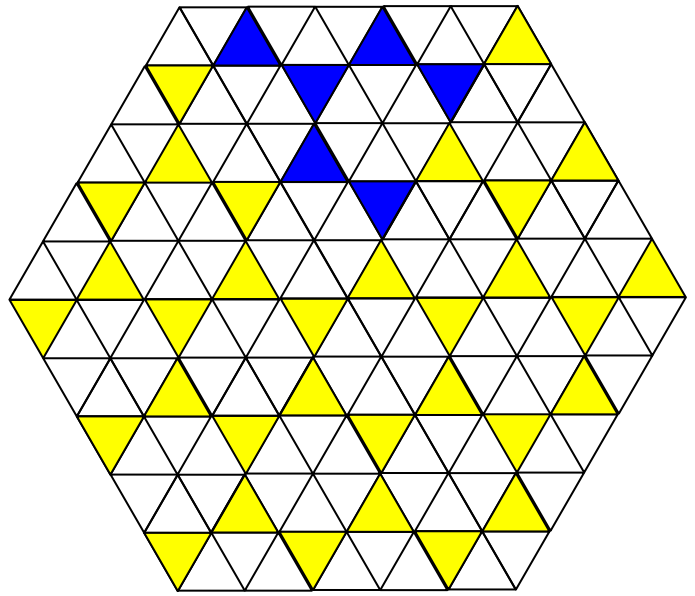
圖十一

(二)過關規則：

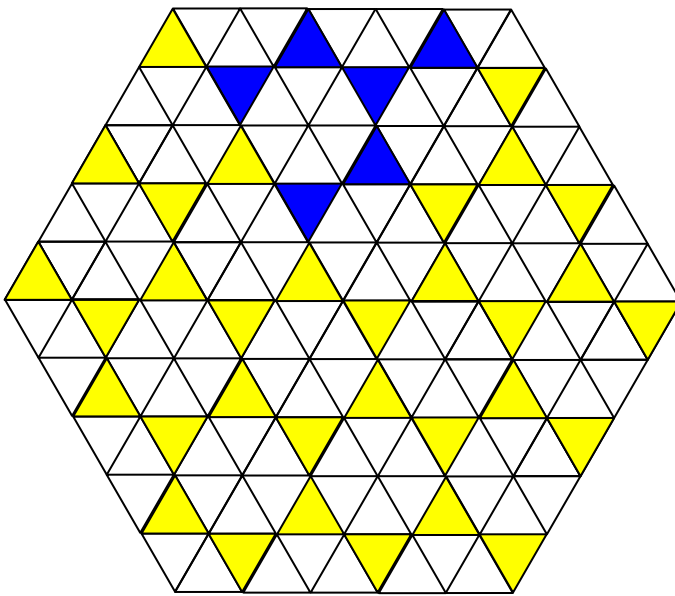
- 1.在 A 區設置出口，正四面體的滾動路徑可分為四大類，藍色為出口，黃色為積木滾動途中會朝出口的著色面之正確路徑。



