中華民國第51屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

最佳創意獎

080408

水泥工人的困擾

學校名稱：新北市樹林區文林國民小學

作者：	指導老師：
小五 林子欽	林忠正
小五 陳沛琦	王郁惠

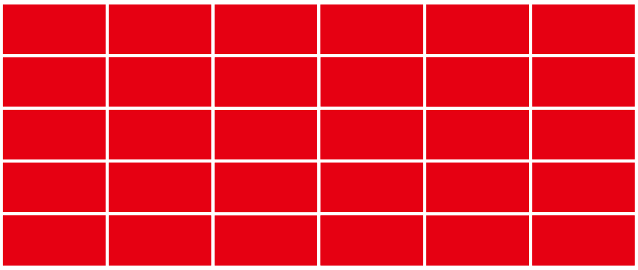
關鍵詞：因數、倍數

水泥工人的困擾？

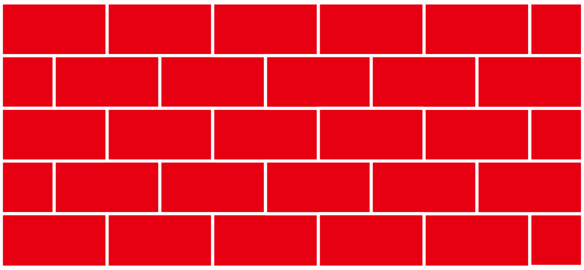
摘要

在一次偶然的機會下，看到水泥工人在砌牆，他堆疊磚頭的方式和我想的不同？為甚麼他不把磚頭堆疊整齊(圖 a)？而是刻意把磚頭錯開(圖 b)？我好奇的問工人，他說…。聽完他的解釋後，引發我另外的想法，於是我用自製的長方形積木當作磚頭，試著排出一個矩形，且這個矩形中的積木要錯開，即在矩形中不能有分割線(圖 c)。

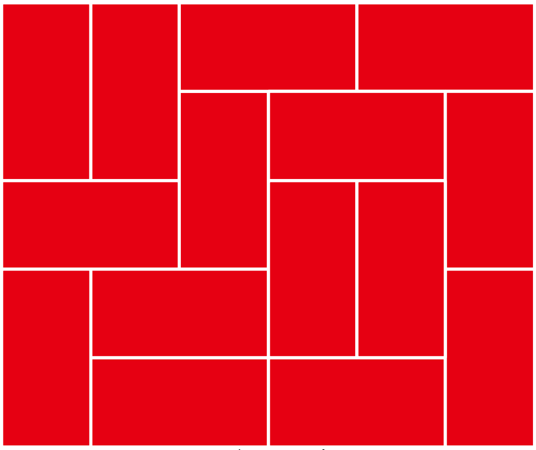
我們共做了十三種大小不同的積木，用這些積木實際操作，並記錄結果。探究記錄結果後，發現了積木的長、寬與矩形長、寬之關係。此外經由探討及拼排的過程中，也發現可利用積木長、寬的差，有技巧的將積木錯開，而找到一種可排成我們想要的矩形之方法。最後配合積木尺寸，釘了幾種不同的外框，做出有趣的益智玩具(圖 d)。



圖a



圖b



圖c：無縫隙矩形

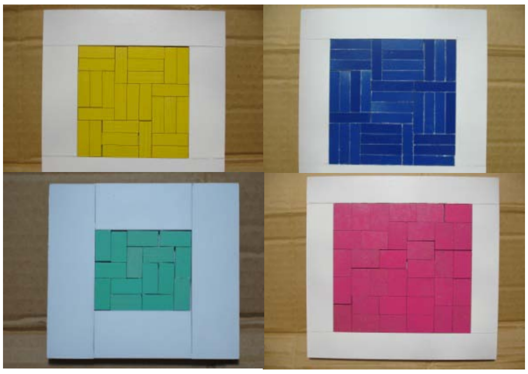


圖 d

壹、研究動機

有一次在爬山途中，看到水泥工人正在砌牆，看著、看著…我不禁納悶起來？為什麼工人砌牆時要將磚頭錯開堆疊？我好奇的問工人，工人說：「這種砌牆的方式，可以使牆壁更加堅固，但也因為這樣，所以有時要切割磚頭，才能砌成一面完整的牆。」聽完工人的解釋後，我更加疑惑，於是我又繼續問工人：「如果不切割磚頭，難道就不能砌成一面完整的牆嗎？」工人想了一會兒，支支吾吾的答不出來，後來我利用自製的積木當作磚頭，展開一連串的研究。

貳、研究目的

一、探討積木為 1×2 時，可以排出哪些 m×n 的無縫隙矩形。

二、推廣至積木為 a×b 時，可以排出哪些 m×n 的無縫隙矩形。

三、探討積木的長(a)、寬(b)與無縫隙矩形的長(m)、寬(n)之關係

四、尋找可以排出無縫隙矩形的方法。

參、研究設備及器材

自製積木、自製巧板、紙、筆

肆、研究過程

一、研究過程流程圖

探討積木為 1x2 時排出的無縫隙矩形

☆探討阻擋分割線所需的最少積木數量
☆探討可排出的最小無縫隙矩形(5x6)
☆探討 6x6 無法排出無縫隙矩形的原因

探討積木為 1xb 時排出的無縫隙矩形

☆發現 b 要為 m 或 n 的因數
☆探討 b 要為 m 或 n 的因數之原因

探討積木為 axb 時排出的無縫隙矩形

☆發現 a、b 要為 m 或 n 的因數
☆探討 a、b 要為 m 或 n 的因數之原因
☆探討 m、n 要有二種不同的 a、b 組合之原因

尋找排出無縫隙矩形的方法

☆利用積木長(a)、寬(b)的差與增加等量積木來錯開分割線
☆找出最小矩形 A：(ab+a+b)x3ab 的排法及推廣
☆找出最小矩形 B：(2ab+a)x(2ab+b)的排法及推廣

二、定義：

(一)符號：

1.a：積木的長，如圖一。

2.b：積木的寬，如圖一。

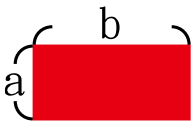
3.m：無縫隙矩形的長，如圖二。

4.n：無縫隙矩形的寬，如圖二。

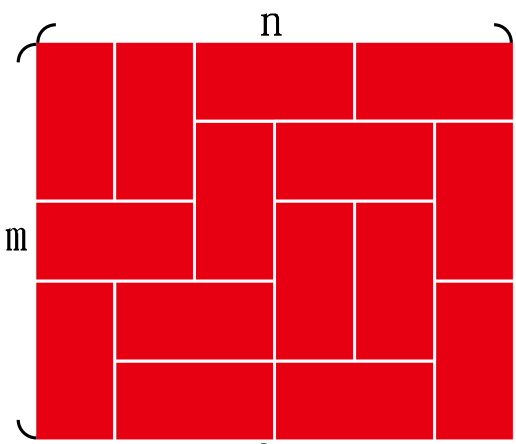
(二)本研究中，a、b 互質，且 a＜b。

(三)無縫隙矩形：在矩形中找不到任何一條貫穿的直線，亦即這個矩形是無法拆成兩個小矩形。如圖二為一無縫隙矩形，而圖三則否，因為在圖三中有一直線 $\overline{CD}$ 貫穿此矩形。

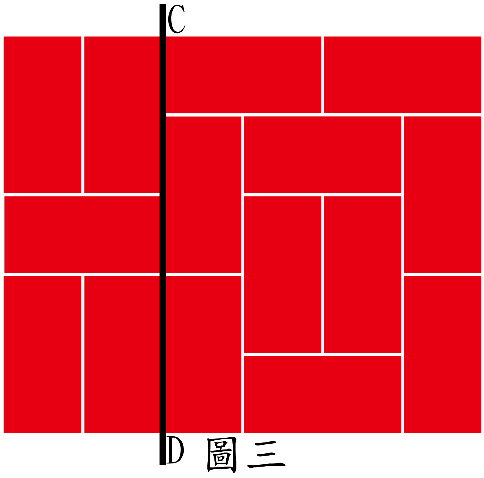
(四)分割線：是指用 1×1 積木整齊排列時，每塊積木邊長所構成的直線，如圖四中所有紅色直線，皆為分割線。



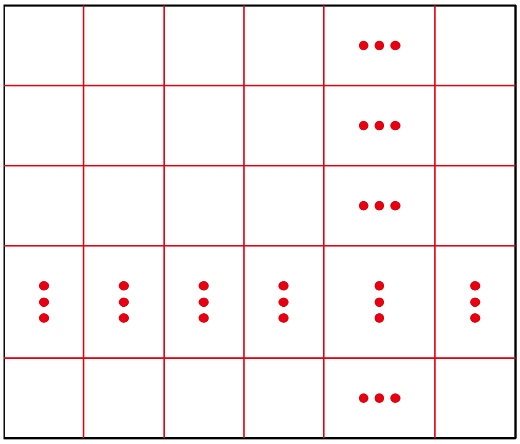
圖一



圖二



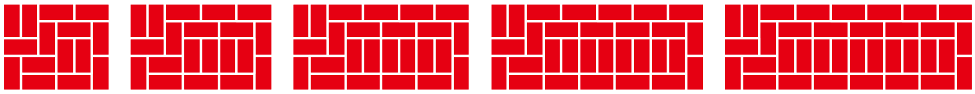
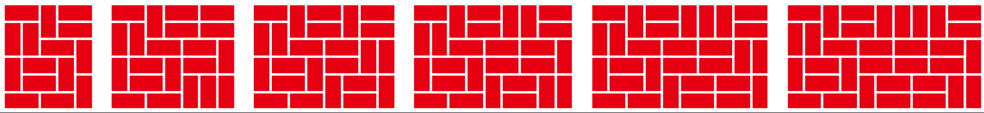
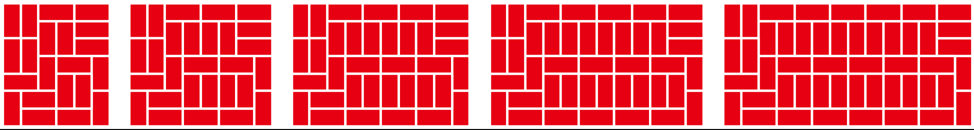
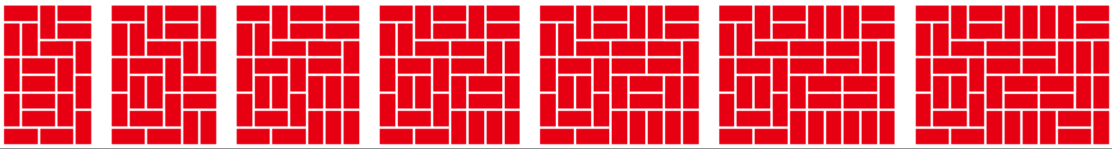
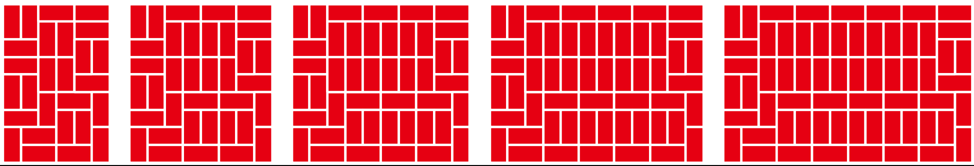
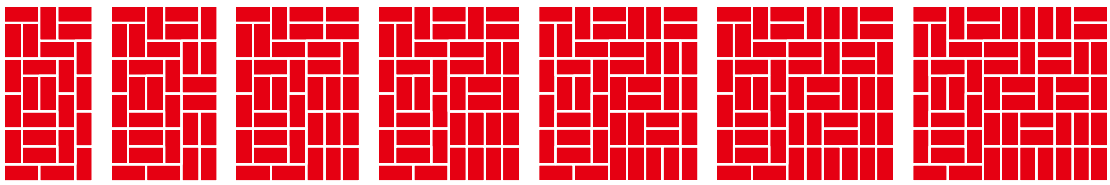
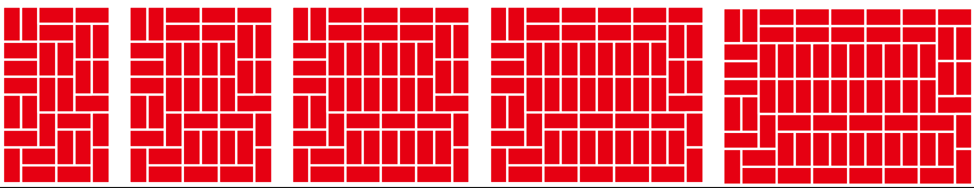
圖三


圖四

三、探討積木為 1x2 時，排出 m×n 的無縫隙矩形

(一)將積木為 1x2 時排出的無縫隙矩形面積整理成表一

表一：積木為 1x2 排出的無縫隙矩形面積

長(m)	無縫隙矩形的面積(m×n)
m＝5	5x6 5x8 5x10 5x12 5x14 
m＝6	6x5 6x7 6x8 6x9 6x10 6x11 
m＝7	7x6 7x8 7x10 7x12 7x14 
m＝8	8x5 8x6 8x7 8x8 8x9 8x10 8x11 
m＝9	9x6 9x8 9x10 9x12 9x14 
m＝10	10x5 10x6 10x7 10x8 10x9 10x10 10x11 
m＝11	11x6 11x8 11x10 11x12 11x14 
⋮	⋮