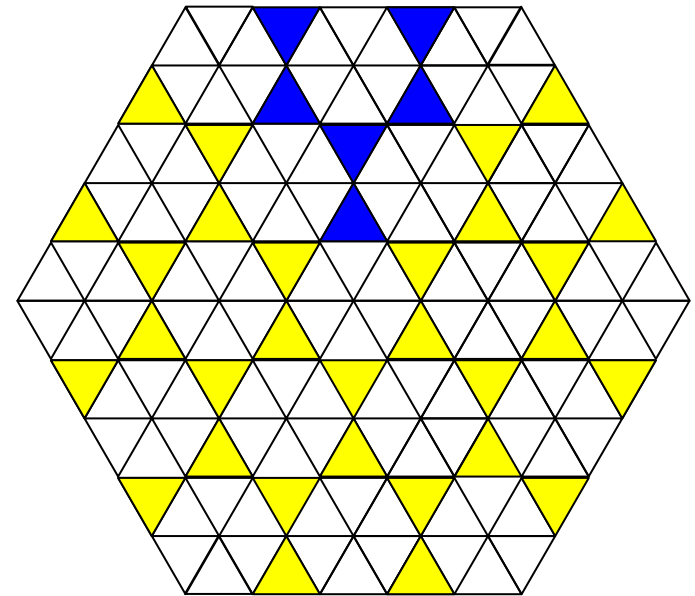
正四面體出口一型



正四面體出口二型

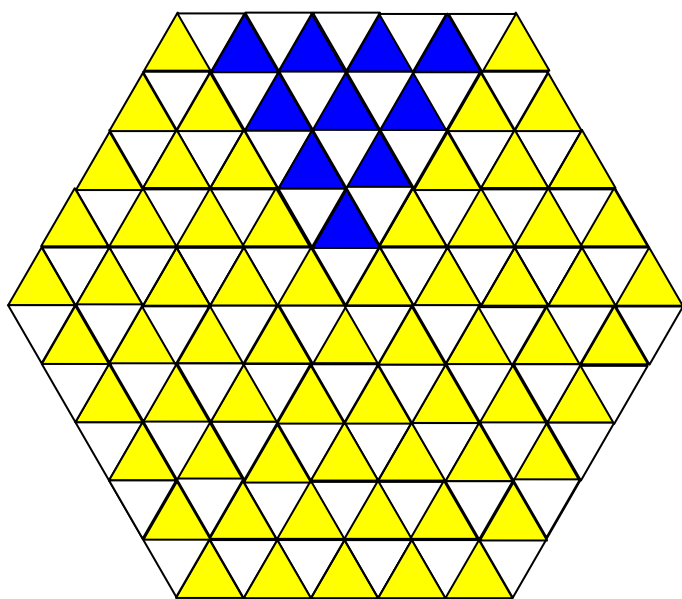


正四面體出口三型

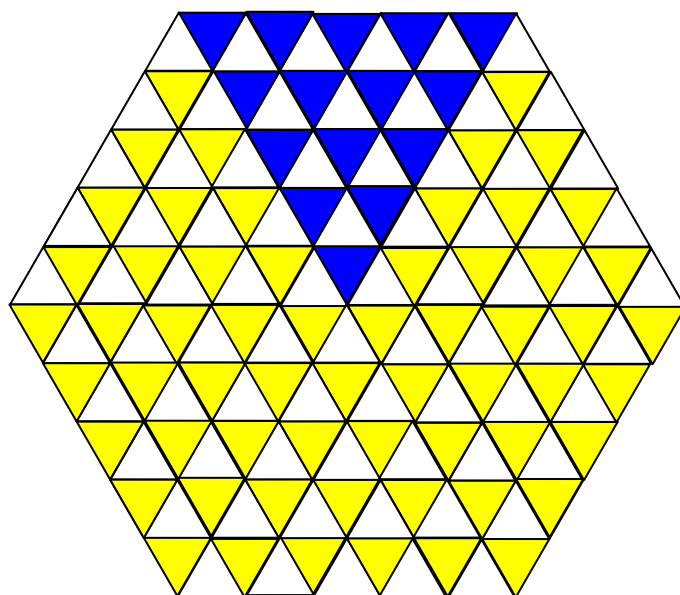


正四面體出口四型

2.在 A 區設置出口，正八面體的滾動路徑可分為二大類，藍色為出口，黃色為積木滾動途中會朝出口的著色面之正確路徑。



正八面體出口一型



正八面體出口二型

3.不用經過碰撞，可直接過關擺法

出口位置	正四面體出口一型			
擺放位置	1	2	4	5
著色面數	1	2	3	4
著色面可擺放方式 (註 1)	下	下後、左後、 右後	下左後、 下右後、左右後	皆可

出口位置	正四面體出口二型			
擺放位置	1	2	4	5
著色面數	1	2	3	4
著色面可擺放方式	左	下右、左右、 右後	下左右、 下右後、左右後	皆可

出口位置	正四面體出口三型			
擺放位置	1	2	4	5
著色面數	1	2	3	4
著色面可擺放方式	右	下左、左右、 左後	下左右、 下左後、左右後	皆可

出口位置	正四面體出口四型			
擺放位置	1	2	4	5
著色面數	1	2	3	4
著色面可擺放方式	後	下左、下右、 下後	下左右、 下左後、下右後	皆可

出口位置	正八面體出口一型			
擺放位置	3			
著色面數	1			
著色面可擺放方式 (註 2)	下、前、左後、右後			

出口位置	正八面體出口二型			
擺放位置	3			
著色面數	1			
著色面可擺放方式	上、後、左前、右前			

4.若擺法錯誤時，可利用規則第 4 點，在滾動中將積木進行平移或翻轉，改變積木路徑。

5.平移產生的效果：

形體	正四面體	著色面數	1
原著色面位置(以碰撞面而言)		平移兩格後著色面位置(以碰撞面而言)	
	下		後
	左		右
	右		左
	後		下

形體	正四面體	著色面數	2
原著色面位置(以碰撞面而言)		平移兩格後著色面位置(以碰撞面而言)	
	下左		右後
	下右		左後
	下後		下後(不變)
	左右		左右(不變)
	左後		下右
	右後		下左

形體	正四面體	著色面數	3
原著色面位置(以碰撞面而言)		平移兩格後著色面位置(以碰撞面而言)	
下左右		左右後	
下左後		下右後	
下右後		下左後	
左右後		下左右	

形體	正四面體	著色面數	4
原著色面位置(以碰撞面而言)		平移兩格後著色面位置(以碰撞面而言)	
全部		全部	

形體	正八面體	著色面數	1
原著色面位置(以碰撞面而言)		翻轉後著色面位置(以碰撞面而言)	
上		下、前、左後、右後	
下		上、左前、右前、後	
前		上、左前、右前、後	
後		下、前、左後、右後	
左前		下、前、左後、右後	
右前		下、前、左後、右後	
左後		上、左前、右前、後	
右後		上、左前、右前、後	

註 1：正四面體著色面名稱以玩家面對積木之相對位置，下：為接觸棋盤的面；左：為積木左前方的面；右：為積木右前方的面；後：為靠近玩家的面。

註 2：正八面體著色面名稱以玩家面對積木之相對位置，上：為積木朝上的面；下：為接觸棋盤的面；前：為離玩家較遠，積木前方的面；後：為離玩家較近，積木後方的面；左前：為積木左前方的面；右前：為積木右前方的面；左後：為積木的左後方的面；右後：為積木右後方的面。

伍、研究結果

- 一、我們利用正三角形的連塊研究以及連塊的命名，找出三連塊有 1 種，四連塊有 3 種，五連塊有 4 種，六連塊有 12 種，七連塊有 24 種，八連塊有 66 種。
- 二、我們找出正四面體的 2 種展開圖，正八面體的 11 種展開圖。
- 三、我們用組合的公式推論出正四面體及正八面體展開圖著色數量，並實際找出來證明無誤。
- 四、找出正四面體 1 面著色有 1 種，2 面著色有 1 種，3 面著色有 1 種。
- 五、找出正八面體 1 面著色有 1 種，2 面著色有 3 種，3 面著色有 3 種，4 面著色有 7 種，5 面著色有 3 種，6 面著色有 3 種，7 面著色有 1 種。

- 六、由正三角形組成的正六邊形棋盤，發現每邊三角形數量是 n 時，正六邊形由 $6n^2$ 個正三角形所組成。
- 七、自創滾積木遊戲，由一個 $n=5$ 的正六角形棋盤、分別著色 1 面、2 面、3 面、4 面之正四面體及著色 1 面之正八面體所組成，並用正二十面體當骰子決定出口位置。
- 八、歸納出如何擺放積木才能順利過關，也找出擺放錯誤時，利用碰撞後平移及翻轉的規則如何順利過關的方法。

陸、結論

- 一、網路中長方體滾積木遊戲是利用長：寬：高=1：1：2 的比，使得積木滾動時產生移動 1 格或 2 格多種組合，配合各式各樣的棋盤及機關，讓遊戲有趣並充滿挑戰，我們不得不佩服設計者的創意及空間概念。
- 二、這次研究的主要目的是創造出新的滾積木遊戲，一開始以土法練鋼的方式由正三角形連塊找出展開圖，因為三角正多面體無法像網路中長方體滾積木遊戲一樣可以利用不同的長寬高比產生不同的移動格數，所以我們試著進行多面體的著色研究，想利用著色產生過關的限制，過程中我們體驗了許多數學觀念，並設計出相關的遊戲。
- 三、歸納出正八面體展開圖的著色數量的規則：

圖形對稱性	著色數	公式	說明
不對稱	$n=1\sim 7$	$C(8,n)$	不對稱，旋轉或翻轉後不會有重複的情形。
線對稱或點對稱	$n=1、3、5、7$	$C(8,n)/2$	著色為奇數面，旋轉或翻轉後每一個皆有另一個相對應的圖形，故除以 2。
	$n=2$	$C(8,2)/2+2$	著色為 2 面，旋轉或翻轉後共有 4 個和翻轉相同，故除以 2 後要再加 2。
	$n=4$	$C(8,4)/2+3$	著色為 4 面，旋轉或翻轉後共有 6 個和翻轉相同，故除以 2 後要再加 3。
	$n=6$	$C(8,6)/2+2$	著色為 6 面，與著色 2 面相同。