觀察表一發現：1.排出的無縫隙矩形面積均為偶數。

2.排出的最小無縫隙矩形面積為 5x6。

3.無法排出 6x6 的無縫隙矩形。

(二)探討上述的發現

1.分析發現 1：顯而易見，由積木 1×2 排出的矩形面積是 2n，而 2n 是一偶數。

2.在探討發現 2 之前，我們必須先分析阻擋每一條分割線至少需要幾塊積木，在此我們將矩形分成「偶×偶」型和「奇×偶」型兩種。

(1)「偶×偶」型：矩形的長、寬均為偶數。

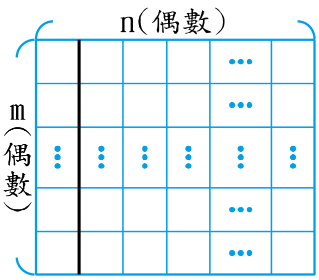
①阻擋所有縱向分割線需要 2n-2 塊積木

(分析)：A.要阻擋第一條縱向分割線(圖五~1)，至少要排 2 塊橫向積木，如果只排一塊橫向積木(圖五~2)，那麼分割線左邊的面積為 1×(m-1)是一奇數(圖五~3 黃色部分)，無法用 1×2 積木排出，所以至少要排 2 塊橫向積木(圖五~4)。

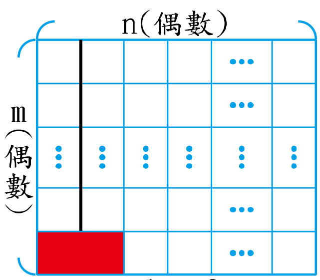
B.要阻擋第二條縱向分割線(圖五~5)，至少也要排 2 塊橫向積木，如果只排一塊橫向積木(圖五~6)，那麼分割線左邊的面積為 1×m+1×(m-1)=2m-1 也是一奇數(圖五~6 綠色+黃色部分)，無法用 1×2 積木排出。

C.同理可分析得，要阻擋每一條縱向分割線，至少都要排 2 塊橫向積木(圖五~7)。

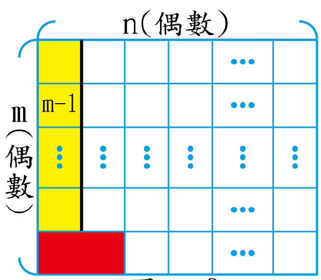
D.縱向分割線有(n-1)條，故要阻擋所有縱向分割線共需 2×(n-1)=2n-2 塊積木。



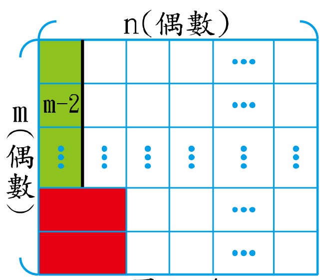
圖五~1



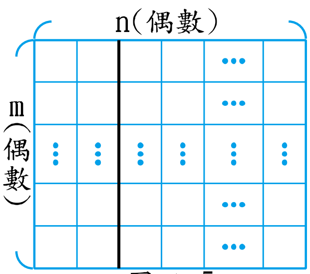
圖五~2



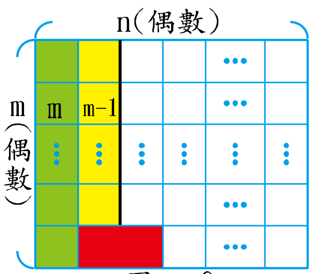
圖五~3



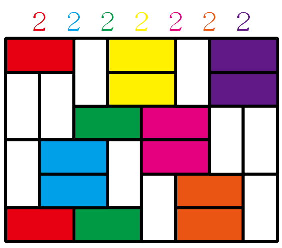
圖五~4



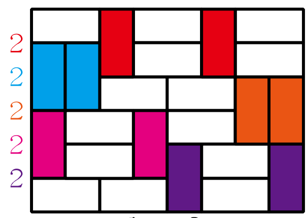
圖五~5



圖五~6



圖五~7



圖五~8

②阻擋所有橫向分割線需要 2m-2 塊積木(圖五~8)

(分析)：理由同①

③由①、②知，要阻擋所有分割線共需 2(m+n-2)塊積木。

(2)「奇×偶」型：矩形的長、寬中，有一邊為奇數，另一邊為偶數。

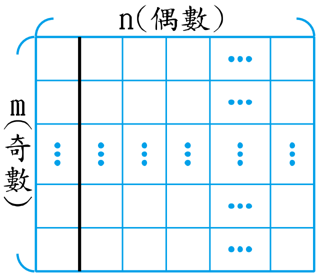
①阻擋所有縱向分割線需要$\frac{3n}{2}$-2 塊積木

(分析)：A.要阻擋第一條縱向分割線(圖六~1)，至少要排 1 塊橫向積木(圖六~2)，此時分割線左邊面積為 1×(m-1)是一偶數(圖六~3)，可以用 1×2 積木排出。

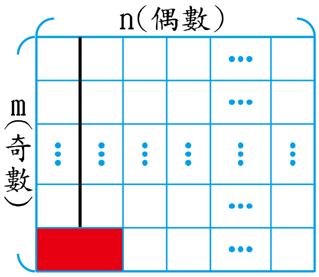
B.要阻擋第二條縱向分割線(圖六~4)至少需要排 2 塊橫向積木，如果只排一塊橫向積木(圖六~5)，那麼分割線左邊的面積為 1×m+1×(m-1)=2m-1 是一奇數，無法用 1×2 積木排出，所以至少要排兩塊橫向積木(圖六~6)。

C.同理可推得要阻擋第三條、第五條、第七條、……第 X 條(X 為奇數)縱向分割線，至少都需要排一塊橫向積木，而要阻擋第 4 條、第 6 條、……第 Y 條(Y 為偶數)縱向分割線，至少都需要排二塊橫向積木(圖六~7)。

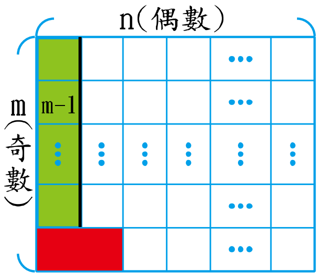
D.要阻擋所有縱向分割線共需(1+2) ×$\frac{n-2}{2}$+1=$\frac{3n}{2}$-2 塊積木。



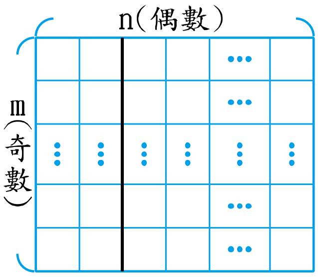
圖六~1



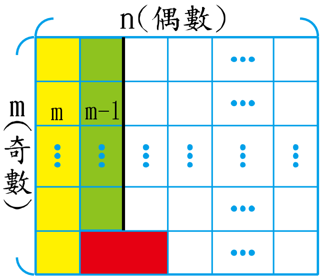
圖六~2



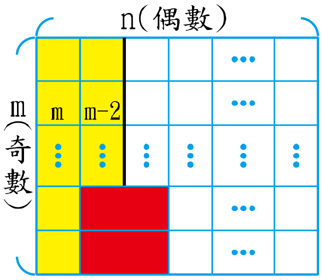
圖六~3



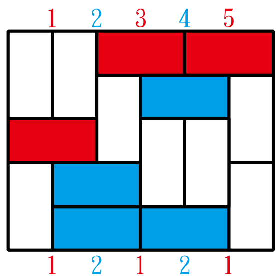
圖六~4



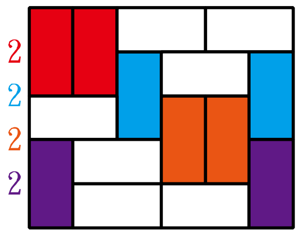
圖六~5



圖六~6



圖六~7



圖六~8

②阻擋所有橫向分割線需要 2m-2 塊積木(圖六~8)

(分析)：理由同(1)中的①

③由①、②知，要阻擋所有分割線共需 2(m+n-2)-$\frac{n}{2}$塊積木，此時 m 為奇數，n 為偶數。

(3)結論：由上述(1)、(2)的討論知，要阻擋「偶×偶」型中的所有分割線需要 2(m+n-2)塊積木；要阻擋「奇×偶」型中的所有分割線需要 2(m+n-2)-$\frac{n}{2}$塊積木，此時 m 為奇數，n 為偶數。

3.因為排成 m×n 矩形所需的積木數量，必須要大於或等於阻擋所有分割線所需的積木數量，因此在「偶×偶」型的矩形中，我們可以得到$\frac{m\times n}{2}$≧2(m+n-2)的關係式；而在「奇×偶」型的矩形中，也可以得到$\frac{m\times n}{2}$≧2(m+n-2)- $\frac{n}{2}$的關係式。

(1)解$\frac{m\times n}{2}$≧2(m+n-2)的不等式，m、n 均為偶數。

$\frac{m\times n}{2}$≧2(m+n-2)

→m×n≧4m+4n-8

→m×n-4m-4n+8≧0

→(m-4)×(n-4)≧8

① m-4≧8 且 n-4≧1→m≧12 且 n≧5，所以 m×n 的最小為 12×6。

② m-4≧4 且 n-4≧2→m≧8 且 n≧6，所以 m×n 的最小為 8×6。

③ m-4≧2 且 n-4≧4→m≧6 且 n≧8，所以 m×n 的最小為 6×8。

④ m-4≧1 且 n-4≧8→m≧5 且 n≧12，所以 m×n 的最小為 6×12。

⑤結論：由①到④的討論知，當矩形為「偶×偶」型時，m×n 最小為 6×8。

(2)解$\frac{m\times n}{2}$≧2(m+n-2)-$\frac{n}{2}$的不等式，m 為奇數，n 為偶數

$\frac{m\times n}{2}$≧2(m+n-2)-$\frac{n}{2}$

→m×n≧4(m+n-2)-n

→m×n-4m-3n+8≧0

→(m-3)×(n-4)≧4

① m-3≧4 且 n-4≧1→m≧7 且 n≧5，所以 m×n 的最小為 7×6。

② m-3≧2 且 n-4≧2→m≧5 且 n≧6，所以 m×n 的最小為 5×6。

③ m-3≧1 且 n-4≧4→m≧4 且 n≧8，所以 m×n 的最小為 5×8。

④結論：由①到③的討論知，當矩形為「奇×偶」型時，m×n 最小為 5×6。

4.探討發現 2：分析上述 3 中的兩個結論，可以推得 m×n 最小為 5×6。

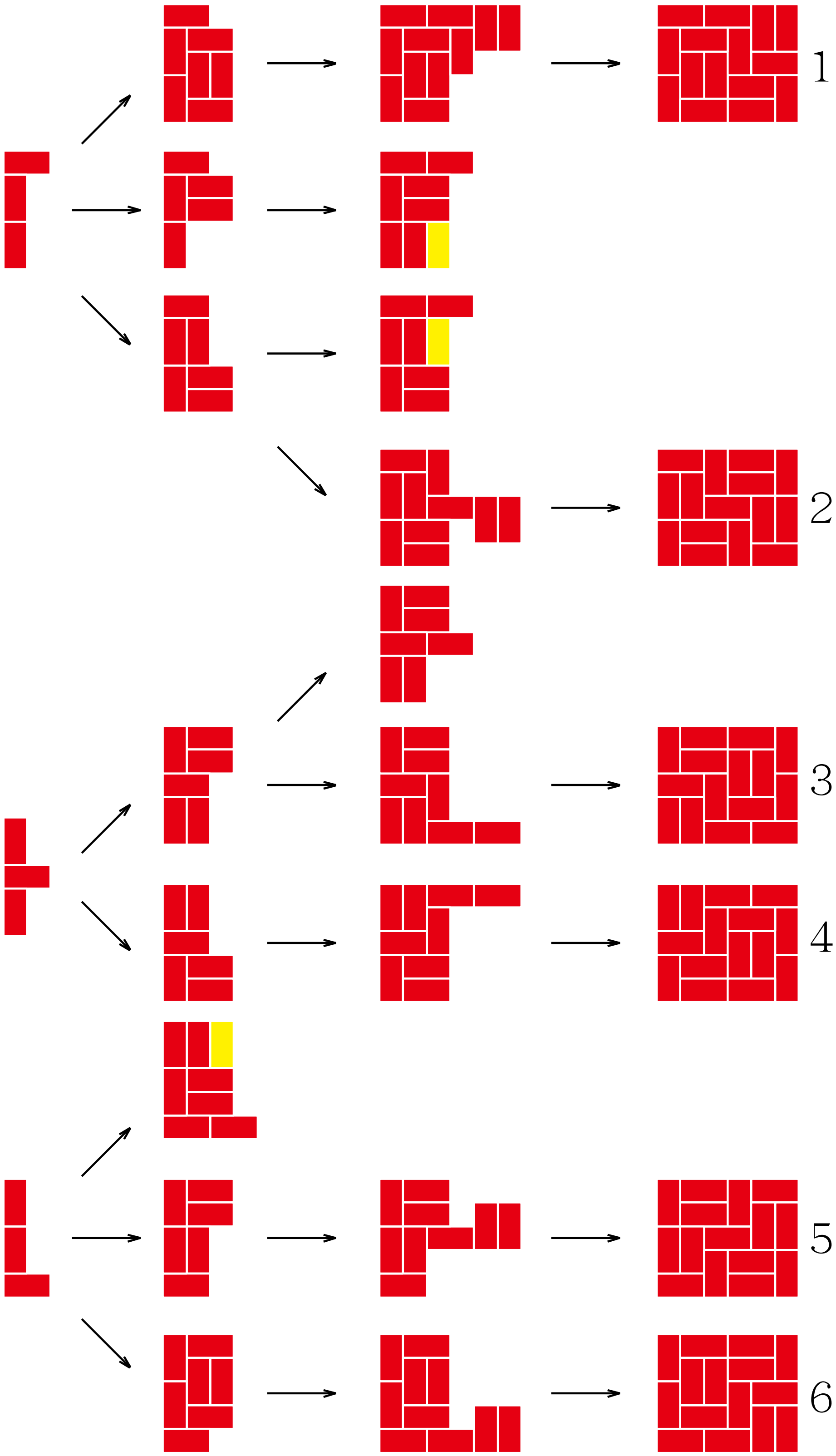
5.探討發現 3：由上述 3 中(1)的結論知，當矩形為「偶×偶」型時，m×n 最小為 6×8，所以 6×6 的無縫隙矩形是無法排出的。