- 四、自創滾積木遊戲以 $n=5$ 的正六邊形為棋盤，在出口區的出口有 $5\times 5=25$ 種選擇設定，若 2 人以上的玩家進行遊戲，玩家可各自選正六邊形的一個邊當起點，可彼此阻攔，過程更具變化。
- 五、若玩家不知如何擺放正確的著色多面體，應以著色少的正多面體先走出出口，著色多的最後走，可提高過關的機會。
- 六、正四面體經碰撞平移後走上正確路徑方式：
- (一)一面著色時，若原本不在出口路徑上
- 出口路徑在積木的右前方時，著色的面須向左前方；
- 出口路徑在積木的左前方時，著色的面須向右前方；

出口路徑在積木的後方時，著色的面須向下方
經碰撞平移後即可走上正確的出口路徑。

(二)二面著色時，若原本不在出口路徑上，只要其中一面著色朝下，經碰撞平移後即可走上正確的出口路徑。

(三)三面著色時，若原本不在出口路徑上只要經碰撞平移後即可走上正確的出口路徑。


七、正八面體經碰撞翻滾後走上正確路徑方式：

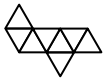
若正八面體著色面不在出口路徑上，經一次的碰撞翻轉後即可走上正確的出口路徑。

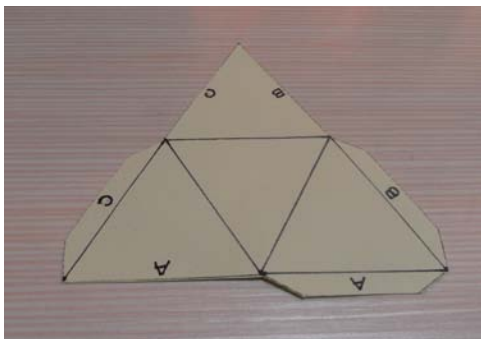
柒、討論

一、我們研究得知正八面體上分別著色 1~7 色共有 21 種，而我們自創滾積木遊戲只用到著 1 色的正八面體，將更多面著色的正多面體應用在滾積木遊戲中是我們未來的研究方向。

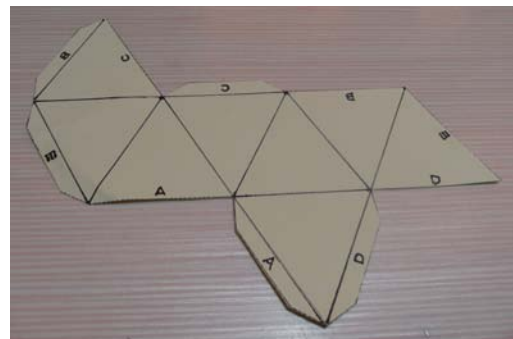
二、2 人以上的滾積木戲以最先全部走出出口為獲勝，1 人的遊戲中如何以最少的步數全部走出出口是我們繼續研究的重點，目前已知利用遊戲規則第 4 點，將其他積木進行平移或翻滾是可行的方法。

三、在製作著色正多面體時，我們發覺展開圖比較好著色，已做好的正多面體拿著著色較不易，我們組裝正四面體所用的展開圖是 ，如圖十一；

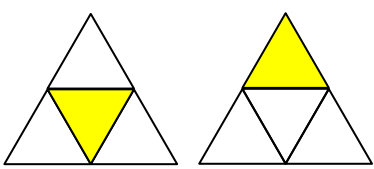
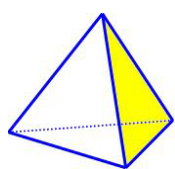
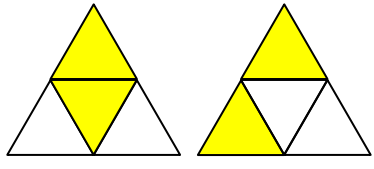
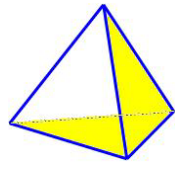
組裝正八面體所用的展開圖是(4-1-全-(順)-逆) ，如圖十二，我們針對這兩種做展開圖與立體圖形著色的連結，以便我們製作著色更多面的正多面體積木時更容易著色。

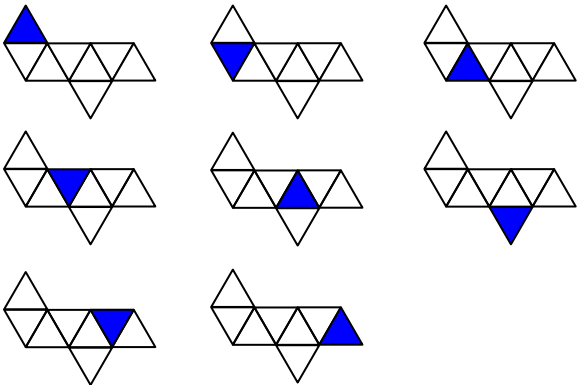
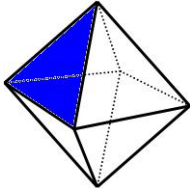
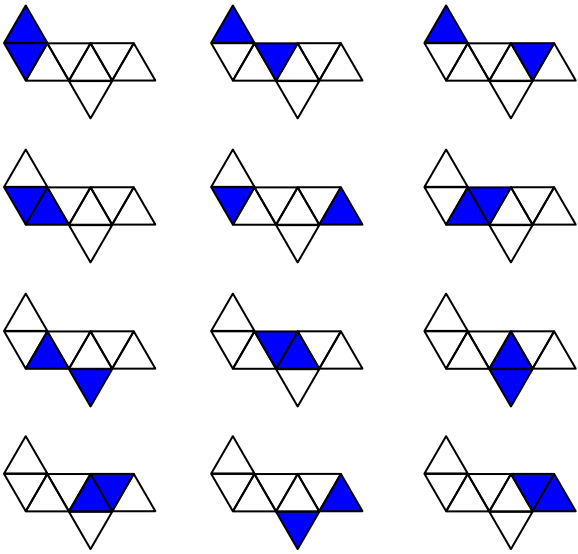
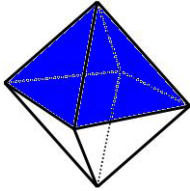
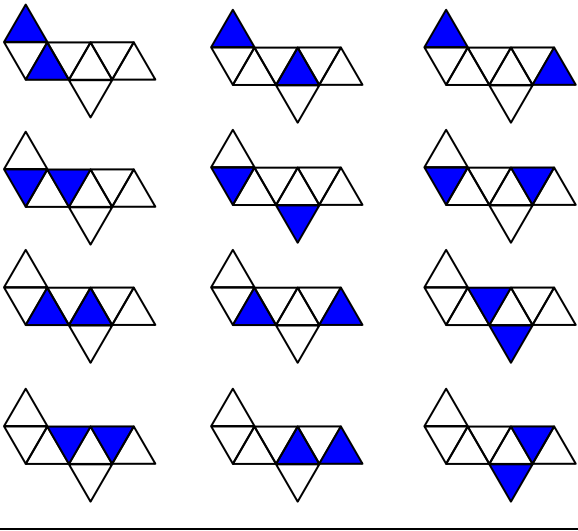
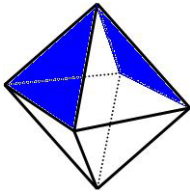
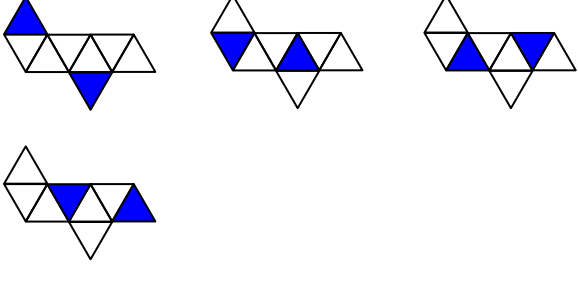
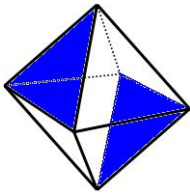