(三)由上述的討論，可歸納得到以下的結果

1.結果一：積木為 1×2 時，要排出「偶×偶」型的無縫隙矩形，至少需要 2(m+n-2)塊積木。

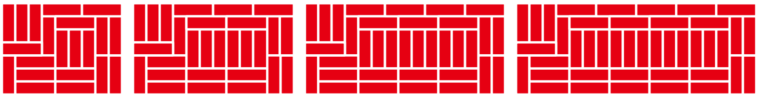
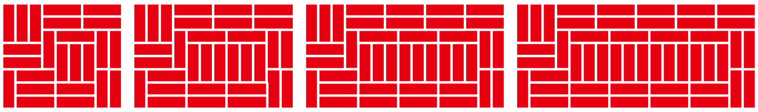
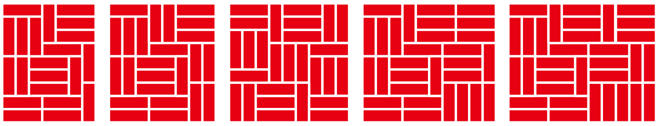
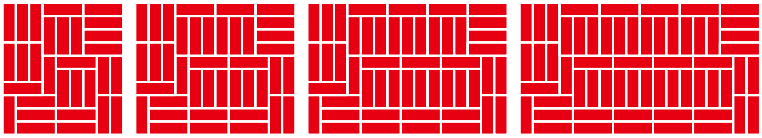
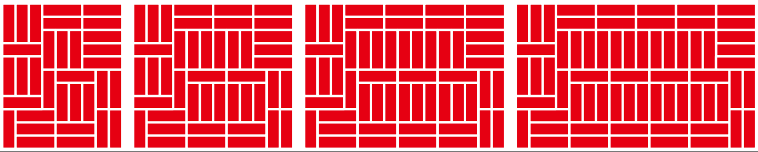
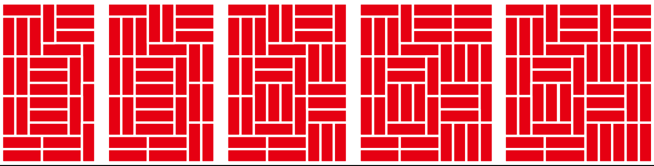
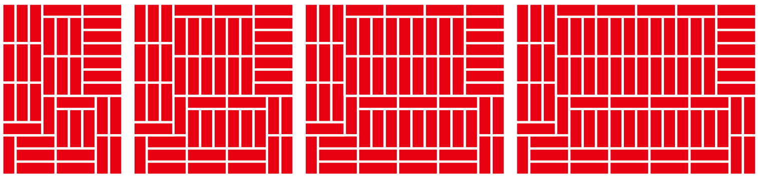
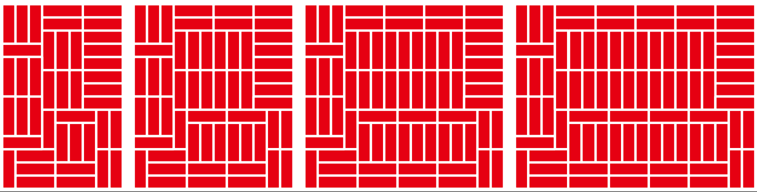
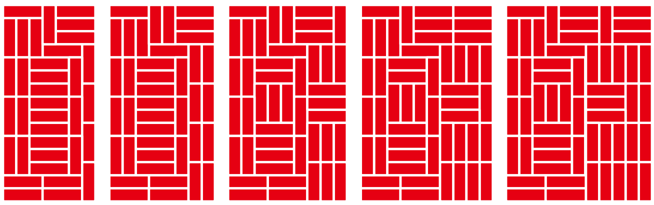
2.結果二：積木為 1×2 時，要排出「奇×偶」型的無縫隙矩形，至少需要 2(m+n-2)- $\frac{n}{2}$塊積木，此時 m 為奇數，n 為偶數。

(四)利用上述(二)中，阻擋「奇×偶」型矩形中每一條分割線所需積木數量之方法，來延伸討論 5×6 矩形的所有排法，我們一共找到 6 種，如下所示。

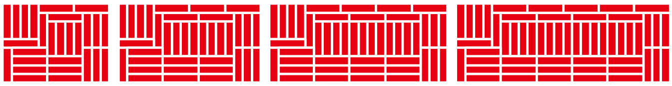
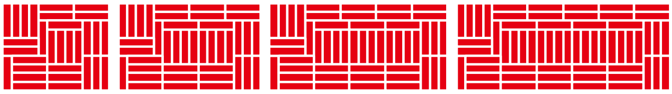
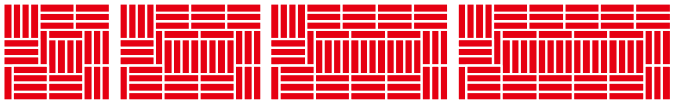
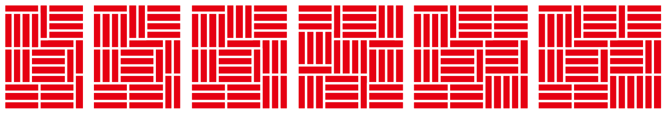
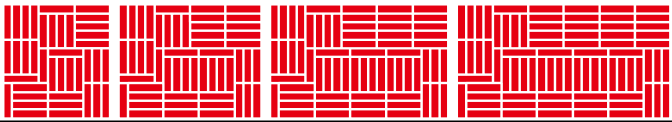
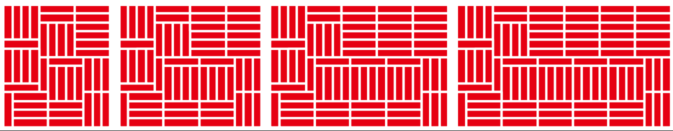
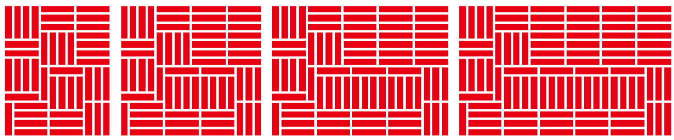
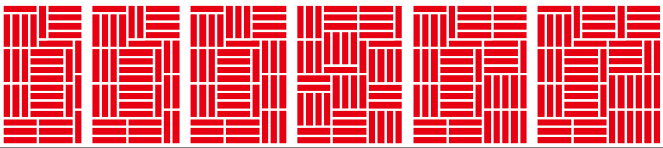
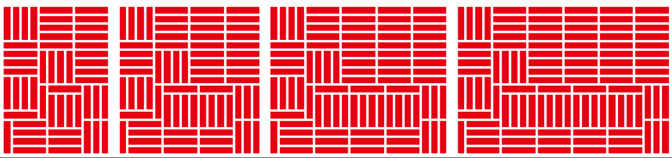


四、我們延伸探討積木為 1x3、1x4、1x5 時排出的無縫隙矩形面積，將它們整理成表二、表三、表四。

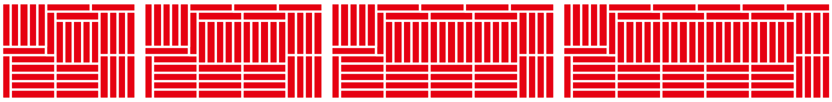
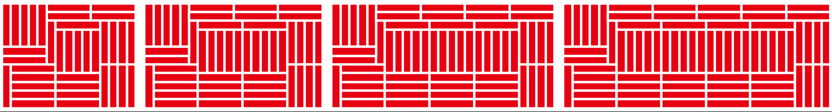
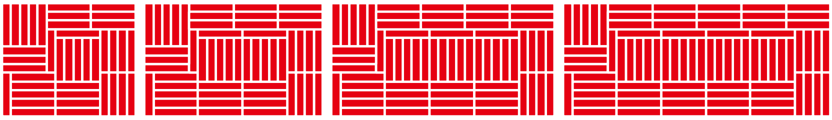
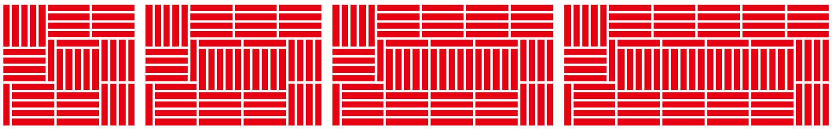
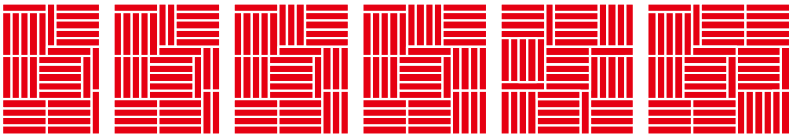
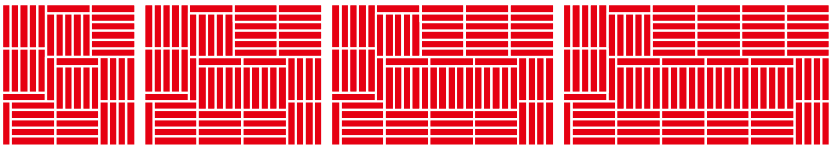
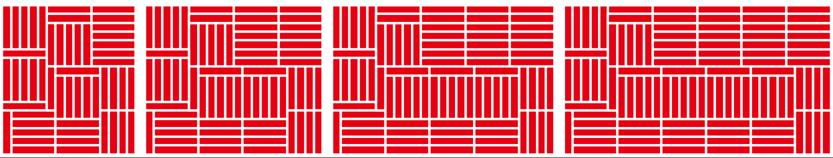
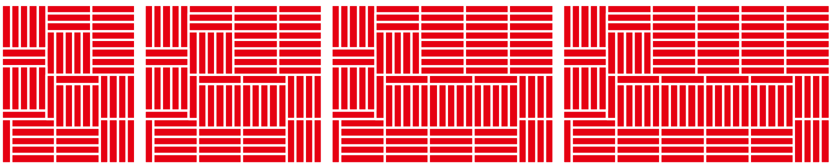
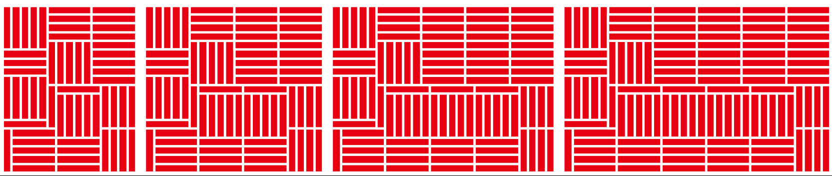
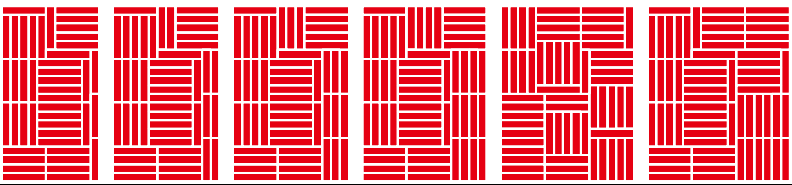
表二：積木為 1x3 排出的無縫隙矩形面積

長(m)	無縫隙矩形的面積(m×n)	發現(註：a＝1，b＝3)
m＝7	7x9　7x12　7x15　7x18 	$(ab+a+b)\times sab$，$s\in N$ 且 $s\geqq 3$
m＝8	8x9　8x12　8x15　8x18 	$(ab+2a+b)\times sab$，$s\in N$ 且 $s\geqq 3$
m＝9	9x7　9x8　9x9　9x10　9x11 	$3ab\times(ab+t_1a+t_2b)$，$t_i\in N$
m＝10	10x9　10x12　10x15　10x18 	$(ab+4a+b)\times sab$，$s\in N$ 且 $s\geqq 3$
m＝11	11x9　11x12　11x15　11x18 	$(ab+5a+b)\times sab$，$s\in N$ 且 $s\geqq 3$
m＝12	12x7　12x8　12x9　12x10　12x11 	$4ab\times(ab+t_1a+t_2b)$，$t_i\in N$
m＝13	13x9　13x12　13x15　13x18 	$(ab+7a+b)\times sab$，$s\in N$ 且 $s\geqq 3$
m＝14	14x9　14x12　14x15　14x18 	$(ab+8a+b)\times sab$，$s\in N$ 且 $s\geqq 3$
m＝15	15x7　15x8　15x9　15x10　15x11 	$5ab\times(ab+t_1a+t_2b)$，$t_i\in N$

表三：積木為 1x4 排出的無縫隙矩形面積

長(m)	無縫隙矩形的面積(m×n)	發現　(註：a＝1，b＝4)
m＝9	9×12　9×16　9×20　9×24 	(ab+a+b) ×sab，s∈N 且 s≧3
m＝10	10×12　10×16　10×20　10×24 	(ab+2a+b) ×sab，s∈N 且 s≧3
m＝11	11×12　11×16　11×20　11×24 	(ab+3a+b) ×sab，s∈N 且 s≧3
m＝12	12×9　12×10　12×11　12×12　12×13　12×14 	3ab×(ab+t_1a+t_2b)，t_i∈N
m＝13	13×12　13×16　13×20　13×24 	(ab+5a+b) ×sab，s∈N 且 s≧3
m＝14	14×12　14×16　14×20　14×24 	(ab+6a+b) ×sab，s∈N 且 s≧3
m＝15	15×12　15×16　15×20　15×24 	(ab+7a+b) ×sab，s∈N 且 s≧3
m＝16	16×9　16×10　16×11　16×12　16×13　16×14 	4ab×(ab+t_1a+t_2b)，t_i∈N
m＝17	17×12　17×16　17×20　17×24 	(ab+9a+b) ×sab，s∈N 且 s≧3
⋮	⋮	⋮

表四：積木為 1x5 排出的無縫隙矩形面積

長(m)	無縫隙矩形的面積(mxn)	發現(註：a＝1，b＝5)
m＝11	11x15 11x20 11x25 11x30 	(ab+a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝12	12x15 12x20 12x25 12x30 	(ab+2a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝13	13x15 13x20 13x25 13x30 	(ab+3a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝14	14x15 14x20 14x25 14x30 	(ab+4a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝15	15x11 15x12 15x13 15x14 15x15 15x16 	3abx(ab+t_1a+t_2b)，t_i∈N
m＝16	16x15 16x20 16x25 16x30 	(ab+6a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝17	17x15 17x20 17x25 17x30 	(ab+7a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝18	18x15 18x20 18x25 18x30 	(ab+8a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝19	19x15 19x20 19x25 19x30 	(ab+9a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝20	20x11 20x12 20x13 20x14 20x15 20x16 	4abx(ab+t_1a+t_2b)，t_i∈N

(一)觀察表二~表四發現：**b 要為 m 或 n 的因數，且 m≧2b+1，n≧3b。**

(二)探討 b 要為 m 或 n 的因數

1.如果 b 為 m 的因數，則每一行可以用$\frac{m}{b}$個 b×1 的積木恰好覆蓋(圖七~1)。

如果 b 為 n 的因數，則每一列可以用$\frac{n}{b}$個 1×b 的積木恰好覆蓋(圖七~2)。

2.如果 m×n 矩形可以被 1×b 的積木完全覆蓋，則在 m×n 矩形分割線所構成的方格中填數，第一行的格子從上到下依次填入 1、2、3…m，此外對其中任何一列，所填各數從左至右，每一格都增加 1(圖七~3)，這樣，每一個 1×b 的積木在矩形的覆蓋中，所蓋住的格子中所填的數，除以 b 的餘數，恰好有一個餘 1、一個餘 2、…、一個餘 b-1、一個整除。因為 m×n 矩形可以被 1×b 的積木完全覆蓋，所以在 m×n 矩形分割線所構成的方格中所填的數，除以 b 之後的各種餘數的個數會相等，亦即「餘 1 的個數=餘 2 的個數=餘 3 的個數=…」。

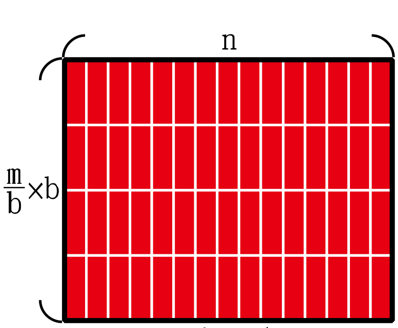


圖 七~1

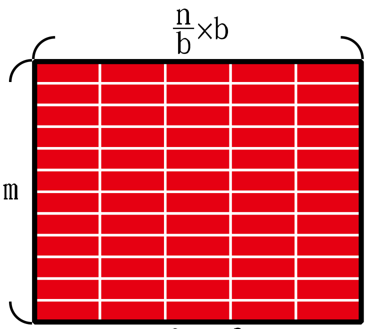


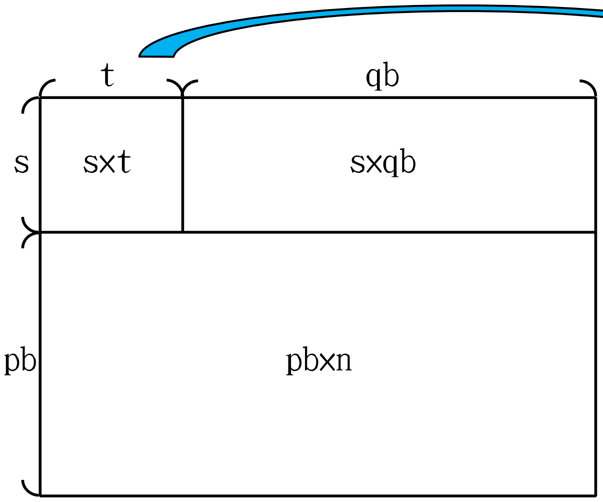
圖 七~2

1	2	3	4	5	•••	n
2	3	4	5	6	•••	n+1
3	4	5	6	7	•••	n+2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	•••	⋮
m	m+1	m+2	m+3	m+4	•••	m+n-1

圖 七~3

如果 b 不是 m、n 的因數，那麼 m、n 除以 b 就會有餘數，也就是 m=pb+s，n=qb+t，而 s．t≠0。我們規定 s≦t，接著將 m×n 矩形按圖八的方式分為 3 塊，一塊是 s×t 矩形，另一塊是 pb×n 矩形，還有一塊是 s×qb 矩形。

顯然，pb×n 矩形和 s×qb 矩形中，分割線所構成的方格中所填的數，除以 b 之後的各種餘數的個數會相等。而 s×t 矩形中分割線所構成的方格中所填的數，除以 b 之後的各種餘數的個數也應該要相等。但我們觀察 s×t 矩形中所填的數(圖九)，發現第 t 條對角線上的數都是 t，所以 t 在圖九中至少出現 s 次，而 t+1 都在第 t+1 條對角線上，即 t+1 共出現 s-1 次，則 m、n 除以 b 若有餘數，就不能完全覆蓋，所以 b 要為 m 或 n 的因數。



圖八

t

s

1	2	3	4	•••	t−1	t
2	3	4	5	•••	t	t+1
⋮	⋮	⋮	⋮	•••	⋮	⋮
s−1	s	s+1	s+2	•••	s+t−3	s+t−2
s	s+1	s+2	s+3	•••	s+t−2	s+t−1

圖九

(三)探討 $m \geqq 2b+1$，$n \geqq 3b$。

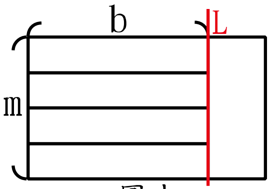
1.當 $m<b$ 時，$1 \times b$ 的積木無法直立，只能排橫向，所以會有分割線貫穿，如圖十。

2.當 $m=b$ 時，如圖十一，直排會有分割線貫穿，橫排也會有分割線貫穿。

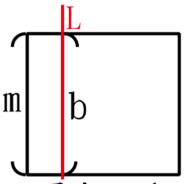
3.當 $b<m<2b$ 時，若全部橫排會有分割線貫穿，橫直交錯排列時(如圖十二)，想要阻擋 L_1，則會有 L_2 的分割線貫穿。

4.當 $m=2b$ 時，若排 2 塊直立積木會有分割線貫穿；若全部排橫向也會有分割線貫穿，而橫直交錯排列時(如圖十二)，想要阻擋 L_1，則會有 L_2 的分割線貫穿線。

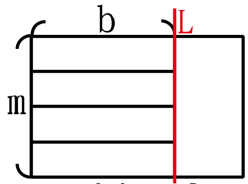
5.由 1~4 知，$m \geqq 2b+1$，又因為 m 或 n 要為 b 的倍數，而 m 不是 b 的倍數，所以 n 一定要為 b 的倍數，故 $n \geqq 3b$(如圖十三)



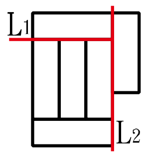
圖十



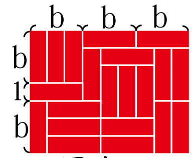
圖十一~1



圖十一~2



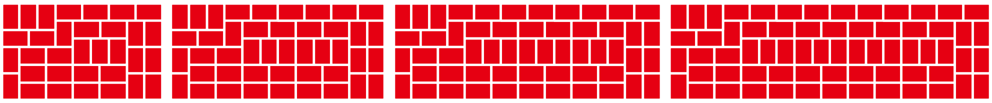
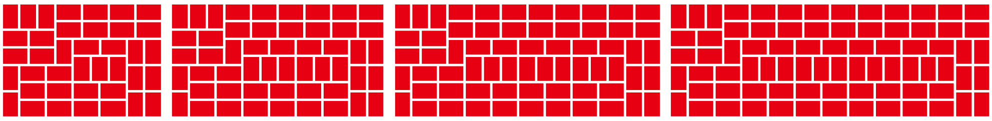
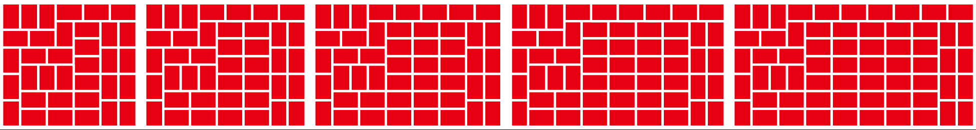
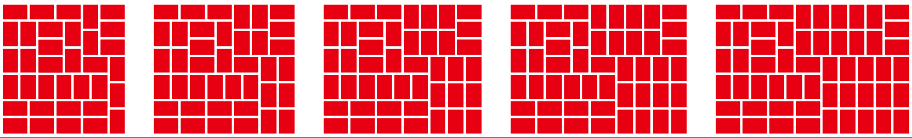
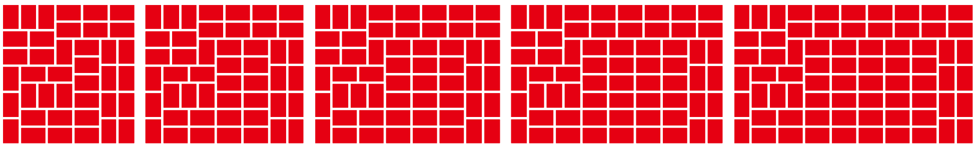
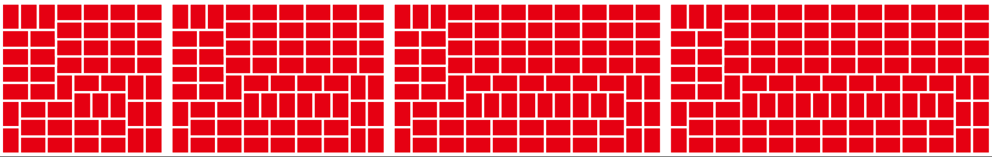
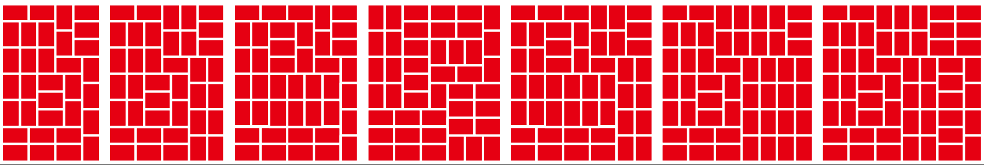
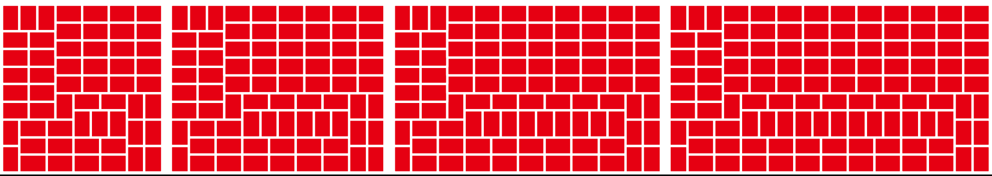
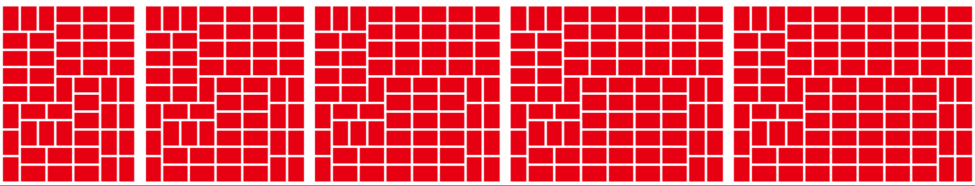
圖十二