圖十一

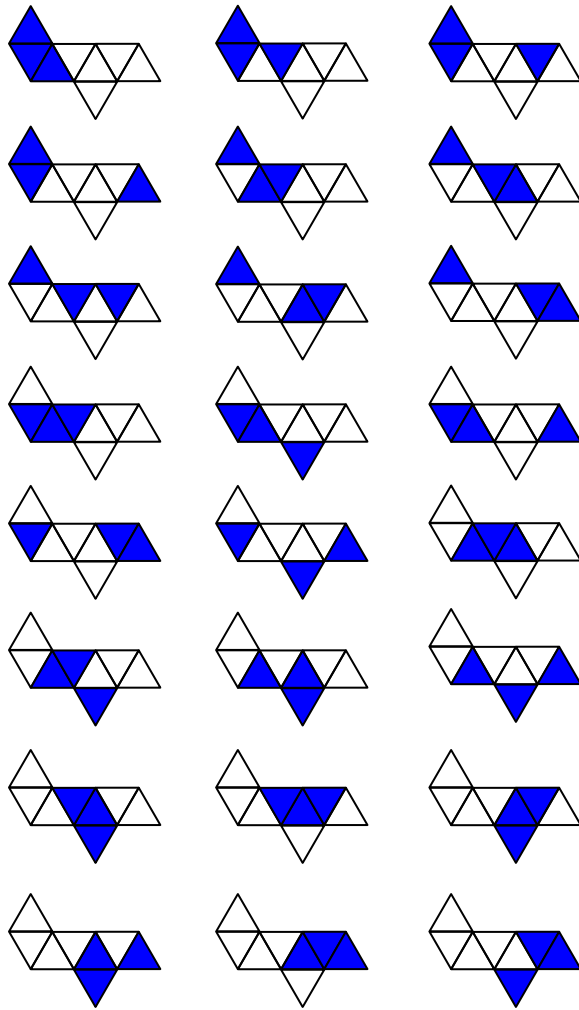


圖十二

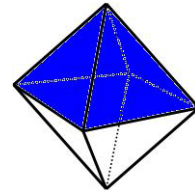
著色數	展開圖著色情形	正多面體著色情形
1		
2		
3	可視為和著 1 色相同	可視為和著 1 色相同

著色數	展開圖著色情形	正多面體著色情形
1		(1) 
2		(1-2) 
		(1-3) 
		(1-7) 

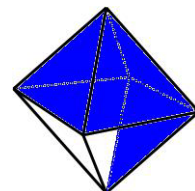
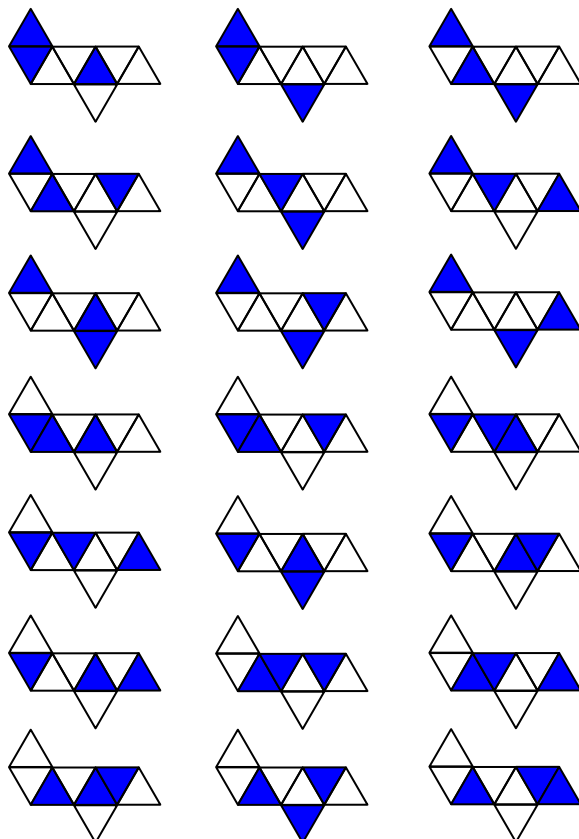
3