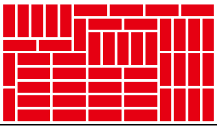
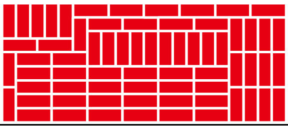
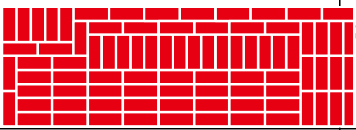
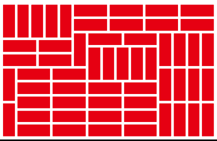
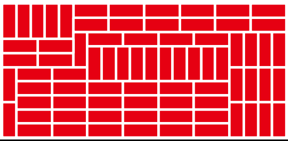
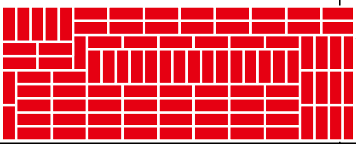
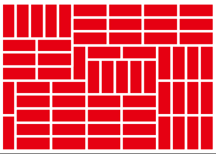
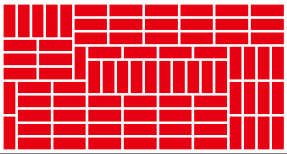
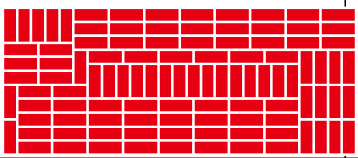
圖十三

五、我們改變積木的大小，繼續探討積木為 2x3、2x5、2x7、3x4、3x5、3x7、4x5、4x7、4x9 時，排出的無縫隙矩形面積，並將它們整理成表五~表十三。

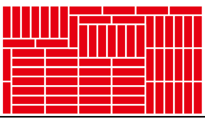
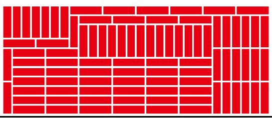
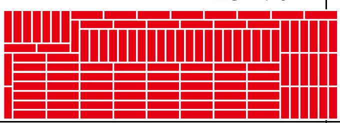
表五：積木為 2x3 排出的無縫隙矩形面積

長(m)	無縫隙矩形的面積(m×n)	($a=2$，$b=3$)
m＝11	11x18 11x24 11x30 11x36 	$(ab+a+b)\times sab$，$s\in N$ 且 $s\geqq 3$
m＝13	13x18 13x24 13x30 13x36 	$(ab+2a+b)\times sab$，$s\in N$ 且 $s\geqq 3$
m＝14	14x15 14x18 14x21 14x24 14x27 	$(2ab+a)\times(2ab+tb)$，$t\in N$
m＝15	15x14 15x16 15x18 15x20 15x22 	$(2ab+b)\times(2ab+ta)$，$t\in N$
m＝16	16x15 16x18 16x21 16x24 16x27 	$(2ab+2a)\times(2ab+tb)$，$t\in N$
m＝17	17x18 17x24 17x30 17x36 	$(ab+4a+b)\times sab$，$s\in N$ 且 $s\geqq 3$
m＝18	18x11 18x13 18x14 18x15 18x16 18x17 18x18 	$3ab\times(ab+t_1a+t_2b)$，$t_i\in N$
m＝19	19x18 19x24 19x30 19x36 	$(ab+5a+b)\times sab$，$s\in N$ 且 $s\geqq 3$
m＝20	20x15 20x18 20x21 20x24 20x27 	$(2ab+4a)\times(2ab+tb)$，$t\in N$

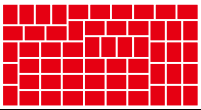
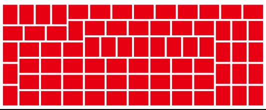
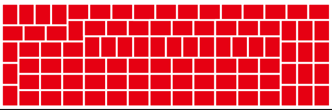
表六：積木為 2x5 排出的無縫隙矩形面積

長(m)	無縫隙矩形的面積(m×n)	發現　(註：a＝2，b＝5)
m＝17	17×30  17×40  17×50 	(ab+a+b) ×sab，s∈N 且 s≧3
m＝19	19×30  19×40  19×50 	(ab+2a+b) ×sab，s∈N 且 s≧3
m＝21	21×30  21×40  21×50 	(ab+3a+b) ×sab，s∈N 且 s≧3
m＝22	22×25、22×30、22×35、22×40…	(2ab+a) ×(2ab+tb)，t∈N
m＝23	23×30、23×40、23×50、23×60…	(ab+4a+b) ×sab，s∈N 且 s≧3
m＝24	24×25、24×30、24×35、24×40…	(2ab+2a) ×(2ab+tb)，t∈N
m＝25	25×22、25×24、25×26、25×28…	(2ab+b) ×(2ab+ta)，t∈N
m＝26	26×25、26×30、26×35、26×40…	(2ab+3a) ×(2ab+tb)，t∈N
m＝27	27×30、27×40、27×50、27×60…	(ab+6a+b) ×sab，s∈N 且 s≧3
m＝28	28×25、28×30、28×35、28×40…	(2ab+4a) ×(2ab+tb)，t∈N
⋮	⋮	⋮

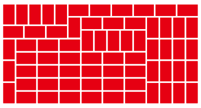
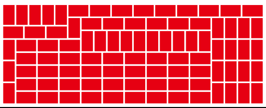
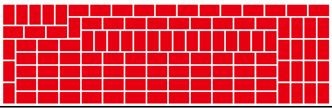
表七：積木為 2x7 排出的無縫隙矩形面積

長(m)	無縫隙矩形的面積(m×n)	發現　(註：a＝2，b＝7)
m＝23	23×42  23×56  23×70 	(ab+a+b) ×sab，s∈N 且 s≧3
m＝25	25×42、25×56、25×70、25×84…	(ab+2a+b) ×sab，s∈N 且 s≧3
m＝27	27×42、27×56、27×70、27×84…	(ab+3a+b) ×sab，s∈N 且 s≧3
m＝29	29×42、29×56、29×70、29×84…	(ab+4a+b) ×sab，s∈N 且 s≧3
m＝30	30×35、30×42、30×49、30×56…	(2ab+a) ×(2ab+tb)，t∈N
m＝31	31×42、31×56、31×70、31×84…	(ab+5a+b) ×sab，s∈N 且 s≧3
m＝32	32×35、32×42、32×49、32×56…	(2ab+2a) ×(2ab+tb)，t∈N
m＝33	33×42、33×56、33×70、33×84…	(ab+6a+b) ×sab，s∈N 且 s≧3
m＝34	34×35、34×42、34×49、34×56…	(2ab+3a) ×(2ab+tb)，t∈N
m＝35	35×30、35×32、35×34、35×36…	(2ab+b) ×(2ab+ta)，t∈N
m＝36	36×35、36×42、36×49、36×56…	(2ab+4a) ×(2ab+tb)，t∈N
m＝37	37×42、37×56、37×70、37×84…	(ab+8a+b) ×sab，s∈N 且 s≧3
⋮	⋮	⋮

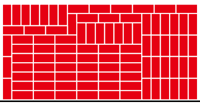
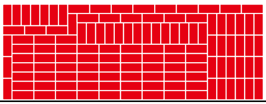
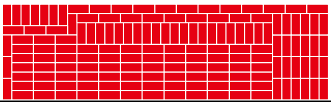
表八：積木為 3x4 排出的無縫隙矩形面積

長(m)	無縫隙矩形的面積(mxn)	發現 (註：a＝3，b＝4)
m＝19	19x36  19x48  19x60 	(ab+a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝22	22x36、22x48、22x60、22x72…	(ab+2a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝23	23x36、23x48、23x60、23x72…	(ab+a+2b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝25	25x36、25x48、25x60、25x72…	(ab+3a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝26	26x36、26x48、26x60、26x72…	(ab+2a+2b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝27	27x28、27x32、27x36、27x40…	(2ab+a) x(2ab+tb)，t∈N
m＝28	28x27、28x30、28x33、28x36…	(2ab+b) x(2ab+ta)，t∈N
m＝29	29x36、29x48、29x60、29x72…	(ab+3a+2b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝30	30x28、30x32、30x36、30x40…	(2ab+2a) x(2ab+tb)，t∈N
m＝31	31x36、31x48、31x60、31x72…	(ab+5a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝32	32x27、32x30、32x33、32x36…	(2ab+2b) x(2ab+ta)，t∈N
⋮	⋮	⋮

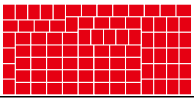
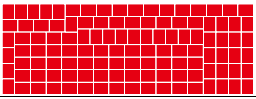
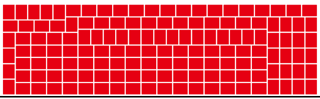
表九：積木為 3x5 排出的無縫隙矩形面積

長(m)	無縫隙矩形的面積(mxn)	發現 (註：a＝3，b＝5)
m＝23	23x45  23x60  23x75 	(ab+a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝26	26x45、26x60、26x75、26x90…	(ab+2a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝28	28x45、28x60、28x75、28x90…	(ab+a+2b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝29	29x45、29x60、29x75、29x90…	(ab+3a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝31	31x45、31x60、31x75、31x90…	(ab+2a+2b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝32	32x45、32x60、32x75、32x90…	(ab+4a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝33	33x35、33x40、33x45、33x50…	(2ab+a) x(2ab+tb)，t∈N
m＝34	34x45、34x60、34x75、34x90…	(ab+3a+2b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝35	35x33、35x36、35x39、35x42…	(2ab+b) x(2ab+ta)，t∈N
m＝36	36x35、36x40、36x45、36x50…	(2ab+2a) x(2ab+tb)，t∈N
m＝37	37x45、37x60、37x75、37x90…	(ab+4a+2b) xsab，s∈N 且 s≧3

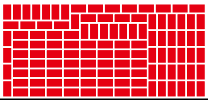
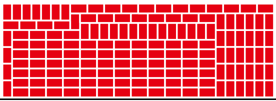
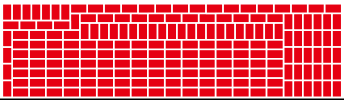
表十：積木為 3x7 排出的無縫隙矩形面積

長(m)	無縫隙矩形的面積(mxn)	發現 (註：a＝3，b＝7)
m＝31	31x63  31x84  31x105 	(ab+a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝34	34x63、34x84、34x105、34x126…	(ab+2a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝37	37x63、37x84、37x105、37x126…	(ab+3a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝38	38x63、38x84、38x105、38x126…	(ab+a+2b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝40	40x63、40x84、40x105、40x126…	(ab+4a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝41	41x63、41x84、41x105、41x126…	(ab+2a+2b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝43	43x63、43x84、43x105、43x126…	(ab+5a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝44	44x63、44x84、44x105、44x126…	(ab+3a+2b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝45	45x49、45x56、45x63、45x70…	(2ab+a) x(2ab+tb)，t∈N
m＝46	46x63、46x84、46x105、46x126…	(ab+6a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝47	47x63、47x84、47x105、47x126…	(ab+4a+2b) xsab，s∈N 且 s≧3
m＝48	48x49、48x56、48x63、48x70…	(2ab+2a) x(2ab+tb)，t∈N

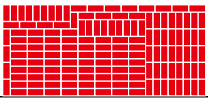
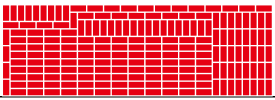
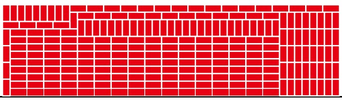
表十一：積木為 4x5 排出的無縫隙矩形面積

長(m)	無縫隙矩形的面積(mxn)	發現(註：a=4，b=5)
m=29	29x60  29x80  29x100 	(ab+a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=33	33x60、33x80、33x100、33x120…	(ab+2a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=34	34x60、34x80、34x100、34x120…	(ab+a+2b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=37	37x60、37x80、37x100、37x120…	(ab+3a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=38	38x60、38x80、38x100、38x120…	(ab+2a+2b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=39	39x60、39x80、39x100、39x120…	(ab+a+3b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=41	41x60、41x80、41x100、41x120…	(ab+4a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=42	42x60、42x80、42x100、42x120…	(ab+3a+2b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=43	43x60、43x80、43x100、43x120…	(ab+2a+3b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=44	44x45、44x50、44x55、44x60…	(2ab+a) x(2ab+tb)，t∈N
⋮	⋮	⋮

表十二：積木為 4x7 排出的無縫隙矩形面積

長(m)	無縫隙矩形的面積(mxn)	發現（註：a=4，b=7)
m=39	39x84  39x112  39x140 	(ab+a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=43	43x84、43x112、43x140、43x168…	(ab+2a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=46	46x84、46x112、46x140、46x168…	(ab+a+2b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=47	47x84、47x112、47x140、47x168…	(ab+3a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=50	50x84、50x112、50x140、50x168…	(ab+2a+2b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=51	51x84、51x112、51x140、51x168…	(ab+4a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=53	53x84、53x112、53x140、53x168…	(ab+a+3b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=54	54x84、54x112、54x140、54x168…	(ab+3a+2b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=55	55x84、55x112、55x140、55x168…	(ab+5a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=57	57x84、57x112、57x140、57x168…	(ab+2a+3b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=58	58x84、58x112、58x140、58x168…	(ab+4a+2b) xsab，s∈N 且 s≧3
⋮	⋮	⋮

表十三：積木為 4x9 排出的無縫隙矩形面積

長(m)	無縫隙矩形的面積(mxn)	發現(註：a=4，b=9)
m=49	49x10  49x144  49x180 	(ab+a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=53	53x108、53x144、53x180、53x216…	(ab+2a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=57	57x108、57x144、57x180、57x216…	(ab+3a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=58	58x108、58x144、58x180、58x216…	(ab+a+2b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=61	61x108、61x144、61x180、61x216…	(ab+4a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=62	62x108、62x144、62x180、62x216…	(ab+2a+2b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=65	65x108、65x144、65x180、65x216…	(ab+5a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=66	66x108、66x144、66x180、66x216…	(ab+3a+2b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=67	67x108、67x144、67x180、67x216…	(ab+a+3b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=69	69x108、69x144、69x180、69x216…	(ab+6a+b) xsab，s∈N 且 s≧3
m=70	70x108、70x144、70x180、70x216…	(ab+4a+2b) xsab，s∈N 且 s≧3

(一)觀察表五~表十三發現：**a、b 要為 m 或 n 的因數。**

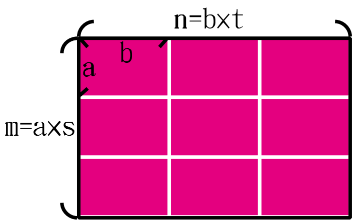
(二) 探討 a、b 要為 m 或 n 的因數。

1. a、b 分別為 m 或 n 的因數

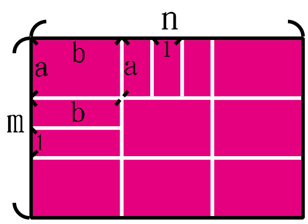
如果 a 為 m 的因數，b 為 n 的因數，則 $m=a\cdot s$，$n=b\cdot t$，那麼 m×n 矩形可畫分為 s×t 個 a×b 的積木(如圖十四)。如果 m×n 矩形可被 a×b 的積木完全覆蓋，那麼 m×n 矩形必定可被 1×b 及 1×a 積木完全覆蓋(如圖十五)。由第 13 頁的探討得知，a、b 分別為 m 或 n 的因數。

2. a、b 同時為 m 或 n 的因數

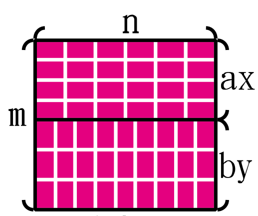
如果 a、b 同時為 n 的因數，則 $m=ax+by$。那麼 m×n 矩形可畫分為兩個矩形，一個為 n×ax 矩形，另一個為 n×by 矩形，這兩個矩形均可被 a×b 的積木覆蓋(如圖十六)。如果 m×n 矩形可被 a×b 積木完全覆蓋，那麼 n 邊可排$\frac{n}{a}$個 a×b 或$\frac{n}{b}$個 b×a 積木，m 邊可排 x 塊 a×b 積木及 y 塊 b×a 積木，所以 $m=ax+by$(如圖十七)，a、b 同時為 n(或 m)的因數。



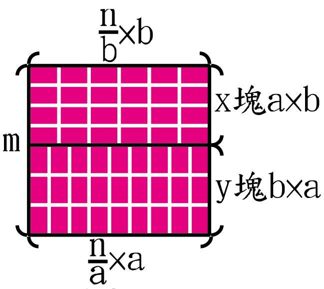
圖十四



圖十五



圖十六

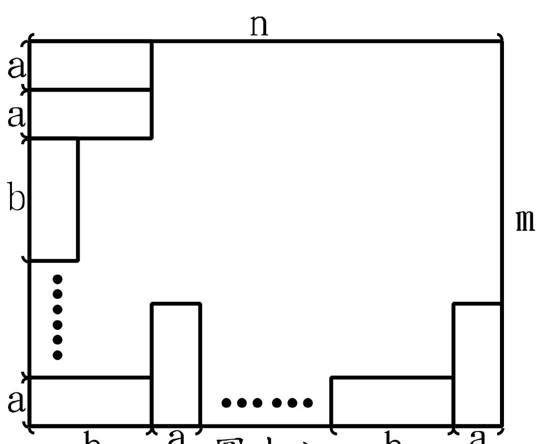


圖十七

(三)分析無縫隙矩形的長、寬，與積木長、寬的關係：

1.觀察表一到表十三，不難發現，用若干個 a×b 積木排成無縫隙矩形時，這些無縫隙矩形的邊長並非毫無限制。顯而易見，它一定會由若干個 a 和若干個 b 組合而成(如圖十八)，亦即

$ax_1+by_1=m$、$ax_2+by_2=n$，故我們進一步分析無縫隙矩形的長(m)和寬(n)。以下我們只舉 2×3 的積木排成無縫隙矩形為例，其餘的部分詳見筆記。



圖十八

2.用 2×3 的積木排成矩形時，

矩形的長(m)可表示成 $ax_1+by_1=m$…(1)，

同理寬(n)可表示成 $ax_2+by_2=n$…(2)

再將 $a=2$、$b=3$ 代入(1)、(2)式中得 $2x_1+3y_1=m$、$2x_2+3y_2=n$

(1)當 $m=1$ 時，$2x_1+3y_1=1$→x_1、y_1 找不到整數解。

(2)當 $m=2$ 時，$2x_1+3y_1=2$

x_1	1
y_1	0

→(x_1、y_1)找到(1、0)的解。

(3)當 $m=3$ 時，$2x_1+3y_1=3$

x_1	0
y_1	1

→(x_1、y_1)找到(0、1)的解。

(4)當 $m=4$ 時，$2x_1+3y_1=4$

x_1	2
y_1	0

→(x_1、y_1)找到(2、0)的解。

(5)當 $m=5$ 時，$2x_1+3y_1=5$

x_1	1
y_1	1

→(x_1、y_1)找到(1、1)的解。

(6)當 $m=6$ 時，$2x_1+3y_1=6$

x_1	3	0
y_1	0	2

→(x_1、y_1)找到(3、0)，(0、2)的解。

(7)當 $m=7$ 時，$2x_1+3y_1=7$

x_1	2
y_1	1

→(x_1、y_1)找到(2、1)的解。

(8)當 $m=8$ 時，$2x_1+3y_1=8$

x_1	4	1
y_1	0	2

→(x_1、y_1)找到(4、0)，(1、2)的解。

(9)當 $m=9$ 時，$2x_1+3y_1=9$

x_1	3	0
y_1	1	3

→(x_1、y_1)找到(3、1)，(0、3)的解。

(10)當 m＝10 時，$2x_1+3y_1=10$

x_1	5	2
y_1	0	2

→(x_1、y_1)找到(5、0)，(2、2)的解。

(11)當 m＝11 時，$2x_1+3y_1=11$

x_1	4	1
y_1	1	3

→(x_1、y_1)找到(4、1)，(1、3)的解。

(12)當 m＝12 時，$2x_1+3y_1=12$

x_1	6	3	0
y_1	0	2	4

→(x_1、y_1)找到(6、0)，(3、2)，(0、4)的解。

(13)當 m＝13 時，$2x_1+3y_1=13$

x_1	5	2
y_1	1	3

→(x_1、y_1)找到(5、1)，(2、3)的解。

(14)當 m＝14 時，$2x_1+3y_1=14$

x_1	7	4	1
y_1	0	2	4

→(x_1、y_1)找到(7、0)，(4、2)，(1、4)的解。

(15)當 m＝15 時，$2x_1+3y_1=15$

x_1	6	3	0
y_1	1	3	5

→(x_1、y_1)找到(6、1)，(3、3)，(0、5)的解。

(16)當 m＝16 時，$2x_1+3y_1=16$

x_1	8	5	2
y_1	0	2	4

→(x_1、y_1)找到(8、0)，(5、2)，(2、4)的解。

(17)當 m＝17 時，$2x_1+3y_1=17$

x_1	7	4	1
y_1	1	3	5

→(x_1、y_1)找到(7、1)，(4、3)，(1、5)的解。

(18)當 m＝18 時，$2x_1+3y_1=18$

x_1	9	6	3	0
y_1	0	2	4	6

→(x_1、y_1)找到(9、0)，(6、2)，(3、4)，(0、6)的解。

(19)當 m＝19 時，$2x_1+3y_1=19$

x_1	8	5	2
y_1	1	3	5

→(x_1、y_1)找到(8、1)，(5、3)，(2、5)的解。

(20)當 m＝20 時，$2x_1+3y_1=20$

x_1	10	7	4	1
y_1	0	2	4	6

→(x_1、y_1)找到(10、0)，(7、2)，(4、4)，(1、6)的解。

(21)我們由第 15 頁的表五中知道，當 m＝11、13、14、15、16、17、18、19、20、…時，再加上適當的 n 值，就可以排成無縫隙矩形，而觀察上述 1.到 20.的分析，不難發現，當 m＝11、13、14、15、16、17、18、19、20、…這些數時，m 都可以找到至少二組(x_1、y_1)均為正整數的解。

(22)n 值的分析同 m 值的分析。

(四)由上述(三)的討論知，用 a×b 的積木排出 m×n 的無縫隙矩形時，除了 a、b 必須要為 m 或 n 的因數外，同時 m、n 至少還要有 2 組正整數解，亦即 $m=ax_1+by_1=ax_2+by_2$ 且 $n=ax_3+bx_3=ax_4+by_4$。

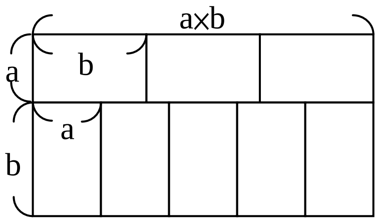
(五)將無縫隙矩形分為兩類

1. a、b 同時為 m 或 n 的因數時，找到的無縫隙矩形，我們稱它為矩形 A，從觀察表五到表十三知，矩形 A 的面積為：$(ab+t_1a+t_2b)\times(t_3ab)$，$t_3\geqq 3$。
2. a、b 分別為 m 或 n 的因數時，找到的無縫隙矩形，我們稱它為矩形 B，從觀察表五到表十三知，矩形 B 的面積為：$(2ab+t_4a)\times(2ab+t_5b)$。

六、排出無縫隙矩形的方法

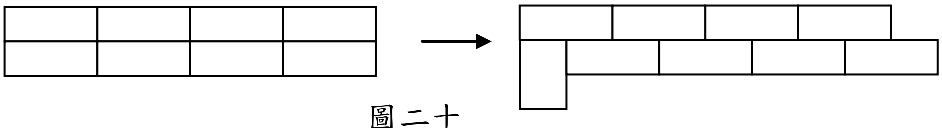
(一)排出無縫隙矩形的 2 個技巧

1.將 a×b 的積木一橫一直拼排時發現，當長度排到 a×b 時，可排出一個小矩形(如圖十九)，此時一邊長為 a+b，另一邊長為 a×b，因為 a、b 互質，所以與(a+b)邊平行的分割線皆不能貫穿此矩形。