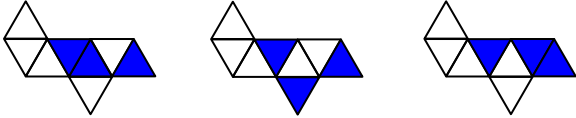
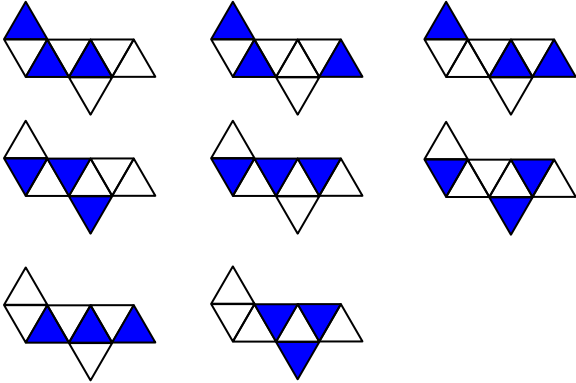
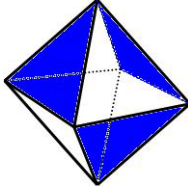
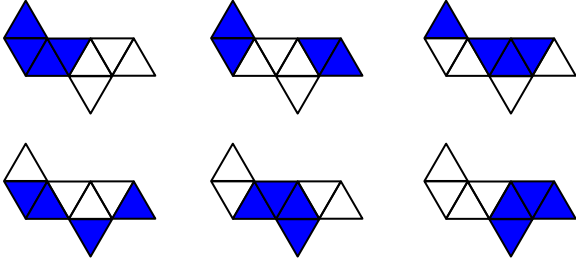
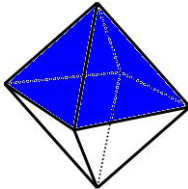
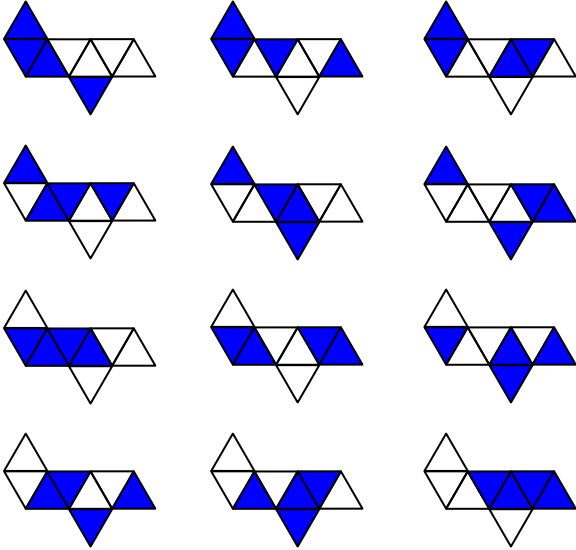
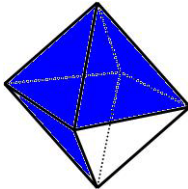
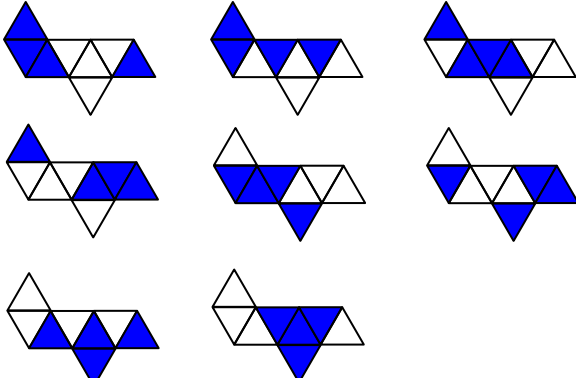
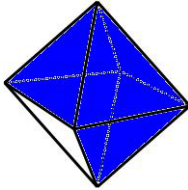


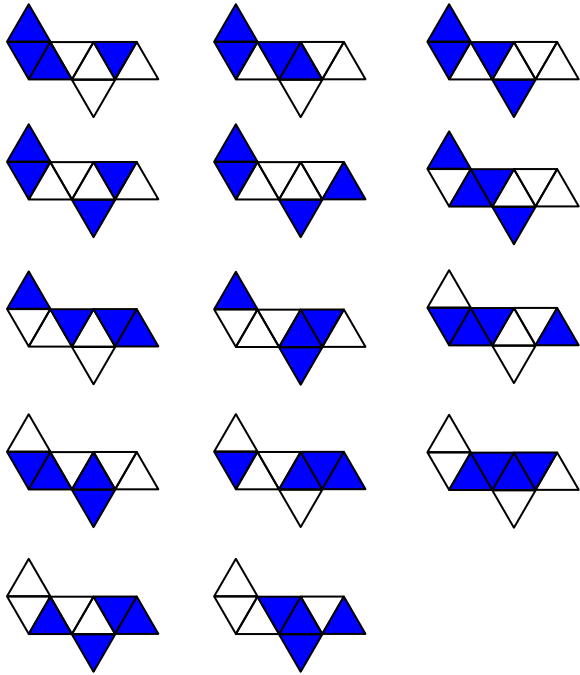
(1-2-3)