圖十九

2.將 axb 的積木兩排並列後發現，當其中一行開頭排入一塊不同方向的積木時，可將兩行縱向的分割線錯開(如圖二十)。



圖二十

(二)用 axb 的積木排出最小矩形 A，此時 m=ab+a+b，n=3ab。

1.先排一個 abx(a+b)於左上角①的位置。

2.排 2 個 axab 於上方②的位置填滿 n 邊。

3.排一個 axab 於左方③的位置填滿 m 邊。

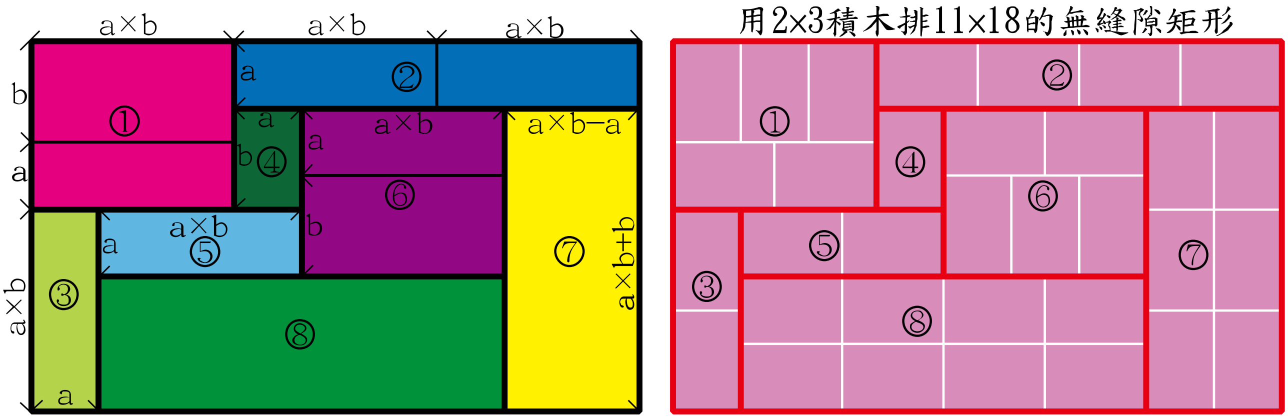
4.排一塊 axb 在④的位置。

5.排一個 axab 在⑤的位置。

6.排一個 abx(a+b)在⑥的位置。

7.和 4.同方向補滿⑦的位置。

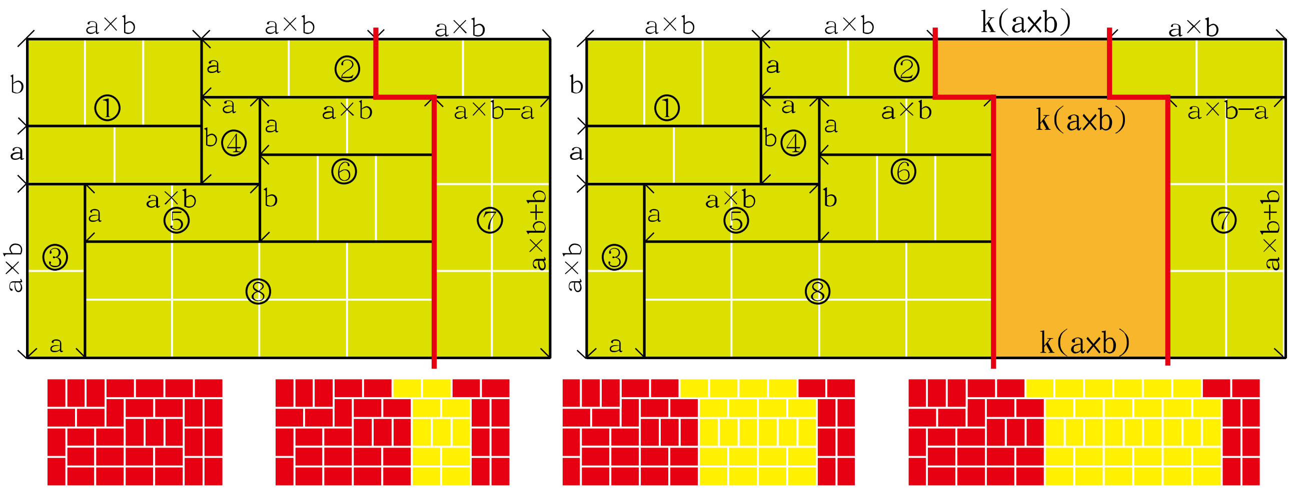
8.和 5.同方向補滿⑧的位置，即完成最小矩形 A。



圖二十一

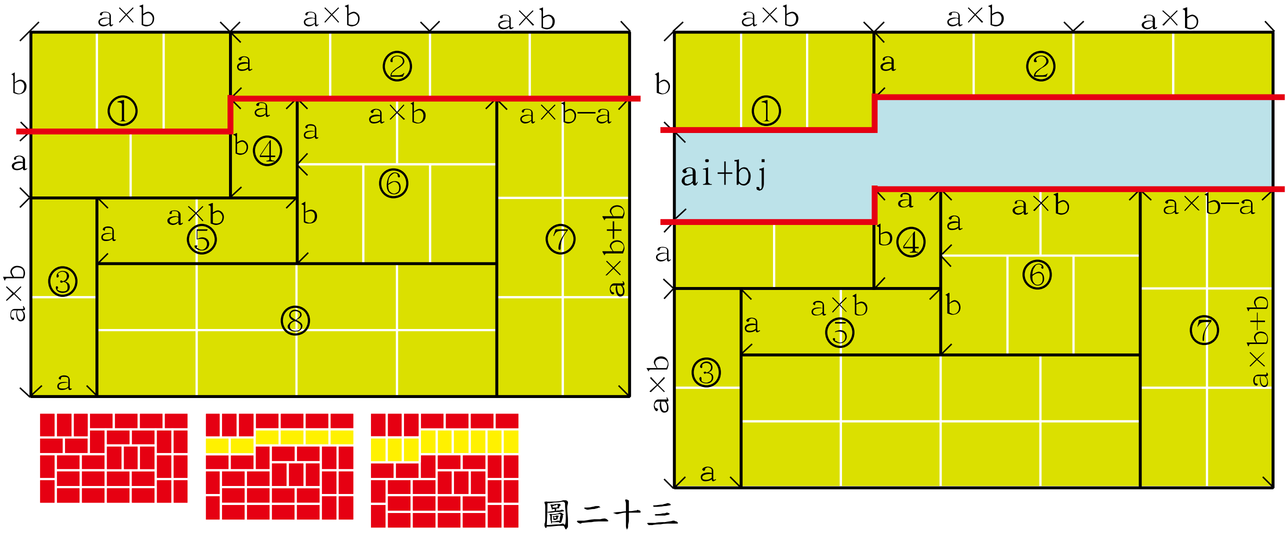
(三)擴大：我們以最小矩形 A 為基礎，往橫向及縱向擴大

1.橫向擴大：如圖二十二，將最小矩形 A 由紅線的地方分開，中間可插入 k 個(axb)的長度，因為增加的長度為 kab，所以新增加的面積可同紅線左邊的方式錯開，故可阻擋縱向新增加的分割線。

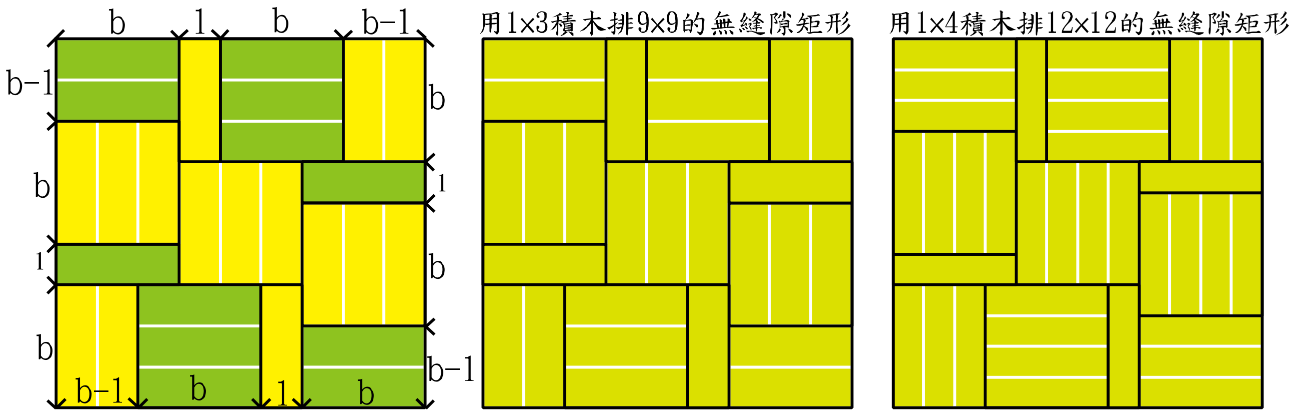


圖二十二

2.縱向擴大：如圖二十三，將最小矩形 A 由紅線的地方分開，中間可插入 ai+bj 的長度(i、j=0、1、2、3…)，因為 a、b 互質，新增加的橫向分割線會因 a 與 b 的差而錯開，但 a=1 時，因為 b 為 a 的倍數，會有新的分割線而無法阻擋，此時可利用 b^2 的小正方形旋轉 90° 及調換積木位置來解決。唯當 a=1、b=2 時，m×n=6×6 無法排出無縫隙矩形(第 6~7 頁有探討)，當 a=1、b≧3 時，m×n=3ab×3ab 可排出如圖二十四。



圖二十三



圖二十四

(四)用 a×b 的積木排出最小矩形 B，此時 m=2ab+a，n=2ab+b。

1.先排一個 ab×(a+b)於左上角①的位置。

2.排一個 a×ab 和一個 a×b 於上方②的位置填滿 n 邊。

3.排一個 a×ab 和一個 a×(ab-b)於左方③的位置填滿 m 邊。

4.排一塊 a×b 在④的位置。

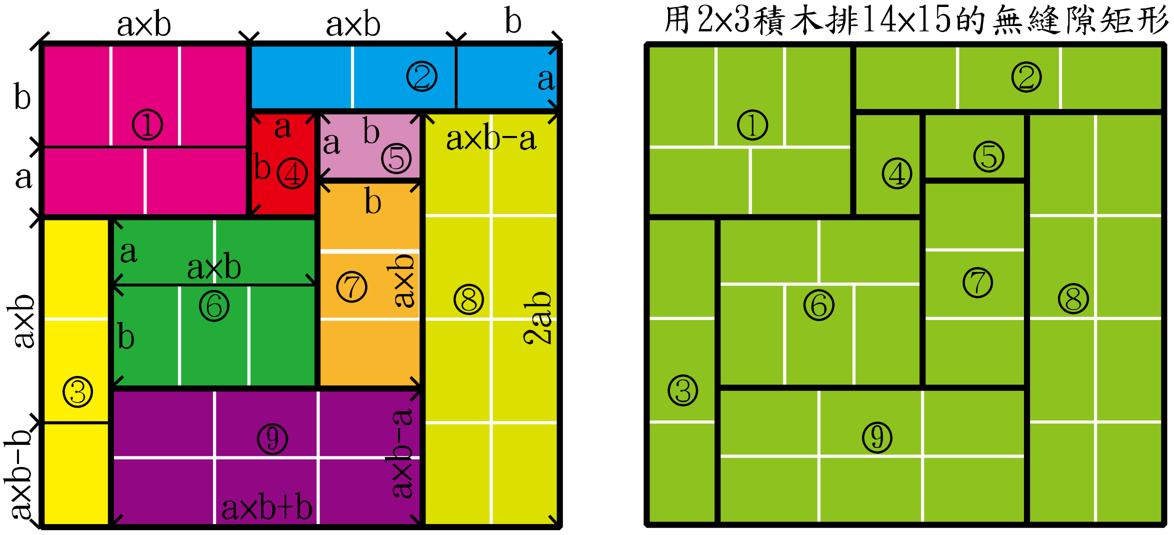
5.排一塊 a×b 在⑤的位置。

6.排一個 ab×(a+b)在⑥的位置。

7.在⑤的下方排一個 b×ab 在⑦的位置。

8.和④同方向補滿⑨的位置。

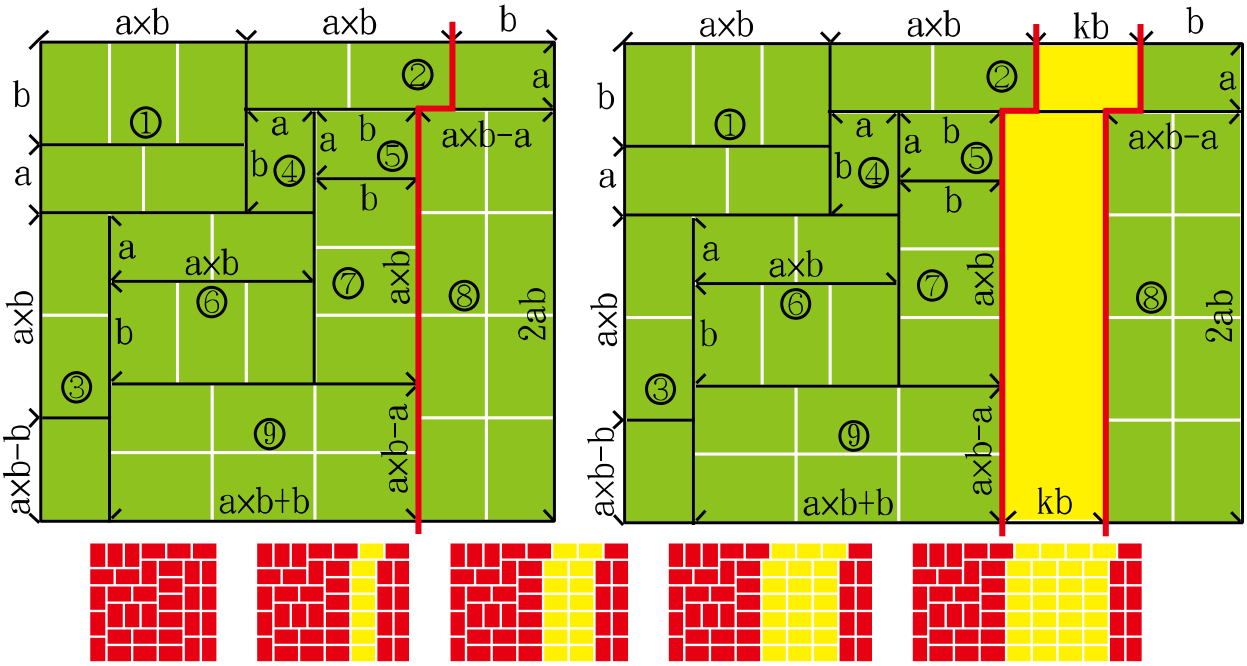
9.和⑤同方向補滿⑩的位置。



圖二十五

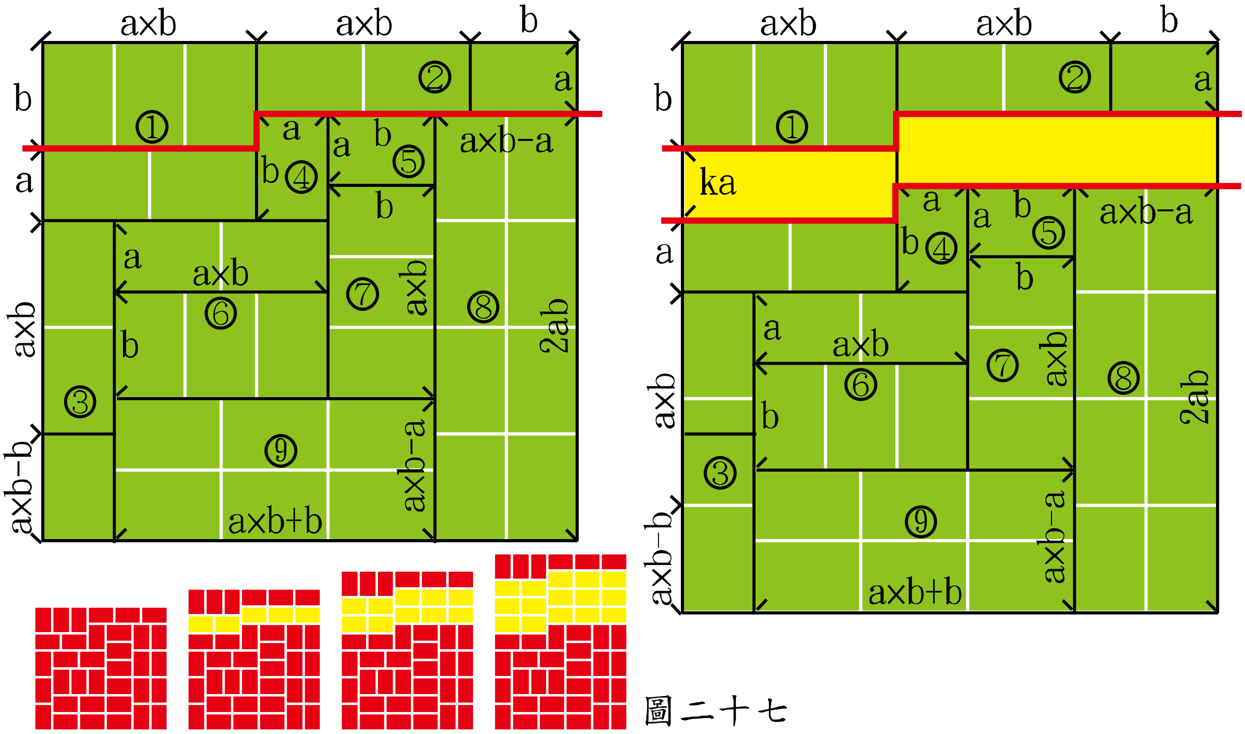
(五)擴大：我們以最小矩形 B 為基礎，往橫向及縱向擴大

1.橫向擴大：如圖二十六，將 m×n 的矩形由紅線的地方分開，中間可插入 k 個 b 的長度，新增加的縱向分割線會因②與④、⑤的差而錯開。



圖二十六

2.縱向擴大：如圖二十七，將最小矩形 B 由紅線的地方分開，中間可插入 k 個 a 的長度，新增加的橫向分割線會因為 a 與 b 的差而錯開。



圖二十七

七、設計玩具和遊戲

(一)玩具：有趣的無縫隙巧板

用積木排出無縫隙矩形就非常好玩且具挑戰性，但排完後很容易散掉，所以我們釘了外框將積木框住。我們做了 5 種尺寸，由淺入深，組成一套有趣的益智玩具(如圖)。

1.內容：

(1) 1x2 的積木，5x6 的外框。

(2) 1x3 的積木，9x9 的外框。

(3) 1x4 的積木，12x12 的外框。

(4) 2x3 的積木，11x18 的外框。

(5) 2x3 的積木，14x15 的外框。

2.玩法：

(1)初級：將積木排入板內。

(2)進階：排出無縫隙矩形。

3.難易度：由易而難的外框尺寸

①5x6②11x18③14x15④9x9 及 12x12

(二)遊戲：五連板

以擋線的想法，發展出一個類似五子棋的雙人對弈遊戲。

1.器具

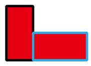
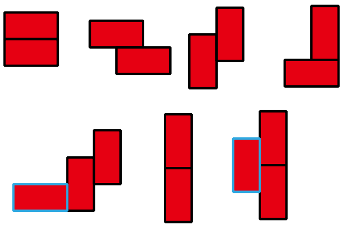
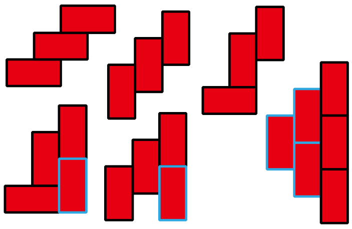
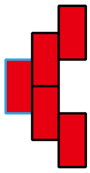
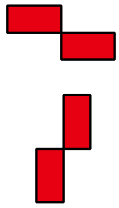
(1)兩種顏色的 1×2 積木。

(2)20×20 的棋盤。

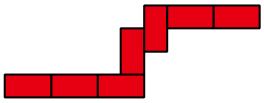
2.規則

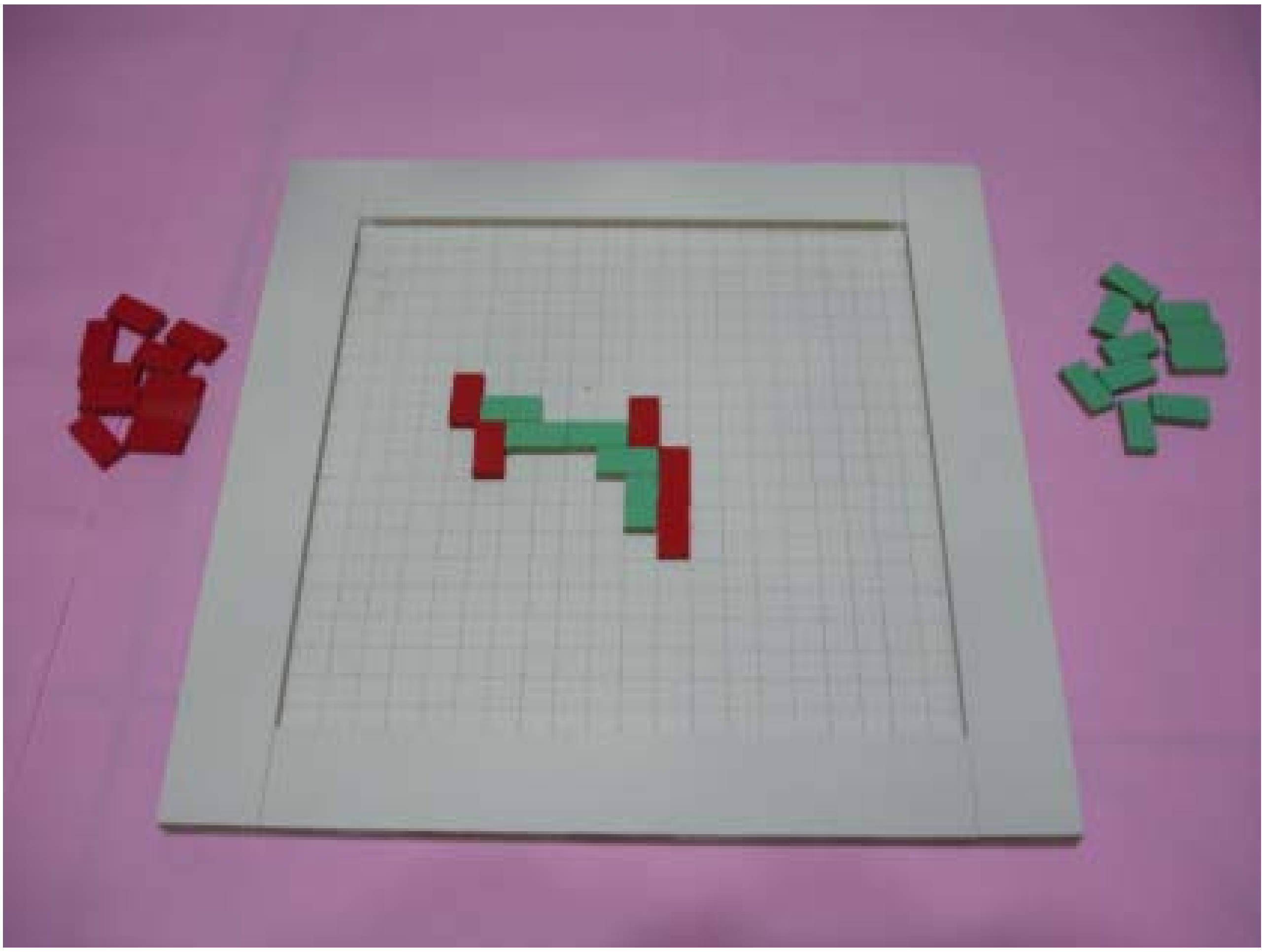
(1)甲乙雙方各選一個方向(橫或直)來計算自己的積木數，各執一種顏色的積木在棋盤上輪流放置積木，誰先在自己的方向上連成五塊積木者贏。

(2)積木的算法如下

	一塊	二塊	三塊	四塊	不相連
垂直算法					

(3)選直向者可往橫向延伸，再找機會往直向增加積木，否則如右圖，只能算 3 塊直向積木。





伍、討論

一、最小矩形 A 和最小矩形 B 的面積比較。

(分析)：最小矩形 A 的面積=$(ab+a+b)\times 3ab=3a^2b^2+3a^2b+3ab^2$…①

最小矩形 B 的面積=$(2ab+a)\times(2ab+b)=4a^2b^2+2a^2b+2ab^2+ab$…②

由②-①得 $4a^2b^2+2a^2b+2ab^2+ab-3a^2b^2-3a^2b-3ab^2$

$=a^2b^2-a^2b-ab^2+ab$

$=(ab-a)\times(ab-b)$

$=a(b-1)\times b(a-1)$

$=ab\times(a-1)\times(b-1)$

(一)因為 b＞1，當 a=1 時，②-①= $ab\times(a-1)\times(b-1)=0$，亦即最小矩形 A 的面積等於最小矩形 B 的面積。

(二)因為 b＞1，當 a＞1 時，②-①= $ab\times(a-1)\times(b-1)>0$，亦即最小矩形 A 的面積小於最小矩形 B 的面積。

二、為何用 1×2 的積木無法排出 6×6 的無縫隙矩形。

(分析)：阻擋「偶×偶」型矩形至少需要 2(m+n-2)塊積木，所以 6×6 的矩形至少需要 2×(6+6-2)=20 塊積木，才能阻擋所有分割線，但 6×6 的矩形只有 6×6÷2=18 塊積木，故無法排出無縫隙矩形。

陸、結論

一、積木為 1×2 時

1.要排出「偶×偶」型的無縫隙矩形，至少需要 2(m+n-2)塊積木。

2.要排出「奇×偶」型的無縫隙矩形，至少需要 $2(m+n-2)-\frac{n}{2}$塊積木，此時 m 為奇數，n 為偶數。

3.排出無縫隙矩形的面積均為偶數。

4.排出的最小無縫隙矩形面積為 5×6。

5.無法排出面積為 6×6 的無縫隙矩形。

二、積木為 1×b 時，b 要為 m 或 n 的因數，且 m≧2b+1，n≧3b。

三、積木為 a×b 時

1. a、b 同時為 m 或 n 的因數時，找到矩形的面積為：$(ab+t_1a+t_2b)\times(t_3ab)$，$t_3\geq 3$。

2. a、b 分別為 m 或 n 的因數時，找到矩形的面積為：$(2ab+t_4a)\times(2ab+t_5b)$。

四、找到一種可以排出無縫隙矩形的方法(在第 22~26 頁中)。

柒、參考資料

一、建中 49 屆 314 班全體同學譯　數學思考　一版二刷　台北市　九章出版社　197 頁　2000 年 4 月

二、馮躍峰　棋盤上的組合數學　上海　上海教育出版社　1~4 頁　1998 年

【評語】080408

本研究將水泥工人砌牆的方式問題轉化為如何尋找可以排出無縫隙矩形的方法，頗具創意。引入「代數」與「方程式求解」針對積木為「1x2」、「1xb」以及「axb」等三種情形，皆做了完整的討論，並提出排出無縫隙矩形的 2 個技巧。最後利用積木的不同尺寸，組成了有趣的益智玩具，值得嘉許。