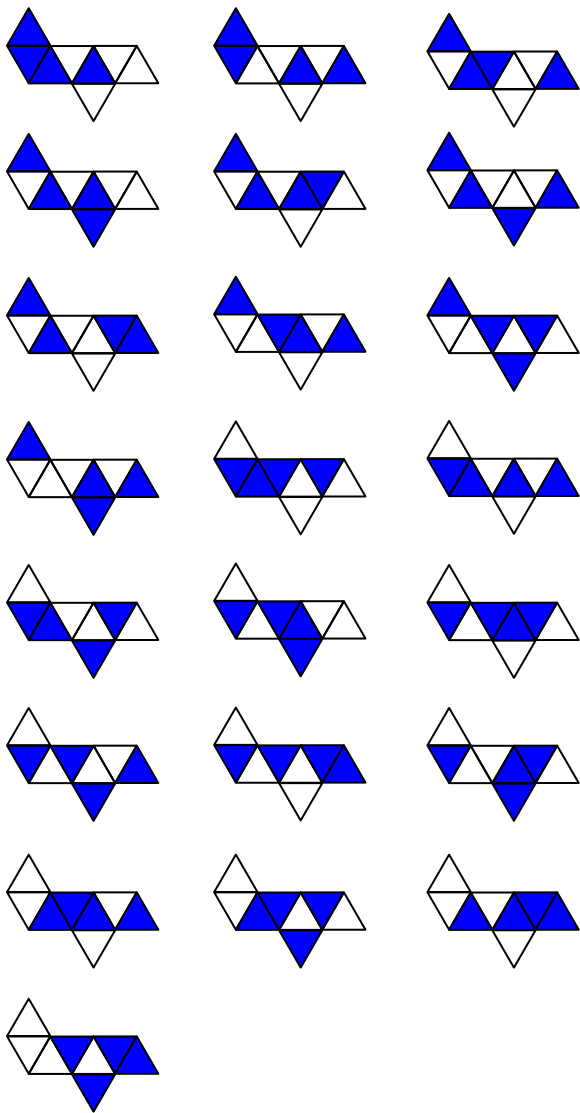
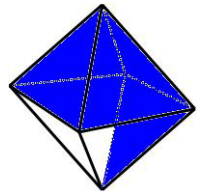
(1-2-7)



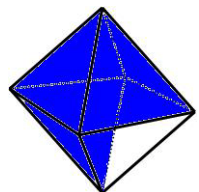
		
		<p>(1-3-6)</p> 
4		<p>(1-2-3-4)</p> 
		<p>(1-2-3-5)</p> 
		<p>(1-2-3-6)</p> 

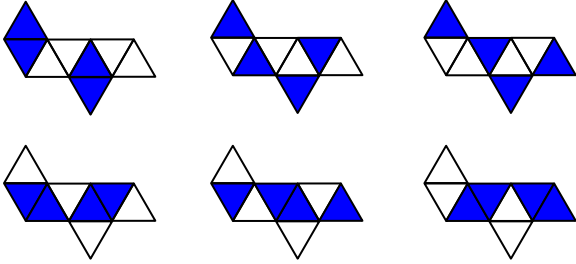
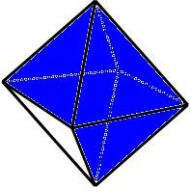
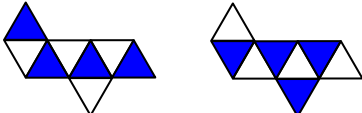
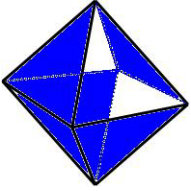


(1-2-3-7)



(1-2-3-8)



		(1-2-7-8)	
		(1-3-6-8)	
5	可視為和著 3 色相同	可視為和著 3 色相同	
6	可視為和著 2 色相同	可視為和著 2 色相同	
7	可視為和著 1 色相同	可視為和著 1 色相同	

捌、參考資料

- 一、國民小學數學學習領域課本 康軒五年級上學期 (99 年版) 康軒文教事業股份有限公司。
- 二、Damien Clarke (21st June 2007) 。Bloxorz from :
http://www.coolmath-games.com/0-bloxorz/bloxorz_coolmath.swf
- 三、蔡志強、孫文先 編 數學立體模型製作。台北市：九章出版社。

【評語】 080409

1. 團隊接力表現的不錯，充分展現合作的精神。
2. 本作品對於在正四面體和正八面體著色的各種可能情形，做了完整的探討；並將其應用在自創的滾積木遊戲中，進而找出如何順利過關的方法，相當不錯。可惜的是並未將複雜的著色情形也應用出來，可再繼續努力。